Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Кафедра «Алгебра и геомметрия»

Методические указания к практическим занятиям

по дисциплине

<u>«Высшая математика»</u>

Составитель:
Кокурина Ю.К.

Владимир, 2016

Контрольные работы.

1. Методические указания к решению задач.

Для того, чтобы облегчить студенту-заочнику самостоятельное выполнение контрольных работ, приведем примеры решений задач, аналогичных тем, какие предлагаются в контрольных работах. Подобные задачи включаются и в экзаменационные билеты.

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 15 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + 6x_2 5x_3 = -1 \end{cases}$$

Требуется показать, что система совместна, и найти ее решение тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) методом обратной матрицы. Выполнить проверку решения.

Решение.

Система n линейных уравнений с n неизвестными является совместной и имеет единственное решение, так как определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных не равен нулю. Вычислим определитель системы методом разложения его по элементом строки. Разложим по первой строке:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2(-20-12) - 2(15-8) - 3(18+16) =$$

$$= -180 \neq 0$$

Так как определитель системы не равен нулю, система уравнений совместна и имеет единственное решение.

а) Найдем решение системы по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x = \frac{D_3}{D},$$

где D_1 D_2 D_3 - определители, которые получаются из определителя D системы путем замены в нем соответственно 1-го, 2-го, 3-го столбцов коэффициентов при неизвестных x_1 x_2 x_3 столбцом свободных членов уравнений, стоящих в правой части данной системы. Получим следующие три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 15 & 2 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 15(-20-12) - 2(-20+2) - 3(-24-4) = -360$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 15 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-20+12) - 15(15-8) - 3(-3+16) = -180$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 15 \\ 3 & -4 & -4 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4+24) - 2(-3+16) + 15(18+16) = 540$$

Вычислить неизвестные $x_1 = \dfrac{-360}{-180} = 2$, $x_2 = \dfrac{-180}{-180} = 1$, $x_3 = \dfrac{540}{-180} = -3$.

Проверим это решение, подставив значения неизвестных во все уравнения системы. Получим

$$\begin{aligned} 2\cdot 2 + 2\cdot 1 - 3(-3) &= 4 + 2 + 9 = 15 \\ 3\cdot 2 - 4\cdot 1 + 2(-3) &= 6 - 4 - 6 = -4 \\ 4\cdot 2 + 6\cdot 1 + 5(-3) &= 8 + 6 - 15 = -1 \end{aligned}$$

Решение верное.

б) Решим ту же систему уравнений методом Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу системы и приведем основную матрицу системы к треугольному виду или ступенчатому виду, если число уравнений окажется меньшим числа неизвестных. Приведение матрицы к треугольному виду, то есть такому, когда ниже (или выше) главной диагонали все элементы будут нулевые, а на главной диагонали - ненулевые, всегда возможно. Оно основано на следующих элементарных преобразованиях матрицы, соответствующих эквивалентным преобразованиям система:

1. Перестановка строк матрицы;
2. Перестановка столбцов;
3. Умножение всех элементов строки на одно и то же число;
4. Сложение элементов любой строки с соответствующими элементами любой другой строки;

5. Вычеркивание получившихся нулевых строк.

Вот решение одной системы методом последовательных исключений неизвестных:

Расширенная матрица 1-й шаг 2-шаг

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 0 & -7 & 13/2 & -53/2 \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & -15/2 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 0 & 90/7 & -270/7 \end{array}\right)$$

Возвратимся теперь от матричной записи к системе уравнений. Из последней строки матрицы следует уравнение $\frac{90}{7}x_3 = -\frac{270}{7}$, откуда $x_3 = -3$ Подставляя $x_3 = -3$ в последнее уравнение (вторая строка расширенной матрицы) получим $x_2 - \frac{13\cdot(-3)}{14} = \frac{53}{14}$ или $x_2 = \frac{53-39}{14} = \frac{14}{14} = 1$. Наконец, из первого уравнения системы (первая строка матрицы) найдем $x_1 = \frac{15}{2} - 1 - \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ Решение $\{2;1;-3\}$ такое же , как в случае (а). Оно уже проверено.

