Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Кафедра «Автотранспортная и техносферная безопасность»

Курс лекций по дисциплине

«НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Составитель:
Е.А. Киндеев

Владимир 2016

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Надежность как комплексное свойство технических систем.

Термины *надежность, безопасность, опасность* и *риск* часто смешивают, при этом их значения перекрываются. Часто термины *анализ безопасности* или *анализ опасности* используются как равнозначные понятия.

Принятая в Российской Федерации терминология по ГОСТ 27.002-89 определяет *надежность* следующим образом: "надежность - это свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования. Надежность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость или определенные сочетания этих свойств".

Недостаточная надежность технической системы приводит к повышенным затратам на ее ремонт, прекращению снабжения населения электроэнергией, водой, газом, транспортными средствами, иногда к авариям, связанным с большими экономическими потерями, разрушением крупных объектов и человеческими жертвами. Чем меньше надежность технических систем, тем большие партии их приходится изготовлять, что приводит к перерасходу металла, росту производственных мощностей, завышению расходов на ремонт и эксплуатацию.

Надежность объекта является *комплексным свойством,* ее оценивают по четырем показателям — безотказности, долговечности, ремонтопригодности и сохраняемости или по сочетанию этих свойств.

Безотказность — свойство объекта сохранять работоспособность непрерывно в течение некоторого времени или некоторой наработки. Это свойство особенно важно для машин, отказ в работе которых связан с опасностью для жизни людей. Безотказность свойственна объекту в любом из возможных режимов его существования, в том числе, при хранении и транспортировке.

Долговечность — свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

В отличие от безотказности долговечность характеризуется продолжительностью работы объекта по суммарной наработке, прерываемой периодами для восстановления его работоспособности в плановых и неплановых ремонтах и при техническом обслуживании.

Ремонтопригодность — свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем проведения технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость — свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции, в течение и после хранения и (или) транспортирования. Практическая роль этого свойства велика для деталей, узлов и механизмов, находящихся на хранении в комплекте запасных принадлежностей.

Объекты подразделяют на *невосстанавливаемые,* которые не могут быть восстановлены потребителем и подлежат замене (например, электрические лампочки, подшипники, резисторы и т.д.), и *восстанавливаемые,* которые могут быть восстановлены потребителем (например, телевизор, автомобиль, трактор, станок и т.д.).

Надежность объекта характеризуется следующими состояниями: исправное, неисправное, работоспособное, неработоспособное и предельное.

Исправное состояние — такое состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации. Исправное изделие обязательно работоспособно.

Неисправное состояние — такое состояние объекта, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации. Различают неисправности, не приводящие к отказам, и неисправности, приводящие к отказам. Например, повреждение окраски автомобиля означает его неисправное состояние, но такой автомобиль работоспособен.

Работоспособным состоянием называют такое состояние объекта, при котором он способен выполнять заданные функции, соответствующие требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации.

Неработоспособное состояние – такое состояние объекта, при котором значение хотя бы одного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям нормативно-технической документации и (или) конструкторской (проектной) документации.

Неработоспособное изделие является одновременно неисправным.

Предельное состояние — состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна, либо восстановление его работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно.

Критерии *предельного состояния* – признаки, устанавливаемые в нормативно-технической и конструкторской документации.

1.2. Классификация и характеристики отказов

Повреждение – событие, заключающееся в нарушении исправного состояния при сохранении работоспособного состояния.

Отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта.

В результате повреждений или отказов происходят переходы объектов из одних состояний в другие. При этом границы между состояниями условны и определяются значениями параметров, а также условиями работы объектов. Объекты, работоспособные в одних условиях, могут оказаться неработоспособными в других, оставаясь исправными.

Отказы по характеру возникновения подразделяют на случайные и неслучайные (систематические).

Случайные отказы вызваны непредусмотренными нагрузками, скрытыми дефектами материалов, погрешностями изготовления, ошибками обслуживающего персонала.

Неслучайные отказы — это закономерные явления, вызывающие постепенное накопление повреждений, связанные с влиянием среды, времени, температуры, облучения и т. п.

В зависимости от возможности прогнозировать момент наступления отказа все отказы подразделяют на *внезапные* (поломки, заедания, отключения) и *постепенные* (износ, старение, коррозия).

По причинам возникновения отказы классифицируют на *конструктивные* (вызванные недостатками конструкции), *производственные* (вызванные нарушениями технологии изготовления) и *эксплуатационные* (вызванные неправильной эксплуатацией).

При возникновении отказов в технической системе происходит следующее: изменяется характер работы, появляются внешние признаки отказов и зависимость от отказов других систем, уменьшается возможность дальнейшего полноценного использования системы, появляется необходимость оценить возможность устранения отказов, характер устранения основных параметров отказов, определить причины возникновения отказов и др.

Содержание происходящих изменений:

1. Характер работы после возникновения отказов:

– *параметрический* отказ происходит вследствие превышения пределов допустимого изменения рабочего параметра. Продолжение эксплуатации машины, имеющей такой отказ, может привести к выпуску некачественной продукции или к снижению эффективности работы машины (например, к потере точности металлорежущего станка). Более того, в сложных машинах и системах параметрические отказы элементов могут привести к отказу функционирования;

– отказ *функционирования* (*функциональный*) наступает из-за прекращения выполнения объектом его основных функций, дальнейшая эксплуатация возможна только после ремонта.

2. Внешние признаки отказов:

– *явный* (*очевидный)* отказ – непосредственно воспринимается органами чувств или средствами контроля;

– *неявный* (*скрытый*) отказ – тот, для обнаружения которого требуется выполнение специальных операций контроля.

3. Зависимость от отказов других объектов:

– *независимым* называется отказ, не обусловленный отказом другого объекта;

– *зависимый* отказ обусловлен отказом другого объекта.

4. Возможность дальнейшего использования объектов:

– *полный* отказ – прекращение объектом выполнения всех функций;

– *частичный* отказ – выполнение некоторых функций.

5. Возможность устранения отказов:

– *устранимый* отказ – такой, причины которого известны и могут быть устранены, что исключает их возникновение вновь для изделия данного вида;

– *неустранимый* отказ – такой, причины которого неизвестны или не могут быть устранены для изделия данного вида.

6. Характер устранения отказов:

– *устойчивый* отказ – требующий проведения специальной работы;

– *самоустраняющийся* отказ – кратковременное нарушение работоспособности;

– *сбой* – отказ, не нарушающий работоспособности объекта, приводящий к кратковременной потере или искажению полезной информации в системе;

– *перемежающийся* отказ – многократно возникающий самоустраняющийся отказ объекта, имеющий один и тот же характер.

7. Характер изменения основных параметров отказов:

– *внезапный* отказ – появляющийся при скачкообразном изменении значений одного или нескольких параметров объекта;

– *постепенный* отказ – связан с медленным изменением значений параметров объекта;

– *систематический* отказ – многократно повторяющийся однородный по определенным признакам отказ, появляющийся вследствие недостатков конструкции, процесса изготовления и т. д.

8. Причины возникновения отказов:

– *конструкционный* отказ – возникающий из-за недостатков конструкции;

– *производственный* (*технологический*) отказ – следствие ошибок, нарушений и несовершенства технологии;

– *эксплуатационный* отказ – следствие нарушений правил эксплуатации.

9. Значимость отказов:

– *критический* отказ – такой, при котором возникает угроза человеку или окружающей среде;

– *существенный* отказ – такой, при котором ухудшение эксплуатационных характеристик или полная непригодность объекта к эксплуатации не приводят к опасности для человека;

– *несущественный* отказ – такой, который имеет незначительные последствия.

10. Время возникновения отказов:

– *приработочный* отказ – появляется в начальный период эксплуатации;

– отказ *при нормальной* эксплуатации;

– отказ *вследствие износа* – появляется *в заключительный период* эксплуатации.

Вариант классификации отказов представлен на рис. 1.1.

