

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**  
**(ВлГУ)**

Институт машиностроения и автомобильного транспорта

**Кафедра «Автотранспортная и техносферная безопасность»**

Методические указания к лекционным занятиям  
по дисциплине **«Моделирование транспортных процессов»** для студентов ВлГУ,  
обучающихся по направлению 230301 «Технология транспортных  
процессов» профиль «Организация и безопасность движения»

Составитель:

И.В. Денисов

Владимир – 2015 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1	Опыт решения транспортной проблемы	3
2	Математические модели определения корреспонденций	6
2.1	Гравитационные модели	7
2.2	Энтропийные модели	12
2.3	Моделирование самоорганизующихся потоков	15
2.4	Алгоритмы построения матрицы корреспонденций	18
3	Гидродинамические модели транспортного потока	20
3.1	Закон сохранения транспортного потока	20
3.2	Модели Гриншилдса и Гринберга	22
3.3	Модель Лайтхилла Уизема. Кинематические волны	24
3.4	Ударные волны в транспортном потоке	25
3.5	Гидродинамические модели второго порядка -1	28
3.6	Гидродинамические модели второго порядка -2	29
4	Стохастические модели	32
5	Микроскопические модели	36
5.1	Модели следования за лидером	36
5.2	Клеточные автоматы	37
6	Транспортные заторы	39
6.1	Одиночные пробки	39
6.2	Серия пробок	40
6.3	Классификация фаз потока	40
6.4	Причина затора – геометрические особенности дороги	42
6.5	Задержки транспортных средств	44
6.6	Множественные устойчивые состояния и хаос	44
6.7	Основные выводы	46
	Список литературы	48

# 1 Опыт решения транспортной проблемы

В качестве макроэкономической функции дорожного комплекса можно выделить его способность стимулировать экономический рост. Но, для использования этой способности в полной мере необходима качественная и разветвленная сеть автодорог.

Для создания такой сети в России необходим крупномасштабный государственный заказ на дорожное строительство, что требует больших вложений. Частичной альтернативой может являться инвестирование строительства дорог предпринимательским сектором. Но тогда возникает вопрос как окупить затраты конкретного инвестора?

Одним из путей решения этой проблемы может служить строительство дублирующих, наиболее загруженных, участков магистрали, проезд, по которым, в последствие, будет платным. В качестве положительного примера, где используются платные дороги, можно привести Италию, где существует единая сеть платных автомагистралей, которая управляется одним крупным концессионным обществом.

В качестве еще одного удачного примера внедрения системы платных дорог может являться строительство сети платных дорог в черте города Мельбурн. Данный метод, в свое время, достаточно ощутимо помог решить проблему городских пробок.

Существует и негативный опыт строительства платных дорог. Примером является строительство автострады М-1 в Венгрии, которую практически никто не использует из-за непомерно высоких тарифов. На сегодняшний день, платные дороги также существуют и в США, Испании, Португалии, Франции, Китае.

Другим примером, решения транспортной проблемы является платный въезд в центр города. В этом случае водитель делает выбор заплатить ему и передвигаться дальше по центральной зоне города на своей машине или оставить машину и воспользоваться общественным транспортом. Данное правило распространяется и на жителей платной зоны, только стоимость въезда в данную часть города для них составляет 10% от тарифа. Данный метод в 2003 году был введен в Лондоне и, благодаря этому способу, количество машин в центре города уменьшилось на 10-15%, при этом нагрузки на метро и другой общественный транспорт существенно не увеличились.

Данная методика борьбы с пробками в городе используется и в Риме. Здесь существует четыре зоны ограниченного движения, и по статистике интенсивность движения в этих зонах снизилась до 20%. Нагрузка же на

общественный транспорт при этом увеличилась всего на 6%.

Похожей методикой, направленной на ограничение въезда в центр города и, тем самым, на разгрузку основных центральных магистралей, является организация перехватывающих парковок. В этом случае никто не фиксирует въезд автомобилиста в центр города, и никто не требует заплатить за это. Для России эти факторы являются плюсом с психологической и юридической сторон.

Работа перехватывающих парковок организовывается следующим образом. Водитель может оставить свою машину на специальной парковке при въезде в центр города, или проехать в центр, и оставить машину на парковке там, но за существенно большую плату, и только на определенное время.

Опыт использования системы перехватывающих парковок показывает, что введение этой системы существенно помогает уменьшить загрузки на дорогах центральной части города. Число пользователей составляет 30-50% от всех автовладельцев, а в Бостоне этот показатель достигает 75%. Наибольшее количество перехватывающих парковок эксплуатируются в крупных городах США, ФРГ, Франция, Швейцария.

Существует и негативный опыт использования перехватывающих парковок. Строительство парковок такого направления в Москве и в Санкт-Петербурге. Это связано с тем, что парковки располагаются слишком близко к центру города. Поэтому, во-первых, даже в случае массового использования перехватывающих парковок пробки, до места расположения парковок, никак не уменьшаться. Во-вторых, люди, простоявшие в пробках в периферийных зонах, не видят смысла оставлять свои машины и добираться до места иным средством передвижения, когда они находятся близко к цели своего пути.

Также к причинам, по которым перехватывающие парковки не пользуются популярностью, является то, что в центре есть большое количество мест, где можно бесплатно оставить свой автомобиль на весь день.

Еще одним примером неудачной транспортной политики является пример Афин, где в 1982 году была введена система, по которой в четный день могут передвигаться по дорогам машины номера, у которых заканчиваются на четное число, а в нечетные - наоборот. В результате власти добились совершенно противоположного эффекта. Теперь в Афинах около 44% семей владеют двумя машинами, а около 17% тремя. Вторая и третья машина чаще всего старая, списанная в Западной Европе, что ухудшает экологию города.

Существует еще один метод решения транспортных проблем - единая интеллектуальная система управления движением в городе. Данная система непрерывно собирает информацию о загруженности дорог, скорости потоков, авариях и условиях для движения машин. Собранная информация обрабатывается и затем выдается в радиоэфир, онлайн на интернет-ресурсы и дорожные указатели-табло, становясь, дополнительным средством навигации для водителей, а также используется для регулирования движения. Этот метод борьбы с пробками активно используется в Сеуле.

Интеллектуальная система управления движением в городе хоть и помогает уменьшить число ДТП на дорогах, но не привела к значительному уменьшению числа пробок в городе.

Существуют и другие методы по решению транспортной проблемы: полосы с резервным движением (данный метод реализован в Вашингтоне), создание выделенных полос для общественного транспорта (используется в Париже), искусственное ограничение автомобилей (применяется в Сингапуре). Но эти методы также не привели к ожидаемым результатам. Поэтому транспортная проблема для этих городов так и осталась не решенной.

Из описанного выше опыта решения транспортной проблемы можно сделать следующие выводы:

- перед, введением любого метода по регулированию транспорта необходимо определить объемы использования дорожными сетями;
- необходимо делать прогнозы загрузок всех элементов транспортной сети включая планируемыми изменениям в сети и без них.

В транспортной теории уже существуют методологии определения таких параметров. Для применения этих методологий на практике необходимо знать полную матрицу корреспонденций по условным зонам города. Доминирующую роль в нагрузке на улично-дорожную сеть в городах составляют пассажирские перевозки. Поэтому в первую очередь необходимо строить пассажирскую матрицу корреспонденций.

## 2 Математические модели определения корреспонденций

Количественной характеристикой передвигающихся по городу индивидуумов является матрица корреспонденций, элементы которой определяют объем потока между каждой парой "точек". Под "точками" будем понимать условные зоны, которые были получены путём деления рассматриваемой области (например, города) некоторым подходящим образом.

Можно выделить четыре класса расчета корреспонденций [1]:

**Класс 1** К этому классу относятся нормативные, чаще всего линейные модели, с критериальной функцией технико-экономического содержания, которые отвечают на вопрос "Как должно быть?". К классу 1 могут быть отнесены задачи планирования железнодорожных грузовых перевозок, иногда задачи вне- и внутригородских перевозок.

**Класс 2** Модели данного класса статистические - от простейших однофакторных до динамических многофакторных. Особое место среди них занимают гравитационные модели. Модели в данном классе, а также в классах 3 и 4 отвечают на вопрос "Как есть?".

Задачи класса 2 возникают при планировании пассажирских перевозок на железнодорожном транспорте (в пригородных и дальних сообщениях), воздушном и морском транспорте, автомобильном внегородском (в регионе), а также при планировании грузовых перевозок в тех случаях, когда прикрепление поставщиков к потребителю не может быть заданно на перспективу. К этому же классу можно отнести задачи прогнозирования объёмов перевозок на заданных направлениях, которые возникают при перспективном планировании железнодорожных и морских грузовых перевозок.

**Класс 3** Для решения задач класса 3 также используются статистические модели и прежде всего гравитационные, но модифицированные, усложнённые по сравнению с моделями класса 2. Усложнение гравитационных моделей выражается в виде дополнительных условий, которые обеспечивают балансировку матрицы корреспонденций.

Задачи этого класса включают задачи определения трудовых корреспонденций в городских транспортных системах, когда рабочие места, их ёмкость и размещение потенциальных кадров на территории города выявлены и установлены априори.

**Класс 4** Модели данного класса энтропийные. Они представляются в форме нелинейной оптимизационной задачи математического программирования, причём их целевая функция носит "термодинамический" характер и включает вероятностные характеристики коллективного поведения. Определяющую роль играют не детерминированные факторы поведения индивидуумов, а закономерности коллективного поведения.

К задачам данного класса относится задача формирования пассажирских корреспонденций в городских транспортных системах по всем видам поездов: трудовым, культурно - бытовым, рекреационным.

В задачах класса 1 процесс формирования корреспонденций может быть центрально управляемый, то есть "центр" планирует распределение (направления и объёмы транспортировки), которое было бы наиболее выгодно, например, с точки зрения минимизации затрат. Затем "центр" для каждой из уже известных корреспонденций принимает решение с помощью критерия технико-экономического содержания о маршруте следования.

В задачах класса 4 невозможно жесткое управление формированием корреспонденций и установка обязательных маршрутов следования из одного "центра". Это происходит потому, что пассажирские корреспонденции формируются в городе под влиянием множества случайных факторов. Каждый пассажир выбирает сам вид транспорта и маршрутов следования, которые могут внезапно измениться. Поэтому возможно лишь косвенное влияние "центра" на организацию потоков в сети, например на выбор маршрута следования путем изменения технико-экономических параметров некоторых элементов сети или выполнения определенных мер по организации движения и так далее. Но, в данной работе будем предполагать, что топология сети и технико-экономические параметры элементов сети неизменны.

Дипломная работа посвящена построению трудовой матрицы корреспонденции для транспортной сети г.Владивостока. Поэтому остановимся на более подробном изучении гравитационных моделей, модифицированных гравитационных моделей и энтропийных моделей.

## **2.1 Гравитационные модели**

Простейшие гравитационные модели начали использовать для решения задач планирования городских транспортных систем ещё с 30-х годов 20 века. В настоящее время для расчета корреспонденций вместо

гравитационных моделей используются энтропийные, а гравитационная модель может быть использована только для задач, в которых потребительское поле имеет ярко выраженную дискретную структуру.

Гравитационная модель разработана по аналогии с ньютоновским законом, который связывает силу притяжения  $F_{ij}$  между двумя массами  $m_i$  и  $m_j$ , расположенными друг от друга на расстоянии  $d_{ij}$

$$F_{ij} = \zeta \frac{m_i m_j}{d_{ij}^2},$$

где  $\zeta$  – некоторая константа.

