

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего п образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича
Столетовых»
(ВлГУ)
Кафедра “АТБ”**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ДАТЧИКИ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИКИ»**

Составитель:

П.С. Сабуров

Владимир 2016

Практическая работа №1 «Расчет потенциометрических датчиков»

Рассмотрим одну из методик расчета двухтактного потенциометрического датчика (ПД) угловых перемещений, выполненного на линейном потенциометре. Основными этапами расчета по этой методике являются:

1) Определение основных конструктивных параметров каркаса и обмотки;

2) Расчет электрических параметров обмотки;

3) Расчет температурного режима датчика.

Основные параметры ПД условно можно разделить на конструктивные и схемные, или электрические параметры (рис.1, а, б).

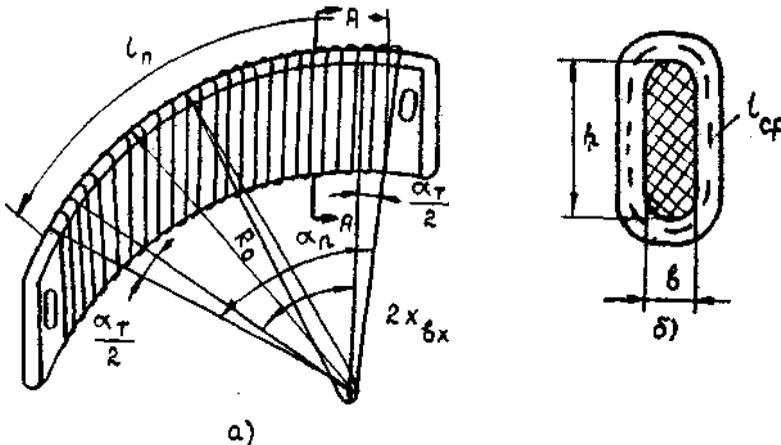


Рис. 1. Конструктивные параметры потенциометрического датчика

К конструктивным параметрам относятся:

D_0 - средний расчетный диаметр каркаса;

α_n - угол намотки потенциометра;

h - высота каркаса;

b - ширина или толщина каркаса;

α_m - суммарная технологическая добавка;

l_n - рабочая длина каркаса;

t - шаг намотки;

n - число витков обмотки;

d - диаметр провода обмотки без изоляции;

$d_{из}$ - диаметр провода с изоляцией.

К схемным, или электрическим параметрам относятся:

U - напряжение питания датчика;

R_n - общее сопротивление обмотки потенциометра;

ρ - удельное сопротивление материала провода;

δ_{lmax} - максимальная относительная погрешность нагруженного датчика.

Названные параметры связаны между собой следующими соотношениями:

$$l_n = \frac{\alpha_n \cdot D_0 \cdot \pi}{360^\circ} = nt$$

$$l_n = nt$$

Для инженерных расчетов принято, что шаг намотки

$$t = d_{из} + (0,012..0,015) \text{ мм}$$

Длина одного витка l_v определяется как

$$l_v = 2(h + v) + \pi d_{из}$$

Обычно h и v определяют из соотношений

$$h \approx (0,3..0,6) l_n, \quad h \approx 8v$$

С другой стороны, длина витка может быть определена как

$$l_v = \frac{R_n \cdot \pi \cdot d^2}{4\pi\rho}$$

При расчете температурного режима датчика обычно используются методикой, основанной на ориентировочном определении величины перегрева датчика в установившемся режиме,

В основу этого расчета положена следующая приближенная формула.

$$\frac{U^2}{R_n} = mcS_{об}\Theta_y$$

где m - коэффициент, учитывающий теплопроводимость каркаса и изоляции обмотки, равный 0,5-0,7 для пластмассовых, 1,5 для керамических и 2-3 для алюминиевых каркасов;

c - коэффициент теплоотдачи обмотки;

$S_{об}$ - поверхность обмотки, соприкасающаяся со средой;

Θ_y - установившийся перегрев обмотки (превышение температуры датчика над температурой окружающей среды).

Рассмотрим методику расчета на следующем конкретном примере.

Исходные данные:

1. Максимальное значение входной величины $x_{вхmax} = \alpha_{вхmax} = 11^\circ$

2. Коэффициент передачи датчика $K_d = 1B/град.$

3. Порог чувствительности $\Delta\alpha_{min} = 6'$.

4. Максимальная относительная погрешность $\delta_{max} = 1\%$.

5. Диапазон изменения температуры окружающей среды

$$\Delta t = -50^\circ\text{C} \dots + 60^\circ\text{C}$$

6. Конструкция каркаса (см. рис. 1) и его радиус $R_0 = 30\text{ мм.}$

Рекомендуемая последовательность расчета:

I. Определяем общую величину угла намотки потенциометра

$$\alpha_n = 2\alpha_{вхmax} + \alpha_T = 2 \cdot 11 + 3 = 25^\circ$$

где α_T - технологическая добавка к рабочей протяженности каркаса ($\alpha_T = 3 \dots 5^\circ$).

2. Вычисляем длину намотки потенциометра

$$l_n = \frac{\alpha_n \cdot D_0 \cdot \pi}{360^\circ} = \frac{25 \cdot 60}{360} = 13 \text{ мм}$$

3. Определяем число витков датчика

$$n = \frac{\alpha_n}{\Delta\alpha_{\min}} = \frac{25^\circ}{0,1^\circ} = 250 \text{ витков}$$

4. Вычисляем шаг намотки

$$t = \frac{l_n}{n} = \frac{13}{250} = 0,052 \text{ мм}$$

5. Определяем диаметр провода в изоляции и без нее

$$d_{\text{уз}} = t - (0,012 \dots 0,015) \text{ мм}, \quad d = t - 0,03 \text{ мм}.$$

Стандартный диаметр провода выбирается из таблицы, которая приводится в справочниках.

6. Выбираем высоту h , толщину v и материал каркаса

$$h = (0,3 \dots 0,6) l_n = 8 \text{ мм}, \quad h = 8v.$$

(Принимаем $v = 1 \text{ мм}$)» В качестве материала каркаса для лучшего отвода тепла выбираем алюминий.

7. Определяем среднюю длину l_{cp} одного витка обмотки

$$l_{\text{cp}} = 2(h + v) + \pi d_{\text{уз}} = 2(1 + 8) + 3,14 \cdot 0,04 = 18,1 \text{ мм}$$

8. Вычисляем длину провода обмотки $l_{\text{обм}}$

$$l_{\text{обм}} = l_{\text{cp}} \cdot n = 18,1 \cdot 250 = 4525 \text{ мм}$$

9. Определяем минимально допустимое напряжение питания

$$K_\delta = \frac{U}{\alpha_n}; \quad U = k_\delta \cdot \alpha_n = 1 \cdot 25 = 25 \text{ В}.$$

10. Вычисляем допустимую величину тока I_n , протекающего по обмотке датчика

$$I_n = jS_{np} = j \frac{\pi \cdot d_2}{4} = \frac{25 \cdot 3,14 \cdot 0,03^2}{4} = 0,0175 \text{ A} ,$$

где: j – допустимая плотность тока ($j=25 \dots 30 \text{ A/мм}^2$) для ПД с металлическим каркасом; ($j=45 \dots 50 \text{ A/мм}^2$) для ПД с керамическим каркасом и ($j=15 \dots 20 \text{ A/мм}^2$) для ПД с пластмассовым каркасом металлическим каркасом.

S_{np} – площадь поперечного сечения провода обмотки.

11. Определяем необходимое сопротивление обмотки ПД,

$$R_n = \frac{U}{I_n} = \frac{25}{17,5 \cdot 10^{-3}} = 1430 \text{ Ом} = 1,43 \text{ КОм}$$

12. Вычисляем необходимое удельное сопротивление обмотки

$$\rho = \frac{R_n \cdot S}{l_{cp} \cdot n} = \frac{1430 \cdot 3,14 \cdot 0,032}{418,1 \cdot 250 \cdot 10^{-3}} = 0,225 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м}$$

13. Выбираем материал провода для обмотки.

Близким удельным сопротивлением к полученному обладает константан с $\rho = 0,44 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ (константен обладает малой зависимостью удельного сопротивления от температуры).

14. Определяем действительные значения R_n и j

$$R_n = \frac{4 \cdot l_{cp} \cdot h \cdot \rho}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 18,1 \cdot 250 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,03^2} \cdot 0,44 = 2820 \text{ Ом}$$

Проверку на плотность тока производить нет необходимости, так как выбран провод с удельным сопротивлением, превышающим расчетную величину.

15. Вычисляем абсолютное значение ΔU

$$\Delta U = \frac{\delta_l \cdot U}{100} = \frac{11}{100} = 0,11В.$$

16. Определяем потребный нагрузочный коэффициент

$$U_{\text{вых.н}} = U \frac{r_*}{1 + \alpha(r_* - r_*^2)}$$

для $r_* = 0,5$ имеем

$$\alpha = \frac{0,5U - U_{\text{вых.н}}}{0,25 - U_{\text{вых.н}}} = \frac{11 \cdot 10^{-2}}{0,25 \cdot 11} = 4 \cdot 10^{-2}.$$

17. Вычисляем минимально допустимую величину сопротивления нагрузки, которое может быть подсоединено к ПД, чтобы $\delta_l = 1\%$

$$\alpha = \frac{R_n}{R_n}$$

$$R_n = \frac{R_n}{\alpha} = \frac{2820}{4 \cdot 10^{-2}} = 70500 \text{ Ом} \approx 70 \text{ КОм}$$

18. Определяем поверхность обмотки

$$S_{\text{обм}} = 2l(h + v + \pi d_{\text{из}}) = 2 \cdot 13(8 + 1 + 6,28 \cdot 0,04) \approx 234,25 \text{ мм}^2$$

19. Вычисляем действительное значение перегрева обмотки в установившемся режиме

$$\Theta_{\text{уст}} = \frac{U^2}{R_n \cdot m \cdot c \cdot S_{\text{обм}}} = \frac{25^2}{2840 \cdot 10^{-3} \cdot 2,34 \cdot 2,5} = 38^\circ.$$

Для алюминиевого каркаса $c = 10^{-3} \text{ Вт/град} \cdot \text{см}^2$

Из условия хорошего контакта движка с обмоткой и отсутствия коробления каркаса допускается превышение температуры обмотки над температурой окружающей среды не более $\Theta_{\text{доп}} = 40 \dots 50^\circ$, где

$\Theta_{доп} = \Theta_{об} - \Theta_{ср}$; $\Theta_{ср}$ температура окружающей среды; $\Theta_{об}$ - температура обмотки.

Так как при расчете получено, что $\Theta_{уст} < \Theta_{доп}$ никаких поправок в расчет вводить не требуется.

Следует иметь в виду, что температура контактирующих поверхностей не должна превышать 120-150°C. Это позволит исключить интенсивное окисление материалов обмотки и движка,

Далее выбирают материал движков потенциометров из условия обеспечения надежного, контакта при небольших контактных давлениях (1 г и менее) и малого износа. При разработке конструкции ПД необходимо ознакомиться с конструкциями известных датчиков, которые можно взять за прототип, изучить их достоинства и недостатки с точки зрения надежности и точности работы, технологичности и т.д.

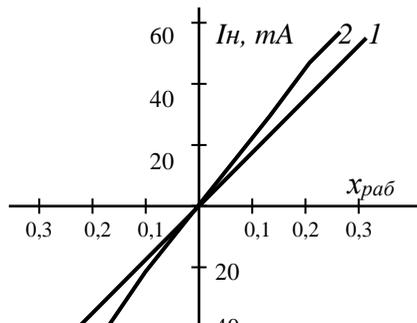
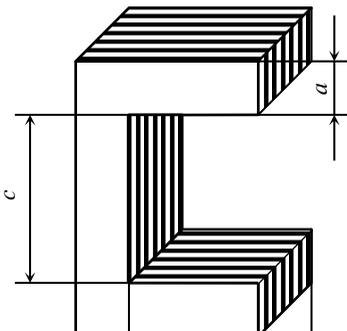
Практическая работа №3 «Расчет индуктивного датчика» №

Рассмотрим пример расчета индуктивно датчика, схема которого приведена на (рис.2). Кроме принципиальной схемы будем полагать заданными следующие величины:

- 1) Рабочий ход якоря $x_{раб} = \pm 0,1 \text{ мм}$;
- 2) Передаточный коэффициент $K_{\delta} = 0,25 \text{ А/мм}$;
- 3) Сопротивление нагрузки $R_H = 100 \text{ Ом}$;
- 4) Напряжение источника питания $U_0 = 40 \text{ В}$.

Напряжение на вторичной полуобмотке трансформатора питания $U = 20 \text{ В}$

- 5) Частота напряжения питания $f = 500 \text{ Г}$
- 6) Материал сердечника - электротехническая сталь Э41.
Сердечник набран из П - образных пластин с размерами $a = 6 \text{ мм}$ $v = 12 \text{ мм}$, $c = 10 \text{ мм}$ (рис.2, а).



Расчет выполняем в следующей последовательности:

1. Выбираем начальное значение магнитной индукции $B_{m0} = 0,2$ Тл. С целью уменьшения электромеханического усилия, действующего на якорь датчика и вызывающего погрешности в измерении выходной величины, B_{m0} обычно выбирают не более $0,2-0,3$ Тл. Однако следует иметь в виду, что габариты датчика будут меньше при большем значении B_{m0} .

2. Определяем число витков обмоток датчика

$$W = \frac{2,25 \cdot B_{m0} \cdot 10^6}{K_{\delta}} = \frac{2,25 \cdot 0,2 \cdot 10^6}{250} = 1800$$

3. Определяем сечение магнитопровода S_m .

4. Полагая коэффициент заполнения сердечника $K_3 = 1,2$, найдем толщину пакета сердечника

$$m = \frac{S_m \cdot K_3}{a} = \frac{25 \cdot 1,2}{6} = 5 \text{ мм}$$

5. Выбираем диаметр и марку обмоточного провода

$$d = 2 \sqrt{\frac{\epsilon \cdot c \cdot K_{30}}{\pi \cdot W}} = 2 \sqrt{\frac{12 \cdot 10 \cdot 0,5}{3,14 \cdot 1800}} = 0,21 \text{ мм}$$

Коэффициент заполнения окна K_{30} в зависимости от типа провода и изоляции слоев обмотки принимают в пределах $K_{30} = 0,4 \dots 0,6$.

Следует однако учитывать, что часть окна $Q = \omega c$ будет занята каркасом, на который непосредственно наматывается обмотка.

6. Определяем величину активного сопротивления обмотки:

$$R_{обм} = \frac{4 \cdot \rho \cdot l_{cp} \cdot W}{\pi \cdot d_0^2} = \frac{4 \cdot 0,0175 \cdot 0,041 \cdot 1800}{3,14 \cdot 0,16^2} \approx 650 \text{ Ом}$$

где: ρ - удельное сопротивление материала провода;

d_0 - диаметр провода без изоляции (берется по сортаменту);

l_{cp} - средняя длина одного витка обмотки (величина может быть принята равной размерам магнитопровода).

По сортаменту проводов выбран провод марки ПЭВ-2 с диаметром $d_1 = 0,2 \text{ мм}$. Сечение этого провода по меди (без изоляции) $q = 0,02 \text{ мм}^2$, ($d_0 = 0,16 \text{ мм}$). Величина l_{cp} определена приближенно из рассмотрения конструкции обмотки и принята равной 41 мм.

7. Выбираем величину начального воздушного зазора

$$\delta_0 = 5 \cdot x_{раб} = 0,5 \text{ мм}$$

Обычно при выборе величины начального воздушного зазора пользуются следующим соотношением, дающим удовлетворительные результаты на практике:

$$\delta_0 = (4 \dots 6) x_{раб}$$

где $x_{раб}$ - рабочий ход якоря, как правило, задается в условиях на расчет датчика или выбирается проектировщиком на основе анализа условий работы датчика.

8. Полагая $I_n = I_1 - I_2$ производим расчет данных для построения статической характеристики по формулам:

$$L_1 = \frac{\mu_0 \cdot W^2 \cdot S_m}{2(\delta_0 + x)} = \frac{K}{\delta_0 + x};$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 \cdot W^2 \cdot S_m}{2(\delta_0 - x)} = \frac{K}{\delta_0 - x}.$$

где $K = 0,2 \cdot \pi \cdot 10^{-6} \cdot W^2 \cdot S_M$;

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{(R_{обм} + R_H)^2 + \omega^2 L_2^2}} = \frac{U}{Z_1}$$

$$I_{12} = \frac{U}{\sqrt{(R_{обм} + R_H)^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U}{Z_1}$$

Результаты расчета для одной ветви характеристики приведены в табл. 1

Таблица 1

$x, мм$	$L_2, Г$	$L_1, Г$	$Z_2, Ом$	$Z_1, Ом$	I_2, mA	I_1, mA	I_H, mA
0	0,100	0,100	356	356	56,2	56,2	0
-0,05	0,111	0,091	384	330	52,2	60,6	8,4
-0,1	0,125	0,084	425	311	47,0	64,3	17,3
-0,2	0,167	0,072	550	280	36,4	71,5	35,1
-0,3	0,250	0,063	802	258	24,4	77,5	53,1
-0,4	0,500	0,056	1570	241	12,7	83,0	70,3

Построенная по этим данным статическая характеристика приведена на (рис.2,б) (кривая 1). Передаточный коэффициент определенный по этой характеристике, приблизительно равен $0,175 А/мм$ Следовательно, при расчете необходимо было принять большее значение K_g . Кроме того, можно обеспечить требуемое значение передаточного коэффициента K_g путем уменьшения начального значения воздушного зазора δ_0 . Примем $\delta_0 = 3x_{раб} = 0,3 мм$ рассчитаем новую статическую характеристику. Результаты расчета приведены в табл.2, а построенная по этим данным характеристика приведена на (рис. 1б,б) (кривая 2).

Таблица 2

$x, \text{мм}$	L_2, Γ	L_1, Γ	$Z_2, \text{Ом}$	$Z_1, \text{Ом}$	$I_2, \text{мА}$	$I_1, \text{мА}$	$I_n, \text{мА}$
0,00	0,167	0,167	550	550	36,4	36,4	0,0
0,05	0,200	0,143	650	478	30,8	41,9	11,8
0,10	0,250	0,125	800	425	25,0	47,1	23,1
0,15	0,333	ОДП	1050	386	19,0	52,0	34,0
0,20	0,500	0,100	1580	355	12,7	56,4	43,7
0,25	1,000	0,091	3140	330	6,4	60,7	54,3

Нетрудно видеть, что уменьшение δ_0 привело к увеличению передаточного коэффициента K_δ (теперь он примерно равен $0,23 \text{ А/мм}$ однакo линейность статической характеристики несколько уменьшилась).

При выборе обмоточного провода обычно предпочтение отдают проводу ПЭВ-2 (медный, изолированный высокопрочной эмалью в два слоя), применяемый при повышенных механических воздействиях на него в процессе намотки. Иногда используется провод ПЭЛШО с эмалевой изоляцией, дополнительно защищенной шелковой обмоткой. Этот провод рассчитан на повышенные механические нагрузки в процессе намотки и при работе, но имеет больший наружный диаметр, чем ПЭВ-2. Наружные диаметры проводов ПЭВ-2 и ПЭЛШО приведены в (табл.3).

Таблица 3

Сортамент медного провода

Сечение по меди, мм ²	Диаметр по меди, мм	Диаметр с изоляцией, мм		Сечение по меди, мм ²	Диаметр по меди, мм ²	Диаметр с изоляцией, мм	
		ПЭВ-2	ПЭЛШО			ГЭВ-2	ПЭЛШО
0,00283	0,06	0,09	0,13	0,256	0,57	0,64	0,685
0,00385	0,07	0,10	0,14	0,273	0,59	0,66	0,705
0,00502	0,08	0,11	0,15	0,302	0,62	0,69	0,735
0,00636	0,09	0,12	0,16	0,322	0,64	0,72	0,755
0,00785	0,10	0,13	0,175	0,353	0,67	0,75	0,785
0,00950	0,11	0,14	0,185	0,374	0,69	0,77	0,805
0,01131	0,12	0,15	0,195	0,407	0,72	0,80	0,845
0,01327	0,13	0,16	0,205	0,430	0,74	0,83	0,865
0,01539	0,14	0,17	0,215	0,466	0,77	0,86	0,895
0,01767	0,15	0,19	0,225	0,503	0,80	0,89	0,925
0,02011	0,16	0,20	0,235	0,541	0,83	0,92	0,955
0,02270	0,17	0,21	0,245	0,581	0,86	0,95	0,985
0,02545	0,18	0,22	0,255	0,636	0,90	0,99	1,025

0,02835	0,19	0,23	0,265	0,679	0,93	1,02	1,055
0,03142	0,20	0,24	0,29	0,724	0,96	1,05	1,085
0,0346	0,21	0,25	0,30	0,785	1,00	1,11	1,135
0,04155	0,23	0,28	0,32	0,850	1,04	1,15	1,175
0,04909	0,25	0,30	0,34	0,916	1,08	1,19	1,215
0,05726	0,27	0,32	0,37	0,985	1,12	1,23 -	1,255
0,06605	0,29	0,34	0,39	1,057	1,16	1,29	1,295
0,07548	0,31	0,36	0,415	1,227	1,20	1,31	1,335
0,08553	0,33	0,38	0,435	1,310	1,25	1,36	1,385
0,09621	0,35	0,41	0,455	1,327	1,30	1,41	1,435
0,11340	0,38	0,44	0,49	1,431	1,35	1,46	1,485
0,13200	0,41	0,47	0,52	1,539	1,40	1,51	1,535
0,15200	0,44	0,50	0,55	1,651	1,45	1,56	1,585
0,17300	0,47	0,53	0,58	1,767	1,50	1,61	1,655
0,18800	0,49	0,55	0,60	1,911	1,56	1,67	1,715
0,20400	0,51	0,58	0,625	2,06	1,62	1,73	1,775
0,22000	0,53	0,60	0,645	2,22	1,68	1,79	1,835
0,23800	0,55	0,62	0,665	2,38	1,74	1,85	1,895

Практическая работа №3 «Обработка результатов прямых равноточных измерений. Систематические и случайные погрешности»

Цель работы: изучить существующие погрешности измерений и их классификацию.

Метод измерений – это совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей. Метод измерений осуществляется в соответствии с измеряемым объектом и доступным набором измерительных средств. Измерительные приборы изготовлены человеком и, конечно, не могут быть идеально точными. Кроме того, неточности в измерения вносит сама процедура измерения, так как действия человека не являются идеальными. К ошибкам в измерении могут привести и недостатки выбранного метода измерения, а также отличие условий, в которых производятся измерения, от нормативных условий, указанных в паспорте измерительного прибора. Приведенные факторы указывают на то, что результаты измерения не является точными и содержат

погрешность или, как говорят, результаты измерений отягощены погрешностью.

В связи с этим различают **истинное значение** физической величины, идеально отражающее свойство материального объекта и **действительное значение** физической величины. Действительное значение физической величины – это значение, найденное экспериментально.

Истинной погрешностью измерения называется отклонение результата измерения физической величины (действительного значения) от ее истинного значения. При проведении измерений, как правило, истинное значение измеряемой величины неизвестно. **Результатом измерения является оценка истинного значения, которое чаще всего с ним не совпадает.**

Покажем, что наилучшей оценкой истинного значения измеряемой величины X является среднее значение $\langle X \rangle$ из отсчетов, каждый из которых дает величину X_i , где $i=1, 2, 3, \dots, n$. Если X_0 - истинное значение измеряемой величины. То разность ΔX_i между измеренным значением X_i и истинным значением X_0 называется абсолютной случайной погрешностью отдельного измерения. Тогда для полученных результатов можно записать:

$$\begin{aligned} X_1 - X_0 &= \Delta X_1 \\ X_2 - X_0 &= \Delta X_2 \\ &\dots\dots\dots \\ X_n - X_0 &= \Delta X_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

Сложим эти n равенств и определим из полученной суммы значение X_0 :

$$X_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \Delta X_i}{n}. \quad (5.2)$$

В формуле (5.2) величины ΔX_i могут быть как положительными, так и отрицательными. Следовательно, чем больше число измерений n , тем более вероятна полная взаимная компенсация погрешностей, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta X_i = 0. \quad (5.3)$$

Тогда переходим к пределу в формуле (5.2) и получаем:

$$X_{\text{ср}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}. \quad (5.4)$$

где

$$\langle X \rangle = X_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (5.5)$$

Следовательно, среднее арифметическое всех результатов измерений при бесконечно большом числе измерений равно истинному значению измеряемой величины. На практике число измерений n всегда конечно, поэтому $X_{\text{ср}}$ представляет собой приближенное значение измеряемой величины.

Таким образом, в качестве наилучшего значения измеряемой величины обычно принимают среднее

арифметическое из всех полученных при измерениях результатов. Его также называют выборочное среднее значение. При этом возникает задача определения погрешности этого значения.

Принято, независимо от того, известно или неизвестно истинное значение, погрешность характеризовать, так называемым **доверительным интервалом**, в котором с определенной степенью достоверности содержится истинное значение. Середина этого интервала совмещается с оценкой истинного значения (рис.1).



Для определения погрешности измерения необходимо вычислить **абсолютную и относительную погрешность**.

Абсолютной погрешностью ΔX называется модуль разности между оценкой измеряемой величины и границей интервала. Другими словами, абсолютная погрешность равна полуширине доверительного интервала. Абсолютная погрешность имеет размерность измеряемой величины и показывает, на сколько отличается результат измерений от действительного значения или от оценки. Абсолютная

погрешность не характеризует качество измерения. Поэтому вводится понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью δX называется отношение абсолютной погрешности к оценке истинного значения:

$$\delta X = \frac{\Delta X}{\langle X \rangle} \cdot 100 \quad (5.6)$$

Величина, обратная относительной погрешности, называется **точностью измерений**.