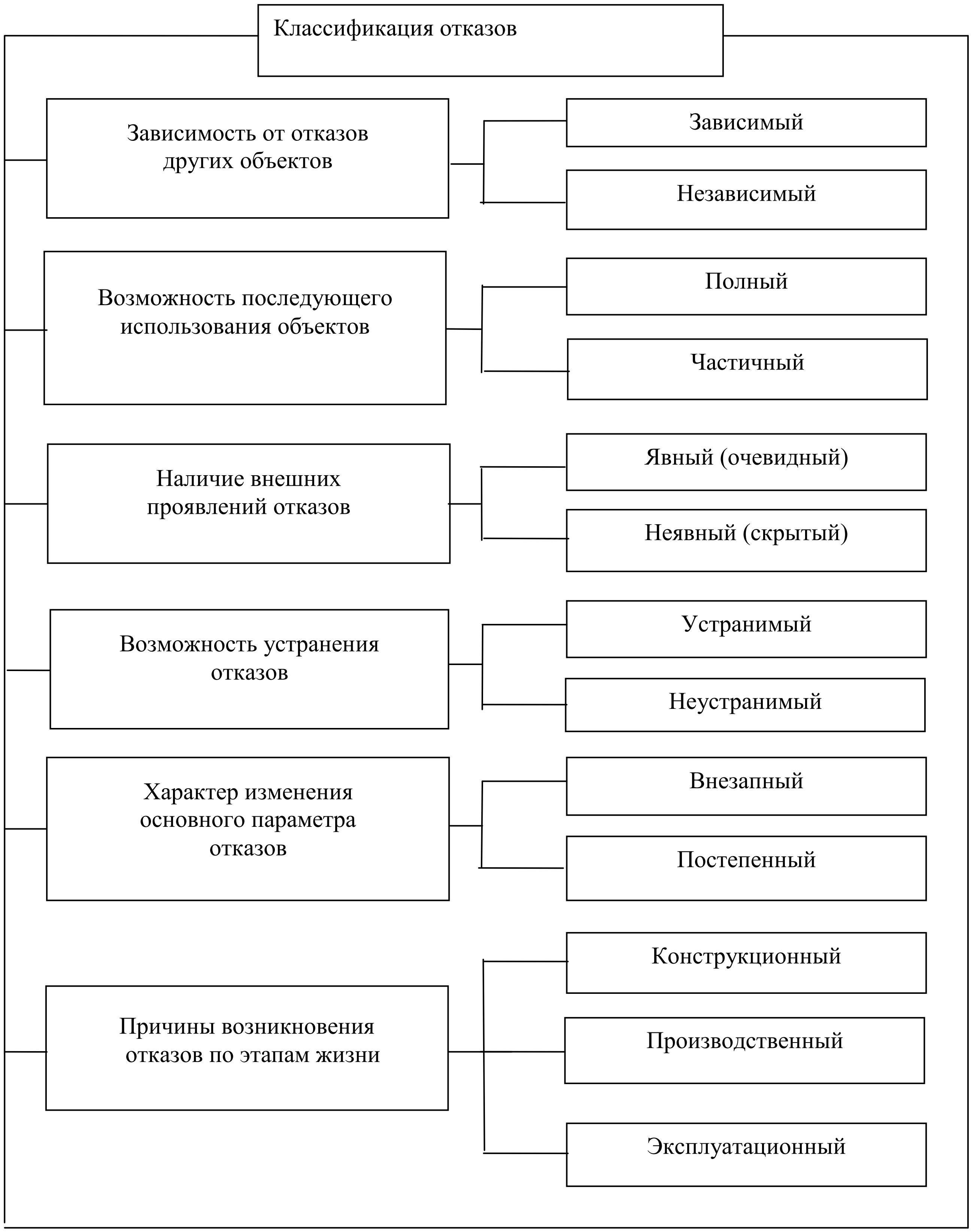


Рис. 1.1. Классификация отказов

1.3. Показатели надежности технических систем

Показателями надежности называют количественные характеристики одного или нескольких свойств объекта, составляющих его надежность. К таким характеристикам относят, например, временные понятия — наработку, наработку до отказа, наработку между отказами, ресурс, срок службы, время восстановления. Значения этих показателей получают по результатам испытаний или эксплуатации.

По восстанавливаемости изделий показатели надежности подразделяют на *показатели для восстанавливаемых изделий* и *показатели невосстанавливаемых изделий.*

Применяются также *комплексные показатели.* Надежность изделий, в зависимости от их назначения, можно оценивать, используя либо часть показателей надежности, либо все показатели.

***Показатели безотказности*:**

- *вероятность безотказной работы* $P(t)$ — вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникает;

- *вероятность отказа* $Q(t)$ — вероятность того, что в пределах заданной наработки объекта произойдет отказ;

- *средняя наработка до отказа* — математическое ожидание наработки объекта до первого отказа;

- *средняя наработка на отказ* $T_{ср}$ — отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки;

- *интенсивность отказов* — условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник. Этот показатель относится к невосстанавливаемым изделиям.

Вероятность безотказной работы

Вероятность безотказной работы – это вероятность того, что при определенных режимах и условиях эксплуатации в пределах заданной продолжительности работы изделия отказ не возникает.

$$P(t)=\int_{\tau}^{\infty} f(t)\,dt. \qquad (1.1)$$

Т.е. вероятность безотказной работы есть вероятность того, что время T от момента начала работы до отказа будет больше или равно времени τ, в течение которого $P(t)$ определяется и равна относительной площади под кривой $f(t)$ справа от значения τ (см. рис. 1.2).

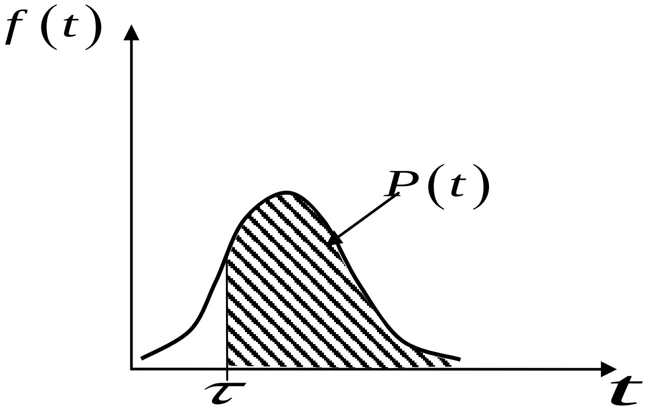


Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация определения вероятности безотказной работы

Например, если $P(t)$ в течение $T = 1000$ часов считается равной 0,95, то это означает, что из большого количества машин в среднем около 5 % потеряют свою работоспособность раньше, чем через 1000 часов работы.

Вероятность безотказной работы можно оценить статистически как отношение числа объектов, проработавших весь заданный период без отказа, к общему числу объектов, поставленных на испытание.

$$\bar{P}(t) = \frac{N - n(t)}{N}, \tag{1.2}$$

где N – общее число объектов, поставленных на испытание, $n(t)$ – число объектов отказавших за время t.

При достаточно большом N $P(t) \approx \bar{P}(t)$.

Вероятность отказа

Вероятность отказа $Q(t)$ есть вероятность того, что за время t произойдет хотя бы один отказ:

$$Q(t) = F(t). \tag{1.3}$$

Так вероятность отказа и безотказной работы – события противоположные, охватывающие совокупность всех возможных исходов, то справедливо:

$$Q(t)+P(t)=1 \text{ и } Q(t)=1-P(t)=\int_0^t f(t)dt. \qquad (1.4)$$

Геометрически, на графике плотности распределения вероятность отказа можно представить следующим образом (см. рис. 1.3).

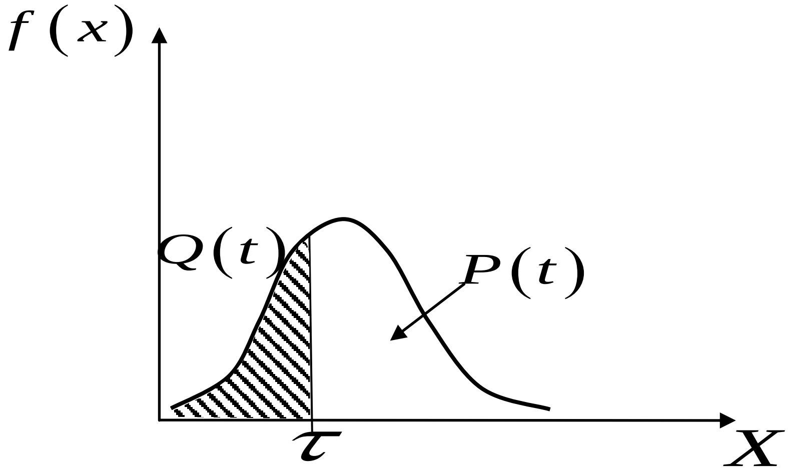


Рис. 1.3. Геометрическая интерпретация определения вероятности отказа

Статистическая оценка вероятности отказа $\bar{Q}(t)$

$$\bar{Q}(t)=\frac{n(t)}{N}. \qquad (1.5)$$

Вероятность безотказной работы, при которой объект считается надежным, зависит от его назначения.

Так, для большинства механических систем обычно считается приемлемым уровень надежности, обеспечивающие вероятность безотказной работы около 0,95…0,96.

Для космических систем $Q(t)$ должна быть меньше $<10^{-5}\ldots10^{-6}$.

Частота отказов

Частота отказов $a(t)$ есть вероятность их появления в единицу времени и определяется плотностью распределения:

$$a(t) = f(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}. \tag{1.6}$$

По статистической информации $\bar{a}(t)$ определяется как отношение числа объектов $n(\Delta t)$, отказавших в единицу времени Δt, к числу объектов N вначале испытания:

$$\bar{a}(t) = f(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N \cdot \Delta t} = \frac{n(\Delta t)}{N \cdot \Delta t}. \tag{1.7}$$

Типичная кривая изменения частоты отказов объекта во времени приведена на рисунке 1.4.