Аналогично закону Ньютона, транспортная гравитационная модель связывает интенсивность потока  $T_{ij}$  между полным числом отправок из  $i$  зоны  $Q_i$  и прибытий в  $j$  зону  $D_j$  и затратами на передвижение между зонами  $i$  и  $j$   $c_{ij}$ .

$$T_{ij} = k \frac{Q_i D_j}{c_{ij}^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (1)$$

где  $N$  – общее количество зон отправления,  $M$  – общее количество зон прибытия,  $k$  – некоторая константа, а затраты на передвижение выступают в качестве "расстояния". Величина  $c_{ij}$  – может быть рассмотрена как расстояние между двумя зонами  $i$  и  $j$ , или как стоимость прохождения расстояния между данными зонами.

Согласно уравнению (1) величина  $T_{ij}$  пропорциональна  $Q_i$  и  $D_j$  и обратно пропорциональна квадрату "расстояния" между ними  $c_{ij}$ . Но у этого уравнения имеется один очень большой недостаток: если увеличить задаваемые значения  $Q_i$  и  $D_j$  в два раза, то число поездов в соответствии с уравнением увеличится в четыре раза, хотя на самом деле оно только удвоится.

Для устранения этого очевидного недостатка необходимо дописать следующие ограничения, которые связаны с балансом въезда и выезда:

$$\sum_i^N T_{ij} = D_j, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$\sum_j^M T_{ij} = Q_i, \quad \forall j = 1, \dots, M, \quad (3)$$

$$T_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall j = 1, \dots, M. \quad (4)$$

Уравнение (2) означает, что суммарный поток (сумма числа поездок), который выехал из всех зон  $i = 1, \dots, N$  в зону  $j$  должны быть равен потоку, который прибыл в зону  $j$ . Уравнение (3) означает, что суммарный поток, который выехал обратно из всех зон  $j = 1, \dots, M$  в зону  $i$  должен совпадать с числом прибывших в зону  $i$ . Суммарное количество выехавших должно быть равно суммарному количеству прибывших, то есть должно обязательно выполняться следующее условие  $\sum_i^N Q_i = \sum_j^M D_j$ . Потоки при этом не должны быть отрицательными.

Гравитационная модель (1) с ограничениями (2) - (4) является первой модифицированной гравитационной моделью.

При моделировании, например, трудовых поездок в городе, пассажиропоток  $T_{ij}$  между известными вектором отправления  $Q_i$  и прибытия  $D_j$  можно рассчитать по следующей формуле:

$$T_{ij} = A_i B_j Q_i D_j f(c_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (5)$$

где

$$A_i = \left[ \sum_j^M B_j D_j f(c_{ij}) \right]^{(-1)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$B_j = \left[ \sum_i^N A_i Q_i f(c_{ij}) \right]^{(-1)}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (7)$$

$$f(c_{ij}) = -\alpha c_{ij} \exp^{\alpha c_{ij}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M$$

где  $f(c_{ij})$  – функция, которая зависит от стоимости поездки. В качестве  $f(c_{ij})$  можно использовать среднее время передвижения  $t_{ij}$ , которое считается заданным при решении задачи. Среднее время передвижения является более или менее стабильным показателем транспортной системы в каждом городе и может быть спрогнозировано.

Коэффициенты  $A_i$  и  $B_j$  определяются из условий (2) и (3) соответственно. Уравнение (6) можно получить, проведя следующие преобразования:

$$A_i Q_i \sum_j^M B_j D_j f(c_{ij}) = Q_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$A_i \sum_j^M B_j D_j f(c_{ij}) = 1, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$A_i = \left[ \sum_j^M B_j D_j f(c_{ij}) \right]^{(-1)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Аналогично уравнению (6), находится уравнение (7).

Если к ограничениям (6) и (7) добавить ограничение на  $T_{ij}$

$$\sum_i^N \sum_j^M T_{ij} c_{ij} = C, \quad (8)$$

где  $C$  – полные затраты на передвижение, то наиболее вероятным распределением будет матрица  $\{T_{ij}\}$ , максимизирующая энтропию

$$\ln W(\{T_{ij}\}) = \ln T! - \sum_i \sum_j \ln T_{ij}!,$$

где  $T$  – полное число поездок при ограничениях (6), (7) и (8),  $W(\{T_{ij}\})$  – полное число состояний системы, соответствующих распределению  $\{T_{ij}\}$ . В этом случае функция, зависящая от стоимости поездки, равна

$$f(c_{ij}) = \exp(-\beta c_{ij}). \quad (9)$$

Величина  $C$  в (8) обычно не известна, и поэтому это уравнение на практике не решается относительно  $\beta$ . Параметр  $\beta$  определяется методами калибровки. Чем больше параметр  $\beta$ , тем меньше средняя длина поездки. Этот факт связан с величиной  $C$  в уравнении (8). Если  $C$  увеличивается, то увеличиваются и затраты на передвижение, и средняя длина поездки, а  $\beta$  при этом уменьшается.

Тогда  $A_i = \left[ \sum_j^M B_j D_j \exp(-\beta c_{ij}) \right]^{(-1)}$  можно понимать как некий конкурирующий член, который сокращает большинство поездок вследствие роста привлекательности одной зоны. Также его можно использовать как меру доступности. Аналогичную роль играют величины  $B_j = \left[ \sum_i^N A_i Q_i \exp(-\beta c_{ij}) \right]^{(-1)}$ , которые связаны с изменениями  $Q_i$ .

Нахождение матрицы корреспонденций при помощи описанной выше модели даст хорошие результаты только в том случае, если поездки будут классифицированы по типам поездки и по типу передвижения.

Введем несколько типов пассажиров и несколько типов коммуникаций. Выделим типы пассажиров по доступности различных наборов коммуникаций. Например, владельцы автомобилей имеют доступ как к личному автотранспорту, так и к общественному, а остальные люди могут передвигаться, используя только общественный транспорт. Если деление по признаку наличия автомобиля не проводится, то это приведет к моделям, в

которых пассажиры, не имеющие автомобилей, совершают автомобильные поездки, либо заставит проводить отдельные распределения поездок для различных групп пассажиров, а следовательно, и прогнозировать привлекательность поездок для каждой группы в отдельности. Таким образом, разделение всех пассажиров на тех, кто владеет личным транспортном и тех, кто нет, является минимально необходимым. Полезно также разделять людей по различным уровням дохода или по различным социальным группам.

Рассмотрим множество типов пользователей транспортной сети  $R$ . На этом множестве выделим множество типов коммуникаций  $M(r)$ , которые доступны пассажирам  $r \in R$  типа. Один тип коммуникаций, который доступен пассажирам  $r$  типа обозначим за  $k \in M(r)$  обозначает множество всех коммуникаций, которые являются, доступны между зонами  $i$  и  $j$  для пассажиров  $r$  типа обозначим через  $M_{ij}(r)$ . Будем полагать, что между всеми существующими зонами доступны все типы коммуникаций.

Определим следующие величины:

$T_{ij}^{kr}$  - интенсивность потока между  $i$  и  $j$ , совершаемого пассажирами  $r$  типа на транспортном средстве  $k$ ;

$Q_i^r$  - число отправок из зоны  $i$ , совершаемых пассажирами  $r$  типа;

$c_{ij}^k$  - цена поездки из зоны  $i$  в зону  $j$  на  $k$  виде транспорта.

Остальные переменные определяются аналогично главе 1.2.

Тогда можно записать [2]

$$T_{ij}^{kr} = A_i^r B_j Q_i^r \exp(-\beta^r c_{ij}^k), \quad (10)$$

где

$$A_i^r = \left[ \sum_j^M \sum_k^{M(r)} B_j D_j \exp(-\beta^r c_{ij}^k) \right]^{(-1)}$$

и

$$B_j = \left[ \sum_i^N \sum_r^R A_i^r Q_i^r \exp(-\beta^r c_{ij}^k) \right]^{(-1)}.$$

Уравнение (10) описывает несколько гравитационных моделей для каждой  $k - r$  группы. Связь между ними осуществляется через  $B_j$ , так как это выражение включает в себя все  $k$  и  $r$ .

Если для описания населения достаточно одного типа пассажира, то можно провести агрегирование по  $r$ . Если провести агрегирование по  $k$ , то получим ситуацию с одним типом коммуникаций. Если провести агрегирование по  $k$  и по  $r$ , то получим исходную гравитационную модель (5) при условии (9).

Предположим, что вместо стоимости проезда, представленной в виде  $c_{ij}^k$ , заданы величины  $C_{ij}^k$ , которые описывают стоимость проезда из зоны  $i$  в зону  $j$  для  $r$  типа пассажира. Величина  $C_{ij}^r$  составляется из  $c_{ij}^k$ , доступного пассажирам  $r$  типа. Тогда получаем [2]

$$\sum_k^{M(r)} T_{ij}^{kr} = A_i^r B_j Q_i^r \exp(-\beta^r C_{ij}^r), \quad (11)$$

где

$$A_i^r = \left[ \sum_j^M \sum_k^{M(r)} B_j D_j \exp(-\beta^r C_{ij}^r) \right]^{(-1)}$$

и

$$B_j = \left[ \sum_i^N \sum_r^R A_i^r Q_i^r \exp(-\beta^r C_{ij}^r) \right]^{(-1)}.$$

Описанные выше гравитационные модели и их модификации при формировании транспортных пар  $(i, j)$  не учитывают индивидуальные предпочтения. Поэтому энтропийные модели, в которых вместо средних величин характеристик передвижения вводятся условия об априорном предпочтении формирования транспортных пар  $(i, j)$ , формируют более близкие, по вероятности, распределения корреспонденций к реальной транспортной системе, которая сложится при учете предпочтений.

## 2.2 Энтропийные модели

Энтропийные модели базируются на принципе максимума взвешенной энтропии рассматриваемой дескриптивной системы. Суть этого принципа заключается в том, что реальному распределению потока на сети, которые генерируются в результате самоорганизации, ставится в соответствие распределение потоков (которые удовлетворяют транспортным ограничениям), которое может быть получено в результате максимизации некоторой энтропийной функции, которая параметрически зависит от состояния системы, априори желательного для всех ее элементов (взвешенная энтропия).

Рассмотрим физическую систему, как макросистему. В ней можно выделить макроуровень и микроуровень. Макроуровень характеризуется такими параметрами, как энергия, температура и так далее. Значения этих параметров и общее состояние системы определяются взаимодействием огромного количества частиц микроуровня, где взаимодействие между всеми частицами носит случайный характер. По второму закону термодинамики замкнутая физическая система стремится к достижению

устойчивого равновесного состояния, которое будет характеризоваться максимумом энтропии этой системы.

Проведем аналогию со статистической физикой. В качестве некоторой макросистемы рассмотрим пассажирские перевозки. В этом случае, макроуровень будет характеризоваться суммарными транспортными расходами, капитальными вложениями и так далее, а частицами микроуровня будут являться пользователи сети. Взаимодействие частиц на микроуровне носит случайный характер, так как в основе их взаимодействия лежат такие факторы, как воля и желание, причем количество индивидуумов в системе велико. Получаем, что при моделировании пассажирских, особенно городских, перевозок можно использовать методы статистической физики, связанные с измерением энтропийной системы.