Эти величины используются при сравнении результатов измерения одной и той же величины различными методами. Если доверительные интервалы различных измерений перекрываются, то говорят, что различия результатов измерения незначительны и результаты измерений согласуются. Наоборот, если доверительные интервалы различных измерений одной и той же величины не перекрываются, то различия считаются значимыми и результаты измерений не совпадают. Такая ситуация требует проверки правильности выбора того или иного метода измерения.

Так как причины погрешности, в принципе, неизвестны, то их классифицируют по различным критериям. По влиянию на результат измерения можно выделить следующие виды погрешностей:

1. **Случайная погрешность.** Эта погрешность изменяется случайным образом при повторении измерений. Случайными погрешностями называются погрешности, причина которых неизвестна. Случайные погрешности вызываются случайными причинами, действие которых на каждое измерение носит случайный характер, и которое не может быть заранее учтено. Случайные погрешности вызываются, например, сотрясениями фундамента здания, в котором производятся измерения, влиянием движения воздуха, случайным положением глаза при взгляде на измерительную

шкалу. Случайные погрешности, как и случайные явления, изучаются с помощью математического аппарата теории вероятностей.

2. Систематическая погрешность. Эта погрешность остается постоянной при повторении измерений или же закономерно изменяется при повторении измерений. При этом закономерность известна экспериментатору или может быть найдена им.

3. Промах (грубая ошибка). Эта погрешность существенно превосходит ожидаемую погрешность при заданных условиях измерения. Промахи возникают при случайных внезапных изменениях условий измерения. Такие ситуации возникают при неожиданных толчках, ударах и других явлениях, которые не входят в изучаемое явление. Промахи возникают при неверном отсчете, неправильном подборе измерительной шкалы и т.д. Промахи выявляются путем обработки методами теории вероятностей результатов повторных измерений. Выявленные промахи устраняются из результатов измерений.

Существует очень много причин погрешности измерения или много источников погрешности. Среди них, чаще всего, выделяют следующие виды погрешностей:

1. Инструментальная погрешность. Эта погрешность связана с несовершенством средств измерений, т. е. измерительных приборов. Поэтому ее часто называют приборной погрешностью.

2. Методическая погрешность или погрешность метода измерений. Эта погрешность обусловлена несовершенством метода измерений. Например, при изучении равноускоренного движения на машине Атвуда не учитывается действие сил сопротивления воздуха, трения в блоке, силы Архимеда, масса нити и блока, упругие свойства нити. Эти факторы не учитываются в формулах, по которым производится исследование явления.

3. Погрешности, обусловленные объектом измерения. Эта погрешность связана с тем, что при измерении мы всегда

имеем дело с моделью объекта измерения, которая представляет собой идеализированный образ реального объекта. Так, например, при измерении объема цилиндра мы берем реальный цилиндр и считаем его идеальным цилиндром. Если же мы будем измерять геометрические характеристики этого цилиндра, то увидим, что он далек от идеального.

4. Субъективная погрешность. Субъективные погрешности связаны с индивидуальными психофизиологическими реакциями исследователя, проводящего измерения. Эта погрешность обусловлена несовершенством самого экспериментатора. Например, человек, проводящий измерения, может под разными углами зрения отмечать измеряемое значение, что также вносит погрешности в измерения.

Эти источники погрешностей могут иметь и систематическую и случайную составляющие погрешности. Их вклад в погрешность зависит от условий организации эксперимента.

Оценка погрешности измерения является необходимой частью измерения, так как позволяет определить качество процедуры измерения и сравнить полученные результаты измерения с результатами, полученными в других измерениях. Поэтому проанализируем способы оценки различных погрешностей.

Случайная погрешность может быть определена с помощью статистической обработки результатов измерений. Эта же обработка позволяет определить, при каком количестве измерений случайная погрешность будет находиться в заранее заданном интервале, или при каком количестве измерений она будет наименьшей.

Определение и уменьшение **систематической погрешности** является одной из сложных задач теории измерений или метрологии. Решение этой задачи зависит от конкретных условий измерения, и общей методики решения этой задачи не существует. Чаще всего при определении систематических погрешностей проводится всесторонний

теоретический анализ метода измерения. Это позволяет учитывать большее количество факторов, влияющих на результат измерения. Кроме того, при определении систематических погрешностей особое внимание уделяется анализу возможностей измерительной техники. При необходимости провести очень точные измерения систематическая погрешность оценивается по результатам измерения величины различными принципиально независимыми методами.

Промахи относятся к аномальным результатам измерений, которые могут возникнуть под влиянием случайных помех при измерении. Примером промахов может быть результат отсчета с помощью неисправного прибора. Такие результаты отсчетов отбрасываются. Однако надо помнить, что отбрасывается только тот аномальный результат, причина которого выяснена. Поэтому при обнаружении аномальных результатов надо наиболее тщательно и многократно повторить эксперимент. Если же содержание эксперимента известно, а причину промаха найти не удастся, то вопрос об отбрасывании аномального результата решается на основе статистической обработки экспериментальных данных.

Систематические погрешности измерений

Классификация систематических погрешностей измерений

Систематические погрешности измерений $\Delta X_{\text{сист}}$, являются постоянными или изменяются известным образом при проведении серии измерений. Систематические погрешности принципиально могут быть исключены из измерений на основе определения их значений с использованием математических моделей, уменьшены на основе усовершенствования метода

измерения. Общепринятой является следующая классификация видов систематических погрешностей.

Методические погрешности $\Delta X_{мет}$, иногда называемые погрешностями метода или теоретическими погрешностями. Они обусловлены особенностями применяемого метода (способа) измерения, а также являются следствием тех или иных принятых допущений или упрощений при разработке измерительного алгоритма, например, при измерении массы тела часто пренебрегают силой Архимеда.

Инструментальные погрешности или приборные погрешности $\Delta X_{пр}$ вносятся измерительными средствами. Они возникают из-за возможного влияния на измеряемые величины измерительных средств, благодаря особенностям их устройства, вследствие несовершенства или неправильности технологии изготовления конструкций, по причине износа, старения или частичной неисправности их элементов, из-за действия внешних факторов, в том числе неправильной установке или настройке и т. д..

Субъективные погрешности $\Delta X_{суб}$, могут присутствовать в измерениях благодаря систематически действующим факторам, которые порождаются индивидуальными психофизиологическими особенностями человека, осуществляющего измерения.

По характеру изменений в результате проведения последовательности измерений систематические погрешности делятся на следующие виды:

- **постоянные систематические погрешности.** Они не меняют своего значения при проведении последовательности измерений;
- **трендовые систематические погрешности.** Они монотонно возрастают или убывают при проведении последовательности измерений;

- **периодические систематические погрешности.**

Они изменяются периодически при проведении последовательности измерений.

Приведем классификацию основных физических факторов, приводящих к возникновению систематических погрешностей в измерениях.

Фактор температурных полей. Температурные поля порождают изменения геометрических размеров частей конструкций и физических параметров составляющих элементов измерительных средств и обуславливают возникновение неконтролируемых теплопритоков.

Фактор магнитных и электрических полей. Магнитные и электрические поля влияют как на электронные компоненты измерительных средств, формируя различные помехи в различных частотных диапазонах, так и на механические компоненты, приводят к намагничиванию и электростатическому взаимовлиянию различных частей измерительных средств.

Фактор атмосферного давления и влажности воздуха. Атмосферное давление влияет на характер протекания различных теплотехнических процессов, изменяя, в частности, термодинамические характеристики составляющих компонентов измерительных средств. Влажность воздуха, в ряде случаев, из-за гигроскопичности материалов элементов измерительных средств, приводит к изменению их физических параметров.

Фактор вибраций и шумов. Превышение норм уровней вибраций и шума приводит к изменениям параметров механических конструкций и электронных составляющих элементов измерительных средств.

Методы уменьшения (устранения) систематических погрешностей в измерениях

Уменьшение методических и инструментальных систематических погрешностей, возникающих из-за особенностей конструкций, методик измерения и, в ряде случаев, вследствие влияющих внешних факторов, в наиболее общем случае может быть произведено на основе использования детальной и точной математической модели измерительного средства. С помощью модели проводится моделирование работы исследуемого измерительного средства с помощью ЭВМ. Результаты моделирования могут обеспечить получение необходимой численной оценки систематической погрешности.

Уменьшение инструментальных систематических погрешностей измерений из-за внешних факторов, как правило, реализуется на основе проведения специальных технических мероприятий.

Уменьшение температурных систематических погрешностей из-за возмущающих факторов температурных полей осуществляется, как правило, на основе термостатирования. В этом случае измеряемый объект помещается в специальные условия (термостат), которые позволяют поддерживать постоянную температуру, соответствующую температуре нормальной работы измерительной техники.

Наиболее распространенный способ снижения возникающих систематических погрешностей от фактора магнитных и электрических полей состоит в экранировании измерительных средств или их частей.

Снижение влияния фактора давления и влажности на систематические погрешности измерений обеспечивается с помощью герметизации помещения, герметизации измерительных средств и применения систем технологического кондиционирования воздуха. В ряде случаев действие рассматриваемых факторов может быть уменьшено путем помещения объекта измерения и измерительного средства в специальные барокамеры с регулируемым давлением, влажностью и температурой.

Влияние факторов вибраций и шума на систематические погрешности измерений устраняется с помощью уменьшения уровней вибраций и шумов от технических объектов, которые воздействуют на измерительные средства.

Субъективные систематические погрешности уменьшаются или устраняются на основе точного соблюдения инструкций и методических указаний при проведении измерений. Некоторые погрешности субъективного характера исключаются в процессе проведения независимых повторных измерений несколькими лицами.

Уменьшение (устранение) систематических погрешностей достигается с помощью совершенствования измерительных технологий. Приведем описания наиболее распространенных методов.

Метод замещения заключается в том, что измеряемый объект, после проведения первого измерения с некоторой систематической погрешностью, заменяют известной эталонной мерой, находящейся в тех же условиях, в каких находится измеряемый объект. Затем проводится второе измерение, подбором регулируется такое значение меры, которое обеспечивает совпадение результата второго измерения с первым. Подобранное значение эталонной меры, очевидно, может служить результатом измерения без систематической погрешности.

Метод компенсации погрешности по знаку состоит в исключении систематической погрешности на основе проведения дополнительного измерения. Метод компенсации реализуется, когда имеется техническая возможность организовать процедуры измерения таким образом, чтобы неизвестная систематическая погрешность вошла в результат измерения с противоположным знаком по отношению к первоначальному измерению. В усредненном результате устраняется систематическая погрешность.

Метод нескольких независимых измерительных средств, отличающихся принципом действия, конструкцией или используемым метрологическим методом, состоит в том, что в

наборе произведенных измерений одной и той же физической величины разными средствами отбрасываются измерения с заметными грубыми погрешностями, оставшиеся измерения усредняются.

Вычисление систематических погрешностей в измерениях

При измерениях в лабораториях физического практикума принимаются следующие правила:

1. Методической погрешностью можно пренебречь или ее величину можно оценить.
2. Инструментальная (приборная) погрешность является систематической погрешностью и определяется особенностями измерительных приборов.
3. Погрешности, обусловленные объектом измерения, и субъективные погрешности имеют только случайный характер.
4. Точность показаний исправных измерительных приборов и устройств гарантируется.

Метод определения приборной погрешности, как правило, приводится в паспорте прибора. Для характеристики большинства приборов используется понятие класса точности прибора. Класс точности указывается на панели прибора и может принимать следующие значения: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. По классу точности **наибольшая абсолютная инструментальная погрешность** определяется по формуле:

$$\Delta_{\text{и}} = \frac{K \cdot A}{100} \quad (6.1)$$

где K - класс точности прибора, A - наибольшее значение шкалы измерительного прибора.

Из формулы (6.1) следует, что относительная погрешность измерения прибором будет меньше, если отброс стрелки прибора будет находиться во второй половине шкалы. Это условие используется при выборе измерительного прибора, а в случае если прибор имеет несколько пределов измерения, то по нему определяют соответствующий предел.

Формулу (6.1) будем использовать для определения инструментальной погрешности, если отсутствует паспорт прибора. При наличии паспорта будем использовать те рекомендации, которые указаны в паспорте.

Инструментальная погрешность приборов для измерения линейных размеров указана на самом приборе. Например, штангенциркуль с пределами измерения 0 – 125 мм и ценой деления нониуса 0,1 мм допускают приборную погрешность 0,1мм, штангенциркуль с пределами измерений 0 – 150 мм и ценой деления нониуса 0,05 мм допускает приборную погрешность 0,05 мм.

Если на приборе не указан ни класс точности, ни абсолютная погрешность, то она принимается равной половине цены деления шкалы. Например, на рисунке 2 представлен результат измерения длины предмета металлической миллиметровой линейкой.

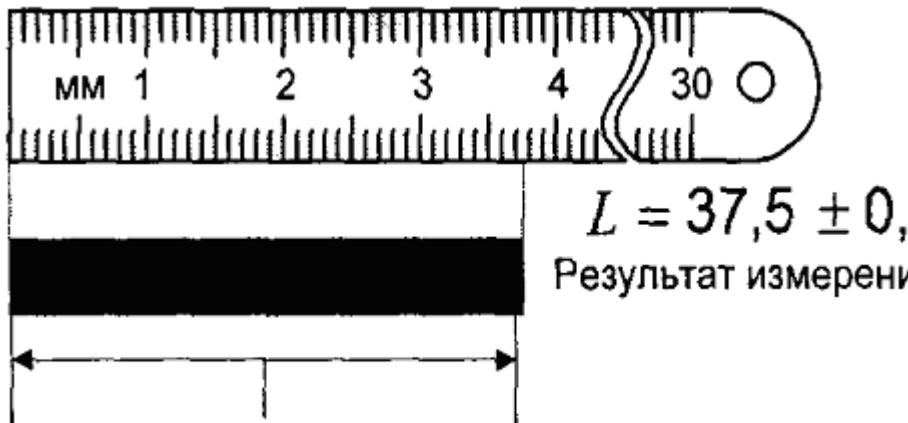


Рис.2 Измерительная линейка

Для приборов с цифровым отсчетом измеряемых величин метод вычисления абсолютной погрешности приводится в паспорте. Если паспорт отсутствует, то за абсолютную инструментальную погрешность принимается значение, равное единице последнего цифрового разряда индикатора. Обозначим инструментальную погрешность $\Delta X_{ин}$.

Инструментальную погрешность невозможно уменьшить увеличением числа отсчетов. Ее можно уменьшить, если использовать более точные, чем в предыдущем измерении, приборы и методики.

Определение случайной погрешности

Случайные погрешности приводят к тому, что наблюдаемые значения измеряемой величины при многократных измерениях случайным образом рассеяны относительно ее истинного значения. Тогда действительное значение находится как наиболее вероятное из серии опытов, а погрешность характеризуют шириной интервала, который с заданной вероятностью включает истинное значение. Математическое обоснование этих положений дается в теории вероятностей, применение которой для обработки результатов измерений приведено в литературе [7–24], а непосредственное применение к работам физического практикума в литературе [25–30].

Очень часто студенты и школьники находят погрешность измерения по формуле

$$\Delta X = X - X_{таб}, \quad (6.2)$$

где $\langle X \rangle$ - полученное в процессе измерения среднее значение величины, а $X_{таб}$ - значение, взятое из справочника, или

рассчитанное из теоретических представлений. Такое определение погрешности является грубой ошибкой, так как целью эксперимента, как было показано выше, является проверка теоретических представлений и уточнение табличных данных.

Кроме того, часто погрешность вычисляется как среднее значение отклонений отдельных результатов измерений от среднего значения по формуле

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \quad (6.3)$$

Согласно такому подходу, любое значение погрешности появляется одинаково часто, т.е. разные по величине погрешности считаются равновероятными. Этот метод можно использовать в лабораторных работах при малом числе измерений.

Однако случайные погрешности не являются равновероятными. Они требуют для своего определения статистической обработки результатов измерения. Поэтому представляется необходимым рассмотреть содержание статистической обработки результатов измерений. В основе статистической теории погрешностей лежат следующие положения:

- 1) при большом числе измерений наблюдаются случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака, т. е. погрешности, как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения, встречаются одинаково часто;
- 2) большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые, т.е. вероятность появления погрешности уменьшается с ростом величины погрешности;
- 3) погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений.

Распределение случайной величины, которое подчиняется перечисленным свойствам, называется нормальным распределением. Для оценки разбросов отдельных значений случайной величины с нормальным распределением или отдельных отсчетов в теории нормального распределения выбирается **выборочное среднее квадратичное отклонение отсчетов**, которое вычисляется по формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (6.4)$$

Оценка величины погрешности одного измерения, определяемая формулой (6.4) очень важна. Однако для измерения важной задачей является определение, с какой точностью среднее значение измеряемой величины соответствует искомой величине. Эта задача возникает в связи с тем, что среднее значение может быть получено из разных измерений. Например, среднее значение может быть получено при различном числе измерений. Поэтому эмпирическое среднее значение также является случайной величиной, которая также может описываться функцией распределения. Соответствующая этой функции величина среднего квадратичного отклонения $S_{\langle x \rangle}$ определяется, как показано в теории вероятностей по формуле:

$$S_{\langle x \rangle} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (6.5)$$

Эта величина называется **выборочным средним квадратичным отклонением среднего значения** или **стандартной ошибкой**.

Как видно из формулы стандартной ошибки (6.5), она уменьшается с ростом числа измерений и точность результата возрастает, что и соответствует предыдущим рассуждениям.

Рассмотренные выше формулы для определения ошибки измерения используют характеристики нормального распределения случайной величины. Однако неизвестно, по какому закону распределены результаты измерений. Поэтому эти оценки являются приближенными. В связи с этим возникает необходимость анализа этого подхода к определению погрешности измерения. Для такого анализа можно использовать известное в теории вероятностей [7] понятие доверительного интервала. Пусть величина α равна вероятности того, что результат измерения – среднее значение – отличается от истинного значения на величину не большую ΔX . В теории вероятностей эта фраза записывается следующим образом:



Величина α называется **доверительной вероятностью (надежностью)** результата серии наблюдений. Она показывает вероятность, с которой доверительный интервал включает истинное значение измеряемой величины.

Доверительным интервалом называется интервал значений , который с заданной степенью достоверности включает в себя истинное значение измеряемой величины. Геометрическое представление этого интервала дано на рисунке 1.

Таким образом, для определения случайной погрешности необходимо найти или задать два числа: **а именно величину самой случайной погрешности или доверительного интервала и величину доверительной вероятности.**

Для любой величины доверительного интервала можно рассчитать доверительную вероятность. Для этого используется функция Лапласа, которая также называется интегралом вероятностей. Функция Лапласа имеет вид:

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta X}{S_X}$. Чаще всего, при решении задач используют табличные значения функции Лапласа. Эти значения приведены в таблице 1.

Результаты этой таблицы показывают, что средней квадратичной ошибке S_X соответствует доверительная вероятность 0,68, удвоенной средней квадратичной ошибке $2 S_X$ соответствует доверительная вероятность 0,95, а утроенной средней квадратичной ошибке $3 S_X$ – 0,997.

Таблица 1

Доверительные вероятности α для доверительного интервала, выраженного в долях средней квадратичной

ошибки $\varepsilon = \frac{\Delta X}{S_X}$. Функция Лапласа $L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$

ε	α	ε	α	ε
0	0	1,2	0,77	2,6
0,05	0,04	1,3	0,80	2,7
0,1	0,08	1,4	0,84	2,8
0,15	0,12	1,5	0,87	2,9
0,2	0,16	1,6	0,89	3,0

0,3	0,24	1,7	0,91	3,1
0,4	0,31	1,8	0,93	3,2
0,5	0,38	1,9	0,94	3,3
0,6	0,45	2,0	0,95	3,4
0,7	0,51	2,1	0,964	3,5
0,8	0,57	2,2	0,972	3,6
0,9	0,63	2,3	0,978	3,7
1,0	0,68	2,4	0,984	3,8
1.1	0,73	2,5	0,988	3,9
				4,0

Случайную погрешность принято определять как полуширину доверительного интервала. **Размер доверительного интервала задается в виде значения кратного выборочному среднему квадратичному отклонению среднего значения $S_{\langle x \rangle}$, которое определяется по формуле (6.5). Тогда случайная погрешность многократных измерений определяется формулой:**

$$\Delta X = t_{\alpha} S_{\langle x \rangle}, \quad (6.6)$$

где t_{α} – безразмерный коэффициент доверия.

Этот коэффициент был предложен в 1908 году английским математиком и химиком В.С Госсетом. Он опубликовал свои работы под псевдонимом «Стьюдент», поэтому коэффициент t_{α} называется коэффициентом Стьюдента.

Коэффициент доверия или коэффициент Стьюдента показывает во сколько раз нужно увеличить среднее квадратичное отклонение среднего значения, чтобы при заданном числе измерений получить заданную надежность их результата. При расчете случайной погрешности задается надежность измерений α , которая в зависимости от целей

измерений и требований к ним принимает значения, равные 0,9; 0,95; 0,96; 0,98; 0,99; 0,997; 0,999.

Коэффициент доверия t_α имеет сложную зависимость от надежности α и от числа измерений n . Она выводится в теории вероятностей. Его значения для практических расчетов выбираются по статистическим таблицам, в которые внесены значения коэффициента Стьюдента для различной надежности α . Здесь приводится эта таблица коэффициентов доверия или коэффициентов Стьюдента.

Из приведенных рассуждений следует, что чем больше доверительная вероятность, тем надежнее оценка интервала и тем шире его границы.

Таблица 2

Коэффициент доверия (Коэффициент Стьюдента)

Число измерений n	Надежность, α				
	0,5	0,9	0,95	0,98	
2	1	6,3	12,7	31,8	
3	0,82	2,9	4,3	7,0	
4	0,77	2,4	3,2	4,5	
5	0,74	2,1	2,8	3,7	
6	0,73	2,0	2,6	3,4	
7	0,72	1,9	2,4	3,1	
8	0,71	1,9	2,4	3,0	
9	0,71	1,9	2,3	2,9	
10	0,70	1,8	2,3	2,8	
20	0,69	1,7	2,1	2,5	
>20	0,67	1,6	2,0	2,5	

Таким образом, абсолютная погрешность случайных ошибок определяется по формуле:

$$\Delta_{\text{сл}} = t_{\alpha} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (6.6)$$

Эту формулу можно использовать для планирования эксперимента. Используя ее можно оценить, какое количество измерений нужно выполнить, чтобы абсолютная погрешность случайных ошибок была бы меньше абсолютной погрешности систематических ошибок.

Определение полной погрешности

Полная абсолютная погрешность прямого измерения ΔX равна квадратному корню из суммы квадратов инструментальной погрешности и случайной погрешности, т. е. полная погрешность прямого измерения, определяется формулой:

$$\Delta X = \sqrt{\Delta_{\text{ин}}^2 + \Delta_{\text{сл}}^2} \quad (6.7)$$

Кроме абсолютной погрешности, необходимо определить относительную погрешность, для чего воспользуемся определением относительной погрешности:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100 \quad (6.8)$$

Выявление промахов при обработке результатов измерений

Цель работы: научиться выявлять промахи при обработки результатов измерений.

В предыдущих параграфах мы рассмотрели, как определить погрешности в случае, если все промахи отброшены. Однако должен существовать критерий, который позволял бы ответить на вопрос, является ли тот или иной результат промахом, и в каком случае этот результат нужно рассматривать как промах, а в каком случае этот результат отбрасывать нельзя.

Обработку результатов прямых измерений лучше всего начать с выявления промахов. Существует много критериев выявления и отбрасывания промахов. **Ни один из этих критериев не является универсальным.** Выбор критерия отброса промаха часто зависит от цели измерения, а также от результатов анализа полученного при наблюдении результата. При этом очень часто можно обнаружить, что полученный результат связан со сбоем в работе установки, с неправильной установкой оборудования и т. д. Эти случаи известны и отбрасывание таких результатов никаких сомнений не вызывает.

Однако часто среди отсчетов есть результат, который отличается от других результатов, но однозначно ответить на вопрос, является ли это значение промахом, нельзя. Этот случай требует аккуратного анализа полученных результатов. Для того чтобы продемонстрировать эту ситуацию, рассмотрим результаты конкретных измерений длины стержня с помощью штангенциркуля. В таблице 3 приведены результаты таких измерений.

Если учесть все представленные результаты измерения, то получим, что $\langle l \rangle = 571$ мм. Но результат десятого измерения $l = 660$ мм вероятнее всего является промахом, в котором просто ошибочно случайно вместо первой цифры «5» записана цифра «6». Если отбросить этот результат, то длина стержня будет равна $\langle l \rangle = 565$ мм. Если действовать таким методом, то под подозрение попадает и первый результат. Мы можем

предположить, что в нем цифра «8» также записана ошибочно. Если отбросить и этот результат как промах, то длина стержня будет равной $\langle l \rangle = 5,63$ мм. Ясно, что такой метод отбрасывания результатов, которые нам кажутся подозрительными, не приведет к обоснованному результату.

Кроме того, если использовать такой метод для определения погрешностей, то также можно получить разные ничем не обоснованные результаты. Например, если рассчитаем среднее квадратичное отклонение отдельных отсчетов при учете всех результатов измерений, то получим $S_X = 2,6$ мм. Это значение погрешности содержит две значащие цифры, что не соответствует свойствам абсолютной погрешности. Если мы отбросим результат первого и десятого измерения, то получим $S_X = 0,5$ мм.

Приведенный пример показывает, что необходимо сформулировать некоторый объективный критерий, на основании которого можно было бы объективно определить промахи. Этот вопрос можно решить, используя свойство ошибок, а именно, мы можем считать какое-то измерение X_k промахом, если вероятность случайного появления такого значения является достаточно малой.