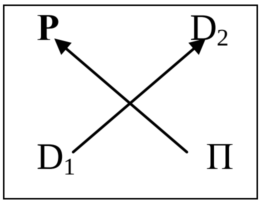
Существует модифицированный метод Гаусса, так называемый метод полного исключения неизвестных, в результате которого основная матрица системы преобразуется в каноническую матрицу, на главной диагонали которой остаются единицы, а все остальные элементы обращаются в нули. Таким образом сразу получается решение.

В основе этого метода лежит следующий алгоритм (строго определенный порядок действий)

1. Выберем разрешающую строку и в ней разрешающий элемент. Обычно это первый элемент первой строки, считая слева направо. Строки можно целиком переставлять, так что на первое место можно записать любую строку, в которой первый элемент не равен нулю.
2. Каждый элемент, разрешающий строки разделим на разрешающий элемент.
3. Элементы разрешающего столбца заменим нулями во всех строках матрицы, кроме разрешающей, где он буден равен единице.

4. Элементы столбцов, Которые были разрешающими на предыдущих шагах исключения, переписываем без изменения.
5. Остальные элементы пересчитаем по следующему правилу «прямоугольника»:

$$\frac{\text{П} \cdot \text{P} - \text{D}_1 \cdot \text{D}_2}{\text{P}} = \text{И}$$



Где П – пересчитываемый элемент, Р – Разрешающий, D_1 и D_2 – “диагональные”, И – искомый. Все эти элементы каждый раз должны быть вершинами воображаемого прямоугольника, образованного параллельными строками и столбцами. Искомый элемент записываем на месте пересчитываемого.
Вернемся к расширенной матрице данной системы и выполним эквивалентной преобразования по предложенной выше схеме полного исключения неизвестных. Рекомендуем читателю все пересчеты коэффициентов по правилу «четырехугольника» записывать подробно.

Данная расширенная матрица 1-й шаг 2-й шаг

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/2 & 15/2 \\ 0 & -7 & 13/2 & -53/2 \\ 0 & 2 & 11 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 26/7 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 0 & 90/7 & -270/7 \end{array}\right) \sim$$

3 - й шаг 4 – й шаг

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 26/7 \\ 0 & 1 & -13/14 & 53/14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Если в последней матрице вернуться к записи уравнений, то получим $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, а это и есть решение данной системы.

в) Решить данную систему методом обратной матрицы.

Решение. Данную систему можно записать в матричном виде AX = B,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения имеет вид X = A^{-1} B = N, где A^{-1} – матрица, обратная матрицы A. Так как определитель матрицы системы D(A) = 180 отличен от нуля то матрица A имеет обратную. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Где A_{11}, A_{12}, …, A_{33} – алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{12}, …, a_{33} матрицы A. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -32; \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 34;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -28; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22; \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13; \qquad A_{33} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -14.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -32 & -28 & -8 \\ -7 & 22 & -13 \\ 34 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу X.

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -32 & -28 & -8 \\ -7 & 22 & -13 \\ 34 & -4 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -480 & 112 & 8 \\ -105 & -88 & 13 \\ 510 & 16 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{180} \begin{pmatrix} -360 \\ -180 \\ 540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = N$$

Из равенства матриц X = N или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ следует решение системы

$x_1=2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$.

Задача 2. Методом исключения неизвестных найти общее и базисное решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{cases}$

Решение.