Наибольшая важность этой модели заключается в том, что в ней формализуется гипотезы о равновесном и независимом поведении элементов системы при формировании ее состояний. При наличии такой гипотезы, наиболее вероятным является то состояние системы, при котором ее неопределенность, измеряемая величиной энтропии, максимальна.

Максимизация взвешенной энтропии означает, что в системе ищется не просто равновесное состояние, а состояние, которое близко по вероятности к тому, которое сложилось бы в реальной транспортной системе при учете индивидуальных предпочтений. Априорные индивидуальные предпочтения в энтропийных моделях могут быть заданы, например, в виде функции распределения вероятности  $\alpha_{ij}$ , где под  $\alpha_{ij}$  понимается вероятность того, что индивидуум из зоны отправления  $i$  поедет в зону прибытия  $j$ .

Примером первых моделей этого направления может служить модель [3]:

$$\min_{T_{ij}} \left( \sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} + \beta \sum_i \sum_j \ln T_{ij} \right) \quad (12)$$

$$\sum_j T_{ij} = Q_i; \quad \sum_i T_{ij} = D_j; \quad (13)$$

$$T_{ij} \geq 0. \quad (14)$$

Здесь за  $T_{ij}$  обозначена корреспонденция из зоны  $i$  в зону  $j$ . Под  $\beta$  понимается средневзвешенная стоимость проезда. Через  $c_{ij}$  обозначена стоимость проезда единицы потока из сегмента  $i$  в сегмент  $j$ . Количество поездок из зоны  $i$  будем обозначать через  $Q_i$ . Количество поездок в зону  $j$  через  $D_j$ .

Формулу (12) можно преобразовать к следующему виду:

$$\max_{T_{ij}} \sum_i^N \sum_j^M T_{ij} \ln \frac{T_{ij}^0}{T_{ij}} \quad (15)$$

$$T_{ij}^0 = \exp^{-\frac{c_{ij}}{\beta}},$$

где  $T_{ij}^0$  обозначает распределение корреспонденции, которое образуется в системе при отсутствии ограничений.

Другой пример энтропийной модели имеет следующий вид [1]

$$\max_{T_{ij}} \sum_i^N \sum_j^M T_{ij} \ln \frac{\alpha_{ij}}{T_{ij}} \quad (16)$$

$$\sum_j^M T_{ij} = Q_i; \quad (17)$$

$$\sum_i^N T_{ij} = D_j; \quad (18)$$

$$T_{ij} \geq 0. \quad (19)$$

Величины  $\alpha_{ij}$  определяются исходя из функций распределения поездок, например по времени, или удобству сообщений.

Модель (16) – (19) можно расширить следующим способом. Предположим, что каждый человек может воспользоваться одним из двух видов транспорта (например, железнодорожным или автобусом). Тогда модель (16) будет записана в следующем виде [3]:

$$\max_{T_{ij}^k} \sum_i^N \sum_j^M \sum_k^2 T_{ij}^k \ln \frac{\alpha_{ij}^k}{T_{ij}^k} \quad (20)$$

$$\sum_i^N \sum_j^M T_{ij}^k = Y^k, \quad k = 1, 2;$$

$$\sum_j^M \sum_k^2 T_{ij}^k = Q_i, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\sum_i^N \sum_k^2 T_{ij}^k = D_j, \quad j = 1, \dots, M.$$

Здесь  $\alpha_{ij}^k$  – вероятность того, что пользователь сети поедет из зоны  $i$  в зону  $j$  и выберет  $k$  вид транспорта. Под  $Y^k$  понимается суммарное количество

поездок по сети на  $k$  виде транспорта. Величины  $\alpha_{ij}^k$  определяются как значения некоторых функций от времени поездки из зоны  $i$  в зону  $j$  на  $k$  виде транспорта, которые являются специально построенными по результатам статистических обследований.

Для определения потоков по всем звеньям транспортной сети города используются модели самоорганизующихся потоков. В этих моделях потоки по сети могут находиться одновременно с матрицей корреспонденций. Но, на практике, чаще всего используют модели, в которых потоки определяются по построенной заранее матрице корреспонденций. В моделях самоорганизующихся потоков, как и в моделях построения матриц корреспонденций, учитывается, что индивидуумы сами выбирают маршрут следования.

### 2.3 Моделирование самоорганизующихся потоков

Задачи самоорганизации потоков могут возникать в транспортных сетях, потребительское поле для которых имеет различную структуру, то есть является сильно или слабо дискретным. Примером модели данного класса является следующая модель [3]:

$$\begin{aligned} \min_{T_{ij}x_{ij}} & \left[ \sum_i \sum_j (\sum_p \sum_u c_u \gamma_{up}^{ij} x_{up}^{ij}) + v T_{ij} \ln T_{ij} \right] & (21) \\ & \sum_i \sum_j \sum_p \gamma_{up}^{ij} x_p^{ij} \leq b_u; \\ & \sum_p x_p^{ij} = y_{ij}, \quad \forall i, j; \\ & \sum_i T_{ij} = Q_i; \\ & \sum_j T_{ij} = D_j; \\ & x_p^{ij} \geq 0, T_{ij} \geq 0, \end{aligned}$$

где  $x_{pu}^{ij}$  – часть потока на дуге  $u$  маршрута  $p$ , который порождается корреспонденцией пользователей сети  $T_{ij}$ , которые едут из зоны  $i$  в зону  $j$ ,  $\gamma_{up}^{ij} = 1$ , если дуга  $u$  входит в  $p$  маршрут, 0 - в противном случае. Под  $b_u$  понимается ограничение на пропускную способность дуги  $u$ .

Модель (21) является примером моделей, в которых одновременно с поиском потоков на звеньях транспортной сети, определяются корреспонденции между условными зонами. Целевой функционал данной модели носит смешанный характер: он содержит слагаемые энтропийного

и технико-экономического типа. Однако, в силу своей сложности, эта модель не получила широкого распространения в практике пассажирского прогнозирования.

Более известными являются модели определения пассажиропотоков, в которых матрица корреспонденций задается. Большинство моделей такого типа основываются на построении кратчайшего пути, для нахождения которого осуществляется расценка дуг в соответствии с принятыми в модели гипотезами о приоритетах и предпочтениях маршрутов.

По способу оценки затрат на дугах можно выделить два направления:

1. Модели, в которых корреспонденции распределяются по кратчайшим путям (обычно в смысле времени передвижения).

В моделях этого типа гипотеза о выборе кратчайшего пути рассматривается изолированно от других поведенческих гипотез, то есть считается, что каждый человек выбирает маршрут независимо от того, как организуются на сети потоки. При этом характеристики дуг сети (таких как "длина"), которые необходимы для нахождения кратчайших путей, рассчитываются априори из ранее определенной статистической информации о времени поездки, о складывающихся ранее элементах загрузок сети и так далее.

2. Модели, в которых затраты на дугах существенно зависят от их загрузок.

В моделях данного типа учитывается, что каждый индивидуум выбирает маршрут в зависимости от ситуации, которая складывается на всех дугах сети. Поэтому кратчайший путь может меняться в процессе наложения его на сеть, что связано с изменениями, которые складываются на элементах транспортной сети. Такие модели самоорганизации потоков базируются на втором принципе Вардропы [3]: самоорганизующиеся потоки стремятся так распределиться по сети, чтобы достичь положения, в котором ни один пользователь сети не может уменьшить время своей поездки в результате изменения маршрута. Это положение называется равновесным, а соответствующие ему потоки - равновесными, поэтому часто модели данного типа называют моделями отыскания равновесного потокораспределения в сети.

Величина потоков на элементах сети определяются в результате решения оптимизационной задачи с нелинейным функционалом, параметры которой подбираются специальным образом на основе

анализа распределений времени, дальности поездок и другой статистической информации.

Примером моделей второго типа являются модели скалярной оптимизации со специальной критериальной функцией и линейными ограничениями транспортного типа. В данных моделях равновесные потоки могут быть найдены с достаточной точностью. Примером модели скалярной оптимизации со специальной критериальной функцией и линейными ограничениями может являться следующая модель [3]:

$$\min_{x_{ij}} \sum_i \sum_j \int_0^{x_{ij}} S_{ij}(x) dx \quad (22)$$

$$\sum_k T_{kpq} = D_{pq}, \quad \forall (p, q); \quad (23)$$

$$x_{ij} = \sum_p \sum_q \sum_k \delta_{ij,k,pq} T_{k,p,q}, \quad \forall i, j; \quad (24)$$

$$\delta_{ij,k,pq} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (i, j) \in \text{маршруту } k \text{ для корреспонденции из } p \text{ в } q, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$T_{k,p,q} \geq 0,$$

Под  $x_{ij}$  здесь будем понимать искомый поток по дуге, которая соединяет вершину  $i$  и вершину  $j$ ; под  $T_{kpq}$  – корреспонденции из условной зоны  $p$  в условную зону  $q$  по маршруту  $k$ ;  $D_{pq}$  – корреспонденция из условной зоны  $p$  в условную зону  $q$ ;  $S_{ij}(x)$  – функция дифференциальных затрат на дуге  $(i, j)$ .

Функцию дифференциальных затрат  $S_{ij}$  можно рассчитать по следующей формуле:

$$S_{ij}(x_{ij}) = d_{ij} \left\{ \delta + \alpha \left( \frac{x_{ij}}{n_{ij}} - \gamma \right) + \left( \alpha^2 \left( \frac{x_{ij}}{n_{ij}} - \gamma \right)^2 + \beta \right)^{1/2} \right\},$$

где под  $d_{ij}$  понимается длина дуги  $(i, j)$ ; под  $n_{ij}$  – число полос на автомобильной дороге соединяющей вершину  $i$  и вершину  $j$ ;  $x_{ij}$  – искомый поток по дуге  $(i, j)$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – параметры функции данной дуги, которые определяются по данным статистических исследований.

Основная трудность при отыскании самоорганизующихся потоков по моделям, в которых затраты на дугах существенно зависят от их загрузок, заключается в построении хорошей критериальной функции дифференциальных затрат  $S_{ij}(x_{ij})$ .

Для расчета модели самоорганизующихся потоков используется метод пошагового распределения [1].

## 2.4 Алгоритмы построения матрицы корреспонденций

Для построения матрицы корреспонденций, с помощью гравитационной моделью (5) или энтропийной (15), с ограничениями (13)-(14), были разработаны специальные алгоритмы. Рассмотрим более подробно каждый из алгоритмов.

**Алгоритм построения матрицы корреспонденций гравитационным методом [5]:**

**Шаг 1** Полагаем  $n = 1$  и строим матрицу распределения корреспонденций по следующей формуле  $T_{ij}^1 = Q_i D_j f(c_{ij}) \left[ \sum_j D_j f(c_{ij}) \right]^{-1}$ .

**Шаг 2** Полагаем  $S_j^n = \sum_j T_{ij}^n$ .

**Шаг 3** Если  $\sum_i T_{ij}^n = D_j$ , то алгоритм прекращает свою работу. Матрица  $T^n$  является искомой матрицей корреспонденций на транспортной сети. В противном случае, полагаем  $n = n + 1$  и переходим к шагу 4.

**Шаг 4** Если  $S_j^n > D_j$ , то  $T_{ij}^n = T_{ij}^{n-1} D_j (S_j)^{-1}$ . Если  $S_j^n \leq D_j$ , то  $T_{ij}^n = T_{ij}^{n-1}$ .