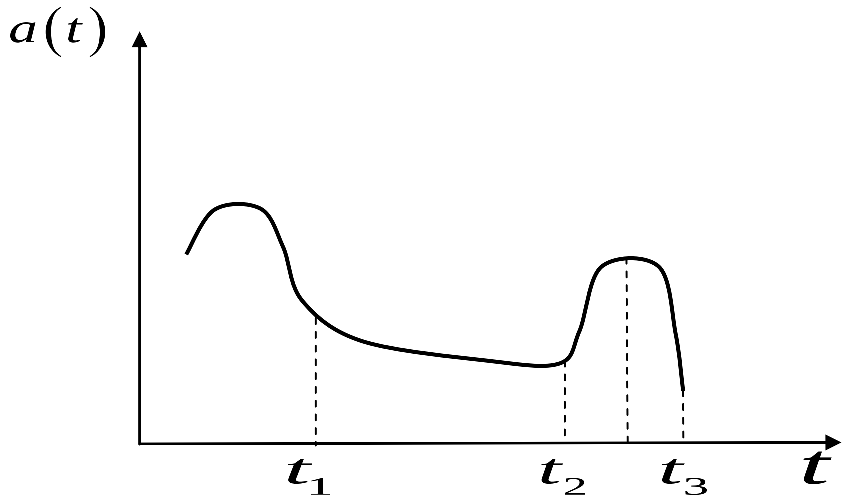


Рис. 1.4. Частота отказов

На кривой частоты отказов можно выделить три участка:

$0 - t_1$ – приработка;

$t_1 - t_2$ – нормальная эксплуатация (внезапные отказы);

$t_2 - t_3$ – предельное состояние.

Уменьшение частоты $a(t)$ на втором участке обусловлено не повышением надежности, а уменьшением общего числа испытываемых объектов. Кроме того, в период предельного состояния кривая $a(t)$ имеет максимум, после чего частота отказов уменьшается, это объясняется опять же не повышением надежности в целом, а незначительным количеством исправно работающих к этому времени элементов.

Через частоту отказов выражают:

$$Q(t) = \int_0^t a(t)dt,$$
$$P(t) = 1 - \int_0^t a(t)dt = \int_t^\infty a(t)dt. \qquad (1.8)$$

Интенсивность отказов

Интенсивность отказа $\lambda(t)$ определяет вероятность отказа в единицу времени в момент t, при условии, что событие не появилось до момента t.

Другими словами, интенсивность отказов определяет, сколько еще может проработать объект, если он до сих пор не отказал.

Условная вероятность появления отказа в единицу времени на интервале Δt,

$$\frac{F_t(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{P(t)\cdot\Delta t} = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{(1-F(t))\cdot\Delta t}. \qquad (1.9)$$

Интенсивность отказов получается в результате перехода в этом уравнении к пределу, при $\Delta t \to 0$.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{F_t(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{P(t)\cdot\Delta t} = -\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{dP(t)}{dt}$$

или (1.10)

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{(1-F(t))\cdot\Delta t} = \frac{dF(t)}{dt}\cdot\frac{1}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}.$$

По статистической информации интенсивность отказов $\bar{\lambda}(t)$ определяется как отношение числа объектов, отказавших в единицу времени, к числу объектов, работоспособных данный момент времени:

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N(t)\cdot\Delta t} = \frac{n(\Delta t)}{N(t)\cdot\Delta t}, \qquad (1.11)$$

здесь $N(t)$ - число работоспособных объектов в момент времени t

$$N(t) = N - n(t). \qquad (1.12)$$

Кривая интенсивности отказов, как и кривая частоты отказов, имеет три характерных участка (см. рис. 1.5).

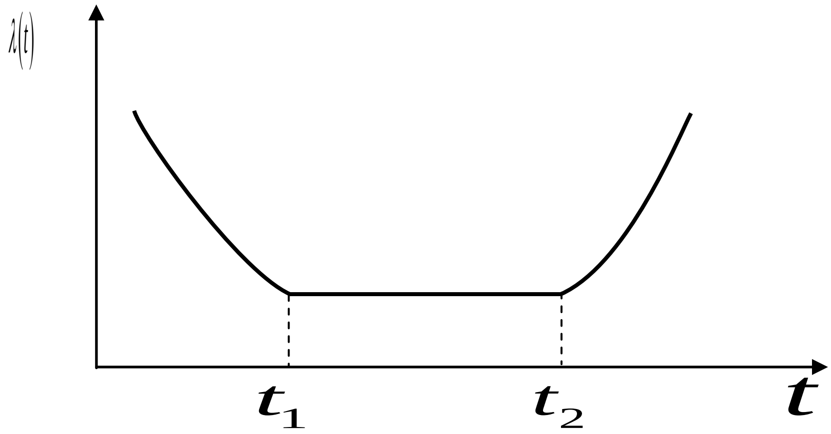


Рис. 1.5. График интенсивности отказов.

До времени t_1 – приработка, когда интенсивность отказов повышена из-за отказов обусловленных дефектами;

период $t_1 - t_2$ – нормальная эксплуатация (внезапные отказы);

период со времени t_2 – вход в предельное состояние, когда начинаются отказы из-за старения элементов, их интенсивного износа и др.

Интенсивность отказов – удобный показатель безотказности объекта, т.к. упрощает многие расчеты.

Выразим вероятность безотказной работы через интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = -\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP(t)}{dt} \rightarrow -\int_0^t \lambda(t)\,dt = \int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = \ln P(t) - \ln P(0) = \ln P(t), \quad (1.13)$$

откуда

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt}. \quad (1.14)$$

На участке, где $\lambda(t) = const$

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (1.15)$$

Аналогично выражается и частота отказов

$$a(t) = -\frac{dP(t)}{dt} \cdot \frac{P(t)}{P(t)} = \lambda(t) \cdot P(t), \text{ или} \quad (1.16)$$

$$a(t)=\lambda(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}, \text{ при } \lambda(t)=const \quad a(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t}. \qquad (1.17)$$

Среднее время безотказной работы

Среднее время безотказной работы – это математическое ожидание времени работы изделия до отказа.

$$T_{cp}=\int_0^\infty t\cdot f(t)dt=\int_0^\infty t\cdot\left(-\frac{dP(t)}{dt}\right)dt=-\int_0^\infty t\cdot dP(t)=-t\cdot P(t)\Big|_0^\infty+\int_0^\infty P(t)dt.$$

Так как $P(\infty)=0$, а $P(0)=1$, то

$$T_{cp}=\int_0^\infty P(t)dt. \qquad (1.18)$$

Геометрически, среднее время безотказной работы выражается площадью фигуры, ограниченной осями координат $P(t)$ и кривой, что изображено на рисунке 1.6.

Среднее время безотказной работы также выражается через интенсивность отказов:

$$T_{cp}=\int_0^\infty P(t)dt=\int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}dt, \qquad (1.19)$$

при $\lambda(t)=\lambda=const$ $$T_{cp}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}. \qquad (1.20)$$

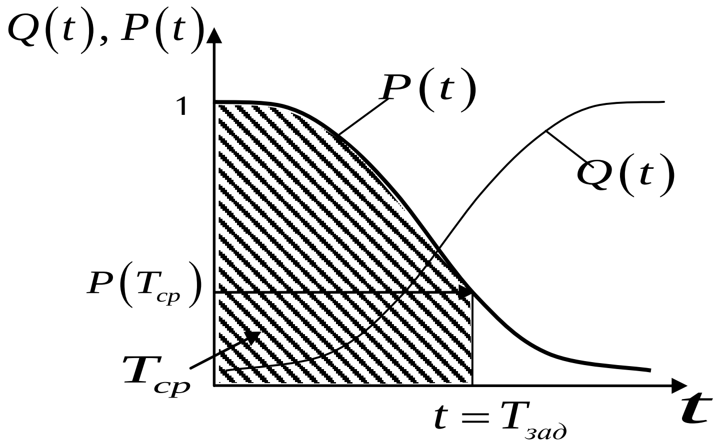


Рис. 1.6. Геометрическая интерпретация определения среднего времени безотказной работы.

Статистическая оценка $T_{ср}$ формируется следующим выражением

$$\overline{T}_{ср} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i, \qquad (1.21)$$

где t_i – время безотказной работы i-го объекта; N – число объектов, поступивших на испытание.

Пример. При испытании 10 систем получены следующие данные выхода из строя:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, ч	80	120	90	140	70	95	75	130	85	115

Определить среднее время безотказной работы.

Решение:

$$T_{ср} = \frac{1}{10}\left(80+120+90+140+70+95+75+130+85+115\right) = 100 \text{ ч.}$$

В виду того, что время испытаний бывает весьма продолжительным, а также при значительном количестве испытываемых объектов пользуются упрощенной зависимостью. Для чего временный интервал $t_к$, в течение которого из строя вышли все испытываемые объекты разбивают на части $\Delta t = t_j - t_{j-1}$, в количестве $m = t_к / \Delta t$, здесь t_j, t_{j-1} – время конца и начала j-го интервала. Характеристикой интервала выступает среднее значение $t_{ср\, j=}\left(t_{j-1} - t_j\right)/2$.

Имея данные о количестве вышедших из строя объектов Δn_j в каждом из j-х интервалов времени рассчитывают:

$$\overline{T}_{ср} \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} \Delta n_j \cdot t_{ср\, j}. \qquad (1.22)$$

Основным достоинством данного показателя надежности является его простота вычисления на основе экспериментальных статистических данных.

Но надо понимать, что $T_{ср}$, как математическое ожидание случайной величины не может полностью охарактеризовать время безотказной работы объекта, необходимо знать по крайней мере дисперсию времени отказа.

Знание же одной из функций $P(t)$, $Q(t)$, $a(t)$, $\lambda(t)$ позволяет определить другие показатели надежности.