Это система двух уравнений с тремя неизвестными. Она совместна и неопределенна. Надо описать совокупность всех ее решений. В качестве базисных неизвестных данной системы можно взять те неизвестные, для которых определитель составленный из коэффициентов при нет известных, не равен нулю. Здесь три таких определителя, один из которых равен нулю $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$. Следовательно, неизвестные x_1 и x_2 нельзя брать в качестве базисных. Примем за базисные неизвестные x_1 и x_2, для которых определитель $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23 \neq 0$. Будем считать неизвестную x_3 свободной и запишем систему в виде $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -7 - 6x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 12 - 4x_3 \end{cases}$

Или в матричной форме $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -4 & -7 & -6 \\ 2 & 5 & 12 & -4 \end{array}\right)$. Воспользуемся методом полного исключения неизвестных: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4/3 & -7/3 & -6/3 \\ 0 & 23/3 & 50/3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13/23 & -2 \\ 0 & 1 & 50/23 & 0 \end{array}\right)$

Общее решение: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{23} - 2x_3 \\ x_2 = \dfrac{50}{23} \end{cases}$

Полагая в общем решении $x_3 = 0$, получим <u>базисное решение</u> $x_1 = \frac{13}{23}$,

$x_2 = \frac{50}{23}$

Проверка базисного решения показывает, что оно удовлетворяет обоим уравнениям системы, то есть, является частным решением системы. Давая x_3 любые другие числовые значения, получим бесчисленное множество частных решений.

Аналогично решаются системы с несколькими свободными неизвестными.

Задача 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 6 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц AB.

Решение.

Эти матрицы являются соответственными, так как число столбцов первой матрицы равно числу строк второй: их размеры 2×3 и 3×2. В результате умножения матриц получим новую матрицу C размера 2×2, а ее элементы будут равны скалярным произведениям векторов-строк первой матрицы на векторы-столбцов второй:

$$AB = \begin{pmatrix} -4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 8 \cdot 1 & -4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \\ 2 \cdot 10 - 5 \cdot 6 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 - 5 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 + 18 + 8 & 9 + 56 \\ 20 - 30 + 1 & -15 + 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 65 \\ -9 & -8 \end{pmatrix} = C$$

Задача 4. Даны вершины треугольника A(-3;-2), B(1;8), C(5;3).

Найти: а) уравнения всех трех его сторон;

б) систему неравенств, определяющих множество точек, принадлежащих треугольнику, включая его стороны;

в) внутренний угол A треугольника в градусах и минутах;

г) длину высоты, опущенной из вершины A;

д) площадь треугольника.

Решение.

а) Уравнения сторон найдем по формуле прямой, проходящей через две данные точки $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Уравнение стороны АВ: $\dfrac{x+3}{1+3}=\dfrac{y+2}{8+2}$, или $\begin{matrix} 10x+30=4y+8, \\ 10x-4y+22=0 \\ 5x-2y+11=0 \end{matrix}$ (АВ).

Уравнение стороны АС: $\dfrac{x+3}{5+3}=\dfrac{y+2}{3+2}$, или $\begin{matrix} 5x+15=8y+16 \\ 5x-8y-1=0 \end{matrix}$ (АС)

б) Каждая из прямых, уравнения которых только что найдены, разделяет плоскость на две полуплоскости, определяемые соответствующими неравенствами.

Чтобы определить знаки этих неравенств, возьмем координаты какой-нибудь точки заведомо расположенной внутри треугольника АВС (см. рисунок 1). Такой точкой является, например точка N (0;1) подставляя координаты этой точки в уравнения граничных прямых (сторон) в силу того, что точка N не лежит ни на одной сторон, получим следующую систему неравенств.
$\begin{cases} 5x-2y+11>0, \\ 5x-8y-1<0, \\ 5x+4y-37<0, \end{cases}$ определяющих множество внутренних точек треугольника.

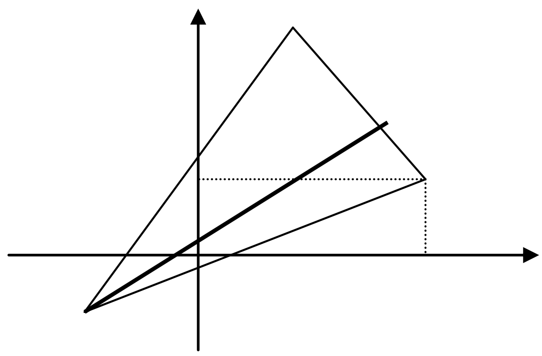


Рис. 1.