**Шаг 5** Находим  $Q_i^{n-1} = Q_i - \sum_j T_{ij}^n$ .

**Шаг 6** Находим  $R_j^{n-1} = D_j - \sum_i T_{ij}^n$  и полагаем  $n = n + 1$ .

**Шаг 7** Пересчитываем матрицу корреспонденций по следующей формуле  $T_{ij}^n = T_{ij}^{n-1} + Q_i^{n-2} D_j^{n-2} f(c_{ij}) \left[ \sum_j R_j^{n-2} f(c_{ij}) \right]^{-1}$  и переходим к шагу 2.

В результате работы описанного алгоритма получаем матрицу распределения корреспонденций на транспортной сети  $T_{ij}^n$ , которая будет являться решением гравитационной модели (5).

Функция  $f(c_{ij})$  является функцией, которая зависит от стоимости проезда или от среднего времени передвижения. Далее в наших расчетах будем считать, что  $f(c_{ij})$  - функция, зависящая от времени передвижения, и вычислять по формуле  $f(c_{ij}) = \exp^{-\beta V_{ij}}$ , где  $\beta$  - коэффициент калибровки, который определяет чувствительность "корреспонденций" к фактору дальности;  $V_{ij}$  - время, которое затрачивается на передвижение из условной зоны  $i$  в условную зону  $j$ . Типичным значением для трудовых поездок является  $\beta = 0.065$  [7]. Поэтому в дальнейшем будем считать, что коэффициент калибровки задан и равен  $\beta = 0.065$ .

Алгоритм построения матрицы корреспонденций энтропийным методом основан на методе балансировки, где на каждой итерации этого алгоритма

выполняется баланс попеременно относительно строк или столбцов, а через некоторое число итераций эта процедура приводит к полностью сбалансированной матрице корреспонденций.

Если в качестве начального распределения брать некоторое начальное распределение  $T_{ij}^0$ , то предельная матрица доставляет максимум следующей функции [6]:

$$\sum_i \sum_j T_{ij} \ln \frac{T_{ij}^0}{T_{ij}} = \sum_i \sum_j T_{ij} \ln T_{ij}^0 - \sum_i \sum_j T_{ij} \ln T_{ij}.$$

**Алгоритм построения матрицы корреспонденций энтропийным методом [6]:**

**Шаг 1** В качестве начального приближения выбираем матрицу временных затрат,  $T^0 = \exp^{-V}$ , и полагаем  $s = 0$ .

**Шаг 2** Умножая столбцы матрицы  $T^s$  на коэффициент, добиваемся выполнения  $\sum_j T_{ij}^s = Q_i, \forall i = 1, \dots, M$ .

**Шаг 3** Обозначаем полученную матрицу за  $T^{s+1}$  и полагаем  $s = s + 1$ .

**Шаг 4** Если условие  $\sum_i T_{ij}^s = D_j, \forall j = 1, \dots, N$  выполняется, то алгоритм прекращает свою работу. Иначе, переходим к шагу 5.

**Шаг 5** Умножая строки матрицы  $T^s$  на коэффициент, добиваемся выполнения условия  $\sum_i T_{ij}^s = D_j, \forall j = 1, \dots, N$ .

**Шаг 6** Обозначаем полученную матрицу за  $T^{s+1}$ , полагаем  $s = s + 1$  и переходим к шагу 2.

Полученная, в результате работы алгоритма, матрица  $T^s$  будет искомой матрицей корреспонденций, а индекс  $s$  будет показывать число итераций, за которое было найдено решение.

### 3 Гидродинамические модели транспортного потока

Транспортный поток можно рассматривать как поток одномерной сжимаемой жидкости, допуская, что поток *сохраняется* и существует взаимнооднозначная *зависимость* между скоростью и плотностью транспортного потока.

Первое допущение выражается уравнением неразрывности. Второе – функциональной зависимостью между скоростью и плотностью для учета уменьшения скорости движения автомобилей с ростом плотности потока. Это интуитивно верное допущение теоретически может привести к отрицательной величине плотности или скорости. Очевидно, одному значению плотности может соответствовать несколько значений скорости. Поэтому для второго допущения *средняя скорость потока в каждый момент времени должна соответствовать равновесному значению при данной плотности автомобилей на дороге*. Равновесная ситуация – чисто теоретическое допущение и может наблюдаться только на участках дорог без пересечений. Поэтому часть исследователей отказались от непрерывных моделей, часть рассматривает их как слишком грубые.

Среди гидродинамических моделей различают модели с учетом и без учета эффекта инерции. Последние могут быть получены из уравнения неразрывности, если скорость рассматривать как функцию плотности. Модели, учитывающие инерцию, представляются уравнениями Навье-Стокса со специфическим членом, описывающим стремление водителей ехать с комфортной скоростью.

#### 3.1 Закон сохранения транспортного потока

Рассмотрим поток транспорта на однополосной дороге, т.е. при движении без обгонов. *Плотность* автомобилей (количество автомобилей на единицу длины дороги)  $\rho(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  в момент времени  $t \geq 0$ . Число автомобилей в интервале  $(x_1, x_2)$  в момент

времени  $t$  равно

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx. \quad (1)$$

Пусть  $v(x, t)$  – скорость автомобилей в точке  $x$  в момент  $t$ . Число проходящих через  $x$  (единицу длины) автомобилей в момент  $t$ , есть  $\rho(x, t)v(x, t)$ . Найдем уравнение изменения плотности. Число автомобилей в интервале  $(x_1, x_2)$  за время  $t$  изменяется в соответствии с числом въезжающих и выезжающих машин:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \rho(x_1, t)v(x_1, t) + \rho(x_2, t)v(x_2, t). \quad (2)$$

Интегрируя по времени и полагая, что  $\rho$  и  $v$  – непрерывные функции, получим

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \rho(x_1, t)v(x_1, t) + \rho(x_2, t)v(x_2, t) \right) dx dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (\rho(x, t)v(x, t))}{\partial x} dx dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t_1, t_2 > 0$  произвольны,

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (4)$$

Дополним это уравнение начальными условиями

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Найдем уравнение для скорости  $v$ . Положим, что  $v$  зависит только от плотности  $\rho$ . Если дорога пуста ( $\rho = 0$ ), автомобили едут с максимальной скоростью  $v = v_{max}$ . При наполнении дороги, скорость падает вплоть до полной остановки ( $v = 0$ ), когда машины расположены „бампер-к-бамперу“ ( $\rho = \rho_{max}$ ). Эта простейшая модель выражается следующим линейным соотно-

шением (рис. 1)

$$v(\rho) = v_{max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{max}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\rho_t + \left[ v_{max} \rho \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \right]_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (7)$$

Очевидно, это закон сохранения количества автомобилей. В самом деле, интегрируя (7) по  $x \in \mathbb{R}$ , получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_{max} \rho(x, t) \left( 1 - \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right) \right] dx = 0, \quad (8)$$

и, следовательно, количество автомобилей в  $\mathbb{R}$  постоянно для любых значений  $t \geq 0$ .

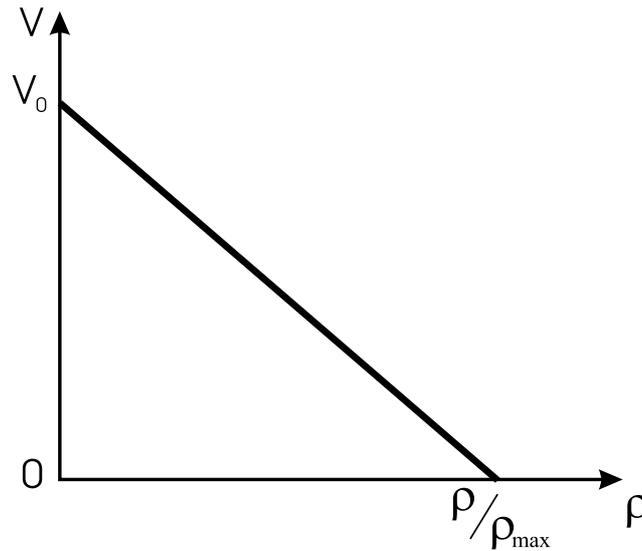


Рис. 1: Линейная аппроксимация Гриншилдса.

### 3.2 Модели Гриншилдса и Гринберга

Можно построить макроскопическую модель, в которой уравнение Гриншилдса является частным случаем [34]. Рассмотрим связь между скоростью  $v$  и плотностью  $\rho$  автомобилей на дороге. В общем случае, когда плотность  $\rho$  повышается, водители снижают скорость и наоборот, поэтому

$$v = v \left\{ \rho(x(t), t) \right\}, \quad (9)$$

где  $x(t)$  – координата движения элемента потока.

Проследим изменение скорости для некоторого передвигающегося элемента потока во времени, которое определяется как полная производная по времени

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (10)$$

Из (4) следует соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{dv}{dx} - v \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (11)$$

которое после подстановки в (10) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = -\rho \frac{dv}{dx} \left( \frac{dv}{d\rho} \right) - v \frac{\partial \rho}{\partial t} \left( \frac{dv}{d\rho} \right) + v \frac{\partial \rho}{\partial t} \left( \frac{dv}{d\rho} \right) = -\rho \frac{dv}{dx} \left( \frac{dv}{d\rho} \right). \quad (12)$$

Так как согласно (9)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (13)$$

соотношение (12) можно переписать в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\rho \left( \frac{dv}{d\rho} \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho (v')^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (14)$$

где  $v' = dv/d\rho$ , а отрицательный коэффициент пропорциональности  $[-\rho(v')^2]$  можно интерпретировать как вязкость в жидкости. Для классической сжимаемой жидкости уравнение (14) называется уравнением Эйлера, в этом случае:

$$\frac{dv}{dt} = -C^2 \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (15)$$

где  $C$  – неотрицательная константа с размерностью скорости.

Принято рассматривать более общий класс моделей, в которых

$$\frac{dv}{dt} = -C^2 \rho^n \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (16)$$

Уравнение (15) соответствует случаю  $n \neq -1$ , следовательно, из уравнений (14) и (15)  $v' = C^2 \rho^{(n-1)/2}$ . Решением этого уравнения будет

$$v = C \ln \frac{\rho_{max}}{\rho} \quad (17)$$

при  $n = -1$ , и

$$v = \frac{C}{n+1} \left[ \rho_{max}^{(n+1)/2} - \rho^{(n+1)/2} \right] \quad (18)$$

при  $n \neq 1$ .

Модель (17) была впервые получена Гринбергом [7]. Обозначив за  $v_0$  – скорость при  $\rho = 0$ , для значений  $n \leq 0$ , можно записать

$$v = v_0 \left( 1 - \left[ \frac{\rho}{\rho_{max}} \right]^{(n+1)/2} \right). \quad (19)$$

Уравнение (6), впервые полученное Гриншилдсом [6], является частным случаем уравнения (19) при  $n = 1$ .

### 3.3 Модель Лайтхилла-Уизема. Кинематические волны

При построении модели были приняты следующие допущения [39]:

- транспортный поток *непрерывен*, его плотность  $\rho(x, t)$  есть число машин занимающих единицу длины дороги;
- величина потока  $q(x, t)$  равна числу машин пересекающих черту  $x$  за единицу времени, определяется *локальной* плотностью  $\rho$ :

$$q = Q(\rho).$$

Скорость потока равна  $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$ , т.е. средняя скорость является функцией плотности  $V(x, t) = V_e(\rho(x, t))$ ;

- на участке дороги без съездов-въездов количество машин сохраняется (7).