Соотношения между ними приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Соотношения между показателями безотказности невосстанавливаемых объектов

ПОКАЗА-ТЕЛИ	$P(t)$	$Q(t)[\equiv F(t)]$	$a(t)[\equiv f(t)]$	$\lambda(t)$
$P(t)$	$P(t)$	$1-Q(t)$	$\int_t^\infty a(t)dt$	$e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$Q(t)$	$1-P(t)$	$Q(t)$	$\int_0^t a(t)dt$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$a(t)$	$-\frac{dP(t)}{dt}$	$\frac{dQ(t)}{dt}$	$a(t)$	$\lambda(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$\lambda(t)$	$-\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}$; $\frac{f(t)}{P(t)}$	$\frac{dQ(t)}{dt}\cdot\frac{1}{1-Q(t)}$	$\frac{a(t)}{e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}}$; $\frac{a(t)}{P(t)}$	$\lambda(t)$
T_{cp}	$\int_0^\infty P(t)dt$	$\int_0^\infty (1-Q(t))dt$	$\int_0^\infty t\cdot a(t)dt$	$\int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}dt$

Показатели долговечности.

Долговечность – свойство объектов сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

Переход в предельное состояние определяется моментом, когда дальнейшая эксплуатация объекта не целесообразна из-за невозможности поддержания безопасности, безотказности или эффективности эксплуатации на допустимом уровне или когда в результате изнашивания и старения объект пришел в такое состояние, при котором ремонт требует недопустимо больших затрат или не обеспечивает восстановления требуемой работоспособности.

Признаки предельного состояния устанавливаются нормативно-технической документацией на данный объект.

Для оценки долговечности объекта применяют показатели, характеризующие выход за допустимые пределы основных технических характеристик (мощность, скорость, точность, кпд и др.) или способность выполнять свои функции с допустимыми затратами на обслуживание и ремонт. К числу таких показателей относят срок службы и ресурс.

Количественные показатели долговечности восстанавливаемых изделий делятся на 2 группы.

1. Показатели, связанные со сроком службы изделия:

- *срок службы* $T_{сл}$ — календарная продолжительность эксплуатации от начала эксплуатации объекта или ее возобновление после ремонта до перехода в предельное состояние;

- *средний срок службы* — математическое ожидание срока службы;

- *срок службы до первого капитального ремонта агрегата или узла* – это продолжительность эксплуатации до ремонта, выполняемого для восстановления исправности и полного или близкого к полному восстановления ресурса изделия с заменой или восстановлением любых его частей, включая базовые;

- *срок службы между капитальными ремонтами*, зависящий преимущественно от качества ремонта, т.е. от того, в какой степени восстановлен их ресурс;

- *суммарный срок службы* – это календарная продолжительность работы технической системы от начала эксплуатации до выбраковки с учетом времени работы после ремонта;

- *гамма-процентный срок службы* — календарная продолжительность эксплуатации, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с вероятностью γ, выраженной в процентах.

Показатели долговечности, выраженные в календарном времени работы, позволяют непосредственно использовать их в планировании сроков организации ремонтов, поставки запасных частей, сроков замены оборудования. Недостаток этих показателей заключается в том, что они не позволяют учитывать интенсивность использования оборудования.

2. Показатели, связанные с ресурсом изделия:

- *ресурс* T_p — суммарная наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновление после ремонта до перехода в предельное состояние.

- *средний ресурс* T_{pcp} — математическое ожидание ресурса; для технических систем в качестве критерия долговечности используют технический ресурс;

- *назначенный ресурс* $T_{pн}$ – суммарная наработка, при достижении которой эксплуатация объекта должна быть прекращена независимо от его технического состояния;

- *гамма-процентный ресурс* — суммарная наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах.

Гамма-процентный ресурс показывает, что γ процентов изделий данной модификации должны иметь наработку до предельного состояния не ниже величины $T_{p\gamma}$:

$$P\left(T_{p\gamma}\right)=\frac{\gamma\%}{100}=P\left(T_p>T_{p\gamma}\right)=\int\limits_{T_{p\gamma}}^{\infty} f_p\left(t\right)dt. \qquad (1.23)$$

Гамма-процентное значение ресурса можно определить по интегральной $F_p\left(t\right)$ и дифференциальной $f_p\left(t\right)$ функциям (см. рис. 1.7).

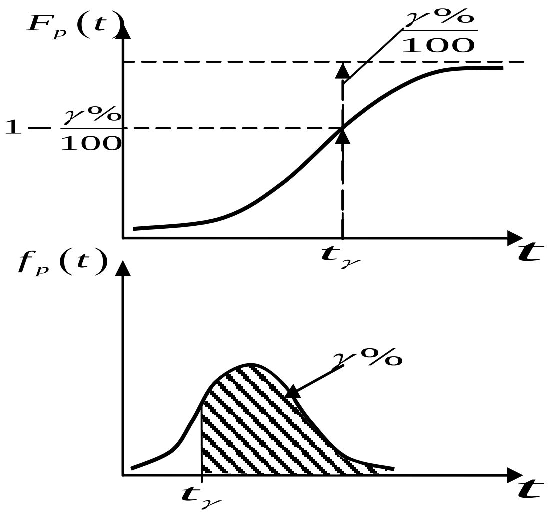


Рис. 1.7. Определение гамма-процентного ресурса

Основное отличие $T_{сл}$ от $T_р$ в том, что $T_{сл}$ характеризует продолжительность существования объекта независимо от характера его использования, а $T_р$ – фактическую наработку объекта.

Единицы для измерения ресурса выбирают применительно к каждой отрасли и к каждому классу машин, агрегатов и конструкций отдельно. В качестве меры продолжительности эксплуатации может быть выбран любой неубывающий параметр, характеризующий продолжительность эксплуатации объекта (для самолетов и авиационных двигателей естественной мерой ресурса служит налет в часах, для автомобилей – пробег в километрах, для прокатных станов – масса прокатанного металл в тоннах. Если наработку измерять числом производственных циклов, то ресурс будет принимать дискретные значения.

Показатели сохраняемости

При хранении и транспортировке объекта причины, обуславливающие возникновение отказов, связаны обычно с воздействием окружающей среды и времени. Это может приводить к отказам вследствие коррозии металлических деталей и старения резиновых, окисления, высыхания, расслоения и т.д. Подобные воздействия требует регламентных работ и проверок, восстановительных работ по устранению отказов.

Показателями сохраняемости служат следующие параметры.

Срок сохраняемости – календарная продолжительность хранения и (или) транспортирования объекта, в течение и после которой сохраняются значения показателей безотказности, долговечности и ремонтопригодности в установленных пределах.

Поскольку срок сохраняемости – случайная величина, ее можно характеризовать плотностью распределения $f_c(t)$ или интегральной функцией появления отказов $F_c(t)$ или функцией сохранения работоспособности $P_c(t)$ при хранении. При этом *средний срок сохраняемости* T_{cc} за промежуток времени t_1 до t_2 будет:

$$T_{cc} = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot f_c(t)\,dt. \qquad (1.24)$$

Гамма-процентный срок сохраняемости – календарная продолжительность хранения и (или) транспортирования, в течение и после которой показатели безотказности, долговечности и ремонтопригодности объекта не выйдут за установленные пределы с вероятностью γ, выраженной в процентах.

Назначенный срок хранения – календарная продолжительность хранения в заданных условиях, по истечении которой применение объекта по назначению не допускается независимо от его технического состояния.

Экономические показатели надежности

Экономические показатели при оценке надежности весьма важны, т.к. повышение безотказности и долговечности машин, с одной стороны, связано с дополнительными материальными затратами, а с другой – с уменьшением затрат общественного труда на ремонт и обслуживание техники, с устранением потерь от простоя машин в ремонте.

Показателем надежности $K_э$ (*коэффициент экономичности*) с экономической точки зрения может служить сумма затрат, связанных с изготовлением и эксплуатацией машины, отнесенная к длительности ее эксплуатации:

$$K_э = \frac{Q_и + Q_э}{T_э}, \text{ руб/ч,} \tag{1.25}$$

где $Q_и$ – стоимость изготовления новой машины, руб; $Q_э$ – суммарные затраты на эксплуатацию, ремонт и обслуживание машины; $T_э$ – период эксплуатации, ч.

Следует стремиться к минимизации $K_э$.

Коэффициент эксплуатационных издержек $K_{из}$ показывает соотношение между стоимостью изготовления и эксплуатацией

$$K_{из} = \frac{Q_и}{Q_и + Q_э}. \tag{1.26}$$

Более высокая надежность достигается за счет дополнительных затрат. В связи с этим часто используют показатель *цены надежности* $Q_н$. Для прогнозирования затрат на повышение надежности в ряде случаев применяют метод сравнения с прототипом на основании общих эмпирических зависимостей типа:

$$Q_н = Q_{но}\left(\frac{T_0}{T}\right)^a, \tag{1.27}$$

где $Q_{но}$ – цена надежности аналога или прототипа; T_0, T – наработка на отказ прототипа и проектируемого изделия; a – эмпирический показатель, характеризующий уровень прогрессивности производства с точки зрения возможностей заданного повышения надежности изделия, $a = 0,5\ldots1,5$.

Комплексные показатели надежности.

Единичные показатели безотказности такие, как параметр потока отказов и наработка на отказ восстанавливаемых объектов не учитывают время, затрачиваемое на восстановление. Поэтому эти показатели не дают возможности оценить готовность к выполнению заданных функций в нужное время.

Показателем, определяющим долговечность системы, объекта, машины, может служить коэффициент технического использования.