Система неравенств $\begin{cases} 5x - 2y + 11 \geq 0, \\ 5x - 8y - 1 \leq 0, \\ 5x + 4y - 37 \leq 0, \end{cases}$ определяет множество точек, принадлежащих треугольнику ABC, включая его стороны.

в) Внутренний угол треугольника найдем, зная угловые коэффициенты сторон AB и AC, образующих этот угол, по формуле $tgA = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} k_{AC}}$.

Угловые коэффициенты прямых вычислим по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Получим $k_{AB} = \frac{8+2}{1+3} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}; \quad k_{AC} = \frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8}$.

Тогда $tgA = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{8}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{40-10}{16+25} = \frac{30}{41} \approx 0{,}7317$

$\angle A = 36^0 12'$. Угол определяем с помощью таблицы тангенсов или калькулятора

г) Длину высоты AD⊥BC (рис. 1) найдем как расстояние от данной точки A(-3;-2) до данной прямой BC: 5x + 4y – 37 = 0 по формуле

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где A, B, C – коэффициенты прямой, $x_0 y_0$- координаты данной точки.

Получим $d = |AD| = \frac{|5 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) - 37|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{60}{\sqrt{41}} \approx 9{,}37$ (ед.)

д) Площадь треугольника можно вычислить несколькими способами. *Вычислить ее через координаты вершин треугольника по формуле* $S = \mathrm{mod}\, \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Получим $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1+3 & 8+2 \\ 5+3 & 3+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(20 - 80) = -30$.

Итак, площадь треугольника S_{ABC} = 30 кв. ед.

Задача 5. Не используя правила Лопиталя, вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$

Решение.

Здесь имеет место неопределённость вида 0/0. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Решение.

Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Задача 6. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}=y'$ следующих функций (дается сложные и неявная функции):

а) $y=\dfrac{3x^2}{\sqrt{10-x^2}}$

Решение.

По правилам дифференцирования дроби получим

$$y'=\frac{(3x^2)'\sqrt{10-x^2}-3x^2(\sqrt{10-x^2})'}{(\sqrt{10-x^2})^2}=\frac{6x\sqrt{10-x^2}-\dfrac{3x^2\cdot(-2x)}{2\sqrt{10-x^2}}}{10-x^2}=$$

$$=\frac{6x(10-x^2)+3x^3}{(10-x^2)^{3/2}}=\frac{60x-3x^2}{(10-x^2)^{3/2}}=\frac{3x(20-x)}{(10-x^2)^{3/2}}.$$

б) $y=x^3\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{2}{x}.$

Решение.

По правилам дифференцирования произведения получим

$$y' = \left(x^3\right)' tg\frac{2}{x} + x^3\left(tg\frac{2}{x}\right)' = 3x^2 tg\frac{2}{x} + x^3\frac{1}{\cos^2\frac{2}{x}}\left(\frac{2}{x}\right)' = 3x^2 tg\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2\cos^2\frac{2}{x}}$$

в) $y = 7\ell^{\cos^2 x}$

Решение.

Дифференцируем как сложную функцию.

$$y' = 7\ell^{\cos^2 x}\left(\cos^2 x\right)' = 7\ell^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x(-\sin x) = -7\sin 2x\ell^{\cos^2 x}$$

г) $y = x\cdot ctgy$. Это неявная функция.

Решение.

$$y' = (x)'ctgy + x\cdot(ctgy)' = ctgy - \frac{x}{\sin^2 y}\cdot y'$$

$$y' + \frac{xy''}{\sin^2 y}ctgy, \qquad y'\left(1 + \frac{x}{\sin^2 y}\right) = ctgy,$$

$$y' = \frac{ctgy\cdot\sin^2 y}{\sin y + x} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2y}{2(\sin^2 y + x)}.$$

Задача 7. С помощью правила Лопиталя вычислить пределы функций:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 2x - 6x}{x^3}.$$

Решение.