Уравнения (20) и (7) образуют полную систему. После подстановки получим

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0, \quad (21)$$

где  $c(\rho) = Q'(\rho) = V_e(\rho) + \rho V_e'(\rho)$  – скорость распространения возмущений.

Соотношение  $Q(\rho) = \rho V_e(\rho)$  играет важную роль в теории транспортных потоков и называется *фундаментальной диаграммой* (рис.2). В модели Лайтхилла-Уизема эта зависимость непрерывна, следовательно, предельная пропускная способность участка дороги определяется плотностью потока.

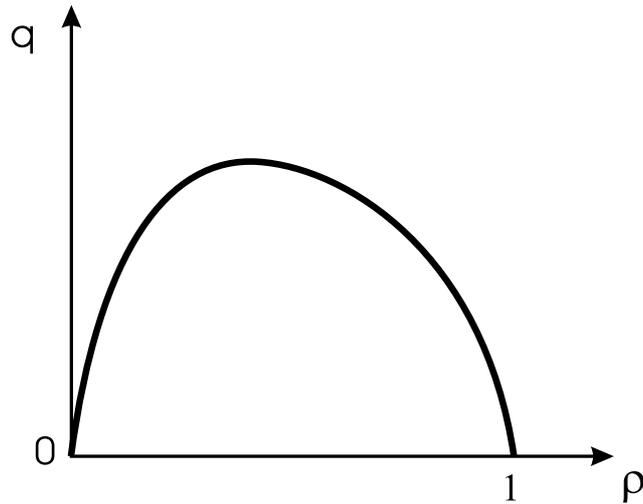


Рис. 2: Фундаментальная диаграмма транспортного потока.

Общий вид решения нелинейного уравнения (21):

$$c(x, t) = F(x - vt), \quad (22)$$

где  $F$  – произвольная функция. Соотношение (22) описывает бегущую волну, рассматриваемую как *волну уплотнения в среде*. Волны типа (22) называют *кинематическими волнами*, что подчеркивает их кинематическое происхождение в противоположность динамической природе акустических и упругих волн.

### 3.4 Ударные волны в транспортном потоке

Анализ рассмотренных моделей показал существование области неустойчивости на кривых  $q(v)$  [8]. Рассмотрим модель Гриншилдса (6) (случай  $n = 1$ ). Пусть скорость  $v$  лежит в пределах

$$0 < v \leq v_0, \quad (23)$$

так что  $\frac{dq}{dv} > 0$ . Если по какой-либо причине скорость некоторой части потока понизится на  $\Delta v$ , интенсивность движения понизится на  $\rho_j(1 - 2v/v_0)\Delta v$ . Плотность этой части потока  $\rho$  повысится, и скорость будет далее снижаться. Возмущение скорости является незатухающим, что и демонстрирует неустойчивость поведения транспортного потока. В этих случаях автомобили в потоке вынуждены неоднократно трогаться с места и останавливаться. Это явление носит название *ударной волны*.

Уравнение (4) также демонстрирует наличие ударных волн. Его решение было впервые предложено Лайтхиллом и Уиземом (1955) и независимо Ричардсом (1956). Аналитическое решение уравнения (4) в общем случае сложно и в практических расчетах не используется. Для частного случая, на участке дороге без съездов-въездов можно положить  $q = f(\rho)$  или  $v = f(\rho)$  (равновесный поток), то есть

$$v(x, t) = v_e(\rho(x, t)).$$

Перепишем теперь уравнение (4) в виде:

$$\left( f(\rho) + \rho \frac{df(\rho)}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (25)$$

Функция  $f(\rho)$ , вообще говоря, произвольна. Если положить связь скорость-плотность линейной (Гриншилдс, 1934), то уравнение (25) примет вид

$$\left( v_0 - 2v_0 \frac{\rho}{\rho_j} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (26)$$

Уравнение (25) решается методом характеристик.

Анализ решения уравнения (26) приводит к следующим выводам (см. [8]):

- плотность  $\rho$  постоянна вдоль семейства характеристик;
- наклон характеристик

$$\frac{dx}{dt} = f(\rho) + \rho[f(\rho)] = \frac{dq}{d\rho}, \quad (27)$$

равен тангенсу наклона кривой плотности потока в точке, представляющей состояние потока на границе, с которой выходят эти характеристики;

- плотность в любой точке фазовой области  $(x, t)$  находится проведением собственных характеристик через эту точку.

Пересечение характеристик объясняется существованием ударных волн, так как в точке пересечения плотность имеет два значения, что физически невозможно. Математически ударная – разрыв  $\rho$ ,  $q$  или  $v$ . Скорость ударной волны определяется наклоном линии, соединяющей два состояния потока (восходящий и нисходящий)

$$v_w = \frac{q_d - q_u}{\rho_d - \rho_u},$$

где  $\rho_d, q_d$  представляют течение потока вниз, а  $\rho_u, q_u$  – вверх. Когда  $v_w > 0$ , ударная волна движется вниз относительно дороги, если  $v_w < 0$  – вверх.

### 3.5 Гидродинамические модели второго порядка-1

Рассмотренные модели выше имеют следующие ограничения:

- стационарность соотношения скорость-плотность (средняя скорость движения при определенной плотности устанавливается мгновенно);
- колебательные решения, описывающие возникновение неустойчивости в виде регулярных старт-стоп волн с зависящим от амплитуды временем колебания не могут быть выведены из уравнений кинематических волн;
- не позволяют описать явление *гистерезиса* – возврат потока в устойчивое состояние при меньших значениях плотности [30].

В реальном потоке плотность не меняется скачками. Водители обычно снижают скорость при увеличении плотности машин впереди, и наоборот. Поэтому  $q$  зависит еще и от *градиента* плотности  $\rho_x$  [31, 39]

$$q = Q(\rho) - \nu\rho_x, \quad (29)$$

где  $\nu$  – некоторая положительная постоянная величина.

В силу (21) и (29) имеем

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = \nu\rho_{xx}, \quad c(\rho) = Q'(\rho). \quad (30)$$

Умножив (30) на  $c'(\rho)$ , перепишем его в виде

$$c_t + cc_x = \nu c'(\rho)\rho_{xx} = \nu c_{xx} - \nu c''(\rho)\rho_x^2. \quad (31)$$

При аппроксимации  $Q(\rho)$  квадратичной функцией,  $c(\rho)$  будет линейна по  $\rho$ , а  $c''(\rho) = 0$ . Таким образом, уравнение (31) принимает вид уравнения Бюргерса

$$c_t + cc_x = \nu c_{xx}, \quad (32)$$

где член  $cc_x$  описывает образование „пробок“ – быстрые машины догоняют медленные, возникает скачок плотности. Член  $\nu c_{xx}$  задает конечную ширину этого скачка. Уравнение Бюргерса (32) можно рассматривать как одномерное уравнение Навье-Стокса для сжимаемой жидкости с единичной плотностью. Нелинейное

уравнение (32) сводится к линейному уравнению теплопроводности заменой Коула-Хопфа

$$c = 2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \psi(x, t) = -2\nu \frac{\varphi_x}{\varphi} \quad (33)$$

При изучении свойств транспортного потока представляют интерес также и другие версии уравнения Бюргера [26, 27].

### 3.6 Гидродинамические модели второго порядка-2

Недостатком модели Лайтхилла-Уизема является допущение о равновесном значении скорости  $V_e$  при данной плотности автомобилей. Это не позволяет адекватно описывать ситуаций вблизи неоднородностей дороги (въезды, съезды и сужения).

Для описания неравновесных ситуаций вместо детерминированного уравнения  $V(x, t) = V_e(\rho(x, t))$  было предложено использовать дифференциальное уравнение для моделирования *динамики* средней скорости. Впервые предложенное Пэйном (Payne) в 1971 году уравнение скорости имело вид [21]

$$v_t + vv_x = -\frac{c(\rho)}{\rho} \rho_x + \frac{1}{\tau} (V_e(\rho) - \rho), \quad (34)$$

где

$$c(\rho) = -\frac{1}{2\tau} \frac{dV_e}{d\rho}. \quad (35)$$

Уравнение (34) было выведено из микроскопического описания движения отдельных автомобилей в соответствии с моделью следования за лидером. Слагаемое  $vv_x$  называется *конвекционным* и описывает изменение скорости в данном месте дороги за счет кинематического переноса автомобилей из предшествующего сегмента дороги со средней скоростью потока. Первое слагаемое в правой части называется *упреждающим* и описывает тенденцию к сокращению скорости при возрастании плотности. Наиболее общая форма упреждающего члена имеет вид [9]:

$$-\frac{c_0^2}{\rho} \partial_x \rho. \quad (36)$$

Второе слагаемое в правой части называется *релаксационным* и описывает тенденцию приближения средней скорости  $v$  к равновесному при данной плотности значению  $V_e(\rho)$ ,  $\tau$  – характерное время релаксации.

Анализ эмпирических данных показывает, что при высоких значениях плотности ламинарное движение транспортного потока становится неустойчивым, и малые возмущения приводят к возникновению старт-стоп волн. Именно устойчивость в линейном приближении к малым возмущениям при всех значениях плотности стационарного однородного решения  $\rho(x, t) \equiv \rho_0$ ,  $V(x, t) \equiv V_e(\rho_0)$  уравнения Пэйна является его существенным недостатком. Этот недостаток можно устранить следующим изменением в упреждающем члене уравнения

$$c(\rho) = \frac{d}{d\rho} P_e(\rho), \quad P_e(\rho) = \rho \Theta_e(\rho). \quad (37)$$

Здесь  $P$  – внутреннее давление транспортного потока, выраженное через вариацию скоростей в потоке  $\Theta$ . Тогда уравнение скорости при такой замене приобретает вид [25]

$$v_t + vv_x = -\frac{1}{\rho} \partial_x P_e + \frac{1}{\tau} (V_e(\rho) - v). \quad (38)$$

Уравнение (38) описывает поведение водителей в зависимости от давления потока впереди – торможение при его возрастании и ускорение в противном случае. Для оценки вариации  $\Theta$  как функции плотности, применяются различные приближения, полученные при анализе эмпирических данных. Например, в моделях Кюне (Kühne) и Кернера-Конхойзера (Kerner-Konhäuser) в качестве первого приближения используется положительная константа [28]:  $\Theta_e(\rho) = \Theta_0$ .

Уравнение (38) также предсказывает возникновение ударных волн. Для предотвращения разрывов в правую часть добавляется диффузионный член  $\nu v_{xx}$ , аналог вязкости в уравнениях гидродинамики

$$v_t + vv_x = -\frac{\Theta_0}{\rho} \rho_x + \nu v_{xx} + \frac{1}{\tau} (V_e(\rho) - v). \quad (39)$$

Анализ устойчивости стационарного однородного решения показывает, что при значениях плотности, превышающих критическое значение, решение становится неустойчивым к малым возмущениям. Это свойство позволяет моделировать возникновение *фантомных заторов* – режимов старт-стоп волн в однородном потоке, возникающих в результате малых случайных возмущений. Известная модель этого класса – модель Кернера-Конхойзера. Стандартная модель [28] предполагает уравнение в форме

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau}(V(\rho) - v) - c_0^2 \frac{\partial L(\rho)}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (40)$$

Правая часть (40) содержит три коэффициента, касающихся скорости транспортного потока. Первый член отражает тенденцию потока на заданной плотности  $\rho$  к понижению средней скорости  $V(\rho)$  до некоторой естественной величины. При малых плотностях эта скорость определяется дорожными условиями и ограничениями по скорости движения и слабо зависит от  $\rho$ . При высоких плотностях,  $V(\rho)$  приближается к нулю и слабо зависит от  $\rho$ . При средних плотностях она быстро падает и сильно обусловлена тем фактом, что при высокой плотности потока водителям сложно совершить обгон. Таким образом мы предполагаем, что  $V(\rho)$  будет убывающей функцией с малой производной при больших и малых  $\rho$ . Второй – *фактор упреждения*, означает, что водители снижают скорость, если впереди поток транспорта имеет более высокую плотность. Безразмерная функция  $L(\rho)$  должна в таком случае быть монотонно возрастающей. Ее обычно полагают равной  $\ln \rho$ , а величина  $c_0^2 \rho$  играет роль давления. Последний член – „вязкость“ или „диффузия“, отражает тенденцию согласования скорости движения со скоростью окружающих автомобилей в потоке.