Коэффициент технического использования — отношение математического ожидания суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии и всех простоев для ремонта и технического обслуживания:

$$K_{ти} = \frac{T_{сум\ раб}}{T_{раб} + T_{рем} + T_{обсл}}. \tag{1.28}$$

Коэффициент технического использования, взятый за период между плановыми ремонтами и техническим обслуживанием, называется коэффициентом готовности, который оценивает непредусмотренные остановки машины и что плановые ремонты и мероприятия по техническому обслуживанию не полностью выполняют свою роль.

Коэффициент готовности — вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается. Физический смысл коэффициента готовности - это вероятность того, что в прогнозируемый момент времени изделие будет исправно, т.е. оно не будет находиться во внеплановом ремонте.

Физический смысл коэффициента – среднее относительное время пребывания объекта в работоспособном состоянии:

$$K_r = \frac{\mu}{\omega + \mu} = \frac{1}{T_{в\,ср}\left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_{в\,ср}}\right)} = \frac{T_0 \cdot T_{в\,ср}}{T_{в\,ср}\left(T_{в\,ср} + T_0\right)} = \frac{T_0}{T_0 + T_{в\,ср}}, \tag{1.29}$$

где T_0 – наработка на отказ;

$T_{в\,ср}$ – среднее время восстановления;

ω – параметр потока отказов;

μ – интенсивность восстановления работоспособности.

Часто коэффициент готовности определяется через средний ресурс $T_{р\,ср}$ – среднюю суммарную наработку машины до первого капитального ремонта в часах:

$$K_r = \frac{T_{р\,ср}}{T_{р\,ср} + T'_{в\,ср}}, \tag{1.30}$$

здесь $T'_{в\,ср}$ – суммарное время восстановления работоспособности машины после отказов (до капитального ремонта).

Соответственно, повышение K_r достигается либо увеличением среднего времени безотказной работы, либо уменьшением среднего времени восстановления.

Коэффициент оперативной готовности — вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается, и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени.

Для выполнения этого требования необходимо, чтобы в момент возникновения потребности в использования объект был работоспособен, т.е.

$$K_{ог} = K_r \cdot P\left(t_р\right) = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\mu}} \cdot e^{-\mu t_р}. \tag{1.31}$$

Коэффициент простоя K_n – вероятность неработоспособного состояния восстанавливаемого объекта с конечным временем восстановления:

$$K_n = \frac{\omega}{\omega + \mu} = \frac{T_{в\,ср}}{T_{в\,ср} + T_0}. \qquad (1.32)$$

Классификация показателей. В зависимости от способа получения показатели подразделяют на *расчетные,* получаемые расчетными методами; *экспериментальные,* определяемые по данным испытаний; *эксплуатационные,* получаемые по данным эксплуатации.

В зависимости от области использования различают показатели надежности нормативные и оценочные.

Нормативными называют показатели надежности, регламентированные в нормативно-технической или конструкторской документации.

К *оценочным* относят фактические значения показателей надежности опытных образцов и серийной продукции, получаемые по результатам испытаний или эксплуатации.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия «надежность» применительно к техническим системам.

2. Какими основными событиями и состояниями характеризуется надежность технических систем?

3. Чем отличаются исправное и работоспособное состояния технической системы?

4. В каких случаях наступает предельное состояние объекта?

5. Какими могут быть отказы по причинам и характеру возникновения?

6. По каким признакам классифицируют отказы?

7. Что такое «показатели надежности»?

8. Перечислите и поясните показатели безотказности.

9. Перечислите и поясните показатели долговечности.

2. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Случайные события

2.1.1. Алгебра событий

Под *испытанием* или *опытом* понимается выполнение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

Случайное событие (или просто *событие*) – всякий факт (исход наблюдения), который может произойти или не произойти в результате испытания.

Если событие происходит неизбежно в результате каждого испытания, оно называется *достоверным*.

Если событие не может произойти, оно называется *невозможным*.

Случайные события обозначаются латинскими буквами $A, B, C, \dots, U, V$, причем U — достоверное, а V — невозможное события.

Выборкой называется небольшая часть некоторого множества объектов, отобранная случайным образом. При этом отобранные объекты правильно отражают качества и свойства элементов множества, что достигается в результате тщательного предварительного перемешивания свойств. Отбор каждого элемента выборки является *испытанием* и завершается соответствующим *событием*.

Выборка с возвращением – при последовательном выборе объектов из множества после каждого выбора взятый объект возвращается в исходное множество.

Выборка без возвращения – из множества выбирается некоторое количество объектов без возвращения.

Пусть n – число элементов выборки от 1 до n. Осуществление выборки представляет собой *поле событий*

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \tag{2.1}$$

где A_n – отбор n-го элемента, а события поля равновозможны.

События поля могут быть *элементарными* и *сложными*. Сложному событию $A_n\{n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_k\}$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ – номера элементарных событий, составляющих сложное, соответствует появление событий с номерами n_1, или n_2, или n_k. Здесь каждому событию A_n соответствует некоторое количество (или подмножество) элементарных событий.

Равенство $A = B$ означает, что появление одного из этих событий влечет за собой появление другого. Произведение событий *A и B* есть событие $C = A \cdot B$, состоящее в наступлении обоих событий A и B. Сумма событий A и B есть событие $C=A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B. Разность событий A и B есть событие $C = A\text{-}B$, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит. Противоположное событие обозначается той же буквой, но с чертой сверху. Например, A и $\bar{A}$ - противоположные события, причем $\bar{A}$ означает, что A не происходит. События *A и B* несовместны, если $A \cdot B=V$. События A_k (k = 1, 2, ... , n) образуют полную группу событий, если в результате опыта обязательно должно произойти я хотя бы одно из них.

Случайной называется величина, которая может принять какое-либо неизвестное заранее возможное значение, зависящее от случайных факторов, не поддающихся учету.

Пример 1. При каких событиях A и B возможно равенство $A+B=A$?

Решение. Сумма $A+B$ представляет собой событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B. Если $A+B = A$, то событие A включает в себя событие B.

Пример 2. При каких событиях A и B возможно равенство $A \cdot B=A$?

Решение. Произведение $A \cdot B$ представляет собой событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B. Если $A \cdot B = A$, то событие A представляет собой частный случай события B.

Пример 3. Из таблицы случайных чисел наугад выбраны два числа. События A и B соответственно означают, что выбрано хотя бы одно простое и хотя бы одно четное число. Что означают события $A \cdot B$ и $A+B$?

Решение. Событие $A \cdot B$ означает наступление событий A и B, т. е. из двух выбранных чисел одно простое, а другое четное. Событие $A+B$ означает наступление хотя бы одного из событий A или B, *т.* е. среди двух выбранных чисел имеется хотя бы одно простое или хотя бы одно четное число или одно из этих чисел простое, другое четное.

2.1.2. Классическое определение вероятности

Для количественного сравнения событий по степени вероятности их появления вводится определенная мера, которую называют вероятностью события и обозначают $P(A)$. Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим.

Вероятность события A есть отношение числа исходов, благоприятствующих появлению этого события к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$$P\,(A) = m/n, \tag{2.2}$$

где m – число элементарных исходов, при которых происходит событие A;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Под равновозможными понимаются события, которые в силу тех или других причин не имеют объективного преимущества одно перед другим. Из определения вероятности вытекают следующие её свойства:

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$P\,(A) = m/n = n/n = 1.$

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствуют событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$P\,(A) = m/n = 0/n = 0.$

Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 \le m \le n$, значит, $0 \le m/n \le 1$, следовательно,

$0 \le P\,(A) \le 1.$

Свойство 4. *Вероятность противоположного события дополняет вероятность данного события до единицы.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \qquad (2.3)$$

где A и $\overline{A}$ – противоположные события.

Свойство 5. *Сумма вероятностей несовместных событий, составляющих полную группу событий, равна единице*

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1, \qquad (2.4)$$

где A_1, A_2, ... A_n – несовместные события, составляющие достоверное событие (полную группу событий).

Пример. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны.

Решение. Всего получается кубиков n = 1000 штук. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными сторонами. Поэтому $m = 12 \cdot 8 = 96$ штук. Вероятность того, что наугад извлеченный кубик будет иметь две окрашенные стороны p = 0,096.

2.1.3. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, которые можно составить из элементов заданного конечного множества, подчиненных определенным условиям. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее часто употребимые из них.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!, \qquad (2.5)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Заметим, что, по определению, $0! = 1$.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2 и 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$P_3 = 3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) \text{ или } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2.6)$$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 символов различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 5\cdot6 = 30.$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (2.7)$$

Пример 3. Студент знает 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что он ответит на 3 вопроса, заданных преподавателем.

Решение. Количество способов выбрать 3 вопроса из 25 имеющихся $n = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\cdot22!}$, а количество комбинаций выбрать 3 вопроса из 20 известных суденту $m = C_{20}^3 = \frac{20!}{3!\cdot17!}$. Вероятность того, что студент ответит на все три заданных ему вопроса равна $p = \frac{m}{n} = 0{,}49$.