Для определения вероятности появления промаха также используется формула Лапласа и соответствующая ей таблица 1. Из этой таблицы следует, что вероятность появления в результатах измерения значения, отличающегося от среднего арифметического $\langle X \rangle$ более чем на $3 S_X$ равна $1 - 0,997 = 0,003$. Тогда все измерения, отличающиеся от среднего арифметического значения $\langle X \rangle$ на величину большую $3 S_X$, могут быть отброшены.

При таком подходе считается, что результаты измерения, вероятность получения которых меньше 0,003, могут быть следствием грубой ошибки при проведении опыта или промаха. Конечно, такие результаты не являются обязательно следствием грубых ошибок, они могут появляться как следствие поведения

случайной величины. Однако, если мы отбрасываем такую величину, то допускаемая при этом ошибка мала, так как мала вероятность появления таких результатов.

Применим эти рассуждения к анализу каждого результата измерения. Тогда вероятность того, что результат первого измерения не будет отличаться от истинного значения более чем на $3 S_x$, равна $(1-0,003)=0,997$. Вероятность того, что это же условие будет иметь место для результата второго измерения, также равна $(1-0,003)=0,997$. А вероятность того, что результаты и первого и второго измерений не выйдут за указанный предел будет равна произведению этих вероятностей, так как отдельные измерения и их результаты являются независимыми событиями – $(1 - 0,003)^2$.

Таблица 3

**Резуль
таты
измере
ния
длины
стержня**

N п./п.	l , мм
1	58,5
2	55,4
3	56,6
4	56,7
5	57,0
6	56,5
7	56,7
8	55,3
9	56,0
10	66,0
11	56,3
12	56,5
13	56,0
14	56,3
15	56,0

Тогда вероятность того, что ни один из результатов n измерений не будет отличаться от среднего более чем на $3 S_x$, равна:

$$\beta(1-\beta)^n \quad (7.1)$$

Если n не очень велико, то значение этой вероятности можно найти по приближенной формуле:

$$\beta(1-\beta)^n \approx \beta e^{-n\beta} \quad (7.2)$$

Следовательно, вероятность того, что из результатов n измерений, хотя бы одно значение будет случайно отличаться от среднего значения более чем на $3 S_x$, равна $P=1-\beta$. Это значит, что при десяти проведенных измерениях вероятность того, что хотя бы одно значение будет промахом равна 0,03 или 3%.

Одним из методов определения промахов является использование критерия Шовене [23]. Этот критерий формулируется следующим образом:

1. Из полученного ряда n отсчетов (результатов измерений) выбирается аномальный результат X_k .

2. Вычисляется Z модуль его отклонения от среднего значения, полученного с учетом всех результатов измерений, в долях выборочного среднего квадратичного отклонения отдельных результатов:

$$Z = \frac{|X_k - \bar{X}|}{S_x} \quad (7.3)$$

3. Вычисляется вероятность этого отклонения, а также ожидаемое число измерений, которые дадут результаты, имеющее отклонение Z не меньшее, чем исследуемое значение X_k .
4. Если полученное значение количества измерений меньше 0,5, а при округлении до целого равно нулю, то исследуемый результат измерения X_k является промахом.

Эту процедуру можно изменить и вычислить ожидаемое число отсчетов M , среди которых будет хотя бы один аномальный или, другими словами, промах. **Если рассчитанное число M больше числа проведенных измерений, то рассматриваемый отсчет является промахом.**

Мы на первых курсах не будем пользоваться достаточно сложным распределением величины Z , а будем использовать уже готовую таблицу отбора промахов по критерию Шовене (таблица 4).

Таблица 4

Отбор промахов по критерию Шовене

Z	M	Z	M	Z	M	Z	M
1,00	2	1,40	3	1,80	7	2,20	18
1,02	2	1,42	3	1,82	7	2,22	19
1,04	2	1,44	3	1,84	8	2,24	20
1,06	2	1,46	3	1,86	8	2,26	21
1,08	2	1,48	4	1,88	8	2,28	22

1,10	2	1,50	4	1,90	9	2,30	23
1,12	2	1,52	4	1,92	9	2,32	25
1,14	2	1,54	4	1,94	10	2,34	26
1,16	2	1,56	4	1,96	10	2,36	27
1,18	2	1,58	4	1,98	10	2,38	29
1,20	2	1,60	5	2,00	11	2,40	30
1,22	2	1,62	5	2,02	12	2,42	32
1,24	2	1,64	5	2,04	12	2,44	34
1,26	2	1,66	5	2,06	13	2,46	36
1,28	2	1,68	5	2,08	13	2,48	38
1,30	3	1,70	6	2,10	14	2,50	40
1,32	3	1,72	6	2,12	15	2,52	43
1,34	3	1,74	6	2,14	16	2,54	45
1,36	3	1,76	6	2,16	16	2,56	48
1,38	3	1,78	7	2,18	17	2,58	51

Обработка прямых равноточных измерений

Цель работы: научиться выполнять обработку прямых равноточных измерений.

Варианты индивидуальных заданий

вариант	результаты измерения										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10	3	9	13	25	13	31	5	12	14	7
2	105	84	195	137	258	137	116	53	126	147	74
3	228	182	205	296	342	296	251	14	274	319	160
4	54	23	49	70	81	70	59	127	65	76	38
5	16	13	14	21	4	21	18	8	19	62	11
6	23	8	21	30	35	70	25	12	28	82	16
7	67	54	10	87	101	87	74	134	80	94	47
8	89	71	180	116	134	116	98	25	107	125	62

9	113	90	102	147	270	147	124	27	136	158	79
10	43	42	12	43	54	53	53	81	53	44	52
11	111	110	120	121	118	117	115	126	123	114	113
12	335	268	302	436	503	436	369	168	402	469	235
13	77	72	75	84	89	84	79	66	82	86	70
14	88	65	77	122	145	122	99	32	111	133	54

Задание: пусть при измерениях проведено 12 отсчетов расстояния, пройденного телом за определенное время. Измерения проводились линейкой с ценой деления 1 см. Результаты измерения представлены в таблице выше.

Порядок выполнения работы:

1. Определить инструментальную погрешность.
2. Вычислить среднее значение по результатам измерений по формуле (5.5).

3. Вычислить среднее квадратичное отклонение отсчета по формуле (6.4). Если эксперимент проведен так, что промах удаляется обоснованно из анализа эксперимента, то после этого пункта переходим к пункту 5. Если вопрос об устранении промаха требует статистического анализа, то переходим к пункту 4.

4. Проверить отсчеты на наличие промаха:

- отобрать среди полученных отсчетов аномальный отсчет;
- вычислить его относительное отклонение по формуле (7.3);
- определить по таблице 4 ожидаемое число отсчетов, среди которых может быть аномальный отсчет;

- если определенное по таблице 4 число отсчетов больше числа проведенных отсчетов, то аномальный отсчет нужно исключить и вернуться к пункту 2. Если определенное по таблице 4 число отсчетов меньше числа проведенных отсчетов, то аномальный отсчет отбрасывать нельзя, а надо перейти к пункту 5;
- повторить эти пункты для всех подозрительных на промах измерений;

5. Вычислить выборочное среднее квадратичное отклонение среднего значения по формуле (6.5).

6. Задать надежность и определить по таблице 2 коэффициент доверия (коэффициент Стьюдента) для заданной надежности и полученного числа отсчетов.

7. Вычислить случайную погрешность по формуле (6.6).

8. Вычислить полную погрешность по формуле (6.7).

9. Вычислить относительную погрешность по формуле (6.8).

Пример обработки прямых равноточных измерений

Пусть при измерениях проведено 10 отсчетов расстояния, пройденного телом за определенное время. Измерения проводились линейкой с ценой деления 1 см. Результаты измерения представлены в таблице 5.

Таблица 5

Результаты измерения расстояния

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
п/п								
<i>S</i> , см	105	100	105	65	90	110	110	115

1. Определяем инструментальную погрешность. Условия измерений и применение измерительной линейки позволяет сделать вывод, что инструментальная погрешность равна цене деления шкалы, т. е.

$$\Delta S_{np} = 1 \text{ см.}$$

2. Зададим доверительную вероятность $\alpha=98\%$ и для данного количества отсчетов $n=10$ по таблице 2 определим коэффициент доверия (Коэффициент Стьюдента) $t=2,8$.

3. Вычислим среднее значение расстояния:

$$\langle S \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n};$$



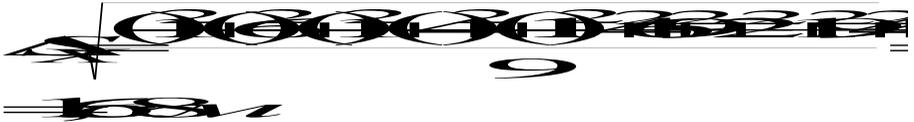
см.

4. Округляем полученное число до целого значения, используя правило IV:

$$\langle S \rangle = 10 \text{ см.}$$

5. Вычисляем среднее квадратичное отдельных отсчетов по формуле

$$\Delta S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (S_i - \langle S \rangle)^2}{n-1}}.$$



6. Округляем полученное число до целого числа, что соответствует точности измерительного прибора

$$\Delta S_X = 1 \text{ см.}$$

7. Проверяем отсчеты на наличие промахов. Наибольшее отклонение от среднего значения имеет отсчет под номером 4 - $S_4 = 65 \text{ см}$. Вычисляем нормированное отклонение S_4 от среднего значения:

$$\frac{|S_4 - \langle S \rangle|}{\Delta S_X} = \frac{|65 - 10|}{1} = 55.$$

8. По таблице 4 находим, что количество отсчетов (опытов), при котором рассмотренное значение нельзя считать промахом равно 17. В нашем опыте всего 10 отсчетов, поэтому значение $S = 65$ см является промахом и его нужно исключить из обрабатываемого ряда.

Теперь получаем новый набор отсчетов и проводим их обработку.

Таблица 6

**Результаты измерения расстояния после
удаления первого промаха**

n п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
S , см	105	100	105	90	110	110	115	13

Теперь у нас $n = 9$. Выберем доверительную вероятность $\alpha = 98\%$ и по таблице 2 найдем коэффициент доверия или коэффициент Стьюдента, получаем $t = 2,9$.

Вычисляем новое среднее значение:



Вычисляем среднее квадратичное значение среднего значения по формуле

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}{n-1}}$$



Округляем это значение до целого числа и получаем $\Delta S = 1$ з.л. Такое значение среднеквадратичного отклонения результата измерения говорит о том, что среди результатов измерений имеются еще промахи, так как оно содержит две значащие цифры.

Проверим, не является ли промахом результат $S_8 = 135$. Для этого найдем значение Z по формуле (7.3):

$$Z = \frac{|S_8 - \bar{S}|}{\Delta S} = \frac{|135 - 110|}{1} = 25$$

По таблице 4 значению $Z = 1,9$ соответствует значение $M = 9$. Это значит, что рассмотренный нами отсчет также является промахом и его нужно отбросить.

Теперь таблица состоит из результатов восьми измерений.

Таблица 7

**Результаты измерения расстояния после
удаления второго промаха**

n п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
S , см	105	100	105	90	110	110	115	120

Как и прежде, вычисляем новое среднее значение расстояния:

$$\langle S \rangle = \frac{105 + 100 + 105 + 90 + 110 + 110 + 115 + 120}{8} = 107,5$$

Округляем эту величину до целого значения, получаем $\langle S \rangle = 108$. Наибольшее отклонение от этого среднего значения имеет результат измерения $S_4 = 90$ м. Проверим, является ли этот результат измерения промахом.

Вычисляем среднее квадратичное значение среднего значения по формуле (6.4)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{8} \left[(105-108)^2 + (100-108)^2 + (105-108)^2 + (90-108)^2 + (110-108)^2 + (110-108)^2 + (115-108)^2 + (120-108)^2 \right]} = 10,6$$

Теперь вычислим Z по формуле (7.3):

$$Z = \frac{90 - 108}{10,6} = -1,698$$

Как мы знаем, данному значению Z соответствует $M = 9$, а у нас измерений всего восемь.

Это означает, что данный результат измерения также является промахом и его надо отбросить.

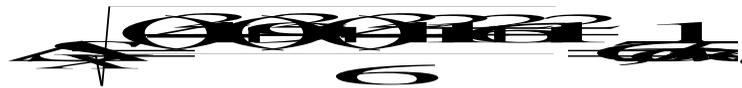
Теперь получается таблица из семи результатов измерений.

Таблица 8

**Результаты измерения расстояния после
удаления третьего промаха**

n п/п	1	2	3	4	5	6	7
S , см	105	100	105	110	110	115	120

Повторяем уже известные расчеты:



Проверим, не является ли промахом значение $S_7 = 120$.



Полученному значению Z соответствует $M = 5$, а у нас число измерений равно 7, поэтому данное значение нельзя считать промахом. Очевидно,

что остальные значения проверять не имеет смысла, так как им будет соответствовать еще меньшее значение M , а значит, они не будут промахами.

Таким образом, можно окончательно сказать, что $\langle S \rangle = 109$. Теперь вычислим $\Delta S_{\langle X \rangle}$:

$$\Delta S_{\langle X \rangle} = \frac{\Delta S}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Надежности $\alpha = 0,98$ и $n = 7$ соответствует коэффициент Стьюдента $t_{\alpha} = 3,1$. Тогда находим

$$\Delta S_{\langle X \rangle} = 3,1 \cdot \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Теперь вычисляем полную абсолютную погрешность:

$$\Delta S = 3,1 \cdot \frac{8}{\sqrt{7}} = 9,4$$

Вычислим относительную погрешность

$$\delta = \frac{9,4}{109} = 8,6\%$$

Таким образом, результат измерения расстояния имеет вид:

$$\langle S \rangle = 109 \pm 9,4; \delta = 8,6\%; \alpha = 0,98$$

Практическая работа №4 «Расчет датчика холла»

Цель работы: Рассчитать преобразователь мощность-напряжение на основе эффекта Холла и коэффициент передачи согласующего устройства датчика с вольтметром.

Исходные данные:

Номер варианта (последняя цифра в зачётной книжке)	P_{max} , Вт	Тип провода	Напряжение сети U, В	Частота сети, Гц
16(16)	250 (реактивная)	провод	110	400

Расчёт:

1. Определение максимального тока нагрузки, А:

$$I_{max} = \frac{P_{max}}{U} = \frac{250}{110} = 2.273 \text{ А}$$

2. Выбор длины датчика Холла, м:

$$L = 0.1 \cdot D = 0.1 \cdot 0.02 = 0.002 \text{ м}$$

Где рекомендовано взять $D=2\text{см}$

3. Выбор ширины датчика:

$$b = \frac{L}{3} = \frac{0.002}{3} = 6.667 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

4. Оценка тока через датчик:

$$i_x = 4 \cdot b \cdot d = 4 \cdot 0.667 \cdot 10^{-2} = 0.0267 \text{ А}$$

где $d = 10$ мкм. В данной формуле размеры берутся в миллиметрах, при этом сила тока получается в амперах

$$C \approx \frac{i_x}{U \cdot \omega} = \frac{0.0267}{110 \cdot 2512} = 96.6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$$

5. Для датчика реактивной мощности определяем величину ёмкости конденсатора:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot 3.14 \cdot 400 = 2512 \text{ рад/с}$$

6. Принимаем сопротивление датчика реактивной мощности равным:

$$R_D = \frac{0.01}{\omega \cdot C} = \frac{0.01}{2512 \cdot 96.6 \cdot 10^{-9}} = 41.2 \text{ Ом}$$

7. Определяем удельное сопротивление материала датчика:

$$\rho = \frac{R_D \cdot b \cdot d}{L} = \frac{41.2 \cdot 6.667 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{0.002} = 1.373 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

8. Определяем для германия и кремния требуемые для обеспечения найденного ρ концентрации носителей тока в м^{-3} :

$$n = \frac{1}{e \cdot \mu_{\text{гер}} \cdot \rho} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.36 \cdot 1.373 \cdot 10^{-4}} = 1.264 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3} \text{ для германия}$$

$$n = \frac{1}{e \cdot \mu_{\text{гер}} \cdot \rho} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1 \cdot 1.373 \cdot 10^{-4}} = 4.552 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3} \text{ для кремния}$$

$$\mu_{\text{гер.}} \approx 0.36 \text{ М}^2/\text{В} \cdot \text{с}$$

$$\mu_{\text{крем.}} \approx 0.1 \text{ М}^2/\text{В} \cdot \text{с}$$

9. По заданному t_{max} , °С определяем для германия и кремния требуемое значение концентрации:

$$n_{\text{ТР(гер.)}} = 100 \cdot n_{i0} \cdot e^{\frac{\Delta E_{\text{(гер.)}}}{2 \cdot K} \cdot \left(\frac{1}{I_{0\text{(гер.)}}} - \frac{1}{I_{\text{max}}} \right)} = 100 \cdot 3 \cdot 10^{19} \cdot e^{\frac{1.152 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} \cdot \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{343} \right)} = 1.716 \cdot 10^{22} \text{ М}^{-3}$$

$$n_{\text{ТР(крем.)}} = 100 \cdot n_{i0} \cdot e^{\frac{\Delta E_{\text{(крем.)}}}{2 \cdot K} \cdot \left(\frac{1}{I_{0\text{(крем.)}}} - \frac{1}{I_{\text{max}}} \right)} = 100 \cdot 4 \cdot 10^{16} \cdot e^{\frac{1.760 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} \cdot \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{343} \right)} = 5.746 \cdot 10^{19} \text{ М}^{-3}$$

где $n_{i0\text{(гер.)}} = 3 \cdot 10^{19} \text{ М}^{-3}$

$$n_{i0\text{(крем.)}} = 4 \cdot 10^{16} \text{ М}^{-3}$$

$$T_{0\text{(гер.)}} = 300\text{K}, T_{0\text{(крем.)}} = 300\text{K}$$

$$T_{\text{max}} = 70^\circ\text{C} = 343\text{K}$$

$$\Delta E_{\text{(гер.)}} = 0.72\text{эВ} = 0.72 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 1.152 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$\Delta E_{\text{(крем.)}} = 1.1\text{эВ} = 1.1 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 1.760 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$K = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

Принимается в качестве материала датчика кремний.

10. Из двух значений концентраций выбираем наибольшую и по нему рассчитываем постоянную Холла:

$$R_X = \frac{1.17}{e \cdot n_{(\text{кремний})}} = \frac{1.17}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 4.552 \cdot 10^{23}}$$

$$= 1.606 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{Кл}$$

11. Определяем максимальное значение магнитной индукции для длинного соленоида, навитого из провода:

$$B_{max} = I_{max} \cdot \frac{N}{l_c} \cdot \mu_0 = K \cdot I_{max}$$

$$B_{max} = I_{max} \cdot \frac{N}{l_c} \cdot \mu_0 = 2.273 \cdot 1175 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$$

$$= 3.359 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$$

где

$$\frac{N}{l_c} = \frac{1}{d_{пр} \cdot 10^{-3}}$$

$$= \left[d_{пр} = \sqrt{\frac{I_{max}}{\pi}} = \sqrt{\frac{2.273}{3.14}} \right]$$

$$= 0.850 \text{ мм} \left] = \frac{1}{0.850 \cdot 10^{-3}} \right.$$

$$= 1175 \text{ м}^{-1}$$

Найдём коэффициент для соленоида:

$$B_{max} = K \cdot I_{max}$$

$$K = \frac{B_{max}}{I_{max}} = \frac{3.359 \cdot 10^{-3}}{2.273} = 1.478 \cdot 10^{-3} \text{ Тл/А}$$

12. Рассчитаем $U_{x max}$ для реактивной мощности:

$$\begin{aligned} U_{x max} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega \cdot C \cdot K \cdot R}{d} = P_{p max} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2512 \cdot 96.6 \cdot 10^{-9} \cdot 1.478 \cdot 10^{-3} \cdot 1.606 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}} \\ &\cdot 250 = 7.200 \cdot 10^{-5} \text{ В} \end{aligned}$$

13. Определяем требуемый коэффициент усиления:

$$K_y = \frac{U_{\text{ВЫХ max}}}{U_{max}} = \frac{2.5}{7.200 \cdot 10^{-5}} = 34722$$

Задание

Определить основные параметры датчика мощности на основе эффекта Холла (геометрический материал, удельное сопротивление, коэффициент усиления усилителя).

Исходные данные приведены в таблице.

№ варианта	P_{\max} , Вт	Тип токопровода	Напряжение сети, В	Частота сети, Гц	t_{\max} , °C
1	10000 активная	шина, $h = 8\text{ см}$	500	0	100
2	1500 активная	провод	220	50	140
3	1500 реактивная	провод	115	400	140
4	20000 активная	шина, $h = 8\text{ см}$	380	50	60
5	3000 активная	шина, $h = 5\text{ см}$	27	0	120

6	100000 активная	шина, $h = 2\text{см}$	500	0	40
7	1000 активная	провод	27	1000	150
8	1000 реактивная	провод	27	1000	120
9	4000 реактивная	провод	110	400	100
10	50 активная	провод	27	1000	50
11	50 активная	провод	220	50	120
12	200 реактивная	провод	220	50	140
13	700 активная	провод	110	400	100
14	60000	шина	600	0	120

Практическая работа №5 «Выбор набора измерительных преобразователей для измерительной системы на основе оценки предельно допустимой погрешности измерения этой системы»

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – приобрести умение производить выбор набора измерительных преобразователей измерительной системы на основе оценки предельной допускаемой погрешности измерения.

2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 Оценка погрешностей измерительных систем

Технические измерения выполняются однократно с помощью рабочих средств измерения соответствующих единиц измерения. Однократный отсчет показаний по шкале измерения принимается за окончательный результат измерения данной величины.

Достоверность результата измерения можно оценить, если известна точность измерения. Характеристики точности измерений пользуются понятием погрешности измерений, отклонения результата измерений от действительного значения измеряемой физической величины.

При технических измерениях, как правило, применяются измерительные системы, состоящие из измерительных преобразователей (ИП). Простейшая измерительная система может быть построена по последовательному соединению следующих преобразователей (рис. 1):

- 1) первичный измерительный преобразователь (датчик);
- 2) линия связи;
- 3) вторичный измерительный прибор.

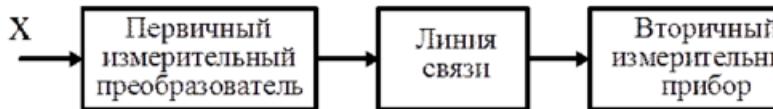


Рис. 1 Функциональная схема простейшей измерительной системы

Следовательно, при оценке погрешности измерительной системы необходимо оценить погрешность каждого из ее элементов.

Существует два метода оценки погрешности измерительной системы $\varepsilon_{ИС}$. В первом методе пределы погрешности измерительной системы по пределам погрешностей элементов, фактически определяется максимальное значение погрешности измерительной системы, оценивается как корень квадратный из суммы квадратов пределов допускаемой погрешности преобразователя, входящего в измерительную систему:

$$\varepsilon_{ИС} = \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_N^2},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ – относительные предельные допускаемые погрешности, равные:

$$\varepsilon_i = \pm \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%, (i = \overline{1, n});$$

где Δx – абсолютная погрешность измерения физической величины x .

Этот метод достаточно строг, если предельные допускаемые погрешности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ не соответствуют одинаковым доверительным вероятностям при однотипных законах распределения.

Второй, вероятностно-статистический метод оценки погрешностей, является более строгим, но достаточно сложным.

2.2 Методика выбора и метрологические характеристики измерительных преобразователей

При выборе датчиков для измерения технологических параметров следует учитывать ряд наиболее существенных факторов:

- допустимая для измерительной системы погрешность, определяющая класс точности датчика;
- пределы измерения датчика, в рамках которых гарантирована определенная точность измерения;
- влияние физических параметров измеряемой и окружающей среды (давления, температуры, вибраций и др.) на нормальную работу датчика;
- расстояние, на которое может быть передана информация, полученная с помощью датчика;
- возможность применения датчика с точки зрения пожаро- и взрывобезопасности.

Выбор датчика осуществляют в два этапа. На первом этапе выбирают разновидность датчика для измерения температуры – термопреобразователь сопротивления, термопара или манометр.

На втором этапе определяют технические характеристики выбранной разновидности датчика: терморезистор медный, номинальная статическая характеристика (НСХ) 100М, тип ТСМ-100М.

Информация о технических характеристиках и области применения датчиков приводится в каталогах предприятий-изготовителей. Основные сведения о датчиках температуры, производимых предприятием «Термодат» (Челябинск), представлены в таблице П.1.

В том случае, когда измеряемая или окружающая среда могут оказать разрушающее воздействие на датчик (например, вследствие абразивных свойств среды, слишком высокого давления, присутствия агрессивных веществ и др.), необходимо защитить датчик с помощью специальной защитной гильзы. Типы защитных гильз представлены в табл. П.3.

Значения и формулы пределов допускаемых отклонений термо-ЭДС для некоторых термометров приведены в таблице 2.1, а номинальные статические характеристики – в таблице 2.2.

Пределы допускаемых отклонений термо-ЭДС от номинальной статической характеристики термоэлектрических датчиков (t – температура рабочего спая)

Тип термоэлектрического датчика	Отклонение термо-ЭДС; $\pm \Delta E$, мВ		Диапазон измерения
	$t \leq 300^\circ\text{C}$	$t > 300^\circ\text{C}$	
ХК	$0.14 + 0.2 \cdot 10^{-3} \cdot t$	$0.2 + 5.2 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 300)$	300-800
ХА	0.14	$0.14 + 2.2 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 300)$	300-1300
ПП	0.008	$0.008 + 2.69 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 300)$	300-1600

Температура рабочего конца, $^\circ\text{C}$	Термо-ЭДС, мВ		
	ХК	ХА	ПП
-50	-3.110	-1.889	—
0	0.000	0.000	0.000
20	1.303	0.798	0.113
50	3.350	2.022	0.297
100	6.898	4.095	0.644
200	14.570	8.137	1.436
300	22.880	12.207	2.314
400	31.480	16.396	3.250
500	40.270	20.640	4.216
600	49.090	24.902	5.218
700	57.820	29.128	6.253
800	66.420	33.277	7.317

Пределы допускаемых отклонений сопротивления от номинальной статической характеристики термопреобразователей сопротивления (ТПС) вычисляются по формулам, которые приведены в таблице 2.4. номинальная статическая характеристика – в таблице 2.4.