## 4 Стохастические модели

Одной из важнейших характеристик перекрестка является длина очереди автомобилей, ожидающих проезда. Построим простую модель образования очереди на перекрестке со светофорным регулированием. Рассмотрим пересечение двух дорог с односторонним движением. Пусть  $\tau^+$  – длительность горения зеленого света, а  $\tau$  – длительность всего цикла светофора. Предположим, что когда для одной полосы загорелся красный свет, зеленый свет для второй полосы загорается спустя некоторое время, чтобы „проскочившие“ автомобили успели проехать.

Пусть поток автомобилей, проходящих через точку  $A$  (некоторую точку на участке дороги перед перекрестком), есть простейший поток с параметром  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ . При накоплении автомобилей в системе точка  $A$  сдвигается влево (рис. 3).

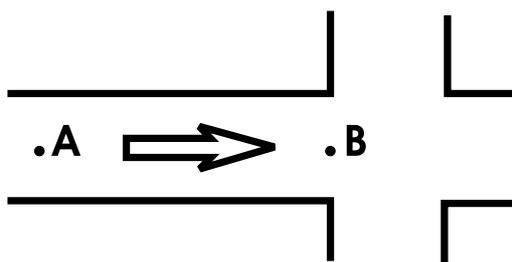


Рис. 3: Модель очереди на перекрестке.

Автомобили, поступающие в систему, либо пересекают перекресток (получают обслуживание как запросы), если проезд свободен и горит зеленый свет, либо становятся в очередь у перекрестка. Предположим, что водители не едут на красный свет, даже если на пересекающей полосе пусто.

Обслуживание одного автомобиля в рамках данной модели представляет собой проезд через точку  $B$  – начало перекрестка. Примем время проезда через точку  $B$  одинаковым для всех автомобилей и равным  $T$ ,  $T > 0$ . За это время следующий автомобиль подъезжает к перекрестку (точке  $B$ ) и ждет своего обслуживания. Таким образом, поведение перекрестка будет описываться с помощью однолинейной системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием и буфером размера  $M$  (максимальное

число автомобилей, способных поместиться на дороге),  $M \in \mathbb{N}$ .

Будем искать среднюю длину очереди. Допустим, что перед перекрестком может стоять не более  $M$  автомобилей,  $M \geq 1$ . Каждый автомобиль занимает одну ячейку (одинаковой длины для всех автомобилей). Когда первый автомобиль проезжает через перекресток, остальные, стоящие в очереди, подвигаются на одну ячейку вперед.

Подсчитаем, сколько автомобилей могут проехать перекресток за период горения зеленого света. За единицу времени через перекресток могут проехать  $T^{-1}$  автомобилей. Значит, на зеленый свет через перекресток могут проехать  $\tau^+ T^{-1}$  автомобилей. Таким образом, величина

$$N = [\tau^+ T^{-1}]$$

представляет собой пропускную способность перекрестка за время горения зеленого света, где  $[\cdot]$  есть целая часть числа.

Рассмотрим накопление автомобилей в системе за время одного цикла светофора. Будем исследовать поведение системы в моменты времени  $nT$ ,  $n = \overline{0, N}$ , то есть моменты начала периода зеленого света и моменты окончания обслуживания запросов (автомобилей). Обозначим через  $p_i^{(n)}$  вероятности того, что в момент времени  $nT + 0$  (непосредственно сразу после ухода автомобиля из очереди) длина очереди составляет  $i$  автомобилей,  $n = \overline{0, N}$ ,  $i = \overline{0, M}$ . Обозначим также через  $P_i(t)$  вероятность того, что за время  $t$  в систему приедут  $i$  автомобилей,  $i \geq 0$ . Выражение для  $P_i(t)$  имеет вид

$$P_i(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, i \geq 0.$$

Уравнения для вероятностей  $p_i^{(n)}$ ,  $n = \overline{0, N}$ ,  $i \geq 0$  имеют вид

$$\begin{aligned} p_i^{(0)} &= \sum_{k=0}^i p_k^{(N)} P_{i-k}(\tau^*), \quad i = \overline{0, M}, \\ p_M^{(0)} &= \sum_{k=0}^M p_k^{(N)} \sum_{l=M-k}^{\infty} P_l(\tau^*), \quad \tau^* = \tau - NT \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} p_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^{i+1} p_k^{(n-1)} P_{i-k+1}(T), \quad i = \overline{0, M-1}, \\ p_M^{(n)} &= \sum_{k=0}^M p_k^{(n-1)} \sum_{l=M-k+1}^{\infty} P_l(T), \quad n = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

причем каждая группа вероятностей  $p_i^{(n)}$ ,  $i = \overline{0, M}$  удовлетворяет условиям нормировки

$$\sum_{i=0}^M p_i^{(n)} = 1, \quad n = \overline{0, N}. \quad (42)$$

Обозначим через  $A_i = P_i(\tau^*)$ ,  $\overline{A}_{ii} = \sum_{l=i}^{\infty} P_l(\tau^*)$ ,  $B_i = P_i(T)$ ,  $\overline{B}_i =$

$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(T)$   $i \geq 0$  и распишем систему (41) более подробно:

$$\begin{aligned} p_0^{(0)} &= p_0^{(N)} A_0, \\ p_1^{(0)} &= p_0^{(N)} A_1 + p_1^{(N)} A_0, \\ &\dots \\ p_M^{(0)} &= p_0^{(N)} A_M + p_1^{(N)} A_{M-1} + \dots + p_M^{(N)} A_0, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $A_i = P_i(\tau^*)$ ,  $B_i = P_i(T)$ .

$$\begin{aligned} p_0^{(n)} &= p_0^{(n-1)} B_1 + p_1^{(n-1)} B_0, \\ p_1^{(n)} &= p_0^{(n-1)} B_2 + p_1^{(n-1)} B_1 + p_2^{(n-1)} B_0, \\ &\dots \\ p_M^{(n)} &= p_0^{(n-1)} \overline{B}_{M+1} + p_1^{(n-1)} \overline{B}_M + \dots + p_M^{(n-1)} \overline{B}_1, \quad n = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (44)$$

Запишем системы (43) и (44) в матричном виде

$$\begin{aligned}
 \vec{p}^{(0)} &= \vec{p}^{(N)} \hat{A}, \\
 \vec{p}^{(1)} &= \vec{p}^{(0)} \hat{B}, \\
 \vec{p}^{(2)} &= \vec{p}^{(1)} \hat{B}, \\
 &\dots \\
 \vec{p}^{(N)} &= \vec{p}^{(N-1)} \hat{B},
 \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$\vec{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots, p_M^{(n)}), \quad n = \overline{0, N},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & \overline{A}_{M-1} \\ 0 & A_0 & A_1 & \dots & \overline{A}_{M-2} \\ 0 & 0 & A_0 & \dots & \overline{A}_{M-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{A}_0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_M & \overline{B}_{M+1} \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{M-1} & \overline{B}_M \\ 0 & B_0 & \dots & B_{M-2} & \overline{B}_{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_0 & \overline{B}_1 \end{bmatrix},$$

Из системы (45) и условия нормировки (42) при  $n = 0$  находим значение для вектора  $\vec{p}^{(0)}$

$$\begin{cases} \vec{p}^{(0)} = \vec{p}^{(0)} B^N A, \\ \vec{p}^{(0)} \mathbf{1} = 1, \end{cases}$$

где  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ .

Остальные векторы вероятностей находим с помощью равенств

$$\vec{p}^{(n)} = \vec{p}^{(n-1)} \hat{B}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Тогда средняя длина очереди на перекрестке к моменту начала периода зеленого света равна

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^M i p_i^{(0)}.$$

## 5 Микроскопические модели

### 5.1 Модели следования за лидером

Кроме случая очень малых интенсивностей движение любого автомобиля ограничено впереди идущим автомобилем.

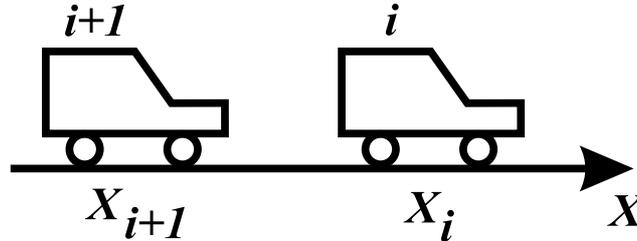


Рис. 4: Порядок следования автомобилей.

Первоначально предполагалось, что каждый водитель согласует свою скорость со скоростью впереди идущего автомобиля [40]:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{\tau}(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)), \quad (46)$$

где  $\tau$  – время согласования скоростей (рис. 5).

Данная модель не описывает свойств неустойчивости, возникновения ударных волн и заторов. Позднее был предложен ряд модификаций. Например, в [2] в левую часть уравнения (46) добавляют задержку  $t_d \approx 1,3\text{с}$ , описывающую время реакции водителя на изменение скорости лидирующего автомобиля. Множитель  $1/\tau$  в [24] интерпретируется как *коэффициент чувствительности*  $\alpha$ , характеризующий скорость реакции водителя. Тогда (46) можно записать в виде дифференциально-разностного уравнения

$$\ddot{x}_i(t + t_d) = \alpha(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)). \quad (47)$$

При  $\alpha = \text{const}$  условие неустойчивости уравнения (47) имеет вид  $t_d/\tau > 1/2$ . Наличие неустойчивости позволяет моделировать ударные волны и заторы, но предположение о неизменности чувствительности не позволяет воспроизвести фундаментальную диаграмму. Более адекватная модель получается при учете возрастания чувствительности с уменьшением дистанции

до лидирующего автомобиля. С этой точки зрения Газис и др. [5] преобразовали уравнение (47)

$$\ddot{x}_{i+1}(t + t_d) = \alpha(\dot{x}_{i+1}(t + t_d))^{n_1} \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}_{i+1}(t)}{(x_i(t) - x_{i+1}(t))^{n_2}} \quad (48)$$

и выполнили оценку коэффициентов  $n_1$  и  $n_2$  по экспериментальным данным. Было найдено, что коэффициент корреляции между  $x_{i+1}(t+t_d)$  и  $(x_{i+1}(t+t_d))^{n_1}(x_i(t)x_{i+1}(t))/(x_i(t)-x_{i+1}(t))^{n_2}$  равен 0,87; 0,78 и 0,73 для  $(n_1, n_2) = (1, 2)$ ;  $(0, 1)$  и  $(0, 2)$  соответственно и принимает меньшие значения порядка 0,2 – 0,5 для других целочисленных комбинаций параметров  $n_1$  и  $n_2$ . Простейший случай  $n_1 = 0$  и  $n_2 = 0$

$$\ddot{x}_{i+1}(t + t_d) = \alpha \frac{\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i+1}(t)}{x_i(t) - x_{i+1}(t)}. \quad (49)$$

часто используется для моделирования и теоретического анализа.