Подчеркнем, что количество размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m \qquad (2.8)$$

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае *комбинации с повторениями* вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, ...) = n!/(n_1!\cdot n_2!\cdot...), \qquad (2.9)$$

где $n_1+n_2+\ldots=n$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

2.1.4. Непосредственный подсчет вероятностей

Если результат опыта можно представить в виде полной группы событий, которые попарно несовместны и равновозможны, то *вероятность события* равна отношению числа m благоприятствующих этому событию исходов опыта к общему числу n всех возможных исходов, т. е. $p = m/n$. Под равновозможными понимаются события, которые в силу тех или других причин не имеют объективного преимущества одно перед другим.

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал её наугад. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = 1/10.$$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие – набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(B) = 1/90.$$

Пример 3. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (C_{10}^{6}).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C_7^4 способами; при этом остальные две ($6 - 4 = 2$) детали должны быть нестандартными; взять же две нестандартные детали из трех ($10 - 7 = 3$) нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = (C_7^4 \cdot C_3^2)/C_{10}^{6} = ½.$$

2.1.5. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, определенную при условии, что событие A уже произошло.

Теорема умножения вероятностей: вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, определенную при условии, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (2.10)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n), \qquad (2.11)$$

где $P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$ — вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ наступили. В частности, для трех событий

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C). \qquad (2.12)$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

Пример 1. Определить вероятность того, что выбранное наугад изделие является первосортным, если известно, что 3% всей продукции являются браком, а 35% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбранное изделие небракованное, а событие B — выбранное изделие первосортное.

Вероятность события A составляет: $P(A) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$; условная вероятность события B составляет $P(B/A) = 0{,}35$.

Искомая вероятность $p = P(A \cdot B) = 0{,}97 \cdot 0{,}35 = 0{,}34$.

Пример 2. Партия из ста изделий подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одного неисправного изделия среди десяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 2% неисправных изделий?

Решение. Найдем вероятность q противоположного события A, которое заключается в том, что партия изделий будет принята. Данное событие является произведением десяти событий

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7 \cdot A_8 \cdot A_9 \cdot A_{10},$$

где A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$) означает, что k-е проверенное изделие исправно.

Вероятность события A_1 $P(A_1) = 98/100$, так как всего изделий 100, а исправных из них 98. После осуществления события A_1 деталей останется 99, среди которых исправных 97, поэтому $P(A_2 \backslash A_1) = 97/99$. Аналогично $P(A_3 \backslash A_1A_2) = 96/98$, и так далее для остальных событий. Находим вероятность события A:

$$q = \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{99} \cdot \frac{96}{98} \cdot \frac{95}{97} \cdot \frac{94}{96} \cdot \frac{93}{95} \cdot \frac{92}{94} \cdot \frac{91}{93} \cdot \frac{90}{92} \cdot \frac{89}{91} = 0{,}846.$$

Вероятность для данной партии быть непринятой $p = 1 - q = 0{,}154$.

2.1.6. Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления одного из двух *несовместных* событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (2.13)$$

Следствие: сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (2.14)$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух *совместных* событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) — P(AB). \qquad (2.15)$$

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,3, во вторую область равна 0,25. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. Событие A – «стрелок попал в первую область» и событие B – «стрелок попал во вторую область» - несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому применима теорема сложения несовместных событий.

Искомая вероятность $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}55$.

Пример 2. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго стрелка соответственно равны: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}4$. Найти вероятность попадания при одновременном выстреле обоих стрелков в одну цель одним из стрелков.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым стрелком не зависит от результата стрельбы другого стрелка, поэтому события A (попадание первого стрелка) и B (попадание второго стрелка) независимы.

Вероятность события $A \cdot B$ (оба стрелка попадали в цель)

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

Искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A) + P(B) — P(A \cdot B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}58.$$

2.1.7. Формула полной вероятности

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих *полную группу* несовместных событий, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (2.16)$$

Пример. Для контроля продукции из трех партий изделий взято для испытания одно изделие. Как велика вероятность обнаружения неисправного изделия, если в первой партии 2/3 изделий неисправны, а в двух других — все изделия исправные?

Решение. Вероятность извлечь изделие из первой партии $P(A_1)$ составляет 1/3, так как партий всего три и они равновероятны. Вероятность извлечь изделие из второй партии $P(A_2)$ составляет 1/3 и из третьей партии $P(A_3)$ также составляет 1/3. При этом вероятность обнаружить неисправное изделие в первой партии равна $P(B_1) = 2/3$, а во второй и в третьей эта вероятность равна нулю. Таким образом, вероятность извлечь неисправное изделие составит

$$P = P(A_1)\cdot P(B_1) + P(A_2)\cdot P(B_2) + P(A_3)\cdot P(B_3) =$$
$$= 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0 = 2/9$$

2.1.8. Вычисление вероятностей гипотез после испытания (формула Байеса)

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами.* Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A). \qquad (2.17)$$

Первоначальные (до проведения опыта) вероятности гипотез $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$ называются *априорными*, а вероятности гипотез после проведения опытна – $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, …, $P_{B_n}(A)$ – *апостериорными*.

Пример. Детали, производимые механическим цехом завода, попадают для проверки их к одному из двух контролеров. К первому контролеру деталь может попасть с вероятностью 0,56, а ко второму контролеру деталь может попасть с вероятностью 0,44.

Вероятность того, что годная деталь будет признана годной первым контролером равна 0,92. Вероятность того, что годная деталь будет признана годной вторым контролером равна 0,98. Годная деталь при проверке была признана годной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}.$$

По условию задачи имеем:

$P(B_1) = 0{,}56$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2) = 0{,}44$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A) = 0{,}92$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером годной);

$P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером годной).

Искомая вероятность

$P_A(B_1) = (0{,}56\cdot 0{,}92)/(0{,}56\cdot 0{,}92 + 0{,}44\cdot 0{,}98) \approx 0{,}54$.

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,54. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило оценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

2.1.9. Повторные независимые испытания (формула Бернулли)

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*.

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием *сложного события,* понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют *простыми.*

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Вычислим вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n - k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности. Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

Вывод формулы Бернулли. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k \cdot q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т. е. C_n^k. Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{2.18}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \tag{2.19}$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли.*

Пример. Вероятности того, что при текущем ремонте автомобиля потребуется замена воздушного фильтра составляет $P = 0{,}2$. Определить вероятность того, что при пяти текущих ремонтах потребуется:

а) три воздушных фильтра;

б) хотя бы один воздушный фильтр;

в) не менее двух воздушных фильтров.

Решение.

а) Вероятность того, что при пяти текущих ремонтах (n = 5) потребуется три воздушных фильтра (k = 3) составит

$$P_5(3) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^3 p^5 q^{5-3} = 10 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512.$$

б) Вероятность того, что при пяти текущих ремонтах (n = 5) потребуется хотя бы один воздушный фильтр ($k \geq 1$) составит

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 0{,}67232.$$

в) Вероятность того, что при пяти текущих ремонтах (n = 5) потребуется не менее двух воздушных фильтров ($k \geq 2$) составит

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) - P_5(1) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p^1 q^4 = 0{,}26272.$$

2.1.10. Формула Пуассона

Если n велико, то формула Бернулли дает погрешности и неудобна для выполнения расчета. В таких случаях можно воспользоваться формулой Пуассона: $P_n(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$,

(2.20)

где n - количество испытаний;

k – количество появлений нужного события A;

$$\mu = n \cdot p, \quad (2.21)$$

где p – вероятность появления события A в одном испытании.

Пример. Ремонтное подразделение получает со склада 100 деталей. Известно, что 1% деталей имеют скрытый дефект. Найти вероятность того, что в партии две дефектные детали.

Решение. Так как в партии 100 деталей, применим формулу Пуассона. При этом n = 100, p = 0,1, $\mu = n \cdot p$ = 100 ·0,01 = 1. Определим $P_{100}(2)$.

$$P_{100}(2) = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = 0{,}184.$$

2.2. Случайные величины

2.2.1. Виды случайных величин

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, заранее не известное и зависящее от случайных воздействий, которые не могут быть учтены до проведения испытания.

Пример 1. Количество лампочек, которое выйдет из строя за год эксплуатации из десяти есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 10.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит пуля при выстреле из винтовки, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры, плотности воздуха и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами $X, Y, Z,$ а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, ..., 10. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, дискретные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений в промежутке (a,b). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Уже из сказанного можно заключить о целесообразности различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, дискретные значения, и случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Дискретной (*прерывной*) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Количество возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Замечание. Настоящее определение непрерывной случайной величины не является точным. Более точное определение будет дано ниже.

2.2.2. Законы распределения случайной величины

Законом распределения вероятности дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для получения закона распределения используют три способа:

– табличный (табл. 2.1)
– графический (рис. 2.1) – для дискретных величин;
– аналитический – для дискретных и непрерывных величин.