Пределы допускаемых отклонений сопротивления от номинальной статической характеристики термопреобразователей сопротивления (класс допуска 2).

Тип ТПС	Класс допуска	Допускаемое отклонение $\pm \Delta t$, °С	Диапазон измерения, °С
ТСП	A	$0.15+2 \cdot 10^{-3} \cdot t$	0...1000
	B	$0.30+5 \cdot 10^{-3} \cdot t$	
	C	$0.6+8 \cdot 10^{-3} \cdot t$	
ТСМ	A	$0.15+2 \cdot 10^{-3} \cdot t$	-50...200
	B	$0.25+3.5 \cdot 10^{-3} \cdot t$	
	C	$0.50+6.5 \cdot 10^{-3} \cdot t$	

Номинальные статические характеристики преобразования платиновых и медных термопреобразователей сопротивления (ТПС)

Температура ТПС, С	Сопротивление ТПС, Ом				Сигнал с первичного преобразователя тем связи передается на следующий измерительный преобразователь. Для подсоединения термодатчика используются компенсационные провода. Допускаемое отклонение термо-ЭДС в паре проводов приведено в таблице 2.5.
	50П	100П	50М	100М	
-50	39.991	79.983	39.240	78.480	Для подсоединения термопреобразователей используются медные соединительные провода при температуре превышающей нормальную, погрешность $0.75+6.5 \cdot 10^{-3} \cdot t$, °С. Если температура окружающей среды в процессе эксплуатации нормальная (например, провода защищены от температуры измеряемой среды), то погрешность соединительными проводами не учитывается.
0	50.000	100.000	50.000	100.000	
50	59.854	119.708	60.702	121.404	
100	69.556	139.113	71.400	142.800	
150	79.110	158.221	82.096	164.192	
200	89.516	177.033	92.791	185.583	
250	97.776	159.52	—	—	
300	106.889	231.779	—	—	
350	115.858	231.715	—	—	
400	124.679	249.358	—	—	

400	124.679	249.358	—	—
450	133.353	266.707	—	—
500	141.880	283.760	—	—
550	150.255	300.511	—	—
600	158.480	316.960	—	—

Основные характеристики и допускаемые погрешности компенсационных проводов

Тип термопары	Компенсационные провода			Термо-ЭДС,	
	Марка	Материал	Окраска изоляции	При $t=100^{\circ}\text{C}$	Погрешность
ХК	ХК	хромель - копель	фиолетовая - желтая	6.88	± 0.1
ХА	М	медь - константан	красная - коричневая	4.01	± 0.1
ПП	П	медь - медно-никелевый сплав	красная - зеленая	0.64	± 0.05

2.3 Методика метрологического обоснования выбора элементов измерительной системы

Методика метрологического обоснования выбора элементов измерительной системы сводится к выбору элементов с минимального значения предельной статической погрешности измерения.

Для измерения одного и того же значения физической величины можно использовать множество различных измерительных систем, состоящих из различных измерительных преобразователей. Следовательно, при метрологическом обосновании является выбор измерительной системы, которая измеряет физическую величину с наименьшей предельной статической погрешностью.

Окончательное решение по выбору измерительной системы для измерения конкретной физической величины остается за автором проекта, так как критерием выбора могут быть не только метрологические, но и экономические, технические и т. п.

Методика метрологического обоснования выбора измерительной системы для измерения какого-либо параметра состоит из следующих этапов:

1. Формулируется задача и определяются исходные данные.
2. Выбирается несколько вариантов измерительной системы, при помощи которой можно измерить данный параметра.
3. Характеристики элементов выбранных измерительных систем вносятся в таблицу, где указываются наименование измерительного преобразователя, тип, допускаемая погрешность.
4. Производится расчет предельной статической погрешности измерительной системы.
5. Делается вывод по окончательному выбору варианта измерительной системы.

3 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задача. Измерить температуру пара в трубопроводе теплоэнергетической установки, среднее значение которой составляет 465°C . Давление и скорость движения пара в трубе принять равными соответствующим нормативным значениям.

4. Производится расчет предельной статической погрешности измерительной системы.
5. Делается вывод по окончательному выбору варианта измерительной системы.

3 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задача. Измерить температуру пара в трубопроводе теплоэнергетической установки, которая составляет 465°C . Давление и скорость движения пара в трубе принять равными соотв.

Решение. Выбранные варианты измерительных систем представлены в таблице 3.1.

Выбранные варианты измерительных систем (ИС)

Номер ИС	1		2		3	
Наимен. ИП	Тип ИП	Допуск. погреш., %	Тип СИ	Допуск. погреш., %	Тип СИ	Доп.
Первичный преобр-ль	ТХА-1387	0.89	ТХК-0188	0.70	ТСП-1088-100П	0
Линия связи	М	0.76	ХК	0.48	Медные провода	0
Вторичный прибор	Диск-250	0.63	А-100Н	0.64	А100-1125	0

Определим погрешность измерения температуры для ИС №1.

Допустимое отклонение термо-ЭДС для первичного преобразователя ТХА-1387, согласно

$$\Delta E_{\text{ПП1}} = \pm[0.14 + 2.2 \cdot 10^{-4}(t - 300)] = \pm[0.14 + 2.2 \cdot 10^{-4}(465 - 300)] = \pm 0.176$$

Для номинальной статической характеристики термомпары ХА, согласно табл. 2.2, коэффициент составит:

$$k_1 = \Delta t / \Delta E = (500 - 400) / (20.640 - 16.396) = 23.56^\circ\text{C}/\text{мВ}.$$

Отсюда абсолютная погрешность измерения температуры будет равна:

$$\Delta t_{\text{ПП1}} = \pm(k \cdot \Delta E_{\text{ПП1}}) = \pm(23.56 \cdot 0.176) = \pm 4.15^\circ\text{C}.$$

Относительная погрешность измерения температуры:

$$\varepsilon_{\text{ПП1}} = \pm \frac{\Delta t_{\text{ПП1}}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{4.15}{465} \cdot 100\% = 0.89\%$$

Допускаемое отклонение ЭДС в паре между жилами компенсационных проводов марки ХА будет $\Delta E_{\text{КП1}} = \pm 0.15$ мВ. Следовательно, абсолютная и относительная погрешности темп

$$\Delta t_{\text{КП1}} = \pm(k_1 \cdot \Delta E_{\text{КП1}}) = \pm(23.56 \cdot 0.15) = \pm 3.53^\circ\text{C};$$

$$\varepsilon_{\text{КП1}} = \pm \frac{\Delta t_{\text{КП1}}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{3.53}{465} \cdot 100\% = 0.76\%$$

Диапазон измерения датчика (0...600°C), выраженный в мВ, для номинальной статической характеристики термомпары ХА равен:

$$E_{\text{Д1}} = E(600) - E(0) = 24.902 - 0 = 24.902 \text{ мВ}.$$

Допускаемая абсолютная погрешность показаний вторичного измерительного прибора

$$\Delta E_{\text{ВП1}} = \pm \delta_{\text{ВП1}} \cdot E_{\text{Д1}} / 100 = 0.5 \cdot 24.90 / 100 = \pm 0.125 \text{ мВ}.$$

Отсюда получим следующие значения абсолютной и относительной погрешностей темп

$$\Delta t_{\text{ВП1}} = \pm(k \cdot \Delta E_{\text{ВП1}}) = \pm(23.56 \cdot 0.125) = \pm 2.95^\circ\text{C};$$

$$\varepsilon_{\text{ВП1}} = \pm \frac{\Delta t_{\text{ВП1}}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{2.95}{465} \cdot 100\% = 0.63\%$$

Предельная относительная погрешность показаний измерительной системы №1 будет р

$$\varepsilon_{\text{ИС1}} = \pm \sqrt{\varepsilon_{\text{ПП1}}^2 + \varepsilon_{\text{КП1}}^2 + \varepsilon_{\text{ВП1}}^2} = \pm \sqrt{0.89^2 + 0.76^2 + 0.63^2}$$

Найдем предельную погрешность измерения температуры для измерительной системы №1

Допустимое отклонение термо-ЭДС для первичного преобразователя ТХК-0188, согласно

$$\Delta E_{\text{пн}2} = \pm [0.2 + 5.2 \cdot 10^{-4}(t - 300)] = \pm [0.2 + 5.2 \cdot 10^{-4}(465 - 300)] = \pm 0.286 \text{ мВ.}$$

Для номинальной статической характеристики термопары ХК, согласно табл. 2.2, коэффициент составит:

$$k_2 = \Delta t / \Delta E = (500 - 400) / (40.270 - 31.480) = 11.38^\circ\text{C}/\text{мВ.}$$

Отсюда абсолютная погрешность измерения температуры будет равна:

$$\Delta t_{\text{пн}2} = \pm (k_2 \cdot \Delta E_{\text{пн}2}) = \pm (11.38 \cdot 0.286) = \pm 3.25^\circ\text{C.}$$

Относительная погрешность измерения температуры:

$$\varepsilon_{\text{пн}2} = \pm \frac{\Delta t_{\text{пн}2}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{3.25}{465} \cdot 100\% = 0.70\%$$

Допускаемое отклонение ЭДС в паре между жилами компенсационных проводов марки ХК будет $\Delta E_{\text{кп}2} = \pm 0.2$ мВ. Следовательно, абсолютная и относительная погрешности температур

$$\Delta t_{\text{кп}2} = \pm (k_2 \cdot \Delta E_{\text{кп}2}) = \pm (11.38 \cdot 0.2) = \pm 2.25^\circ\text{C};$$

$$\varepsilon_{\text{кп}2} = \pm \frac{\Delta t_{\text{кп}2}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{2.25}{465} \cdot 100\% = 0.48\%$$

Диапазон измерения датчика (-40...600°C), выраженный в мВ, для номинальной статической термопары ХК равен:

$$E_{\text{д}2} = E(600) - E(-40) = 49.09 - (-3.11) = 52.20 \text{ мВ.}$$

Допускаемая абсолютная погрешность показаний вторичного измерительного прибора будет

$$\Delta E_{\text{вн}2} = \pm \delta_{\text{вн}2} \cdot E_{\text{д}} / 100 = 0.5 \cdot 52.20 / 100 = \pm 0.261 \text{ мВ.}$$

Отсюда получим следующие значения абсолютной и относительной погрешностей температур

$$\Delta t_{\text{вн}2} = \pm (k_2 \cdot \Delta E_{\text{вн}2}) = \pm (11.38 \cdot 0.261) = \pm 2.97^\circ\text{C};$$

$$\varepsilon_{\text{вн}2} = \pm \frac{\Delta t_{\text{вн}2}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{2.97}{465} \cdot 100\% = 0.64\%$$

Предельная относительная погрешность показаний измерительной системы №2 будет равна

Абсолютная погрешность измерения температуры при помощи терморезистора ТСП-2.3, будет равна:

$$\Delta t_{\text{ТПЗ}} = \pm(0.15 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot t) = \pm(0.15 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 465) = \pm 1.08^\circ\text{C}.$$

Относительная погрешность измерения температуры:

$$\varepsilon_{\text{ТПЗ}} = \pm \frac{\Delta t_{\text{ТПЗ}}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{1.08}{465} \cdot 100\% = 0.23\%$$

Температурная погрешность, вносимая медными соединительными проводами, составит:

$$\Delta t_{\text{КПЗ}} = \pm(0.75 + 6.5 \cdot 10^{-3} \cdot t) = \pm(0.75 + 6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 465) = \pm 3.77^\circ\text{C}.$$

Отсюда относительная погрешность температуры, обусловленная нагреванием проводов:

$$\varepsilon_{\text{КПЗ}} = \pm \frac{\Delta t_{\text{КПЗ}}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{3.77}{465} \cdot 100\% = 0.81\%$$

Определим погрешность вторичного измерительного прибора для измерительной системы.

На основе данных по номинальной статической характеристике ТПС (табл. 2.4) диапазон сопротивления датчика ТСП-1088-100П равен:

$$R_{\text{ДЗ}} = R(500) - R(-50) = 283.760 - 79.983 = 203.777 \text{ Ом}.$$

Допускаемая абсолютная погрешность показаний вторичного измерительного прибора:

$$\Delta R_{\text{ВПЗ}} = \pm \delta_{\text{ВПЗ}} \cdot R_{\text{ДЗ}} / 100 = \pm 0.5 \cdot 203.777 / 100 = \pm 1.019 \text{ Ом}.$$

Для номинальной статической характеристики ТСП-1088-100П, согласно табл. 2.4, коэффициент составит:

$$k_3 = \Delta t / \Delta R = (500 - 450) / (283.760 - 266.707) = 2.93^\circ\text{C}/\text{Ом}.$$

Отсюда получим следующие значения абсолютной и относительной погрешностей температуры:

$$\Delta t_{\text{ВПЗ}} = \pm(k \cdot \Delta R_{\text{ВПЗ}}) = \pm(2.93 \cdot 1.093) = \pm 2.95^\circ\text{C};$$

$$\varepsilon_{\text{ВПЗ}} = \pm \frac{\Delta t_{\text{ВПЗ}}}{t} \cdot 100\% = \pm \frac{2.95}{465} \cdot 100\% = 0.63\%$$

Предельная относительная погрешность показаний измерительной системы №3 будет

$$\varepsilon_{\text{исз}} = \pm\sqrt{\varepsilon_{\text{ипз}}^2 + \varepsilon_{\text{кпз}}^2 + \varepsilon_{\text{впз}}^2} = \pm\sqrt{0.23^2 + 0.81^2 + 0.63^2}$$

Вывод. Согласно полученным результатам, наилучшей по метрологическим показателям система №3. Поскольку давление измеряемой среды (17.5МПа) на датчик ТСП-1088-100 (0.4 МПа), то датчик необходимо предохранить от разрушения при помощи защитной гильзы выбираем гильзу 200.006.00-01 (табл. П.3).

4 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Измерить температуру в камере обжиговой печи для производства огнеупорных кирпичей. Расчетное значение температуры составляет 475°С.
2. Измерить температуру подшипника червячного редуктора, входящего в состав привода. Расчетное значение температуры составляет 80°С.
3. Измерить температуру воздуха за воздухонагревателем доменной печи, среднее значение температуры принять равным 380°С. Давление нагретого воздуха принять равным 0.06 МПа.
4. Измерить температуру металла коллекторов пароперегревателя теплоэнергетической установки. Расчетное значение температуры принять равным 170°С.
5. Измерить температуру пара в колонне ректификационной установки, среднее значение температуры принять равным 360°С. Давление пара принять равным 5.2 МПа.
6. Измерить температуру продуктов горения мазута до регулирующего клапана теплоэнергетической установки. Расчетное значение температуры продуктов горения составляет 445°С. Давление и скорость горения принять равными соответственно 8.5 МПа и 12 м/с.
7. Измерить температуру раствора аммиака, подаваемого по трубопроводу в установку по производству азотной кислоты. Среднее значение температуры раствора принять равным 95°С.
8. Измерить температуру масла в коробке подачи токарного полуавтомата, среднее значение температуры принять равным 75°С.
9. Измерить температуру пылевоздушной смеси перед горелками теплоэнергетической установки. Расчетное значение температуры смеси составляет 180°С.
10. Измерить температуру газов за воздухоподогревателем теплоэнергетической установки. Расчетное значение температуры газов составляет 360°С. Давление и скорость движения газов в трубе принять равными соответственно 0.1 МПа и 25 м/с.
11. Измерить температуру в паровой камере обжарки колбас. Среднее значение температуры принять равным 260°С.

12. Измерить температуру кладки доменной печи. Среднее значение температуры состав

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каким образом производится оценка погрешности измерительной системы?
2. Какие факторы влияют на выбор датчиков для измерения технологических параметров?
3. Какие выделяют разновидности термоэлектрических датчиков (первичных измерительных)?
4. Что используется в качестве линий связи между термоэлектрическими датчиками и вторичными приборами?
5. На основе каких критериев осуществляется выбор окончательного варианта измерительной системы?
6. Из каких этапов состоит методика метрологического обоснования выбора измерительной системы?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келим Ю. М. Типовые элементы систем автоматического управления. – М.: ФОРУМ: ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, 2008. – 160 с.
2. Виглеб Г. Датчики. – М.: Мир, 1989. – 196 с.
3. Клаассен К. Б. Основы измерений. Электронные методы и приборы в измерительной технике. – М.: Мир, 2000. – 352 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Серийно производимые датчики температуры (Промышленная группа «М

Наимен. датчика	Тип	Серия Метран-	Класс допуска	Диапазон измерения, °С	Услов. давление, МПа	Измеряемая величина
Термоэлектрические датчики (термопары) 	ТХА-0188	231	2	-40...1000	0.1	Чистый воздух, химически агрессивные среды
	ТХК-0188	232	2	-40...600	0.1	
	ТХА-1085	231	2	0...900	0.1	Продукты сгорания топлива
	ТХА-1387	231	2	0...900	0.1	Перегретые продукты сгорания жидкого топлива в котлах
	ТХК-1387	232	2	0...600	0.1	
	ТХА-2488	231	2	-40...400	0.1	Малогабаритные датчики для поверки
	ТХК-2488	232	2	-40...200	0.1	

	ТХК-1087	232	2	0...600	0.1	амми
	ТХА-2388	201	2	0...1100	0.1	Высокотемп
	ТХА-2988	261	2	-40...800	0.4	Реа
	ТХК-2988	262	2	-40...600	0.4	каталитич гидроочи
	ТПП-1788	211	2	0...1300	0.4	Газоо окисли взаимодейс
<p>Термопреобразователи сопротивления (терморезисторы)</p> 	ТСМ-1088-50М	203	В	-50...150	0.4	
	ТСП-1088-100М	204	С	-50...180	0.4	
	ТСМ-1088-50П	205	В	-50...200	0.4	
	ТСП-1088-100П	206	А	-50...500	0.4	
	ТСМ-1388-50М	243	В	-50...150	0.1	Малогоаб повер
	ТСП-1388-50П	244	В	-50...180	0.1	
	ТСМ-1187-50М	203	В	-50...150	1.0	Жидкие и содер углекисло
	ТСП-1187-100М	204	С	-50...180	1.0	
	ТСМ-1187-50П	205	В	-50...200	1.0	
	ТСП-1187-100П	206	В	-50...500	1.0	

Вторичные измерительные преобразователи (Промышленная группа «

Тип преобразователя	Поддерживаемый тип первичного преобразователя					Допускаемая погрешность
	ТХА	ТХК	ТПП	ТСМ	ТСП	
Ш9321				•	•	
Ш9322	•	•	•			
2000Н	•	•	•	•	•	
НП-02	•	•	•			
НП-03				•	•	

Защитные гильзы для защиты датчиков температуры от разрушающего воздействия среды (Промышленная группа «Метран»)

Обозначение защитной гильзы	Условное давление, МПа	Предельная скорость потока, м/с	
		газа	жидкости
200.004.00-01	50	120	10
200.004.00-02	50	100	7.5
200.006.00-01	25	40	4
200.006.00-02	25	25	2.5
200.006.00-03	25	5	0.5
200.006.00-04	25	2	0.2

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ	
2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	
2.1 Оценка погрешностей измерительных систем	
2.2 Методика выбора и метрологические характеристики измерительных преобразователей	

Практическая работа №6 «Обработка результатов неравноточных прямых измерений»

Цель работы: научиться обрабатывать результаты неравноточных прямых измерений.

Выше были рассмотрены равноточные измерения. Это такие измерения, которые проводились при одних и тех же условиях и одним и тем же методом. Иногда бывает необходимо объединить результаты нескольких серий прямых измерений одной и той же величины. В разных сериях могли использоваться различные методы измерения и различные приборы. Такие прямые измерения называются неравноточными.

Допустим, что при некоторых условиях сделано n_1 измерений некоторой величины X и при этом получены n_1 значений ~~$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n_1}$~~ . По этим данным можно определить среднее значение измеряемой величины:

$$X_{cp,1} = \frac{X_{11} + X_{21} + X_{31} + \dots + X_{n_1 1}}{n_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{i1}}{n_1} \quad (9.1)$$

Пусть абсолютная погрешность этого измерения равна ΔX_1 .

Теперь при других условиях сделано n_2 измерений и при этом получены следующие значения измеряемой величины: ~~X_1, X_2, X_3, X_4, X_5~~ . Так же, как и в первом случае можно найти среднее значение измеряемой величины:

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{n_2} \quad (9.2)$$

Пусть абсолютная погрешность этого измерения также равна ΔX_1 . Остановимся на этом примере, а затем обобщим его на случай, когда проведено не две серии измерений, а некоторое число M серий.

Наилучшим значением среднего значения из результатов проведенный $(n_1 + n_2)$ измерений будет среднее значение, которое называется взвешенное среднее и определяется по формуле:

$$\langle \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{n_1 + n_2} \rangle \quad (9.3)$$

или

$$\langle \frac{n_1 X_1 + n_2 X_2 + n_3 X_3 + n_4 X_4 + n_5 X_5}{n_1 + n_2} \rangle \quad (9.4)$$

Полученное среднее значение не совпадает с простым средним значением величин $X_{cp,1}$ и $X_{cp,2}$, то есть

$$\langle \overline{X} \neq \frac{X_{cp,1} + X_{cp,2}}{1 + 1} \rangle. \quad (9.5)$$

В этом примере мы рассмотрели измерения с одинаковой погрешностью. Однако чаще всего погрешности различных серий измерений различны. В этом случае вводится понятие статистического веса.

Статистическим весом некоторой серии измерений называется величина, которая определяется формулой

$$W = \frac{1}{(\Delta X_i)^2}. \quad (9.6)$$

Пусть при неравноточных измерениях проведено M серий измерения некоторой величины X . При этом в различных сериях получены различные результаты:

$$\begin{aligned} X_1 &= \langle X_1 \pm \Delta X_1 \rangle; & X_2 &= \langle X_2 \pm \Delta X_2 \rangle; & \dots; \\ X_M &= \langle X_M \pm \Delta X_M \rangle. \end{aligned} \quad (9.7)$$

В этом случае среднее значение измеряемой величины X и его случайная абсолютная погрешность вычисляется по формулам:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^M (W_i \cdot X_i)}{\sum_{i=1}^M W_i}; \quad \Delta X = \left(\frac{\sum_{i=1}^M W_i}{\sum_{i=1}^M W_i} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.8)$$

Подробные доказательства данных выражений приводятся в курсах теории вероятностей.

Пример обработки прямых неравноточных измерений.

Пусть, например, при измерении времени, за которое тело проходит некоторый постоянный путь, проведено пять серий измерений. После обработки отсчетов каждой серии были получены следующие результаты:

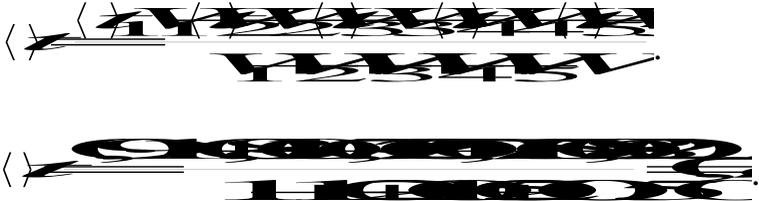


Теперь необходимо объединить эти неравноточные измерения. Для решения этой задачи будем использовать формулу (9.2). Для этого найдем статистический вес каждого измерения:

$$W_1 = \frac{1}{\Delta_1^2} = \frac{1}{\epsilon^2}; \quad W_2 = \frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{\epsilon^2};$$

$$v_3 = \frac{1}{0.2} = 2.5; \quad v_4 = \frac{1}{0.2} = 1.0; \quad v_5 = \frac{1}{0.2} = 2.$$

Находим среднее значение измеряемой величины:



Округляем полученный результат с учетом числа значащих цифр в результатах обработки отсчетов отдельных серий измерений:

$$\langle t \rangle = 0.8c.$$

Находим оценку абсолютной погрешности:



Округляем результат с учетом количества значащих цифр: $\Delta t = 0.1c$.

Вычисляем относительную погрешность:

$$\frac{\Delta t}{\langle t \rangle} = \frac{0.1c}{0.8c} = 0.125.$$

Записываем результат измерения:



Варианты индивидуальных заданий

При измерении времени, за которое тело проходит некоторый постоянный путь, проведено 6 серий измерений. После обработки отсчетов каждой серии были получены следующие результаты

	1	2	3	4	5	6
1	5±1	6±1	4±3	5±2	7±1	9±4
2	0.2±0.1	0.3±0.2	0.4±0.2	0.18±0. 15	0.22±0. 21	0.32±0. 15
3	0.3±0.1	0.7±0.2	0.5±0.2	0.28±0. 15	0.42±0. 21	0.62±0. 15
4	0.9±0.1	0.8±0.2	0.7±0.2	0.48±0. 17	0.52±0. 21	0.62±0. 15
5	0.6±0.1	0.5±0.2	0.7±0.2	0.88±0. 15	0.92±0. 21	0.72±0. 15
6	0.7±0.1	0.5±0.6	0.6±0.2 5	0.68±0. 19	0.62±0. 21	0.62±0. 15
7	0.8±0.3	0.7±0.2	0.9±0.2	0.88±0. 15	0.82±0. 29	0.82±0. 15
8	0.5±0.1	0.3±0.5	0.7±0.2 5	0.58±0. 18	0.52±0. 21	0.72±0. 15
9	0.2±0.1	0.7±0.2	0.3±0.2 6	0.38±0. 15	0.22±0. 26	0.32±0. 12
10	0.7±0.5	0.3±0.4	0.6±0.2 7	0.28±0. 14	0.28±0. 21	0.37±0. 15
11	0.25±0. 1	0.38±0. 2	0.47±0. 23	0.28±0. 15	0.22±0. 27	0.32±0. 11
12	0.72±0. 1	0.93±0. 6	0.44±0. 26	0.28±0. 12	0.22±0. 21	0.52±0. 15
13	0.82±0. 7	0.53±0. 2	0.43±0. 27	0.68±0. 15	0.72±0. 24	0.36±0. 15

1	0.5 ± 0.1	$0.32 \pm 0.$	$0.44 \pm 0.$	$0.58 \pm 0.$	$0.25 \pm 0.$	$0.62 \pm 0.$
4		2	26	13	21	15
1	$0.26 \pm 0.$	$0.34 \pm 0.$	$0.74 \pm 0.$	$0.68 \pm 0.$	$0.42 \pm 0.$	$0.62 \pm 0.$
5	1	3	27	15	21	16

Отчет по практической работе оформляется на формате А4 в печатном виде. Отчет должен содержать: титульный лист, цель работы, задание, порядок выполнения расчетов, результаты расчетов, выводы.