После интегрирования выражения (49), получаем

$$\dot{x}_{i+1}(t + t_d) = \ln(\rho_{max}(x_i(t) - x_{i+1}(t))), \quad (50)$$

где  $\rho_{max}$  – константа, описывающая движение автомобилей в плотном потоке на очень близком расстоянии – „бампер-к-бамперу“.

Когда транспортный поток является стационарным, плотность  $\rho$  выражается формулой  $\rho = 1/(x_i(t) - x_{i+1}(t))$ , а так как скорость в стационарном режиме постоянна, то

$$v = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\rho_{max}}{\rho}. \quad (51)$$

Выражение (51) идентично уравнению (17), и мы из микроскопической модели следования за лидером получаем макроскопическую модель Гринберга.

## 5.2 Клеточные автоматы

Применение концепции клеточного автомата фон Неймана для моделирования транспортных потоков впервые было предложено в работе [1]. Активные разработки начались с работ Нагеля и

Шрекенберга [12]. В настоящее время имеется обширный набор публикаций по клеточным автоматам (см. [3]).

Формулировка исходной модели Нагеля-Шрекенберга заключается в следующем [40]. Пусть  $x_n$  и  $v_n$  координата и скорость  $n$ -го автомобиля,  $d_n = x_{n+1} - x_n$  — дистанция до лидирующего автомобиля. Скорость может принимать одно из  $v_{max} + 1$  допустимых целочисленных значений  $v_n = 0, 1, 2, \dots, v_{max}$ . На каждом шаге  $t \rightarrow t+1$  состояние всех автомобилей в системе обновляется в соответствии со следующими правилами:

1. *Ускорение.* Если  $v_n < v_{max}$ , то скорость  $n$ -го автомобиля увеличивается на единицу, если  $v_n = v_{max}$ , то скорость не изменяется:

$$v_n \rightarrow \min(v_n + 1, v_{max}). \quad (52)$$

2. *Торможение.* Если  $d \leq v_n$ , то скорость  $n$ -го автомобиля уменьшается до  $d_n - 1$ :

$$v_n \rightarrow \min(v_n, d_n - 1). \quad (53)$$

3. *Случайные возмущения.* Если  $v_n > 0$ , то скорость  $n$ -го автомобиля может быть уменьшена на единицу с вероятностью  $p$ ; скорость не изменяется, если  $v_n = 0$ :

$$v_n \rightarrow \max(v_n - 1, 0). \quad (54)$$

4. *Движение.* Каждый автомобиль продвигается вперед на количество ячеек, соответствующее его новой скорости после выполнения шагов 1-3:

$$x_n \rightarrow x_n + v_n. \quad (55)$$

Первый шаг (52) отражает общее стремление всех водителей ехать как возможно быстрее. Второй (53) гарантирует отсутствие столкновений с впереди идущими автомобилями. Элемент стохастичности, учитывающий случайности в поведении водителей вносится на третьем шаге (54).

## 6 Транспортные заторы

На сегодняшний день не существует общепринятого определения затора (пробки). Карлос Даганзо (Carlos F. Daganzo) [4] полагает, что на свободной дороге транспортный поток не образует очередей, если малое возмущение скоростей, возникшее в некоторой точке дороги, не распространяется вверх по потоку. И наоборот, если возмущение скоростей, возникшее на некотором участке, распространяется за его пределы, то в транспортном потоке образуются скопления и возникают заторы.

Обычно описываются одиночные пробки и серия пробок [4].

### 6.1 Одиночные пробки

Одиночные заторы могут быть вызваны условиями дорожного движения, например, красным светом светофора, аварией, сужением и т.п. В такой ситуации условие превышения притока в пробку над оттоком выполнить легко: например, если сужение имеет пропускную способность  $q_{bn}$ , а приток  $q_{in}$ , то если  $q_{in} > q_{bn}$ , пробка будет расти. Теоретически такое поведение схоже с поведением очереди, описываемой теорией массового обслуживания, за исключением наличия пространственного измерения – пробка растет с хвоста. Такой пространственный рост хорошо описывается *теорией кинематических волн*.

Эмпирические данные показывают, что пробки часто возникают на однородном участке дороги, и выглядят как бы „вставленными“ в свободный поток. Пусть, к примеру, причиной такой пробки стала авария, которая самоликвидировалась через некоторое время. Рассмотрим  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  транспортных средств, стоящих друг за другом на однополосной дороге. В первый момент времени может поехать первая машина, затем вторая и т. п. За это время в хвост пробки может пристроиться еще некоторое количество машин. Задав симметричные условия оттока и притока автомобилей в пробку, получим область машин на дороге, имеющих нулевую скорость, смещающуюся навстречу потоку. С точки зрения водителя, пристроившегося в хвост – пробка „про-

ходит через него“. Он сначала останавливается, а через некоторое время может снова продолжить движение. Это стандартное волновое явление, хорошо описываемое *теорией кинематических волн*.

## 6.2 Серия пробок

Наблюдения показывают, что отток транспортных средств из пробки составляет в среднем одно транспортное средство за две секунды для одной полосы движения. Обозначим его через  $q^*$ . Тогда пробка будет расти, если  $q_{in} > q^*$ .

Например, если вдали случится авария, то при условиях однородности на выходе из этой аварии значительной пробки не образуется. Действительно, если на выходе из первой пробки появится поток  $q^*$ , то из второй пробки поток составит ту же величину  $q^*$ . Таким образом возникает вопрос: может ли поток поддерживать значения выше  $q^*$  (т.н. *суперкритический поток* [8]), и если да, то как? Ответ на вопрос пока не найден.

## 6.3 Классификация фаз потока

Борис Кернер (Boris S. Kerner) [28] предложил следующую классификацию фаз движения транспортного потока (рис. 5):

1. **Свободный поток.** Пока дорога не загружена, водители придерживаются желаемой скорости, свободно переходя на соседние полосы. На этой стадии автомобили сопоставимы с потоком свободных частиц.
2. **Синхронизированный поток.** Когда дорога становится переполненной, водители теряют возможность свободно маневрировать и вынуждены согласовывать свою скорость со скоростью потока. Эта стадия подобна потоку воды.
3. **Широкие перемещающиеся пробки.** Здесь автомобили (группы автомобилей) подобны кусочкам льда, движущимся в потоке жидкости.

4. **Старт-стоп движение.** При большом скоплении автомобилей движение потока приобретает прерывистый характер. На этой стадии транспортный поток можно уподобить потоку замерзающей воды, автомобили становятся на какой-то промежуток времени как бы „приклеенным“ к данной точке дороги.

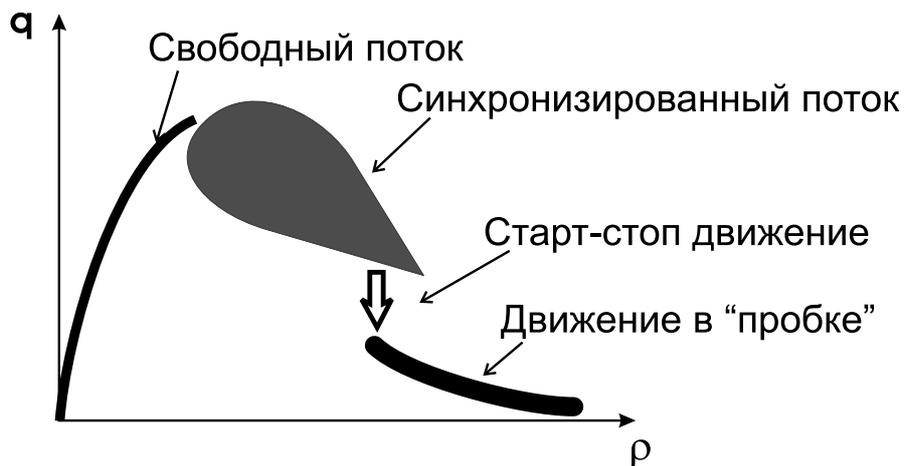


Рис. 5: Фазовые состояния потока на многорядных магистралях.

Таким образом, при малых и очень высоких плотностях наблюдается корреляция между потоком и плотностью, а для промежуточных плотностей определенной ветви на фундаментальной диаграмме не существует из-за сильной зависимости от специфики конкретной дорожной сети. Предпринималось множество попыток объяснить эти особенности [8]. Работы об „обращении  $\lambda$ -формы фундаментальной диаграммы“ (Koshi et. al., 1983), „гистерезиса“ (Treiterer и Myers, 1974), „теории катастроф“ (Persaud и Hall, 1989), „падения пропускной способности“ (Hall и Agyemang-Duah, 1991) и т. п., указывают на возможность существования суперкритических потоков, рис. 6. Другие исследования (Hall et. al., 1992; Windover и Cassidy, 2001) показывают, что такие измерения вызваны геометрическим строением дороги (например, наличием сужения).

Однако остается непонятным, как могут возникать пробки, т.е. как поток, находящийся в свободном режиме, распадается и переходит в смешанный – свободно-заторный (старт-стоп движение). С одной стороны, анализ показывает, что часто имеются

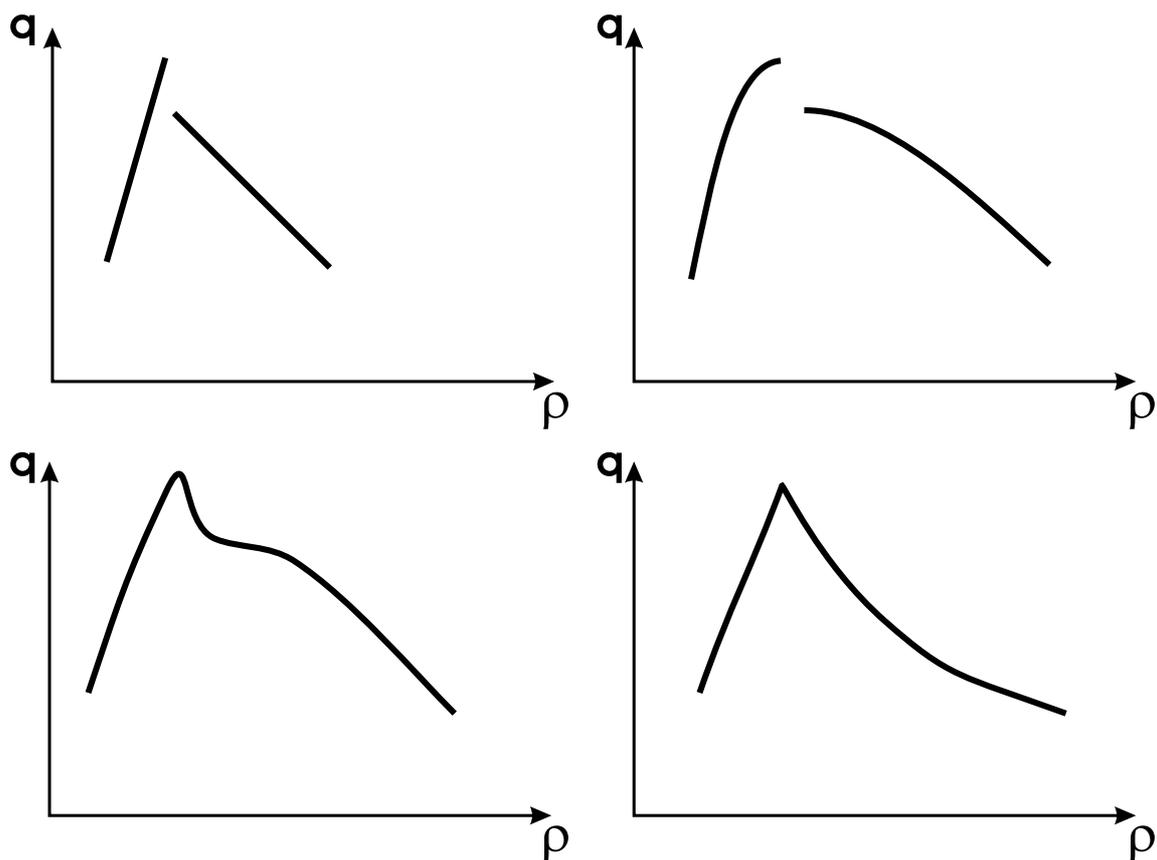


Рис. 6: Теоретические аппроксимации эмпирической фундаментальной диаграммы.