Таблица 2.1

Табличный закон распределения

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	…	$P(x_n)$

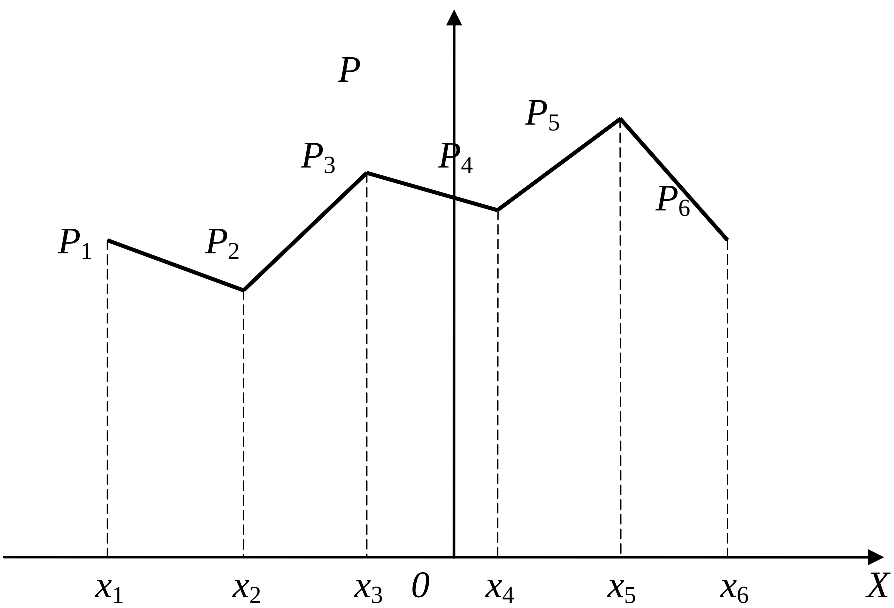


Рис. 2.1. Многоугольник распределения

Непрерывную случайную величину нельзя задать графиком или таблицей. Ее можно задать только аналитически, для чего вводят понятие: *функция распределения вероятности случайной величины* или просто *функция распределения*.

2.2.3. Функция распределения вероятности случайной величины

Функцией распределения вероятности случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x)=P(X < x). \qquad (2.22)$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют *непрерывной,* если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Функция распределения имеет ряд свойств:

1) функция распределения есть неотрицательная величина, принимающая значения от 0 до 1.

2) она является неубывающей функцией, т. е. при $x_2 > x_1$

$$F(x_2) \geq F(x_1);$$

3) вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \leq X<b) = F(b) — F(a);$$

4) функция распределения от минус бесконечности равна нулю

$$F(-\infty)=0;$$

5) функция распределения от плюс бесконечности равна единице

$$F(+\infty)=1;$$

6) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю, т.к. непрерывная случайная величина может принимать бесконечное количество значений. Однако, было бы неправильным думать, что событие $X = x_1$ невозможно, поскольку в результате испытания случайная величина обязательно примет одно из возможных значений; это значение может оказаться равным x_1.

Пример. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

X	2	8	16
p	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и вычертить ее график.

Решение. Если $x \le 2$, то $F(x) = 0$.

Если $2 < x \le 8$, то $F(x) = 0{,}3$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,3.

Если $8 < x \le 16$, то $F(x) = 0{,}4$. Действительно, если x_1 удовлетворяет неравенству $8 < x_1 \le 16$, то $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1$, которое может быть осуществлено, когда X примет значение 2 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 8 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей $0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

Если $x > 16$, то $F(x) = 1$. Действительно, событие $X \le 16$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 2, \\ 0{,}3 \quad при \quad 2 < x \le 8, \\ 0{,}4 \quad при \quad 8 < x \le 16, \\ 1 \quad при \quad x > 16. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 2.3.

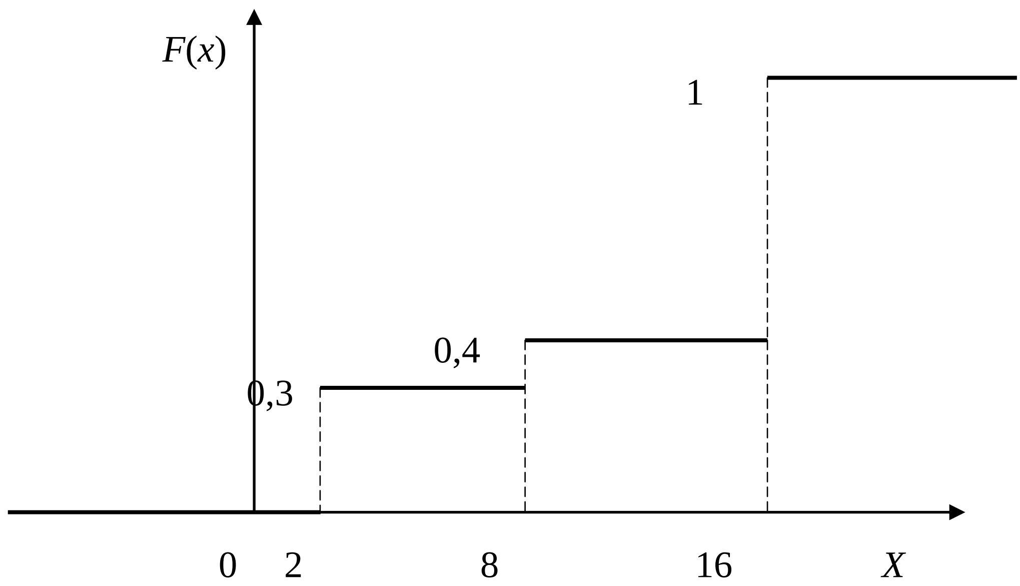


Рис. 2.2. График функции распределения
заданной случайной величины

2.2.4. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины

Плотность распределения («плотность распределения вероятности») – это первая производная от функции распределения. Другие названия: «дифференциальная функция распределения», «дифференциальный закон распределения».

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \tag{2.23}$$

Плотностью распределения можно задать только непрерывную случайную величину.

График плотности распределения называют *кривой распределения.*

Свойства плотности распределения:

1) плотность распределения есть функция неотрицательная:

$$f(x) \ \geq \ 0; \tag{2.24}$$

2) функция распределения равна интегралу от плотности распределения в пределах [-∞ ; x]:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx; \tag{2.25}$$

3) вероятность попадания случайной величины в интервал (*a, b*) равна определенному интегралу от плотности распределения:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a); \tag{2.26}$$

4) несобственный интеграл от плотности распределения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1; \tag{2.27}$$

5) если возможные значения случайной величины принадлежат только интервалу (*a, b*), то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1. \tag{2.28}$$

2.2.5. Числовые характеристики случайных величин

1. *Математическое ожидание* – характеристика (координата) центра группирования значений случайных величин:

– для дискретных случайных величин математическим ожиданием называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i(x_i); \tag{2.29}$$

– для непрерывных случайных величин:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\cdot \qquad (2.30)$$

Свойства математического ожидания:

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине:*

$$M(C) = C. \qquad (2.31)$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

Математическое ожидание случайной величины СХ:

$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2+...+Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_z + ... + x_np_n) = CM(X).$

$$M(CX)=CM(X). \qquad (2.32)$$

Свойство 3. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:*

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \qquad (2.33)$$

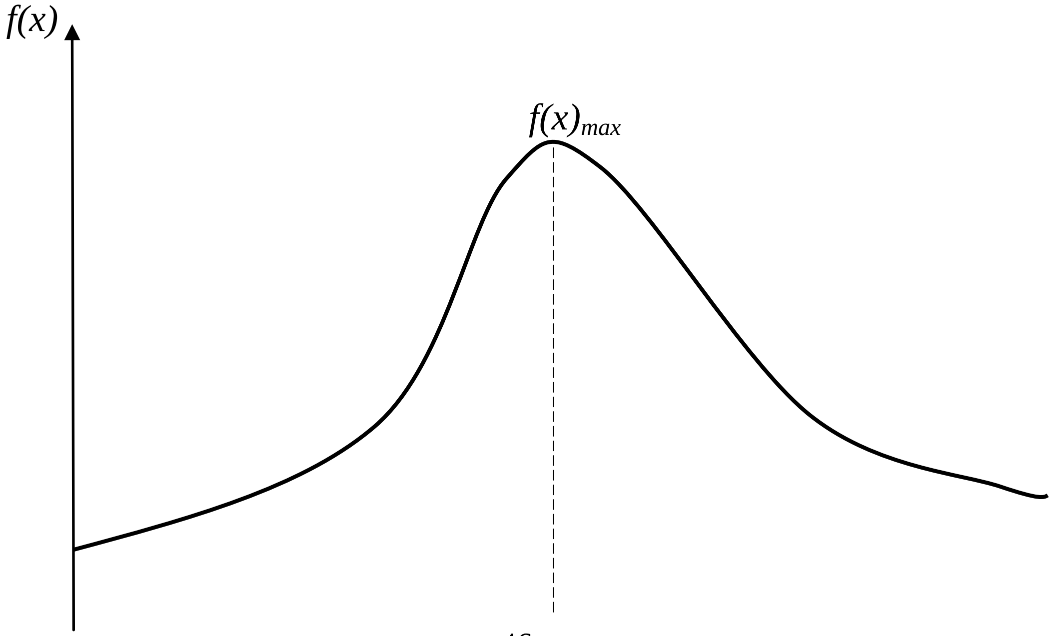
Свойство 4. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y). \qquad (2.34)$$

Примечание: математическое ожидание не есть случайная величина, она постоянна:

$$M(M(C)) = M(C) = C. \qquad (2.35)$$

3. *Модой* непрерывной случайной величины называется то её значение, при котором плотность вероятности наибольшая (т. *Мо* на рис. 2.4). Модой дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение.