Практическая работа №7 «Определение параметров аналого-цифрового

преобразователя»

Определение основных параметров цифро – аналогового преобразователя (ЦАП)

1 Цель работы

Изучить работу ЦАП с весовыми резисторами и рассчитать коэффициент усиления и выходное напряжение ЦАП при различных двоичных комбинациях на входы ЦАП .

2 Пояснения к работе.

2.1 Краткие теоретические сведения:

ЦАП используются для преобразования цифрового кода в аналоговый сигнал. ЦАП с весовыми резисторами относится к устройству суммирования и состоит из двух узлов: резистивной схемы с резисторами $R_1 - R_4$ и суммирующего операционного усилителя с резистором обратной связи R_o . Опорное напряжение $U_{оп}$ подается на резисторам матрицы переключателями А, В, С, D, и преобразуемый код.

1. Коэффициент усиления по напряжению (K_{U_i}), когда переключатель установлен в положение, соответствующее логическому 1:

$$K_i = R_o/R_i$$

2. K_{ij} , когда два переключателя установлены в положение, соответствующее логическим 1:

$$K_{ij} = R_o : R_i * R_j / (R_i + R_j)$$

3. K_{ijn} , когда три переключателя установлены в положение, соответствующее логическим 1:

$$K_{ijn} = R_o : R_i * R_j * R_n / (R_i * R_j + R_i * R_n + R_j * R_n)$$

4. K_{ijnm} , когда четыре переключателя установлены в положение, соответствующее логическим 1:

$$K_{ijnm} = R_o : R_i * R_j * R_n * R_m / (R_i * R_j * R_n + R_i * R_j * R_m + R_i * R_n * R_m + R_j * R_n * R_m)$$

5. Выходное напряжение ЦАП:

$$U_{вых} = K_u * U_{оп} (B),$$

где K_u для различных положений переключателей, кодовые комбинации «0» и «1».

2.2 Пример расчета:

Исходные данные даны для кодовых комбинаций 0001 и 1

1. Переключатель А установлен в положение, соответствующее логической 1
2. Переключатели А, В, С, D, установлены в положение, соответствующие логическим 1

$U_{\text{вх.}} = 6 \text{ В}; R_0 = 13,3 \text{ кОм}; R_1 = 200 \text{ кОм}; R_2 = 100 \text{ кОм};$
 $R_3 = 50 \text{ кОм}; R_4 = 25 \text{ кОм}.$

Решение:

1. $K_1 = 13,3/200 = 0,065$
2. $U_{\text{вых.1}} = 0,065*6 = 0,4 \text{ (В)}$
3. $K_{1234} = 13,3 : (200*100*50*25/(200*100*50 + 200*100*50*25 + 200*50*25)) = 1$
4. $U_{\text{вых.1234}} = 1*6 = 6 \text{ (В)}$

3. Задание:

3.1 Определить коэффициенты усиления по напряжению на выходе ЦАП при $U_{\text{вх.}} = 6 \text{ В}$ для различных комбинаций переключателей А, В, С, D, имитирующих кодовые комбинации «1». Исходные данные взять из таблицы 1, согласно варианту

№ варианта	Кодовые Комбинации			R_0 (кОм)	R_1 (кОм)	R_2 (кОм)	R_3 (кОм)
	А	В	С				
1	1001	0011	0111	10	150	75	37,5
2	0010	0110	1011	10	150	75	37,5
3	0100	0101	1101	10	150	75	37,5
4	1000	1010	1110	10	150	75	37,5
5	0001	1100	1111	10	150	75	37,5

3.2 Произвести расчет:

$K =$

$$K =$$

$$U =$$

$$U =$$

$$U =$$

3.3 Результаты расчета свести в таблицу 2

Таблица 2

К	К	К	U (В)	U (В)

1. Контрольные вопросы к практической работе

1. Для каких целей предназначен цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)?
2. В каком виде представляются входные величины в ЦАП?
3. Что составляет основу схемы ЦАП?
4. Для чего в схеме ЦАП используются переключатели?
5. Какие элементы могут использоваться в качестве переключателей?

Практическая работа №8 «Определение параметров фотоэлектрического датчика»

Расчет фотоэлектрического датчика

На (рис. 3) представлена входная цепь двухтактного датчика на фотодиодах, работающих в вентильном режиме. Здесь фотодиоды $\Phi Д_1$ и $\Phi Д_2$ включены встречно-параллельно на общее сопротивление нагрузки, в результате этого фототоки $I_{\phi 1}$ и $I_{\phi 2}$, протекающее по сопротивлению нагрузки R_n , будут направлены встречно, а величина напряжения нагрузки определяется из выражения

$$U_n = (I_{n1} - I_{n2}) R_n .$$

Расчет геометрии оптико-механической части и светотехнический расчет имеют своей целью определение зависимости фототока от параметров источника излучения и элементов оптической схемы датчика, предназначенных для формирования пучка излучения и преобразования входной величины датчика - механического перемещения в изменение освещенности приемника излучения.

Порядок расчета ФЭД в каждом отдельном случае определяется постановкой задачи.

Пример. Выбрать тип лампы накаливания, обеспечивающей получение максимально возможного сигнала с фотодиода ФД-1 при засветке всей площади чувствительной площадки. Так как расстояние l (рис.4) от излучателя до приемника в данном случае не задано, то расчет ведем методом последовательных приближений. Из (табл. 3) выбираем предварительно лампу накаливания типа МН-7 со световым потоком $\Phi_{ист} = 6,25 \text{ лм}$ и точечным телом накала, расположенным в центре колбы.

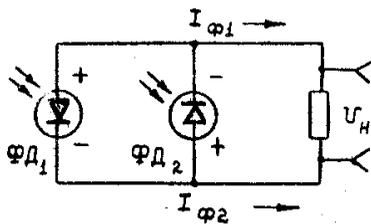


Рис.3.

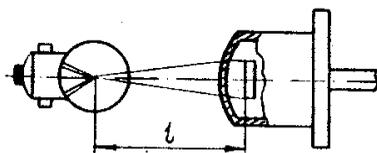


Рис.4

Согласно (рис. 5) фотодиод ФД-1 допускает максимальную освещенность $E = 10000 \text{лк}$. Это значение освещенности может быть достигнуто, если на чувствительную площадку фотодиода упадет поток излучения $\Phi_{чз}$, определяемый формулой:

$$\Phi_{чз} = E \cdot \rho_{чз} = 10000 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 0,05 \text{лм.}$$

где $\rho = 5 \text{мм}^2$ - площадь чувствительной площадки ФД-1 согласно (табл. 4).

Затем определяем величину телесного угла, который заполняет поток $\Phi_{чз}$ от лампы МН-7 по формуле

$$\omega_{чз} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \Phi_{чз}}{\Phi_{ист}} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 0,05}{6,25} = 0,1 \text{стер}$$

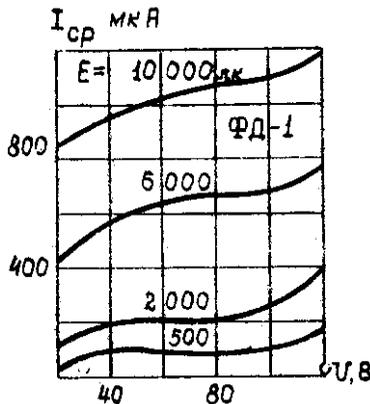


Рис.5

Таблица 4

Параметры	Тип -фотодиода							
	ФД-1	ФД-2	ФД-3	ФД-3а	ФДК-1	1690	КФДМ	ФД-6К
Материал чувствительного элемента	германий		кремний					
Рабочее напряжение, В	15	30	10	10	20	20	20	20
Темновой ток, мкА	30	25	10	10	3	2	I	I
Интегральная чувствительность, мА/лм	20	20	15	-	3	4	7	7
Площадь чувствительной поверхности	5	I	2	2	2	2	2	2
Долговечность, час	500	500	100	2000	100	100	2000	5000
Постоянная времени, с	$I \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$I \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$I \cdot 10^{-5}$	-	$4 \cdot 10^{-6}$	-
Фото -ЭДС при $E = 1500$ л к $T_{\text{ЦВ}} = 2360^{\circ}\text{C}, \text{МВ}$	-	—	100	-	350	-	350	-
Вес, г	1,0	0,9	0,2	0,2	-	-	-	-
Диапазон допустимее температур, ос	-60...+40	-45...+45	-60...+60	-	-50...+80	-	-	-

Очевидно, что требуемое значение потока $\Phi_{чз}$ в телесном угле $\omega_{чз}$ может быть получено, если источник излучения расположен от чувствительной площадки приемника на расстоянии l , определяемой из выражения

$$l = \sqrt{\frac{\rho_{чз}}{\omega_{чз}}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,1}} \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7 \text{ мм}$$

Так как полученное расстояние $l = 7 \text{ мм}$ меньше, чем радиус лампы (равный 8 мм), то необходимо либо взять лампу с колбой меньшего диаметра, но с тем же значением светового штока, либо выбрать лампу с большим значением светового потока.

Из (табл. 3) выбираем лампу МН-24 с диаметром колбы равным 11 мм и с $\Phi_{ист} = 18 \text{ лм}$. Тогда для данного источника

$$\omega_{чз} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \Phi_{чз}}{\Phi_{ист}^1} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 0,05}{18} = 0,035 \text{ стер}$$

$$l = \sqrt{\frac{\rho_{чз}}{\omega_{чз}^1}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,035}} \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12 \text{ мм}$$

Следовательно, выбранный источник излучения (лампа МН-24) обеспечит заданное значение освещенности фотодиода, если тело накала лампы будет находиться на расстоянии $l = 12 \text{ мм}$ от чувствительной площадки последнего.

Для тех случаев, когда расстояние l необходимо значительно увеличить или применить источник излучения меньшей мощности (а следовательно, и меньших габаритов), в конструкцию датчика вводят оптическую систему. Оптические системы в датчиках обычно работают вместе с приемниками или вместе с источниками излучения и предназначаются для перераспределения потока излучения с целью более эффективного его использования.

Пример. Произвести конструктивный расчет фотоэлектрического датчика и определить его передаточную функцию.

Исходные данные. Конструктивная схема ФЭД представлена на (рис. 6).

Таблица 3

Тип лампы	Номинальные значения			Размеры, мм				Срок службы, час	Тип цоколя по ГОСТ 2520-63 и 6129-52
	напряжение, В	мощность, Вт	светового потока, лм	D	L	H	а × в		
СЦ-75	4,0	4	40	18	38	10,5	1,6x1,6	100	1Ф-С11
СЦ-69	6,0	25	340	33	67	8,5	3,0x2,0	100	P-14
СЦ80	8,0	9	84	18	33	3,3	1,7x1,7	100	PJO
СЦ-61	8,0	20	250	21	56	42,0	2,8x2	100	2Ш-15
СЦ-68	8,0	30	465	31	86	48,0	1,3x5,5	100	2Ф-Ш20
МН-1	1,0	0,07	-	12	24	*	1,5x0,3	200	P-10 -I3-I
МН-2	2,5	0,07	-	12	24	*	1,5x0,3	200	P-10 -I3-I
МН-4	2,5	0,29	4,0	16	30	*	-	250	1Ш-9-1
МН-6	2,5	0,50	7,5	16	30	*	-	150	1Ш-9-1
МН-7	2,5	0,54	6,3	16	30	*	-	500	1Ш-9-1
МН-8	2,5	0,50	7,5	23	44	*	-	300	1Ш-15-1
МН- 10	2,5	0,72	12,0	23	44	*	-	300	1Ш-15-1
МН-11	2,5	0,72	12,0	16	30	*	-	100	P-10-I3-I
К-3	5,0	35	60	31	91	60	9,0x2,5	500	P-14-25-2
К-27	10,0	50	680	25	86	60	6,0x2,0	100	p-14-25-2
Э-34	2,4	0,4	*	3	13	3	.	10	резьба М-2,6
ОПЗ-0,25	3,0	0,25	2,8	4,6	14	2	-	75	-

Тело накала расположено в центре колбы

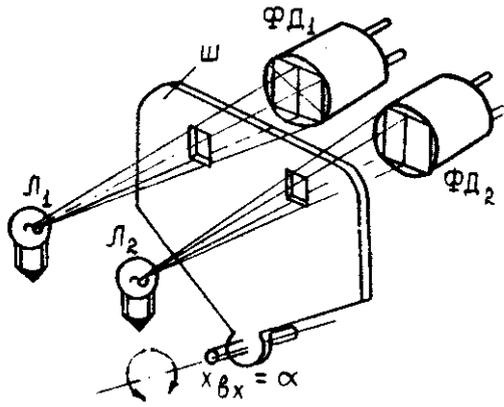


Рис.6

Чувствительная площадка фотодиода имеет форму квадрата со стороной $a = 1\text{мм}$. Вольт-амперные характеристики фотодиода приведены на (рис. 7). Напряжение источника питания фотодиодов $U_{пит} = 15\text{В}$. Пределы изменения входной величины $\chi_{вх} = \alpha = \pm 30'$.

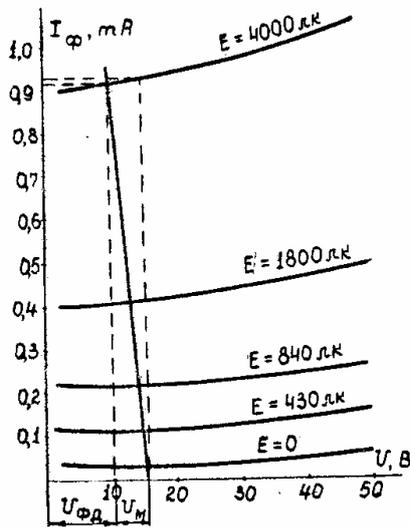


Рис.7

Основное усиление сигнала датчика производится с помощью магнитного усилителя.

а. Выбор и расчет электрической схемы.

Решающим фактором для выбора электрической схемы-датчика является необходимость правильного сопряжения высокоомного выхода приемника излучения и низкоомного входа магнитного усилителя. Для этой цели целесообразно применить предусилитель на транзисторах, выполненный по схеме двухтактного эмиттерного повторителя, как показано на рис.8.

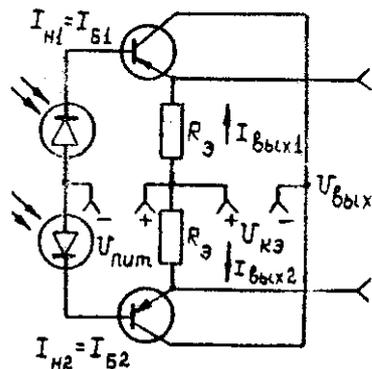


Рис.8

На этом этапе основное значение имеет правильное определение величины сопротивления нагрузки, так как от результатов этого выбора зависят чувствительность датчика и величина мощности выделяемой в нагрузку.

Для получения наибольшей выходной мощности, выделяемой на сопротивлении нагрузки, воспользуемся наибольшим допустимым значением освещенности фотодиода – 4000 лк (верхняя- кривая на (рис.7).

1. Рассчитываем значение R_E для $E = 4000$ лк, для чего проведем прямую, параллельную вертикальной оси и отстоящую от нее на величину $U_{num} = 15$ В, до пересечения с вольтамперной характеристикой, определенной для $E = 4000$ лк. Затем из точки Пересечения проведем прямую, параллельную горизонтальной оси, и определим ток $I_E = 0,93$ мА. После чего вычислим

$$R_E = \frac{U_{num}}{I_E} = \frac{15}{0,93} \approx 16 \text{ кОм}$$

2. Найдем оптимальное значение сопротивления нагрузка по формуле

$$R_n = \frac{1}{3} R_E = \frac{16}{3} \approx 5,3 \text{ кОм}$$

3. Определим ток "короткого замыкания"

$$I_{кз} = \frac{U_{num}}{R_n} = \frac{15}{5,3} \approx 2,8 \text{ мА}$$

и построим нагрузочную прямую см. (рис. 7).

4. После построения нагрузочной прямой графическим путем найдем $U_n = 5$ В, $I_n = 0,92$ мА и $P_n = 4,6 \cdot 10^{-3}$ произведем расчет предусилителя по одной из известных методик.

Светотехнический расчет

Учитывая необходимость проектирования датчика с наименьшими габаритами, проверить возможность использования миниатюрной лампы накаливания типа ОПЗ-0,25 (табл. 3) со световым потоком $\Phi_{ист} = 2,8$ лм.

5. Определим значение потока излучения, необходимое для создания требуемой освещенности по формуле

$$\Phi_{чз} = E \cdot \rho_{чз} = 4000 \cdot 10^{-6} = 0,004 \text{ лм}$$

6. Вычислим телесный угол для этого потока:

$$\omega_{чз} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \Phi_{чз}}{\Phi_{ист}^1} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 0,004}{2,8} = 0,018 \text{ стер}$$

7. Найдем расстояние l от источника до площадки чувствительного элемента

$$l = \sqrt{\frac{\rho_{чз}}{\omega_{чз}}} = \sqrt{\frac{1}{0,018}} \approx 7,4 \text{ мм}$$

Тая как точечное тело накала лампы отстоит от передней стенки колбы на расстоянии порядка 3 мм см. (рис. 4), то лампа ОПЗ-0,25 может быть использована в проектируемом датчике.

Конструктивный расчет датчика.

Конструктивный расчет сводится к определению размеров отверстий в шторке и расстояния от центра этих отверстий до оси вращения шторки.

8. Исходя из простых геометрических соображений (рис. 9), определим размер отверстия в шторке.

$$\text{Так как } \frac{a}{b} = \frac{l}{l_1}, \text{ то } b = \frac{a \cdot l_1}{l}$$

Задавшись значением $l_1 = 4,5 \text{ мм}$, получим

$$b = \frac{1 \cdot 4,5}{7,5} = 0,6 \text{ мм}$$

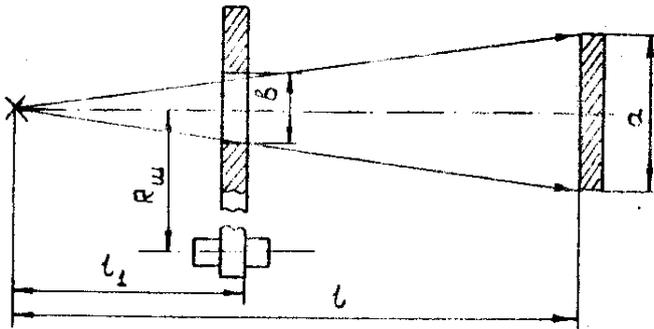


Рис.9

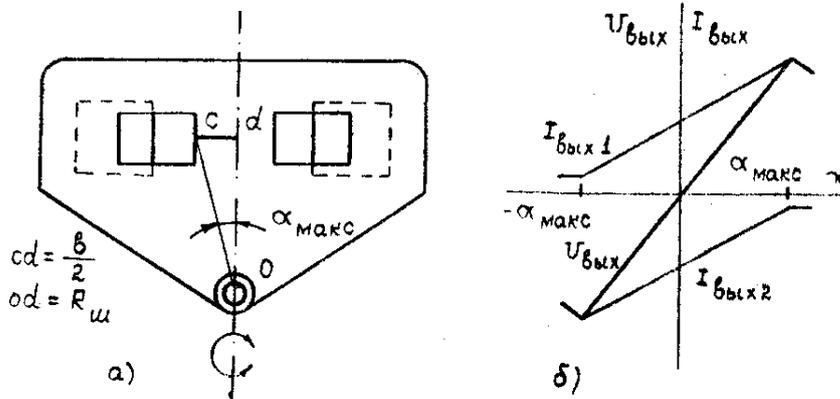


Рис.10

9. Если расположить отверстия в шторке относительно приемников излучения так, как это показано на (рис. 10,а) (где чувствительные площадки изображены пунктиром), то полная засветка одного из приемников будет при перемещения шторки на величину $b/2$.

Учитывая небольшие значения ($\alpha = 30'$), можно записать выражение для определения $R_{ш}$

$$R_{ш} = \frac{\frac{b}{2}}{\operatorname{tg} \alpha_{\max}} = \frac{0,6}{2 \cdot 0,0087} = 35 \text{ мм}$$

Определение передаточной функции датчика

10. Найдем значение коэффициента передачи шторки (заслонки)

$$K_3 = \frac{\Phi_{чз \max}}{\alpha_{\max}} = \frac{0,004}{20} \approx 0,13 \cdot 10^{-3} \text{ лм / угл.мин.}$$

11. Определим $K_{чз}$ - интегральную чувствительность фотодиода при расчетном значении нагрузки

$$K_{чз} = \frac{I_{н \max}}{\Phi_{чз \max}} = \frac{0,96 \cdot 10^{-3}}{0,004} = 0,24 \text{ А / лм}$$

Следовательно, общий коэффициент передачи датчика (без предусилителя) будет равен

$$K_{фэд} = K_3 \cdot K_{чз} = 0,13 \cdot 10^{-3} \cdot 0,24 = 0,312 \cdot 10^{-4} ,$$

статическая характеристика датчика (рис. 10,б) в заданных пределах изменения входной величины представляет собой прямую, проходящую через начало координат.

Исходные данные для расчета потенциометрического датчика

№ варианта	$X_{вх \max}$		$K\delta$		$\Delta x \min$		δ_{\max} %	Δt , °C	R_0 , мм	Материал каркаса
	α , град	L , мм	В/град	В/мм	Угл. мин	мм				
1	8		1		4		1	-50...+50	30	Керам.
2		10		0,5		0,5	0,8	-40...+60		Алюм.
3	12		1,5		6		0,75	-5...+70	25	Пластм.
4		20		0,7		0,6	1,2	-15...+70		Керам.
5	15		0,9		8		1,5	-30...+60	35	Алюм.
6		14		0,9		0,4	0,9	-50...+50		Пластм.
7	13		1,2		5		1,1	-40...+60	40	Керам.
8		18		1,1		0,08	1,3	-5...+70		Алюм.

9	10		0,8		7		1,4	-15+70	20	Пластм.
10		16		1,3		0,09	0,85	-30...+60		Керам.
31	9		1,3		9		1	-50...+50	28	Алюм.
32		13		1,5		0,7	0,8	-40...+60		Пластм.
33	17		1,6		4		0,75	-5...+70	36	Керам.
34		15		0,6		0,07	1,2	-15+70		Алюм.
35	20		1,9		5		1,5	-30...+60	24	Пластм.
36		17		0,8		0,8	0,9	-50...+50		Керам.
37	18		2,0		6		1,1	-40...+60	32	Алюм.
38		19		1		0,9	1,3	-5...+70		Пластм.
39	13		0,7		7		1,4	-15+70	35	Керам.
40		9		1,2		0,75	0,85	-30...+60		Алюм.

Исходные данные для расчета индуктивного датчика

№ варианта	$x_{раб.}$ мм	K_0 А/мм	K_3	$R_{н.}$ Ом	Напряжение		$F, Гц$	$K_{зо}$	Параметры сердечника		
					U	U_0			$a, мм$	$b, мм$	$c, мм$
11	±0,1	0,2	0,4	100	0,4	0,4	1,1	500	6	12	10
12	±0,2	0,25	0,45	120	0,45	0,45	1,15	400	7	15	12
13	±0,3	0,3	0,5	110	0,5	0,5	1,2	200	5	10	8
14	±0,15	0,15	0,55	115	0,55	0,55	1,1	800	6	12	10
15	±0,25	0,24	0,6	95	0,6	0,6	1,15	500	7	15	12
16	±0,12	0,18	0,4	90	0,4	0,4	1,2	400	5	10	8
17	±0,22	0,21	0,45	125	0,45	0,45	1,1	200	6	12	10
18	±0,14	0,22	0,5	130	0,4	0,4	1,15	800	7	15	12
19	±0,5	0,23	0,55	135	0,45	0,45	1,2	500	5	10	8
20	±0,4	0,27	0,6	140	0,5	0,5	1,1	400	6	12	10
41	±0,1	0,15	0,4	121	0,55	0,55	1,15	200	7	15	12
42	±0,2	0,32	0,45	144	0,6	0,6	1,2	500	5	10	8
43	±0,3	0,35	0,5	96	0,4	0,4	1,1	400	6	12	10
44	±0,15	0,28	0,55	81	0,45	0,45	1,15	200	7	15	12
45	±0,25	0,17	0,6	169	0,4	0,4	1,2	800	5	10	8
46	±0,12	0,2	0,4	150	0,45	0,45	1,1	500	6	12	10
47	±0,22	0,25	0,45	145	0,5	0,5	1,15	400	7	15	12
48	±0,14	0,3	0,5	118	0,55	0,55	1,2	200	5	10	8
49	±0,5	0,15	0,55	125	0,6	0,6	1,1	800	6	12	10
50	±0,4	0,24	0,6	111	0,4	0,4	1,2	500	7	15	12

Исходные данные для расчета фотоэлектрического датчика

№ варианта	$\chi_{\text{вх}}$, <i>угл. мин.</i>	Тип фотодиода
21	± 25	ФД-1
22	± 28	ФД-2
23	± 30	ФД-3
24	± 32	ФДК-1
25	± 36	ФД-1
26	± 40	ФД-2
27	± 45	ФД-3
28	± 42	ФДК-1
29	± 22	ФД-1
30	± 38	ФД-2
51	± 37	ФД-3
52	± 25	ФДК-1
53	± 22	ФД-1
54	± 42	ФД-2
55	± 45	ФД-3
56	± 40	ФДК-1
57	± 28	ФД-1
58	± 36	ФД-2
59	± 30	ФД-3
60	± 32	ФДК-1

Практическая работа №9 «Обработка экспериментального сигнала, полученного с объекта, с помощью программы «Эксперт»»

Цель работы

Ознакомление с методами и алгоритмами обработки экспериментальной информации и получение навыков исследования массивов информации с использованием прикладной программы Эксперт.