Непосредственная подстановка x = 0 приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, следовательно, можно применить правило Лопиталя: заменить предел отношения функций пределом отношения их производных.

$$\ell im_{x\to 0}\frac{3\sin 2x-6x}{3x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\ell im_{x\to 0}\frac{6\cos 2x-6}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\ell im_{x\to 0}\frac{-12\sin 2x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\ell im_{x\to 0}\frac{-24\cos 2x}{6}=-4$$

2) $\ell im_{x\to\infty}\frac{\ell gx}{\ell nx}$

Решение.

При $x\to\infty$ получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, когда можно применить правило Лопиталя.

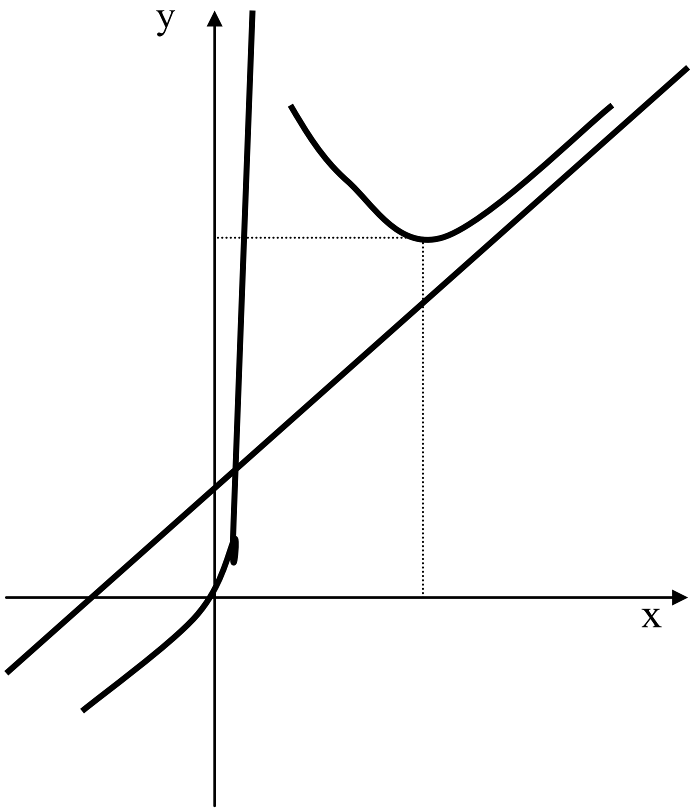
$$\ell im_{x\to\infty}\frac{\ell gx}{\ell nx}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\ell im_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ell n10}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\ell n10}\ell im_{x\to\infty}\frac{x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{\ell n10}\ell im_{x\to\infty}\frac{1}{1}=\frac{1}{\ell n10}=$$
$$=\frac{1}{2{,}3026}=0{,}4343.$$

$$\ell im_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{4+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\ell im_{x\to\infty}\frac{2x}{1}=\infty.$$

Задача 8. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Исследование выполним по примерной схеме, имеющейся в учебниках и практических руководствах. График можно строить либо по ходу исследования, либо конце исследования (рис.2).



1) Область определения функции
   $x \in (-\infty,1) \cup (1,\infty)$.
2) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пусть $x = o$, тогда $y = 0$. Пусть $y = 0$, тогда $x^3 = 0$ или $x = 0$. Значит, график функции проходит через начало координат.
3) Проверить является ли функция четной, нечетной, общего вида.
   $$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = -\frac{x^3}{(x+1)^2}.$$
   Функция общего вида.
4) Найти асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные, горизонтальные).

Вертикальная асимптота может быть в точке разрыва или на границе области определения. Здесь вертикальная асимптота $x = 1$. $\ell\mathrm{im}_{x\to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$, - предел слева в точке $x = 1$; $\ell\mathrm{im}_{x\to 1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$ - предел справа. Наклонные асимптоты вида $y = kx + b$ Найдем, если существуют конечные пределы $k = \ell\mathrm{im}_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \ell\mathrm{im}_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$.