внешние причины. С другой стороны, эксперименты с ездой по кругу показали спонтанный распад потока [19]. В этом эксперименте водителей просили ехать с максимальной скоростью. В таких искусственных условиях для распада потока требовалось около 10 минут!

Для синхронизированного режима движения не понятно, вызван ли сильный разброс данных наличием съездов-въездов, или он имеет статистическую природу, например, из-за взаимодействия разных типов автомобилей и разных манер вождения.

#### 6.4 Причина затора – геометрические особенности дороги

Даганзо в работе [4] выдвигает гипотезу о том, причина пробок кроется в „узких местах“ – сужениях и расширениях дороги, как

постоянных, так и временных. Они являются причиной образования, роста и распространения очередей на дорогах. Даганзо определяет несколько типов „узких мест“:

- **Активные „узкие места“.** Между двумя участками дороги имеется активное „узкое место“, если восходящий транспортный поток перегружен (вызывает очереди), а нисходящий является свободным. Выявление активных „узких мест“ на участках дороги эффективно для предотвращения транспортных происшествий.
- **Слияния.** Теория для „сливающихся“ узких мест утверждает, что максимально устойчивый поток, выходящий из слияния, существует только тогда, когда условия для нисходящего потока являются незагруженными. Это качество называется емкостью (capacity). Если сумма входящих потоков превышает вместимость слияния, выходящий поток заполняет емкость слияния полностью, а остальной поток формирует очередь. Очередь растет как по одному, так и по нескольким подъездам к слиянию. Эксперименты показывают, что на одних участках поток становится переполненным через 10 мин, а на других – не бывает переполненным.
- **Расширения.** Разновидность нескольких активных „узких мест“ на дороге. Если поток, пересекающий одну из ветвей расширения, превышает его пропускную способность в течение некоторого времени, то в общем подъезде к расширению может вырасти очередь. Если этот подъезд узкий, очередь должна рассасываться по дисциплине буфера – „первым вошел первым вышел“ (FIFO) – таким образом, что будут накапливаться и задерживаться транспортные средства, которые должны ехать по другой ветви расширения дороги. Подобная ситуация может иметь место и тогда, когда один из подъездов широкий.
- **Другие типы узких мест.** Заторную активность можно обнаружить на вертикальных и горизонтальных искривлениях дороги („горки“ и прогибы), в тоннелях, на наклон-

ных участках и других местах изменения характеристик и однородности дороги. Заторы вызываются также временными внешними причинами, такими как ДТП, отвлекающая внимание водителя активность около дороги и даже информационные щиты.

## 6.5 Задержки транспортных средств

Большинство теорий утверждают, что задержки транспортных средств зависят от двух компонент: от *времени*, за которое автомобиль проехал бы через заторное место при отсутствии очереди и от поведения потока в пределах заторного участка. То есть практически, *время задержки не зависит от структуры очереди и, следовательно, управляющие воздействия нужно направлять не на очередь, а на сами заторные участки* [4].

## 6.6 Множественные устойчивые состояния и хаос

В литературе не удастся найти результатов систематических исследований свойств транспортного потока средствами нелинейной динамики, однако, имеется некоторое количество публикаций, отражающих связь понятий хаоса и транспортного потока.

В 1961 году И. Пригожиным и соавторами (см. [24, 22, 23]) впервые была сформулирована кинетическая модель транспортного потока в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\partial_t f + \partial_x(fv) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel}. \quad (56)$$

Данное уравнение, как и уравнение (4), является уравнением неразрывности, выражающим закон сохранения автомобилей, но уже в фазовом пространстве, т.е. плотности распределения автомобилей по координате и скорости. Слагаемые в левой части описывают изменение фазовой плотности и за счет кинематического переноса, в то время как слагаемые в правой части описывают процесс мгновенных изменений скоростей автомобилей за счет так называемых процессов взаимодействия и релаксации.

Согласно Пригожину, под взаимодействием двух автомобилей на дороге понимается событие, при котором более быстрый автомобиль догоняет более медленный. При этом водитель быстрого автомобиля либо совершает обгон, либо снижает свою скорость до скорости впереди идущего автомобиля. Скорости автомобилей в потоке не коррелированы до и после взаимодействия, т.е. верна гипотеза „автомобильного хаоса“ (по аналогии с „молекулярным хаосом“).

Эмпирические аргументы в пользу хаоса в потоке транспорта можно найти в работах Кернера и Реборна (Kerner, Rehborn, 1997) и Кернера (Kerner, 1999). В них было показано, что локальные пробки могут существовать пока сохраняются их характеристические свойства в течение нескольких часов. То есть, помеха на микроуровне в транспортном потоке может привести образованию пробок [28, 10].

Рейнхард Кюне (Reinhard D. Kühne) [20] проанализировал возможное уравнение момента для транспортного потока вида:

$$\partial_t v + v \partial_x v = -\frac{c_0^2}{\rho} \partial_x \rho + \frac{1}{\tau} (V(\rho) - v) + \nu \partial_x^2 v, \quad (57)$$

дополненное для полноты системы уравнением непрерывности:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = D \partial_x^2 \rho. \quad (58)$$

Для этого уравнения однородное решение  $(v, \rho) \equiv (v_0 \rho_0)$  нестабильно для близких к максимальным плотностям потока транспорта при соответствующем выборе параметров. Используя методы нелинейной динамики Р. Кюне и др. [13, 14, 15] определили множество фиксированных точек устойчивости и неустойчивости и предельные циклы, которые означают, что транспортный поток при близкой к максимальной плотности, функционирует на *странном аттракторе*.

В работе [4] утверждается, что можно построить простые сети с источниками, устойчивыми по отношению к выходным потокам. Такая устойчивость может сохраняться в двух случаях:

- при насыщенной на всем протяжении дороги конфигурации, когда некоторые очереди распространяются против ис-

точников, и тем самым, блокируют исходящие от них потоки;

- при ненасыщенной конфигурации очередей, что позволяет всем источникам беспрепятственно объединять свои потоки.

Кроме того, в таких типах сетей *временное* возмущение может *постоянно* менять состояние насыщения сети. Возникающие изменения могут „по цепной реакции“ вызвать дальнейшие изменения. Поведение транспортного потока в переполненных сетях со связанными заторными участками является по природе хаотичным. Этот факт и невозможность на сегодняшний день точно предсказать некоторые основные начальные данные (например, маршрут, выбранный водителем) вынуждает переосмыслить роль прогнозирующих моделей [4].

## 6.7 Основные выводы

Современные представления, лежащие в основе макромоделей транспортного потока начали формироваться с 80-х годов XX века. Первоначально считалось, что ансамбли машин на магистралях проявляют воспроизводимые свойства, зависящие не от особенностей отдельных водителей, а только от технических характеристик автомобилей, расстоянием между ними и реакцией водителей. Когда дистанция между водителями становится ниже критического значения, задержка в реакции водителей приводит к неустойчивости движения – старт-стоп волнам. Позднее Кернер и Реборн [17] выявили еще несколько фаз. В итоге, современные представления о стадиях транспортного потока сложились в следующую картину:

- поведение транспортного потока уподобляется фазовым переходам *газ* → *жидкость* → *замерзающая жидкость* → *лед* [18];
- причина фазовых переходов лежит в недрах самого транспортного потока – подход оказался плодотворным и привел к открытию кластеров на автострадах (Кернер-Конхойзер);

- влияние внешних факторов на поведение потока рассматривается как неизбежное зло и выступает в роли флуктуаций – обобщения разнообразных возмущающих воздействий на транспортный поток;
- основное внимание исследователи уделяют моделированию перехода *жидкость* → *замерзающая жидкость*, как на самом трудно воспроизводимом в силу его нелинейности;

Похоже, этот подход исчерпал ресурсы развития. В последнее время зарождаются новые представления [4]:

- поведение транспортного потока определяется *сужениями* и *расширениями* дороги, причем эти понятия трактуются предельно общно;
- основным объектом исследования должны выступать очереди (их свойства, структуры, поведение и проч.), возникающие около сужений;
- для приемлемых предсказаний поведения потока достаточно построить группу простых моделей сужений дороги.

## Список литературы

- [1] Васильева Е.В., Игудин Р.В., Лившиц В.Н. Оптимизация планирования и управления транспортными системами. – М: Транспорт, 1987.
- [2] Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М: Наука, 1978.
- [3] Васильева Е.В., Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. Нелинейные транспортные задачи на сетях. – М: Финансы и статистика, 1981.
- [4] Шелейховский Г.В. Композиция городского плана как проблема транспорта. – М: Государственный институт проектирования городов «ГИПРОГОР», 1946.
- [5] Arrowsmith G. A behavioural approach to obtaining a double constrained trip distribution model. – Operation Research Quarterly, 1973, vol.24, №1.
- [6] Романовский И.В., Ампилова Н.Б., Петренко Е.И. О максимизации энтропии при линейных ограничениях. [электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.pub.math.spbu.ru> [Дата обращения: 29 марта 2009г.]
- [7] Алиев А.С., Стрельников А.И., Швецов В.И., Шершевский Ю.З. Моделирование транспортных потоков в крупном городе с применением к Московской агломерации. – М: Журнал Автоматика и Телемеханика, 2005, №11, с. 113 - 125.
- [8] Официальный сайт Примор АГП [электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.personal.primorye.ru/primagp/default.htm> [Дата обращения: 6 февраля 2009г.]
- [9] Форпост у океана - Владивосток (статистический ежегодник с исторической справкой). - Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
- [10] Здоровоохранение и социальное обеспечение в Приморском крае (статистический сборник). - Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
- [11] Труд и занятость населения во Владивостоке (статистический сборник). - Владивосток: Издательство Примстат, 2008.
- [12] Рынок труда Владивостока (статистический бюллетень). - Владивосток: Издательство Примстат, 2009.

- [13] О состоянии образования во Владивостоке (аналитическая записка). - Владивосток: Издательство Примстат, 2009.
- [14] Паспорт города [электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.vlc.ru> [Дата обращения: 15 марта 2009г.]
- [15] Семенов В.В. Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса, Препринты ИПМ, 2004, 034, 38 с.