Краткие сведения из теории

Обработка экспериментальной информации (данных) является одной из существенных проблем получения достоверной информации. Известно, что широкий класс процессов можно представить в виде:

$$q(t)=g(t)+\xi(t),$$

где $q(t)$ – детерминированная составляющая, характеризующая поведение процесса во времени, $\xi(t)$ – случайная составляющая, отражающая как флуктуирующие процессы всех составляющих комплекса технических средств и объекта, так и шумов, возникающих при передачи и преобразовании информации.

В задачу обработки экспериментальной информации входят процедуры, назначение которых является устранение случайной составляющей $\xi(t)$. Для этой цели используются различные алгоритмы, к которым относятся:

- удаление случайных выбросов, носящих аномальный характер;
- сглаживание экспериментальных данных, для устранения медленно меняющихся составляющих;
- устранение шумов измерений;
- фильтрация сигналов;
- прореживание, позволяющая сократить объем информации без потери информативности обрабатываемого сигнала.

В процессе работы над реальными сигналами, во многих случаях, необходимо выполнять сопоставительный анализ. При этом над сигналами выполняются различные преобразования, такие как сложение сигналов по амплитуде, вычитание, перемножение, деление, масштабирование и т.п. вместе с тем. Преобразование сигналов связано с процедурами дифференцирования и интегрирования, что во многих практических задачах дает возможность перехода от одних функций, описывающих конкретный процесс, к другим описывающих этот же процесс, но в ином виде и с

иными характеристиками. При анализе экспериментальной информации существенную роль играет преобразование Фурье. Использование которого позволяет рассматривать экспериментальную информацию как сумму отдельных процессов со своими параметрами. При этом достаточно эффективно выполняется анализ выходного сигнала с учетом существенных особенностей состояния анализируемого объекта.

Практическая часть

Запустить программу обработки сигналов Expert. Выбрать меню “Обработка”, затем “Обработка массива”. Открыть файл «data.txt» и выполнить перечисленные ниже процедуры обработки экспериментальной информации.

При выполнении работы необходимо каждый раз открывать исходный файл для обработки!

Сглаживание

Сглаживание является специальной операцией усреднения с помощью интерполяционных полиномов, обеспечивающей получение уточненного значения d_i по заданному значению u_i и ряду известных близлежащих значений, известных со случайной погрешностью. Для реализации этого метода разработаны 3 процедуры:

1. Линейное сглаживание по 3 точкам;
2. Линейное сглаживание по 2 точкам;
3. Нелинейное сглаживание по 7 точкам.

Исходный сигнал: (скриншот с программы)

Сглаживание по 5 точкам 1 проход: (скриншот с программы)

Сглаживание по 5 точкам 20 проходов: (скриншот с программы)

Сглаживание по 7 точкам 5 проходов: (скриншот с программы)

Дифференцирование

Дифференцирование ведется по формуле третьих центральных разностей. Крайние точки массива дифференцируются с использованием формул левых и крайних разностей. В качестве интерполяционного многочлена взята интерполяционная функция Лагранжа.

Исходный сигнал: (скриншот с программы)

Дифференцирование по 3 точкам 10 проходов: (скриншот с программы)

Дифференцирование по 5 точкам 10 проходов: (скриншот с программы)

Интегрирование

Метод интегрирования основан на аппроксимации определенного интеграла суммой составных площадей. Графически это можно представить как площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, функцией $f(x)$ и пределами интегрирования a и b . В общем виде задача состоит в нахождении величины

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Формулы численного интегрирования можно разделить на две категории для интегрирования функций, заданных равноотстоящими отсчетами и заданных с произвольным шагом. К первым относятся формулы Ньютона-Котеса, а ко вторым квадратуры Гаусса.

Выделяют:

1. Метод трапеций;
2. Метод Симпсона;
3. Метод Ньютона-Котеса.

Метод трапеций основан на линейной аппроксимации интегрируемой функции между двумя соседними точками на промежутке $a \leq x \leq b$. Для того чтобы повысить точность нужно аппроксимировать функцию полиномом высшего порядка, т.е. взять линию отличную от прямой. А именно параболу. Данная аппроксимация используется в методах Симпсона и Ньютона-Котеса.

Исходный сигнал: (скриншот с программы)

Интегрирование по методу трапеции 2 прохода: (скриншот с программы)

Интегрирование по методу Симпсона 2 прохода: (скриншот с программы)

Интегрирование по методу Ньютона-Котеса 2 прохода: (скриншот с программы)

Цензурирование

Метод цензурирования применяется в случае когда необходимо исключить одиночные выбросы искажающие информацию настолько, что все последующие результаты

оказываются ложными. Т.о. метод позволяет находить явные выбросы из общего набора значений и устранять их.

Исходный сигнал: (скриншот с программы)

Цензурирование 0,01% 5 проходов: (скриншот с программы)

Цензурирование 0,001% 5 проходов: (скриншот с программы)

Цензурирование 0,0001% 10 проходов: (скриншот с программы)

С помощью данного метода добиться того чтобы исключить случайные выбросы на 100%.

Прореживание

Процедура прореживания достаточно просто может обработать массив путем удаления из него каждого n -значения. Прореживание применяется в том случае, если полученный сигнал так сильно зашумлен, что обычные процедуры сглаживания и цензурирования не могут обеспечить соответствующей формы сигнала. После прореживания вместе с частью правильных данных, устраняется и часть шумов.

Исходный сигнал: (скриншот с программы)

Прореживание каждой 2 точки 2 прохода: (скриншот с программы)

Прореживание каждой 2 точки 5 проходов: (скриншот с программы)

Прореживание каждой 5 точки 20 проходов: (скриншот с программы)

Исходный сигнал: (скриншот с программы)

Разложение по Фурье: (скриншот с программы)

Разложение по Уолшу: (скриншот с программы)

Вывод.

Файл для обработки выдается преподавателем в соответствии с вариантом студента.

1 Получение передаточной функции объекта на примере RLC цепи

Получение передаточных функций наглядно представляется на примере электрической цепи. Для решения такого типа задач необходимо знать электрический импеданс элементов цепи, который приведен в таблице 1.

Таблица 1. Связь мгновенных значений напряжений и токов на элементах

<p>Резистор</p>  <p style="text-align: center;">i_R</p>	$u_R = Ri_R$	$i_g = Ru_R$
<p>Катушка индуктивности</p>  <p style="text-align: center;">i_L</p>	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$
<p>Конденсатор</p>  <p style="text-align: center;">i_C</p>	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$

Процедуру получения передаточной функции объекта можно разбить на следующие этапы:

1. получение дифференциальных уравнений системы;
2. запись уравнений в операторной форме;
3. запись передаточной функции.

1.1 Примеры

Пример 1.1

Записать уравнения математической модели, определить передаточную функцию для объекта, приведенного на рисунке 1.1, при $R_1 = R_2 = 1$ кОм, $R_3 = 2$ кОм, $C_1 = C_2 = 1$ мкФ:

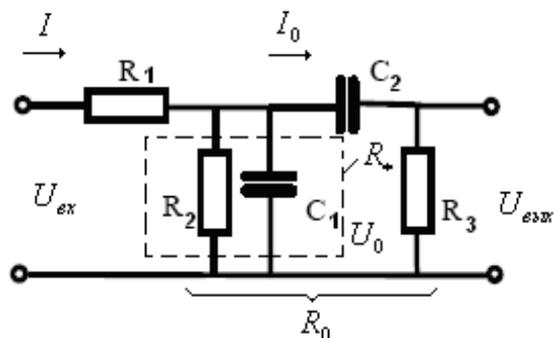


Рисунок 1.1. Эквивалентная схема объекта

1. Выходной величиной будем считать напряжение на выходе цепи, т.е. $y = U_{\text{вых}}$, входным воздействием – напряжение на входе $u = U_{\text{вх}}$. Физическими законами, в силу которых развиваются процессы в объекте, являются законы Киргофа и Ома.

2. Запишем дифференциальные уравнения, характеризующие процессы, протекающие в цепи, выразив сопротивление с помощью оператора дифференцирования, согласно таблице 1, заменяя операцию дифференцирования на p .

3. Запишем сопротивление R_* при параллельном соединении элементов:

$$R_* = \frac{R_2}{R_2 C_1 p + 1}.$$

Запишем сопротивление в контуре, считая, что R_* нам известно:

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_*} + \frac{1}{\frac{1}{C_2 p} + R_3}}.$$

Ток до разветвления по закону Ома равен:

$$I = \frac{U_{\text{вх}}}{R_1 + R_0} = \frac{U_{\text{вх}} ((R_2 C_1 p + 1)(R_3 C_2 p + 1) + R_2 C_2 p)}{R_1 (R_2 C_1 p + (R_3 C_2 p + 1)(R_2 C_1 p + 1)) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)},$$

Тогда напряжение в контуре будет равно:

$$U_0 = IR_0 = \frac{U_{\text{вх}} R_2 (R_3 C_2 p + 1)}{R_1 (R_2 C_1 p + (R_3 C_2 p + 1)(R_2 C_1 p + 1)) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)},$$

Ток после разветвления равен:

$$I_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{C_2 p} + R_3} = \frac{U_{\text{вх}} R_2 C_2 p}{R_1 (R_2 C_1 p + (R_3 C_2 p + 1)(R_2 C_1 p + 1)) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)},$$

Запишем выходное напряжение:

$$U_{\text{вых}} = I_0 R_3 = \frac{U_{\text{вх}} R_2 R_3 C_2 p}{R_1 (R_2 C_1 p + (R_3 C_2 p + 1)(R_2 C_1 p + 1)) + R_2 (R_3 C_2 p + 1)}.$$

4. Запишем окончательную передаточную функцию, как отношение входа к выходу и раскроем скобки в знаменателе:

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{R_2 R_3 C_2 p}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 p^2 + (R_1 R_2 C_1 + R_1 R_2 C_2 + R_1 R_3 C_2 + R_2 R_3 C_2) p + R_1 + R_2}$$

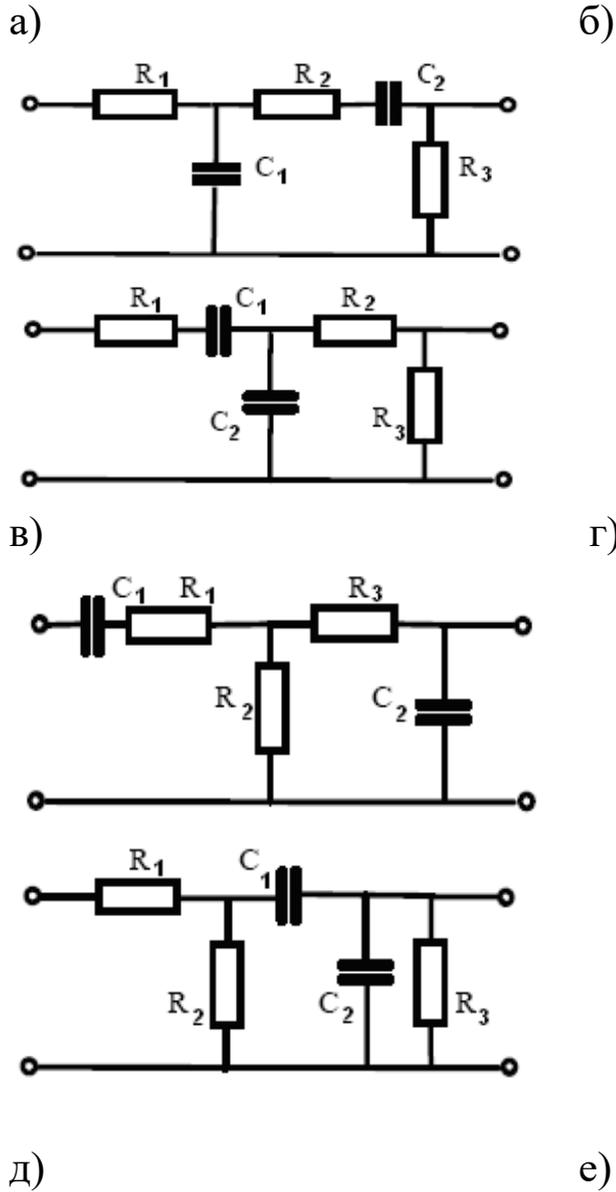
5. Подставив численные значения, получим:

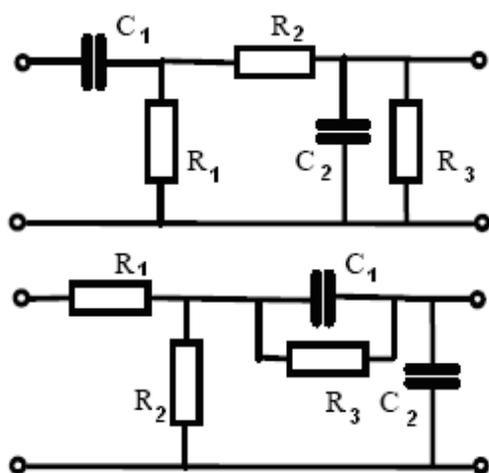
$$W(p) = \frac{2000p}{2000p^2 + 6000p + 2000}.$$

1.2 Задания на самостоятельную подготовку

Задача 1.1

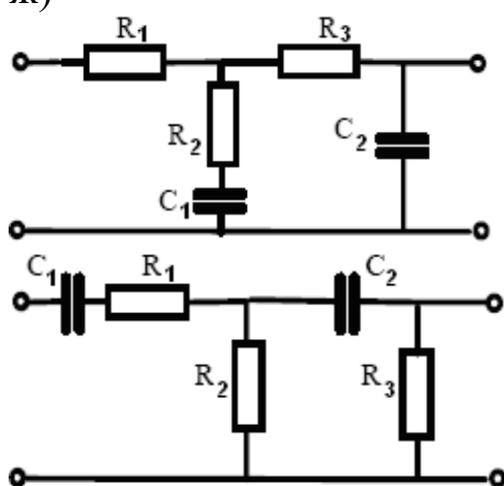
Записать уравнения математической модели, определить передаточную функцию для объекта, приведенного на рисунке 1.2, при $R_1 = R_2 = 1$ кОм, $R_3 = 2$ кОм, $C_1 = C_2 = 1$ мкФ, $L_1 = 1$ мГн:





ж)

з)



и)

к)

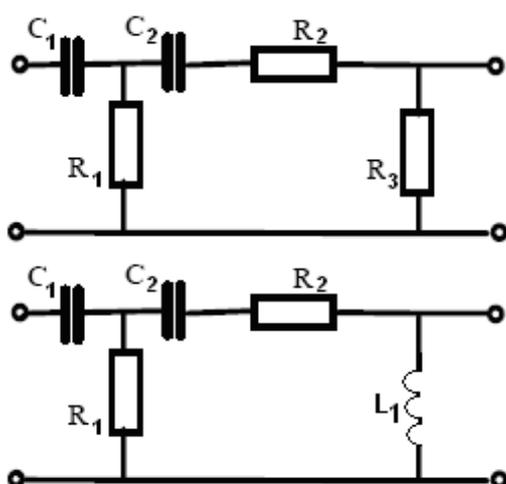


Рисунок 1.2. Эквивалентные схемы объекта

2 Получение передаточной функции из системы дифференциальных уравнений состояния

Рассмотрим способ получения передаточной функции из системы дифференциальных уравнений состояния. Для этого необходимо:

1. записать уравнения пространства состояния в операторной форме.
2. выразить все переменные x через y и u .
3. подставив значения x в последнее дифференциальное уравнение системы, записать передаточную функцию, как отношение y к u .

2.1 Примеры

Пример 2.1

Опередить передаточную функцию $W(p)$, если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + bu, \\ y = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Решение:

Запишем уравнения состояния в операторной форме:

$$\begin{cases} px_1 = x_2, \\ px_2 = x_3, \\ px_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + bu, \\ y = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим x_3 :

$$x_3 = \frac{-4x_1 - x_2 + bu}{p+1}.$$

Из второго уравнения системы запишем $x_3 = px_2$, тогда

$$px_2 = \frac{-4x_1 - x_2 + bu}{p+1}$$

Из второго уравнения системы запишем $x_2 = px_1$, тогда

$$p^2x_1 = \frac{-4x_1 - px_1 + bu}{p+1},$$

или

$$x_1 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Поставив x_1 в первое уравнение системы, получим:

$$x_2 = \frac{6pu}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Поставив x_2 во второе уравнение системы, получим:

$$x_3 = \frac{6p^2u}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Из выражения $y = x_1 - 2x_2 - x_3$ найдем

$$y = x_1 - 2x_2 - x_3 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4} - \frac{12pu}{p^3 + p^2 + p + 4} - \frac{6p^2u}{p^3 + p^2 + p + 4}.$$

Таким образом, искомая передаточная функция равна:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{-6p^2 + 12p + 6}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

2.2 Задания на самостоятельную подготовку

Задача 2.1

Опередить передаточную функцию $W(p)$, если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u, \\ y = 0.1x_1. \end{cases} \quad \text{б)}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + 2u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 7x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{д) } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 0.5x_2 - 0.2x_3 + 3u, \\ y = x_1. \end{array} \right. \qquad \text{е) } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 - 3u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{array} \right. \\
 \\
 \text{ж) } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2. \end{array} \right.
 \end{array}$$

3 Получение матричной передаточной функции

Задачи на получение матричной передаточной функции часто сводятся к получению матрицы передаточных функций объекта из дифференциальных уравнений, передаточной функции, либо матриц объекта.

3.1 Примеры

Пример 3.1

Определить матричную передаточную функцию системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 6y_1 = \ddot{u}_1 + 3\dot{u}_1 + 4\dot{u}_2 + 8u_2, \\ \dot{y}_2 + y_2 = \dot{u}_1 + 2\dot{u}_2 + 2u_2. \end{cases}$$

Запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{cases} (p^2 + 5p + 6)y_1 = (p^2 + p)u_1 + (4p + 2)u_2, \\ (p + 1)y_2 = pu_1 + 2(p + 1)u_2. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} y_1 = \frac{p}{p+2}u_1 + \frac{4}{p+3}u_2, \\ y_2 = \frac{p}{p+1}u_1 + 2u_2. \end{cases}$$

Тогда матричная передаточная функция будет иметь вид:

$$W(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{p+2} & \frac{4}{p+3} \\ \frac{p}{p+1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.2

Определить матричную передаточную функцию, если известны матрицы A , B и C :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение:

Исходя из матриц, запишем дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 5x_2 + 2u_1, \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases}$$

Запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{cases} px_1 = -x_1 + 2x_2 + u_2, \\ px_2 = -3x_1 - 5x_2 + 2u_1, \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим x_1 :

$$x_1 = \frac{2x_2 + u_2}{p+1}.$$

(1)

Из второго уравнения системы выразим x_2 :

$$x_2 = \frac{-3x_1 + 2u_1}{p+5}.$$

(2)

Для того, чтобы выразить x_1 через u_1 и u_2 , подставим выражение (2) в выражение (1), получим:

$$x_1 = \frac{4u_1 + u_2(p+5)}{p^2 + 6p + 5}.$$

Таким же образом подставляем (2) в (1) и получаем x_2 через u_1 и u_2 :

$$x_2 = \frac{u_1(2p^2 + 12p + 10) + u_2(p+5)}{(p^2 + 6p + 5)(p+5)}.$$

Так как $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_2$ получим системы уравнений, в которой при переменных управления находятся искомые матрицы:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{4}{p^2 + 6p + 5} u_1 + \frac{p+5}{p^2 + 6p + 5} u_2, \\ y_2 = \frac{2(p+1)}{p^2 + 6p + 5} u_1 + \frac{1}{p^2 + 6p + 5} u_2. \end{cases}$$

Матричная передаточная функция имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{p^2 + 6p + 5} & \frac{p + 5}{p^2 + 6p + 5} \\ \frac{2(p + 1)}{p^2 + 6p + 5} & \frac{1}{p^2 + 6p + 5} \end{bmatrix}.$$

3.2 Задания на самостоятельную подготовку

Задача 3.1

Определить матричную передаточную функцию системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{cases} \ddot{y}_1 + \ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + y_1 = 2\ddot{u}_1 + 2\dot{u}_1 + 4\dot{u}_2 + 4u_2, \\ y_2 = 5u_1 + \dot{u}_2 + 5u_2. \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \dot{y}_1 + 2y_1 = 3\dot{u}_1 + 6u_1 + \dot{u}_2 + 3u_2, \\ \ddot{y}_2 + \ddot{y}_2 = \ddot{u}_1 + \dot{u}_1 + \ddot{u}_2. \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} y_1 = \ddot{u}_1 + 8\dot{u}_1 + 4u_2, \\ y_2 = \dot{u}_1 + 3u_1 + 6u_2. \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \dot{y}_1 + 3y_1 = 3\dot{u}_1 + 8\dot{u}_2 + 24\dot{u}_2, \\ y_2 = \dot{u}_1 + 6u_1 + \dot{u}_2 + 2u_2. \end{cases} \\ \text{д)} \begin{cases} \dot{y}_1 + y_1 = 7\dot{u}_1 + 7u_1 + u_2, \\ \dot{y}_2 + 3y_2 = \dot{u}_1 + \ddot{u}_2 + 7\dot{u}_2 + 12u_2. \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} y_1 = 3\dot{u}_1 + 4\dot{u}_2, \\ \dot{y}_2 + 10y_2 = \ddot{u}_1 + 10\dot{u}_1 + 8\dot{u}_1 + 80u_1 + \dot{u}_2. \end{cases} \\ \text{ж)} \begin{cases} \dot{y}_1 + 2y_1 = 6\dot{u}_1 + 12u_1 + \dot{u}_2, \\ \dot{y}_2 + 2y_2 = u_1 + \dot{u}_2 + 3u_2. \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} 2\ddot{y}_1 + 8\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 8y_1 = 6\ddot{u}_1 + 24\dot{u}_1 + 2\ddot{u}_2 + 2\dot{u}_2, \\ y_2 = 3u_1 + \dot{u}_2 + u_2. \end{cases} \\ \text{и)} \begin{cases} \dot{y}_1 + 3y_1 = 5\ddot{u}_1 + 15\dot{u}_1 + u_2, \\ \dot{y}_2 + 3y_2 = \dot{u}_1 + 7\dot{u}_2 + 21u_2. \end{cases} & \text{к)} \begin{cases} \ddot{y}_1 + 7\dot{y}_1 + 12y_1 = \dot{u}_1 + 4u_1 + \dot{u}_2 + 3u_2, \\ \dot{y}_2 + 5y_2 = u_1 + \ddot{u}_2 + 5u_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Задача 2.2

Определить матричную передаточную функцию, если известны матрицы А, В и С:

$$\begin{aligned} \text{а)} A &= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{б)} A &= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{в)} A &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{г)} A &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{д)} A &= \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \\ \text{е)} A &= \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ж) } A &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{з) } A &= \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{и) } A &= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{к) } A &= \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

2.1 Первая каноническая форма

Для получения первой канонической формы системы, с передаточной функцией (1.1), необходимо:

1. Представить структурную схему в виде двух последовательных звеньев, соответствующих уравнению (2.5), обозначив переход через z (рисунок 2.2);

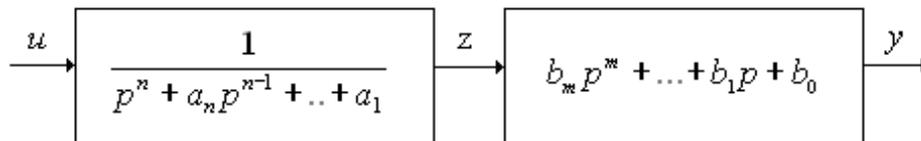


Рисунок 2.2. Структурное представление системы, соответствующее уравнению (2.5).

2. Для каждого звена системы записать соответствующие операторные уравнения:

$$\begin{cases} (p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1)z = u, \\ (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0)z = y. \end{cases} \quad (2.7)$$

3. Определить старшую производную переменной z из первого уравнения (2.7), что соответствует значению $p^n z$ в операторной форме:

$$p^n z = u - a_n p^{n-1} z - \dots - a_1 z \quad (2.8)$$

4. Представить (2.8) в виде цепочки из k интеграторов (рисунок 2.3), где n – порядок системы, и добавить выходную переменную y в соответствии со вторым уравнением (2.7);

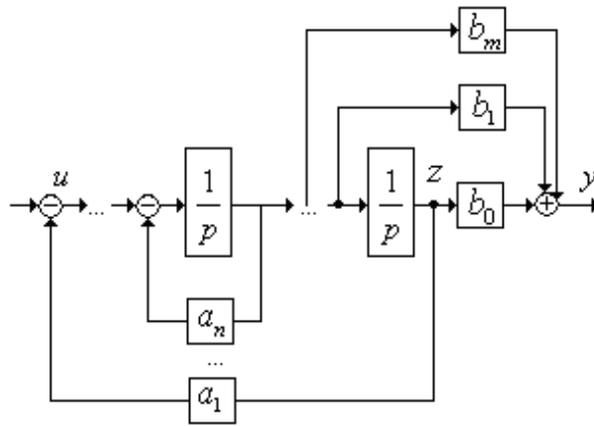


Рисунок 2.2. Структурная схема, соответствующая первой канонической форме

5. От полученной структурной схемы перейти к модели системы в переменных состояния в виде (2.9), обозначив выход каждого интегратора за переменную состояния $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$, ..., $x_n = z^{n-1}$;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + u, \\ y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m+1}. \end{cases}$$

(2.9)

Систему уравнений (2.9) можно представить векторно-матричной форме, соответствующей уравнениям (2.3) и (2.4), со следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Пример

Пример 2.2

Записать модель в переменных состояния, соответствующую первому каноническому описанию, определить матрицы А, В, С и изобразить структурную схему системы.