Здесь $k = \ell\mathrm{im}_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \ell\mathrm{im}_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \ell\mathrm{im}_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$

Итак, $y = x + 2$ - уравнение наклонной асимптоты.

5) Найти интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции и точки экстремума.

Найдем производную первого порядка.

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

Найдем критические точки первого рода и выясним знаки y' на полученных интервалах в окрестности критических точек. Критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ - последняя н входит в область определения функции. Используя достаточные признаки экстремума, выясним, как меняет знак y'при переходе через критические точки слева направо. Возьмем непрерывный интервал $-1 < x < \frac{1}{2}$, содержащий точку $x = 0$.

$y'(-1) = \frac{(-1)^2(-1-3)}{(-1-1)^3} > 0$; $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-3\right)}{\left(\frac{1}{2-1}\right)^3} > 0$. Так как при переходе через точку $x = 0$ производная y' знак не имеет, то функция монотонно возрастает и $x = 0$ не является точкой экстремума.

Возьмем интервал $2 < x < 4$, содержащий точку x = 3.

$y'(2) = \frac{2^2(2-3)}{(2-1)^3} < 0$; $y'(4) = \frac{4^2(4-3)}{(4-1)^3} > 0$. Здесь производная меняет знак с «-» на «+», значит, x =3 – точка минимума функции $y_{\min}(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4} = 6{,}75.$

Итак, функция возрастает на интервалах $(-\infty,1)$ и $(3,\infty)$, убывает на интервале (1;3).

6) Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

Вычислим производную второго порядка и найдем критические точки второго рода.

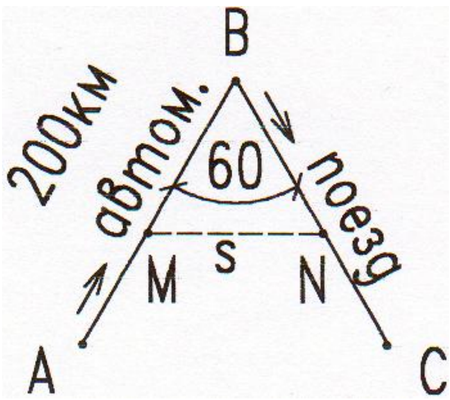
$$y'' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x-1)\ (x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Критические точки второго рода, при которых y''обращается в нуль или существует, такие $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, но эта последняя не входит в область определения функции. Остается точка x = 0. Проверим меняет ли знак y'' при переходе через эту точку. Возьмем интервал (-1;$\frac{1}{2}$), содержащий точку x = 0. Вычислим $y''(-1) = \dfrac{-6}{(-1-1)^4} < 0$, $y''\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{6 \cdot \dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^4} > 0$. Отсюда следует, что x = 0 – точка перегиба, $y(0) = 0$. $y''(3) = \dfrac{6 \cdot 3}{(3-1)^4} > 0$. Отсюда следует, что $(-\infty, 0)$ - интервал выпуклости; $(0;1)$, $(1;\infty)$ - интервалы вогнутости кривой.

Задача 9. Три пункта А.В. и С расположены так, что угол АВС (рис.3) равен 60^0. Расстояние между пунктами А и В равно 200 км. Одновременно из пункта А выходит автомобиль, а из пункта В – поезд. Автомобиль движется по направлению к пункту В со стороны 80 км/ч, а поезд движется по направлению к пункту С со скоростью 50 км/ч. Через скорость времени расстояние между автомобилем и поездом будет наименьшим?

Решение.



Пусть t-время, через которое после начала движения автомобиля и поезда, расстоянием MN = s между ними будет наименьшим. По теореме косинусов для треугольника MBN запишем равенство $s^2 MB^2 + Nb^2 - 2MB \cdot NB \cos 60^0$

H_0 MB = 200 – 80t,

NB = 50t,

$\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$.

рис. 3.

Тогда получим уравнение

$$s^2 = (200-80t)^2(50t^2) - (200-80t)50t = 10^2 4^2 (5-2t)^2 + 10^2 \cdot 5^2 \cdot t^2 - 10^2 \cdot 4 \cdot 5(5-2t)t = \\ = 10^2\left(16\left(25-20t+4t^2\right) + 25t^2 - 100t + 40t^2\right) = 100\left(400 - 420t + 129t^2\right);$$

$s(t_0) 10\sqrt{58.142} = 10 \cdot 7.625 = 76.25$ км.

Отсюда $s = 10\sqrt{129^2 - 4200t + 400}$. Найдем первую производную по t:

$s' = \dfrac{10(258t + 420)}{2\sqrt{129t^2 - 420t + 400}}$. Приравнивая первую производную к нулю получим $258t - 240 = 0$, откуда $t = \dfrac{420}{258} = 1.6279 = t_0$ или $t = 1ч37'48''$ - критическая точка.

Квадратный трехчлен под корнем в знаменателе в ноль не обращается ни при каких действительных значениях t, поскольку его дискриминант $Д = -7500 \prec 0$.

Легко видеть, что при переходе через критическую точку t_0 от меньших значений t к большим, например, от t = 1 до t = 2, первая производная меняет знак с минуса на плюс $\left(s'(1) \prec 0, s'(2) \succ 0\right)$. Следовательно, t_0 = 1.6279 часа – точка минимума функции s. А так как других экстремумов эта функция не имеет, то в точке минимума функция имеет <u>наименьшее</u> значение: $s_{наим}(1{,}6279) = 10\sqrt{58{,}142} = 76{,}251 км$.

Задача 10. Найти частные производные и полный дифференциал функции двух независимых переменных:

а) $z = 3x^3y^2 - 2y^4 + x^5 - 1$

Решение.

Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 9x^2y^2 + 5x^4$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6x^3y - 8y^3$.

Составим полный дифференциал по формуле $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Получим $dz = \left(9x^2y^2 + 5x^4\right)dx + \left(6x^3y - 8y^3\right)dy$.

б) $z = 2\ell n tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{y}\right)$.

Решение.

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{tg\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} = \frac{2}{\sin 2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{tg\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \left(\frac{2}{y^2}\right) = \frac{4}{y^2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} = \frac{8}{y^2 \sin 2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)}.$$

Составим полный дифференциал

$$dz = \frac{2dx}{\sin 2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} + \frac{8dy}{y^2 \sin 2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)} = \frac{2}{\sin 2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{y}\right)}\left(dx + \frac{4}{y^2}dy\right).$$

Задача 11. Найти экстремум функции $z = x^2 - xy + y^2 + 9x$

Решение.

Найдем частные производные: $z'_x = 2x - y + 9, \quad z'_y = -x + 2y,$
$z''_{xx} = 2, \qquad z''_{yy} = 2,$

и смешанную производную $z''_{xy} = -1$.

Необходимое условие экстремума: $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ -x + 2y = 0, \end{cases}$ x = 2y, 4y – y = -9, y = -3

x = -9

Итак, точка P(-9; -3) критическая точка. Составим выражение $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2$ и вычислим его значение в критической точке P(-9; -3).

Тогда, если $\Delta(P) > 0$, то P- точка экстремума. При этом, если $z''_{xx}(P) > 0$, то P – точка минимума,

а если $z''_{xx}(P) < 0$, то P – точка максимума,

Если $\Delta(P) < 0$, экстремума нет, а если $\Delta(P) = 0$ - экстремум может быть, а может не быть. Нужны дополнительные исследования.

Установим характер экстремума в точке P(-9; -3).

$\Delta(P) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, следовательно, P(-9; -3)- точка экстремума, а так как $z''_{xx} = 2 > 0$ независимо от координат точки P, то P(-9; -3) – точка минимума данной функции.