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 2\ddot{u} + 2\dot{u} + 5u.$$

Решение:

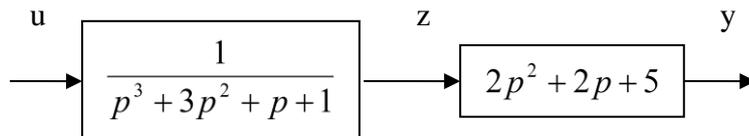
Записав дифференциальное уравнение в операторной форме, получим:

$$p^3 y + 3p^2 y + p y + y = 2p^2 u + 2p u + 5u.$$

Передаточная функция этого выражения имеет вид:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2p^2 + 2p + 5}{p^3 + 3p^2 + p + 1}$$

1) Представив передаточную функцию, как два последовательных звена, получим:



2) Запишем операторные уравнения через z :

$$\begin{cases} u = (p^3 + 3p^2 + p + 1) * z, \\ y = (2p^2 + 2p + 5) * z. \end{cases}$$

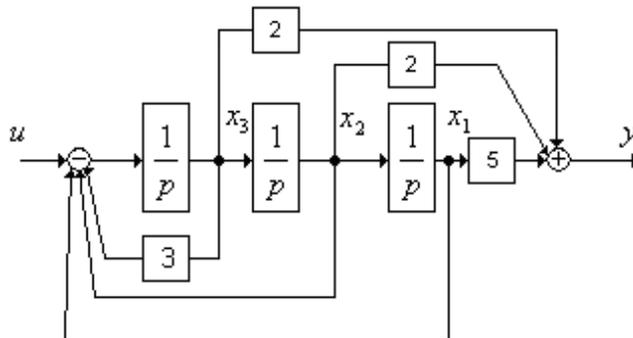
Внеся z в скобки, получим:

$$\begin{cases} u = \ddot{z} + 3\dot{z} + z, \\ y = 2\ddot{z} + 2\dot{z} + 5z. \end{cases}$$

3) Выразим старшую производную по u :

$$\ddot{z} = u - 3\dot{z} - z$$

4) Нарисуем структурную схему из трех интеграторов, с обратными связями по u и производными по y .



5) От структурной схемы перейдем к модели в переменных состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 - 3x_3 - x_2 - x_1 + u, \\ y = 2x_3 + 2x_2 + 5x_1. \end{cases}$$

Матрицы объекта имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \quad 2 \quad 2].$$

2.2 Вторая каноническая форма

Для перехода от передаточной функции (1.1) ко второй канонической форме необходимо:

1. Представить структурную схему в виде двух последовательных звеньев, соответствующих уравнению (2.6), обозначив переход через z (рисунок 2.3);

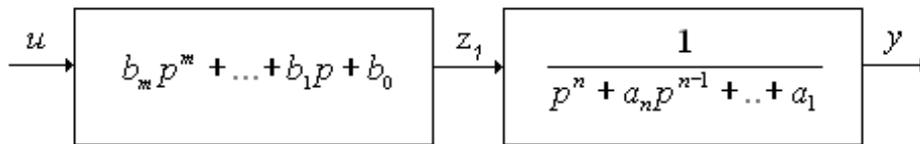


Рисунок 2.3. Структурное представление системы, соответствующее уравнению (2.6).

2. Для каждого звена системы записать соответствующие операторные уравнения:

$$\begin{cases} (p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_1)y = z_1, \\ (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0)u = z_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

3. Определить старшую производную переменной y из первого уравнения (2.10), что соответствует значению $p^n y$ в операторной форме

$$p^n y = z_1 - a_n p^{n-1} y - \dots - a_1 y \quad (2.11)$$

4. Представить (2.11) в виде цепочки из n интеграторов (рисунок 2.4), где n – порядок системы. В обратной связи будут располагаться коэффициенты характеристического полинома, а в прямой связи – коэффициенты первого полинома числителя передаточной функции из формулы 2.10;

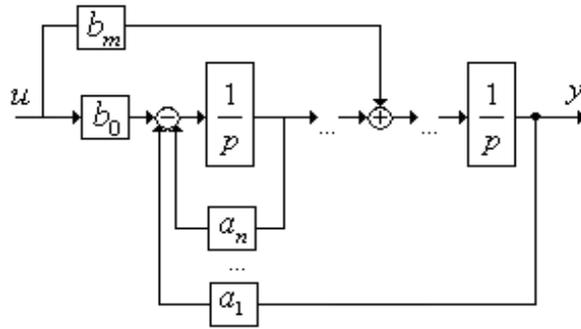


Рисунок 2.4. Структурная схема, соответствующая второй канонической форме

5. От полученной структурной схемы, обозначив выход каждого интегратора за переменную состояния, записать дифференциальные уравнения состояния и уравнение выхода:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + b_i u, \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + b_0 u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

(2.12)

По уравнениям (2.12) можно получить матрицы системы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & \dots & -a_n \end{bmatrix},$$

$$B^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad b_m \quad \dots \quad b_0],$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Пример

Пример 2.3

Записать модель в переменных состояния, соответствующую второму каноническому описанию, определить матрицы А, В, С и изобразить структурную схему системы:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 2\ddot{u} + 2\dot{u} + 5u.$$

Решение:

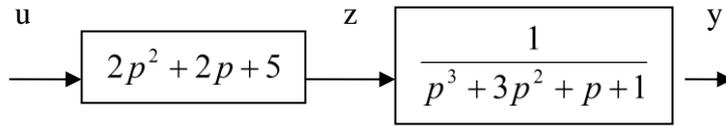
1) Записав дифференциальное уравнение в операторной форме, получим:

$$p^3 y + 3p^2 y + p y + y = 2p^2 u + 2p u + 5u.$$

Передаточная функция этого выражения имеет вид:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{2p^2 + 2p + 5}{p^3 + 3p^2 + p + 1}$$

Представив передаточную функцию, как два последовательных звена, получим:



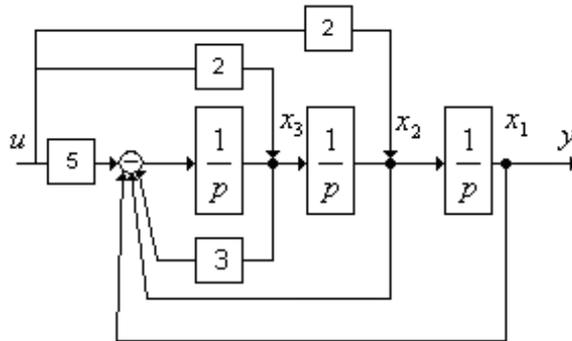
2) Запишем операторные уравнения через z :

$$\begin{cases} z = (2p^2 + 2p + 5)u, \\ z = (p^3 + 3p^2 + p + 1)y. \end{cases}$$

3) Выразим старшую производную по y :

$$\ddot{y} = z - 3\dot{y} - \dot{y} - y.$$

4) Нарисуем структурную схему из трех интеграторов, с обратными связями по u и производными по y :



5) От структурной схемы перейдем к модели в переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + 2u, \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - x_2 - x_1 + u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Матрицы объекта имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0];$$

Задачи на самостоятельную подготовку



1. Структурные преобразования

Для наглядного представления сложной системы как совокупности элементов и связей между ними используются структурные схемы.

Структурной схемой называется схема САУ, изображенная в виде соединения ПФ составляющих ее звеньев. Структурная схема показывает строение автоматической системы, наличие внешних воздействий и точки их приложения, пути распространения воздействий и выходную величину.

Динамическое или статическое звено изображается прямоугольником, в котором указывается ПФ звена или ее математическое выражение. Воздействия на систему и влияние звеньев друг на друга (сигналы) изображаются стрелками. В каждом звене воздействие передается только от входа звена к его выходу. На динамическое звено может воздействовать лишь одна входная величина, поэтому используются блоки суммирования и сравнения сигналов. Суммироваться и сравниваться могут лишь сигналы одной и той же физической природы.

Структурная схема может быть составлена по уравнению системы в пространстве состояний или по дифференциальным уравнениям системы (См выше). При составлении структурной схемы удобно начинать с изображения задающего воздействия и располагать динамические звенья, составляющие прямую цепь системы, слева направо до регулируемой величины. Тогда основная обратная связь и местные обратные связи будут направлены справа налево. Различные способы преобразования структурных схем облегчают определение ПФ сложных САУ и дают возможность привести многоконтурную систему к эквивалентной ей одноконтурной схеме.

Последовательное соединение звеньев

Рассмотрим последовательное соединение типовых звеньев с передаточными функциями

$W_i(p)$, $i = \overline{1, m}$, и найдем выражение для общей передаточной функции, связывающей между собой входной и выходной сигналы системы на рисунке 3.1.

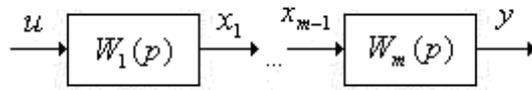


Рисунок 3.1. Последовательное соединение m -звеньев

Правило: передаточная функция звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев, т.е.

$$W(p) = \frac{y}{u} = \prod_{i=1}^m W_i(p). \quad (3.1)$$

Параллельное соединение звеньев

Правило: Передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \sum_{i=1}^m W_i(p). \quad (3.2)$$

Параллельное соединение звеньев показано на рисунке 3.2.

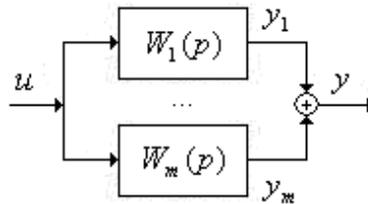


Рисунок 3.2. Параллельное соединение m -звеньев

Выходной сигнал системы представляет собой сумму выходных сигналов отдельных звеньев

$$y = y_1 + \dots + y_m = W_1(p)u + \dots + W_m(p)u, \quad (3.3)$$

Следовательно общая передаточная функция параллельного соединения имеет вид (3.2).

Обратная связь

Такое соединение звеньев показано на рисунке 3.3, причем знак «-» внутри сумматора означает отрицательную обратную связь.

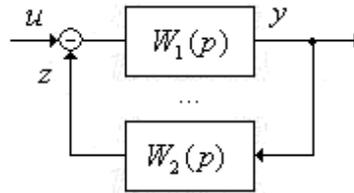


Рисунок 3.3. Структурная схема системы с обратной связью

Для определения общей передаточной функции запишем выражение для выходной переменной системы

$$y = W_1(p)[u - z] = W_1(p)[u - W_2(p)y]. \quad (3.4)$$

После преобразований получим

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (3.5)$$

Правило: передаточная функция системы с отрицательной обратной связью равна дроби, в числителе которой стоит передаточная функция прямого канала $W_1(p)$, а знаменатель представляет собой сумму единицы и произведения передаточных функций прямого и обратного каналов системы.

В случае положительной обратной связи формула (3.5) принимает вид

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}. \quad (3.6)$$

На практике обычно встречаются системы с отрицательной обратной связью, для которых передаточная функция находится по соотношению (3.5).

Правило переноса

В некоторых случаях для получения общей передаточной функции системы с помощью структурных преобразований удобнее было бы перенести точку приложения сигнала через звено ближе к выходу или входу. При таком преобразовании структурной схемы следует придерживаться *правила:* передаточная функция системы должна оставаться неизменной. Рассмотрим ситуацию, когда точка приложения сигнала

переносится через звено ближе к выходу. Исходная структура системы показана на рисунке 3.4.

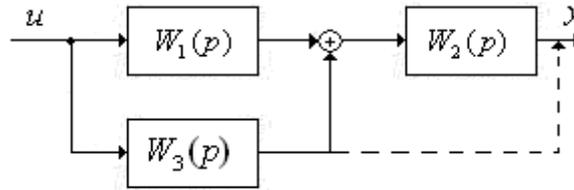


Рисунок 3.4. Структурная схема исходной системы

Определим для нее результирующую передаточную функцию

$$W(p) = W_2(p)[W_1(p) + W_3(p)]. \quad (3.7)$$

Перенесем точку приложения сигнала через звено с передаточной функцией $W_2(p)$, добавив в этот канал некоторую передаточную функцию $W_4(p)$. Получим структурную схему преобразованной системы, как показано на рисунке 3.5.

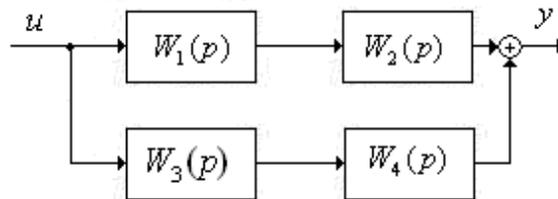


Рисунок 3.5. Структурная схема исходной системы

Для нее передаточная функция имеет вид

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) + W_3(p)W_4(p) \quad (3.8)$$

Поскольку при преобразовании структуры системы ее передаточная функция не должна измениться, приравняв правые части выражений (3.7) и (3.8), определим искомую передаточную функцию $W_4(p)$:

$$W_4(p) = W_2(p) \quad (3.9)$$

Таким образом, при переносе точки приложения сигнала ближе к выходу системы в канал следует добавить передаточную функцию звена, через которое переносится сигнал.

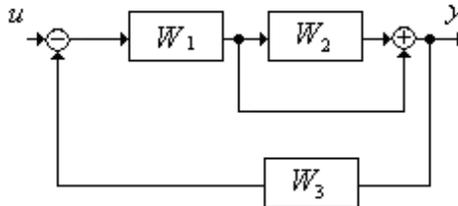
Аналогичное правило можно сформулировать для переноса точки приложения сигнала ближе к входу системы: в

соответствующий канал следует добавить обратную передаточную функцию звена $\frac{1}{W(p)}$, через которое переносится сигнал.

Пример

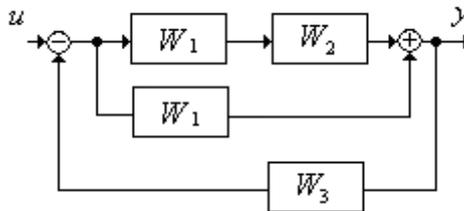
Пример 3.1

Определить передаточную функцию системы, структурная схема которой имеет вид:

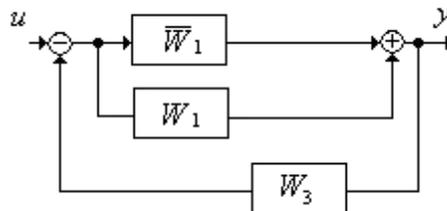


Решение:

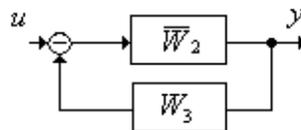
1. Перенос узла через звено:



2. Последовательно соединенные звенья: $\bar{W}_1 = W_1 W_2$

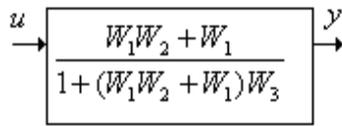


3. Параллельно соединенные звенья: $\bar{W}_2 = \bar{W}_1 + W_1 = W_1 W_2 + W_1$



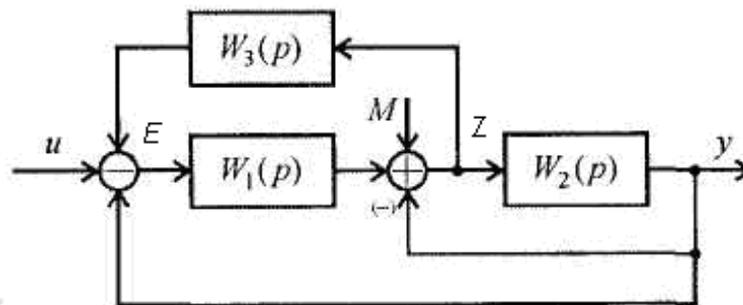
4. Обратная связь: $\bar{W}_{\text{рез}} = \frac{\bar{W}_2}{1 + \bar{W}_2 W_3} = \frac{\bar{W}_2}{1 + \bar{W}_2 W_3} = \frac{W_1 W_2 + W_1}{1 + (W_1 W_2 + W_1) W_3}$

Ответ:



Пример 3.2

По структурной схеме системы определить передаточную функцию $W_u(p) = y(p)/M(p)$ при $u=0$



Искомая передаточная функция будет иметь вид: $W(p) = \frac{y}{M}$

1. Означим сигнал после сумматора, через z , а сигнал рассогласования, как E

2. Опишем все сигналы в системе в виде уравнений

$$E = -W_3 * z - y$$

$$z = M - y + W_1 * E$$

$$y = W_2 * z$$

3. Подставив последовательно значения сигналов, найдем результирующую передаточную функцию.

$$z = M - y + W_1 * (-W_3 * z - y) \quad z = \frac{M - y(1 + W_1)}{1 + W_1 W_3}$$

$$y = W_2 * \frac{M - y(1 + W_1)}{1 + W_1 W_3}$$

$$W(p) = \frac{y}{M} = y = \frac{W_2}{W_1 W_3 + W_1 W_2 + W_2 + 1}$$

3.2 Задачи на самостоятельную подготовку

///

2. Оценка качества регулирования

В современной ТАУ используются такие показатели качества как:

Интегральная абсолютная ошибка регулирования

$$J = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt, \quad \varepsilon(t) = y(t) - y^*(t).$$

(4.1)

Интегральная квадратичная ошибка регулирования

$$J = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt.$$

(4.2)

Перерегулирование

$$\delta = \frac{\sigma_{\max}}{y^*} 100\% \quad \text{ффффффффф}$$

(4.3)

При оценивании качества регулирования при компенсации возмущающего воздействия величина перерегулирования определяется как отношение абсолютной величины максимального отклонения отрицательного знака к максимальному отклонению регулируемой переменной положительного знака, как показано на рисунке 4.1.

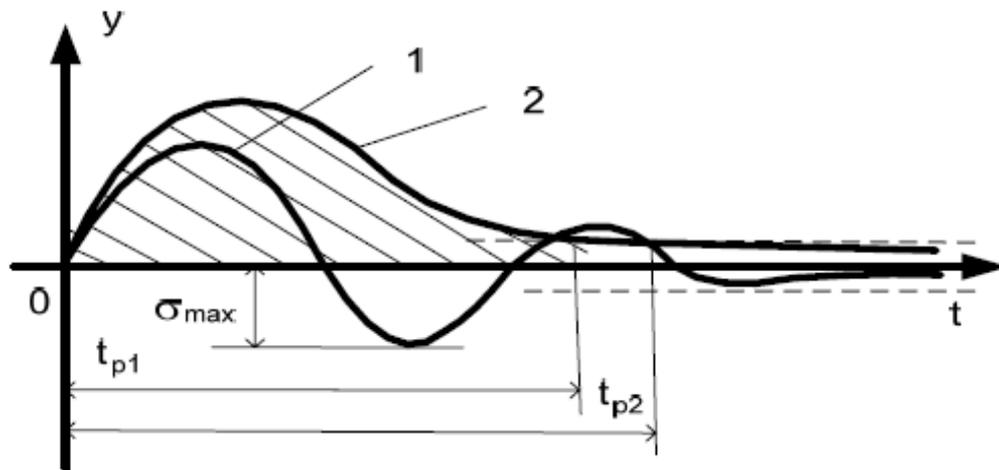


Рисунок 4.1. Ошибка перерегулирования

Длительность переходного процесса (время регулирования)

Определяется как разница времени окончания переходного процесса и временем начала изменения внешнего воздействия

$$t_p = t_0 - t_k$$

(4.4)

В идеальной линейной системе переходный процесс бесконечен, поэтому время окончания переходного процесса определяют с того момента времени, когда ошибка регулирования перестанет превышать некоторую заданную величину Δ . Значение Δ обычно принимают равной 5% от установившегося (заданного) уровня выходного сигнала.

Статическая ошибка регулирования

Для оценки точности используется ошибка регулирования

$$\Delta(t) = v - y(t), \quad (4.1)$$

которая с течением времени стремится к некоторому постоянному значению, называемому ***статической ошибкой***:

$$\Delta^0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t). \quad (4.2)$$

При известной структурной схеме системы ошибку можно определить в операторной форме с помощью структурных преобразований

$$\Delta(p) = v(p) - y(p). \quad (4.3)$$

В этом случае статический режим характеризуется тем, что $p=0$, а статическая ошибка находится по выражению

$$\Delta^0 = \Delta(0). \quad (4.4)$$

Наличие статической ошибки в общем случае является нежелательным, так как создается погрешность управления. Но для полного устранения статического отклонения требуется до бесконечности увеличивать коэффициент передачи k , что нереализуемо по ряду причин (например, по условию обеспечения устойчивости). Таким образом, в статической САУ принципиально нельзя полностью устранить статическую ошибку.

Колебательность

Колебательность характеризуется обычно числом колебаний переходной характеристики за время переходного процесса. В зависимости от характера затухания различают следующие типы переходных характеристик: монотонная (нет ни одного колебания); апериодическая (не более одного колебания); колебательная (несколько колебаний).

Динамическая ошибка

Текущая ошибка обработки переменного сигнала называется динамической ошибкой САУ. Динамическая ошибка системы изменяется с течением времени. Она зависит от структуры, параметров и характера изменения воздействий САУ.

Динамическая ошибка определяется по формуле:

$$\Delta_d = \Delta(t) - \Delta^0, \quad (4.5)$$

Причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_d(t) = 0$.

4.1 Примеры

Пример 4.1

Определить коэффициент усиления K_p , чтобы статическая ошибка в системе Δ^0 не превышала 5% от M

$$W_1(p) = \frac{K_p}{0.5p+1}; \quad W_2(p) = \frac{1}{2p^2+0.7p+1}.$$

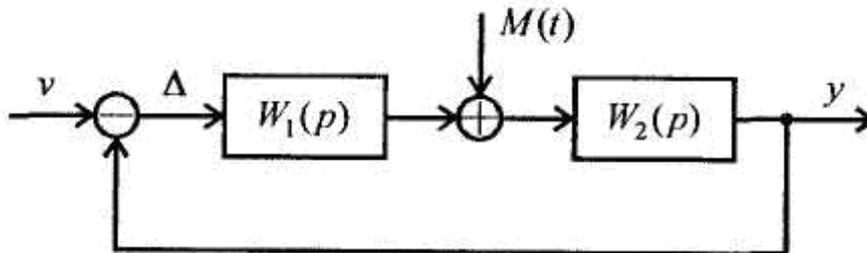


Рисунок 4.2. Структурная схема системы к задаче 4.1

Запишем ошибку регулирования, обозначив ее через Δ :

$$\Delta = v - u = v - W_2(p)[M + W_1(p)\Delta], \text{ откуда}$$

$$\Delta = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} v - \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} M,$$

$$\Delta = \frac{(2p^2 + 0.7p + 1)(0.5p + 1)}{(2p^2 + 0.7p + 1)(0.5p + 1) + K_p} v - \frac{0.5p + 1}{(2p^2 + 0.7p + 1)(0.5p + 1) + K_p} M$$

Приравняв $p=0$, запишем неравенство с передаточной функцией по M в левой стороне

$$\frac{1}{(1 + K_p)} \leq 0.05\%$$

Ответ:

$$K_p \geq 19$$

Пример 4.2

Определить полную статическую ошибку в системе, структурная схема которой изображена на рисунке 4.1.

$$W_1(p) = \frac{0.25p+1}{0.1p+1}; \quad W_2(p) = \frac{5}{(0.2p^2+0.1p+1)p}.$$

$$\Delta = v - u = v - W_2(p)[M + W_1(p)\Delta], \text{ откуда}$$

$$\Delta = \frac{1}{1+W_1(p)W_2(p)}v - \frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)}M,$$

$$\Delta = \frac{p(0.1p+1)(0.2p^2+0.1p+1)}{p(0.1p+1)(0.2p^2+0.1p+1)+5(0.25p+1)}v - \frac{5(0.1p+1)}{p(0.1p+1)(0.2p^2+0.1p+1)+5(0.25p+1)}M$$

Ответ:

Полная статическая ошибка равна:

$$\Delta = 1$$

4.2 Задания на самостоятельную подготовку

//*****//

3. Частотные характеристики

Формально для получения частотной передаточной функции надо сделать в $W(p)$ подстановку $p = j\omega$, и тогда полученная $W(j\omega)$ является комплексным выражением, которое можно представить в виде:

$$W(j\omega) = \frac{a_1(\omega) + jb_1(\omega)}{a_2(\omega) + jb_2(\omega)}.$$

(5.1)

Для нахождения вещественной и мнимой частей частотной передаточной функции необходимо домножить числитель и знаменатель на сопряженную знаменателю величину, а затем провести деление:

$$W(j\omega) = \frac{(a_1(\omega) + jb_1(\omega))(a_2(\omega) - jb_2(\omega))}{(a_2(\omega) + jb_2(\omega))(a_2(\omega) - jb_2(\omega))} =$$

(5.2)

$$= \frac{a_1(\omega)a_2(\omega) + b_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega) + b_2^2(\omega)} + j \frac{a_2(\omega)b_1(\omega) + a_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega) + b_2^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

где

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

(5.3)

- это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ).

$$\psi(\omega) = \arg(W(j\omega)) = \operatorname{arctg} \left[\frac{U(\omega)}{V(\omega)} \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{b_1}{a_1} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{b_2}{a_2} \right],$$

(5.4)

- это фазово-частотная характеристика (ФЧХ).

Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотной характеристиками*.

В практических расчетах удобно применять графики частотных характеристик, построенных в логарифмическом масштабе – *логарифмические частотные характеристики* (ЛЧХ) или (ЛАХ).

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) определяется следующим выражением:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

(5.5)

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называется график зависимости $\psi(\omega)$, построенный в логарифмическом масштабе частот.

Единицей $L(\omega)$ является децибел (дБ), а единицей логарифма частоты – декада. *Декадой* называют интервал частот, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду. Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку $\omega \square = 0$. Частоте $\omega \square = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка $\lg \omega \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow 0$.

Основное преимущество использования ЛЧХ заключается в том, что приближенные (асимптотические) ЛАЧХ типовых динамических звеньев изображаются отрезками прямых.

Примеры

Пример 5.1

Записать аналитические выражения для всех частотных характеристик по известной передаточной функции объекта:

$$W(p) = \frac{4}{2p^2 + p}.$$

Произведем замену по (5.1), $p = j\omega$,

$$W(p) = \frac{4}{2(j\omega)^2 + j\omega},$$

затем умножим на сопряженные по (5.2):

$$W(j\omega) = \frac{4}{2(j\omega)^2 + j\omega} = \frac{8(j\omega)^2 - 4j\omega}{4(j\omega)^4 - (j\omega)^2} = \frac{-8\omega - 4j}{4\omega^3 + \omega} = \frac{-8}{4\omega^2 + 1} + j \frac{-4}{\omega(4\omega^2 + 1)}$$

$$\text{ВЧХ: } U(\omega) = \frac{-8}{4\omega^2 + 1}$$

$$\text{МЧХ: } V(\omega) = \frac{-4}{\omega(4\omega^2 + 1)}$$

Найдем АЧХ по формуле (5.3):

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{-8}{4\omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-4}{\omega(4\omega^2 + 1)}\right)^2} = \sqrt{\frac{64\omega^2 + 16}{\omega^2(4\omega^2 + 1)^2}}.$$

Найдем АЧХ по формуле (5.4):

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-8}{4\omega^2 + 1} * \frac{\omega(4\omega^2 + 1)}{-4} = \arctg \frac{1}{2\omega}$$

Найдем ЛАХ по формуле (5.5):

$$L = 20 \lg \sqrt{\frac{64\omega^2 + 16}{\omega^2(4\omega^2 + 1)^2}}.$$

4. Критерии устойчивости

Будем говорить, что линейная система устойчива, если ее реакция на любое ограниченное воздействие также ограничена, и неустойчива, если реакция на ограниченные воздействия неограниченна.

На практике для упрощения расчетов устойчивость САР определяют с помощью критериев устойчивости. Критерий устойчивости – это правило, позволяющее выяснить устойчивость системы без вычисления корней характеристического уравнения.

Рассматриваются коэффициенты характеристического уравнения или их функции. Критерии устойчивости разделяют на алгебраические и частотные. К алгебраическим критериям относят критерии Гурвица, Льенара-Шипара и Раусса, к частотным – Критерий Михайлова и Найквиста.

6.1 Критерий Гурвица

Критерий является алгебраическим критерием и применяется к коэффициентам характеристического уравнения замкнутой системы.

Пусть имеется характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (6.1)$$

Из коэффициентов характеристического уравнения составляют

матрицу по правилу:

1. По диагонали записываются коэффициенты от a_{n-1} до a_0 .
2. Каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами.
3. В случае отсутствия индекса, а также, если он меньше 0 или больше n , на его место пишется 0.

Таким образом, матрица Гурвица приобретает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Критерий устойчивости формулируется так:

Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $a_{nB} > 0$ были положительными все n диагональных определителей, получаемых из матрицы Гурвица.

Первые три определителя матрицы Гурвица имеют следующий вид:

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

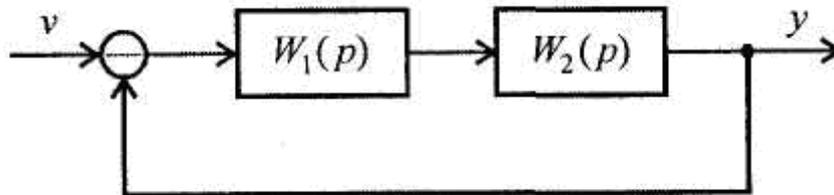
Таким образом, критерий Гурвица позволяет судить об абсолютной устойчивости, но не дает возможности оценивать относительную устойчивость по корням характеристического уравнения.

Примеры

Пример 6.1

С помощью критерия Гурвица определить значение T_{gr} для системы, если

$$W_1(p) = \frac{1}{Tp+1}, W_2(p) = \frac{2,5}{0,5p^2 + 0,2p+1}.$$



1. Определим результирующую передаточную функцию системы

$$W(p) = \frac{2.5}{(0.5p^2 + 0.2p + 1)(Tp + 1) + 2.5}$$

Характеристический полином системы

$$A(p) = 0.5Tp^3 + (0.5 + 0.2T)p^2 + (0.2 + T)p + 3.5$$

Матрица Гурвица будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 0.5 + 0.2T & 3.5 & 0 \\ 0.5T & 0.2 + T & 0 \\ 0 & 0.5 + 0.2T & 3.5 \end{bmatrix}$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все определители были положительны

$$0.5 + 0.2T > 0$$

$$(0.5 + 0.2T) * (0.2 + T) - 3.5 * 0.5T > 0$$

Решим неравенства и получим

$$\text{Ответ: } T > -0.1$$

6.2 Критерий Михайлова

Критерий предполагает построение годографа Михайлова, то есть кривой которую описывает конец вектора $D(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от 0 до $+\infty$. Вектор $D(j\omega)$ получается из характеристического полинома замкнутой системы при подстановке $p = j\omega$.

Годограф начинается при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси в точке и при $\omega = \infty$ уходит в бесконечность в соответствующем квадранте. Угол поворота вектора $D(j\omega)$ определяется выражением:

$$\psi = \frac{n\pi}{2} - l\pi, \quad (6.2)$$

где n - степень характеристического полинома; l - число его корней с положительной вещественной частью.

Формулировка критерия: для устойчивости системы n -ого порядка необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова обошел в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в ноль.

Примерный вид годографов Михайлова устойчивых систем первого – пятого порядков показан на рисунке 6.1.

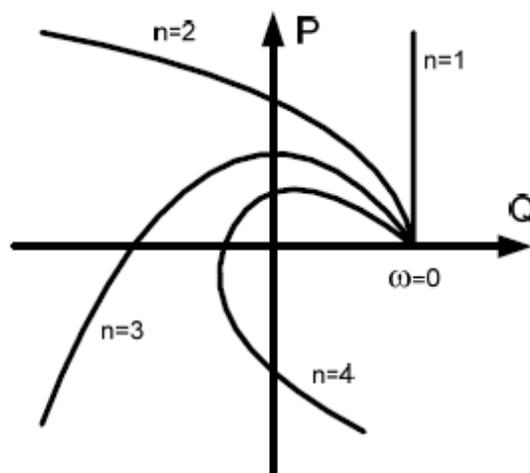


Рисунок 6.1. Годографы Михайлова устойчивых систем

Если система на границе устойчивости, то годограф проходит через начало осей координат так, что после небольшой его деформации около начала осей координат критерий удовлетворяется.

Условием границы устойчивости является обращение в нуль годографа Михайлова при некотором значении частоты $\omega = \omega_0$.

Аналитически это условие можно записать в виде:

$$\begin{cases} U(\omega_0) = 0, \\ V(\omega_0) = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Здесь ω_0 - это частота незатухающих колебаний, возникающих в системе, находящейся на границе устойчивости.

Годографы системы четвертого порядка, находящейся на границе устойчивости, показаны на рисунке 6.2.

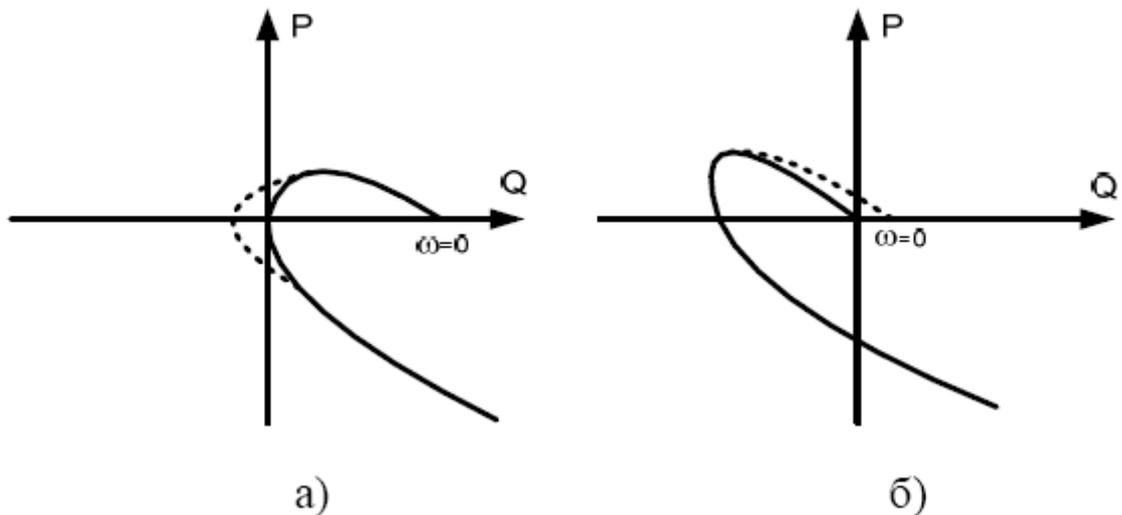


Рисунок 6.2. Годографы систем на границе устойчивости

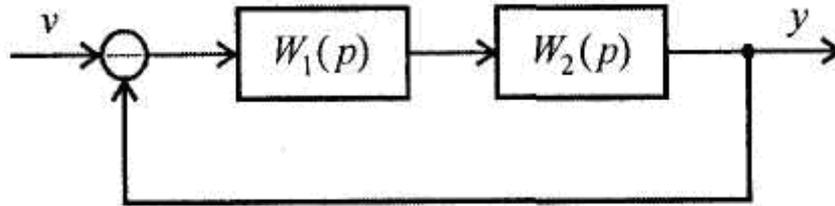
На рисунке 6.2 б характеристический полином имеет пару чисто мнимых корней (колебательная граница устойчивости), на втором рисунке 6.2 а – нулевой корень (апериодическая граница устойчивости).

Примеры

Пример 6.1

С помощью критерия Михайлова определить значение $d_{гр}$ для k системы, где

$$W_1(p) = \frac{15}{2p+1}, \quad W_2(p) = \frac{2}{0,25p^2 + dp + 1}.$$



Решение:

1. Определим результирующую передаточную функцию системы

$$W(p) = \frac{30}{(2p+1)(0.25p^2 + dp + 1) + 30}$$

2. Выпишем характеристический полином

$$A(p) = 0.5p^3 + (2d + 0.25)p^2 + (2+d)p + 31$$

Заменяем p на $j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части

$$A(p) = -0.5j\omega - (2d + 0.25)\omega + (2+d)j\omega + 31,$$

$$A(p) = j(2\omega + d\omega - 0.5\omega) - (2d + 0.25)\omega + 31.$$

Необходимым и достаточным условием чтобы система была на границе устойчивости, мнимая и вещественная часть должна быть равна нулю.

$$\begin{cases} \text{Im}(\omega_0) = 0, \\ \text{Re}(\omega_0) = 0. \end{cases}$$

3. Решим систему уравнений относительно двух неизвестных и вычислим такие ω_0 , d , при которых система будет находиться на границе устойчивости.

$$\begin{cases} 1.5\omega_0 + d\omega_0 = 0, \\ (-2d\omega_0 - 0.25\omega_0 + 31 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -1.5, \\ \omega_0 = 11.27. \end{cases}$$

Ответ:

$$d = -1.5$$

6.3 Критерий Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста формулируется так:

1. Если разомкнутая система устойчива или находится на границе устойчивости, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой

системы при изменении частоты ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами $-1, j0$.

2. Если разомкнутая система неустойчива, а ее передаточная функция имеет m полюсов справа от мнимой оси на комплексной плоскости, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты от ω от $-\infty$ до $+\infty$ охватывала m раз точку с координатами $-1, j0$.

При использовании этого критерия нужно учитывать две особенности:

1. Если разомкнутая система находится на границе устойчивости, то ее АФЧХ уходит в бесконечность. Для проверки критерия Найквиста нужно мысленно соединить конец АФЧХ дугой бесконечно большого радиуса с положительной вещественной полуосью.

2. На практике АФЧХ может строиться только для положительных частот ($0 \leq \omega < +\infty$). При применении критерия Найквиста считается, что ветвь АФЧХ для отрицательных частот симметрична относительно вещественной оси.

Условие границы устойчивости: замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, если при некоторой частоте $\omega = \omega_0$ амплитудно-фазовая характеристика системы проходит через точку с координатами $\{-1, j0\}$.

$$\begin{cases} U_{\text{faz}}(\omega_0) = -1, \\ V_{\text{faz}}(\omega_0) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

На рисунке 2.8 изображены основные из возможных ситуаций.

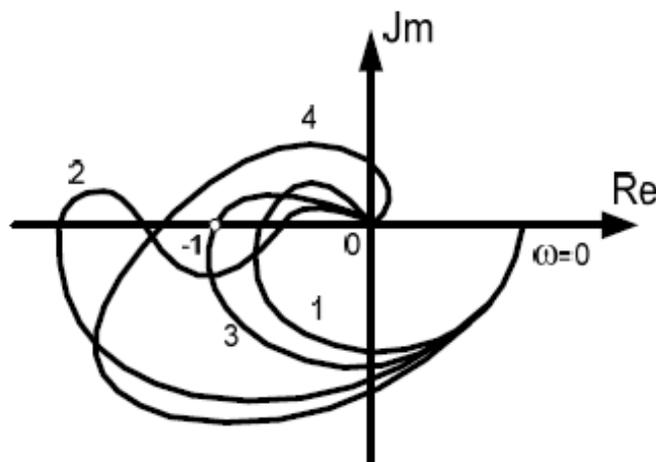


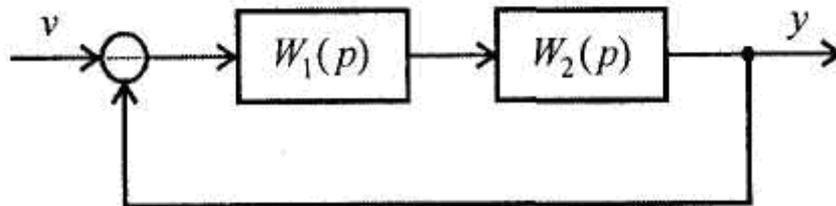
Рисунок 6.3. АФХ устойчивых разомкнутых систем

При АФХ, представленной кривой 1, замкнутая система абсолютно устойчива – она остается устойчивой и при уменьшении коэффициента передачи разомкнутой системы. Если АФХ представляет собой кривую 2 (рисунок 2.8), то замкнутая система будет устойчива в некотором диапазоне изменения коэффициента усиления разомкнутого контура. Кривая 3 проходит через критическую точку с координатами $(-1, j0)$. Это означает, что замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости. Кривая 4 охватывает критическую точку, поэтому замкнутая система неустойчива.

Примеры:**Пример 6.3**

С помощью критерия Найквиста определить значение $T_{гр}$ для системы, если

$$W_1(p) = \frac{5}{Tp+1}, \quad W_2(p) = \frac{1}{p(4p+1)}.$$



Чтобы исследовать систему по критерию Найквиста, прежде всего, необходимо разомкнуть систему и найти передаточную функцию разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} W(p)_{раз} &= \frac{5}{p(4p+1)(Tp+1)}. \\ W(j\omega)_{раз} &= \frac{5}{j\omega(4(j\omega)+1)(Tp+1)}. \\ W(j\omega)_{раз} &= \frac{5}{(j\omega-4\omega^2)(Tp+1)} = \frac{5(j\omega+4\omega^2)}{(-\omega^2-16\omega^4)(Tp+1)} = \\ &= \frac{4\omega^2}{-16\omega^4T_p-16\omega^4-\omega^2T_p-\omega^2} + j \frac{5\omega}{-16\omega^4T_p-16\omega^4-\omega^2T_p-\omega^2}. \end{aligned}$$

По критерию устойчивости

$$\begin{cases} \frac{4\omega^2}{-16\omega^4 T_p - 16\omega^4 - \omega^2 T_p - \omega^2} = -1, \\ \frac{5\omega}{-16\omega^4 T_p - 16\omega^4 - \omega^2 T_p - \omega^2} = 0. \end{cases}$$

Откуда найдем, что

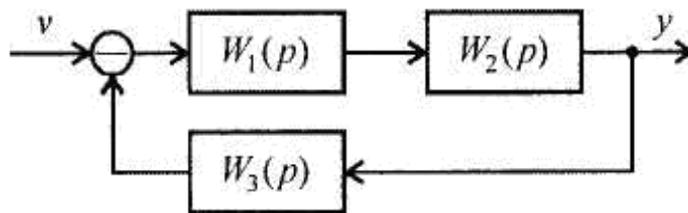
$$\begin{cases} T_p = 3, \\ \omega = 0. \end{cases}$$

Ответ $T_p = 3$.

6.4 Метод D-разбиения

Методом D-разбиения определить область допустимых значений коэффициента k для системы, где

$$W_1(p) = \frac{k}{0,5p+1}, \quad W_2(p) = \frac{4}{0,2p+1}, \quad W_3(p) = \frac{1}{0,5p+1}.$$



$$W(p) = \frac{4k(0.5p+1)}{(0.5p+1)^2(0.2p+1) + 4k} = \frac{4k(0.5p+1)}{0.05p^3 + 0.45p^2 + 1.2p + 1 + 4k}$$

$$4k = 0.05p^3 + 0.45p^2 + 1.2p + 1$$

$$k = 0.0125p^3 + 0.1125p^2 + 0.3p + 0.25$$

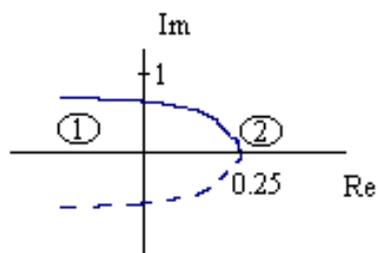
$D(j\omega) = -0.0125j\omega - 0.1125\omega + 0.3j\omega + 0.25$ Выделим мнимую и вещественную части

$$D(j\omega) = (0.25 - 0.1125\omega) + j(-0.0125\omega + 0.3\omega)$$

Запишем таблицу для построения графика и, меняя частоту от 0 до ∞ .

ω	0	1	2	3	∞
Re	0,25	0,1375	0,025	-0,0875	$-\infty$
Im	0	0,2875	0,5875	0,8625	∞

По полученной таблице строим годограф:



Из рисунка видно, что кривая делит пространство на две плоскости. Возьмем одно вещественное значение $k=1$, принадлежащее области 2 полинома $0.05p^3 + 0.45p^2 + 1.2p + 1 + 4k$, в результате чего получим: $0.05p^3 + 0.45p^2 + 1.2p + 5$. Исследуем этот полином по критерию Гурвица, найдем, что все определители положительны. Следовательно в этой области система устойчива.

Контрольные вопросы

1. Что называется измерением? Что значит измерить некоторую величину? Как аналитически записывается результат измерения?
2. Сформулируйте основные задачи метрологии.
3. Назовите и поясните основные характеристики измерительного прибора.
4. Что называется ценой деления шкалы измерительного прибора? Что показывает цена деления? Как определяется цена деления? Какова единица цены деления?
5. Что называется чувствительностью измерительного прибора? Что показывает чувствительность? Какова единица чувствительности? Как связаны цена деления и чувствительность?
6. Какие операции необходимо выполнить при измерении любой физической величины?
7. Какие измерения называются прямыми? Какие измерения называются косвенными? Приведите примеры прямых и косвенных измерений.
8. Что понимается под истинным значением величины? Приближенным значением величины? Действительным значением величины?
9. Что характеризуют средним значением и стандартным квадратичным отклонением? Как эти величины оценивают исходя из экспериментальных результатов?
10. Что понимается под погрешностью измерения? Что называется абсолютной погрешностью? В каких единицах выражается абсолютная погрешность? Что показывает абсолютная погрешность?
11. Как записывается результат физического измерения?
12. Что называется относительной погрешностью? Что показывает относительная погрешность? В каких единицах выражается относительная погрешность?
13. Что называется точностью измерения? Что показывает точность измерения? В каких единицах выражается точность измерения?
14. Какие погрешности называются случайными? Каковы особенности причин случайных погрешностей? Как можно уменьшить случайные погрешности? Приведите примеры причин возникновения случайных погрешностей.
15. Какие погрешности называются систематическими? Назовите причины систематических погрешностей и их виды.
16. Как количественно оценивают приборную погрешность?
17. Что такое промахи? Каковы критерия определения некоторого результата измерения как промаха?
18. Как определяется абсолютная погрешность при прямых измерениях?
19. Какие положения лежат в основе статистической теории погрешностей?
20. Как определяется измеряемая величина и абсолютная погрешность измерения в статистической теории погрешностей?

21. Как определяется среднеарифметическое значение измеряемой величины?
22. Какие измерения называются равноточными, и какие измерения называются неравноточными? Приведите примеры равноточных и неравноточных измерений.
23. Что называется среднеквадратичной погрешностью? Как определяется среднеквадратичная погрешность? Почему среднеквадратичная погрешность точнее определяет абсолютную погрешность, чем среднее значение разброса результатов измерений?
24. Что такое доверительный интервал? Зачем он вводится при статистической обработке погрешностей?
25. С какой целью в окончательный результат многократного измерения вводят коэффициент Стьюдента?
26. Каким образом находят суммарную погрешность окончательного результата измерения, учитывающую приборную погрешность?
27. Как определяются абсолютная и относительная погрешности при косвенных измерениях? Привести пример определения таких погрешностей.
28. Какие цифра числа называются значащими цифрами? Приведите примеры.
29. Какая форма записи числа называется нормальной? Запишите в нормальной форме числа, заданные преподавателем и назовите значащие цифры в этих числах.
30. Сформулируйте и покажите на примерах правила округления чисел.
31. Как определяется критерий округления числа, полученного по формуле, в которую входят величины, полученные при прямых измерениях. Продемонстрируйте округление на примере.
32. Как определяется абсолютная погрешность фундаментальных постоянных? Покажите на примере.
33. Как определяется погрешность табличных величин или величин, значения которых указаны без погрешности, с которой они измерены?
34. Как строятся графики функциональных зависимостей по экспериментальным данным?
35. Продемонстрируйте применение метода наименьших квадратов на примере нахождения линейной зависимости.
36. Перечислите основные требования к ведению лабораторного журнала и оформлению научного отчета.

Библиографический список

1. Кондратьев А.С., Прияткин Н.А. Современные технологии обучения физике: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. Ун-та, 2006. – 342с.
2. ГОСТ 16263—70 ГСИ. Метрология «Термины и определения».
3. Коротков В. П., Тайц Б. А. Основы метрологии и теории точности измерительных устройств. М.: Изд-во стандартов. — 1978.
4. Селиванов М. Н., Фридман А. Э., Кудрянова Ж. Ф. Качество измерений. — Л.: Лениздат, 1987.
5. Тюрин Н. И. Введение в метрологию. — М.: Изд-во стандартов, — 1985.
6. Шишкин И. Ф. Основы метрологии, стандартизации и контроля качества. — М.: Изд-во стандартов, — 1988.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576с.
8. Агекян Т.А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. М.: Наука, 1972. – 172с.
9. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. – 334с.
- 10.Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. – 104 с.
- 11.Долинский Е. Ф. Обработка результатов измерений. — М.: Изд-во стандартов, — 1973.
- 12.Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л., Феклисов Г.И.. Численные методы. М.: Высшая школа, 1976. – 368 с.
- 13.Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. СПб,6 «Лань», 2005. – 112 с.
- 14.Агапьев Б.Д., Белов В.Н., Кесаманлы Ф.П., Козловский В.В., Марков С.И. Обработка экспериментальных данных: Учеб. пособие / СПбГУ. СПб., 2001.
- 15.Гутер Р. С, Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. — М.: Наука, — 1970.
- 16.Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. — М.: Радио и связь, — 1983.
- 17.Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. — М.: Физматгиз — 1962.
- 18.Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. М.: Энергоатомиздат,— 1985.
- 19.Румшинский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. — М.: Наука, — 1971.
- 20.Кунце Х.-И. Методы физических измерений. – М.: Мир, 1989. – 216с.
- 21.Соловьев В.А., Яхонтова В.Е. Элементарные методы обработки результатов измерений. – Л.: ЛГУ, 1977. – 72с.
- 22.Тойберт П. Оценка точности результатов измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 88 с.

- 23.Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. – М.: Мир, 1985. – 272с.
- 24.Сквайрс Дж. Практическая физика. – М.: Мир, 1971. – 248с.
- 25.Авдусь З.И., Архангельский М.М., Кошкин М.И., Шебалин О.Д., Яковлев В.Ф. Практикум по общей физике. М.: Просвещение, 1971. – 311с.
- 26.Гольдин Л.Л. Руководство к лабораторным занятиям по физике. М.: Наука, 1973. – 688 с.
- 27.Майсова Н.Н. Практикум по курсу общей физики. М.: Росвузиздат, 1963. – 442 с.
- 28.Лабораторные работы по физике. /Под ред. Л.Л. Гольдина. – М.: Наука, 1983.
- 29.Лабораторный практикум по общей физике. Т.3 /Под ред. Ю.М. Ципенюка. – М.: Изд-во МФТИ, 1998.
- 30.Лабораторный практикум по общей физике. Т.1 /Под ред. А.Д. Гладуна. – М.: Изд-во МФТИ, 2004.