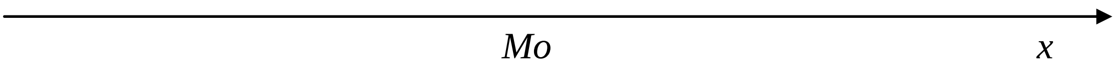


Рис. 2.3. График плотности вероятности для определения моды случайной величины

3. *Медианой* случайной величины X называется такое её значение, для которого ограниченная кривой распределения площадь делится пополам (т. Me на рис. 2.5). Площади справа и слева от медианы равны. Можно также определить медиану случайной величины X как такое ее значение Me, для которого $P(X < Me) = P(X > Me)$. В случае симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

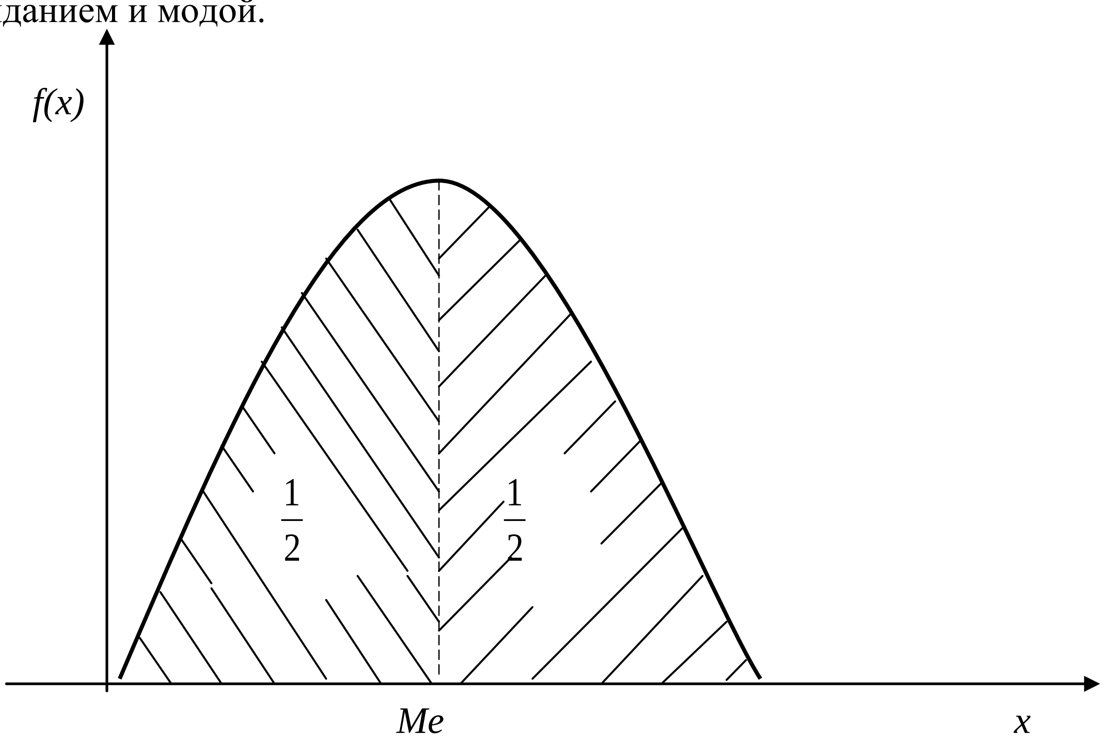


Рис. 2.4. График плотности вероятности для определения медианы случайной величины

4. Значение случайной величины, соответствующее заданной вероятности, называется *квантилью.* Квантиль при вероятности, равной 0,5, называется *медианой*.

5. *Дисперсия* характеризует разброс значений случайной величины относительно математического ожидания.

Дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

– для дискретных случайных величин

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x}_i - M(x))^2 \cdot P(x_i)); \tag{2.36}$$

– для непрерывных случайных величин:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{x} - M(x))^2 f(x)dx. \tag{2.37}$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей формулой:

$$D(x) = M(x^2) — [M(x)]^2. \tag{2.38}$$

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.

Свойства дисперсии:

Свойство 1. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю:*

$$D(C) = 0. \tag{2.39}$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:*

$$D(C \cdot x) = C^2 \cdot D(x). \tag{2.40}$$

Свойство 3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:*

$$D(x + y) = D(x) + D(y). \tag{2.41}$$

Свойство 4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(x - y) = D(x) + D(y). \tag{2.42}$$

6. Среднее квадратическое отклонение характеризует разброс значений случайной величины относительно математического ожидания и имеет размерность самой случайной величины:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}\ . \tag{2.43}$$

7. Коэффициент вариации характеризует разброс значений случайной величины относительно математического ожидания и является безразмерной величиной:

$$\nu(x) = \frac{\sigma(x)}{M(x)}\ , \tag{2.44}$$

$\nu(x) < 0{,}1$ – малое значение коэффициента;

$\nu(x) = 0{,}1\ldots0{,}33$ – среднее значение коэффициента;

$\nu(x) > 0{,}33$ – большое значение коэффициента.

Пример 1. Закон распределения случайной величины задан в виде таблицы:

x	1	3	5
$P(x)$	0,1	0,4	0,5

Определить числовые характеристики случайных величин.

Решение:

$M(x) = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}5 = 3{,}8$

$D(x) = (1 - 4{,}3)^2 \cdot 0{,}1 + (3 - 4{,}3)^2 \cdot 0{,}4 + (5 - 4{,}3)^2 \cdot 0{,}5 = 1{,}76$

$$\sigma(x) = \sqrt{2{,}059} = 1{,}327$$

$$\nu(x) = \frac{\sigma(x)}{M(x)} = 0{,}35.$$

Пример 2. Функция распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0 \\ 2x, \text{ при } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Оценить количественно, чему равна вероятность того, случайная величина примет значение из диапазона (0,5; 1). Какова вероятность противоположного события, т.е. попадания случайной величины в диапазон (0; 0,5)?

Решение:

Вероятность попадания случайной величины в диапазон (0,5; 1) равна:

$$F(x) = \int_{0,5}^{1} f(x)dx = \int_{0,5}^{1} 2xdx = \left.\frac{2x^2}{2}\right|_{0,5}^{1} = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Вероятность попадания случайной величины в диапазон (0; 0,5) равна:

$$Q(x) = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте классическое определение вероятности.

2. Как можно определить вероятность безотказной работы объекта, зная количество объектов, отказавших за определенный промежуток времени и общее количество таких объектов?

3. Какими способами можно задать случайную величину?

4. Поясните теоремы о сложении и умножении вероятностей.

5. В чем смысл теоремы Байеса?

6. Случайная величина задана через закон распределния вероятности:

x	-2	-1	1	2
$P(x)$	0,3	0,1	0,2	0,4

Известно, что $M(x) = 0$.

Найти $D(x)$, $\sigma(x)$, $v(x)$, $M(x^2)$.

7. Функция распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 0; \\ 2x, \text{при } 0 < x \leq 0{,}5; \\ x, \text{при } 0{,}5 < x \leq 1; \\ 0, \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что распределенная по этому закону случайная величина примет значение из диапазона [0,25;0,75].

8. Техническая система может находиться в двух рабочих состояниях. В первом состоянии техническая система работает 60% времени, во втором состоянии техническая система работает 40% времени. При этом, вероятность бехотказной работы для первого состояния составляет 0,97, а для второго состояния 0,99. Определить вероятность отказа технической системы. Ответ: 0,978.

9. Техническая система состоит из трех элементов, соединенных последовательно (см. рис. 2.6). Отказ каждого из элементов приводит к отказу всей системв. Вероятность того, что за время T работы технической системы откажет первый элемент, равна 0,03, второй – 0,02, третий – 0,04. Найти вероятность того, что время T прибор проработает безотказно.

Ответ: 0,912576.

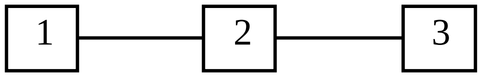


Рис. 2.5. Схема технической системы

10. Техническая система состоит из двух элементов, соединенных параллельно (см. рис. 2.7). Вероятность безотказной работы каждого элемента равна 0,85. Отказ технической системы произойдет при одновременном отказе обоих элементов. Найти вероятность безотказной работы технической системы.

Ответ: 0,9775.

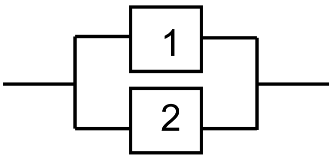


Рис. 2.6. Схема технической системы

3. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ОБЪЕКТА

3.1. Теория надежности и законы распределения случайных величин

При исследовании надежности технических систем приходится оперировать различными случайными величинами. Для их описания с достаточной степенью точности можно использовать специально разработанные статистические модели.

Статистические модели можно получить следующим образом:

1. В результате испытаний или наблюдений за эксплуатацией технических систем накапливают информацию об отказах, а затем, исходя из полученных результатов, при помощи методов математической статистики разрабатывают статистическую модель.
2. На основании накопленных ранее знаний о поведении технических систем в похожих режимах эксплуатации задается статистическая модель для конкретной ситуации, а по ней определяются характеристики надежности будущих объектов.

Второй путь основан на существовании первого.

Исходными данными для определения закона распределения является эмпирическая плотность распределения, т.е. наблюдаемые значения случайной величины, сгруппированные по частотам появления. По опытным данным строится график плотности распределения (или гистограмма). Пример такого построения представлен на рисунке 3.1.

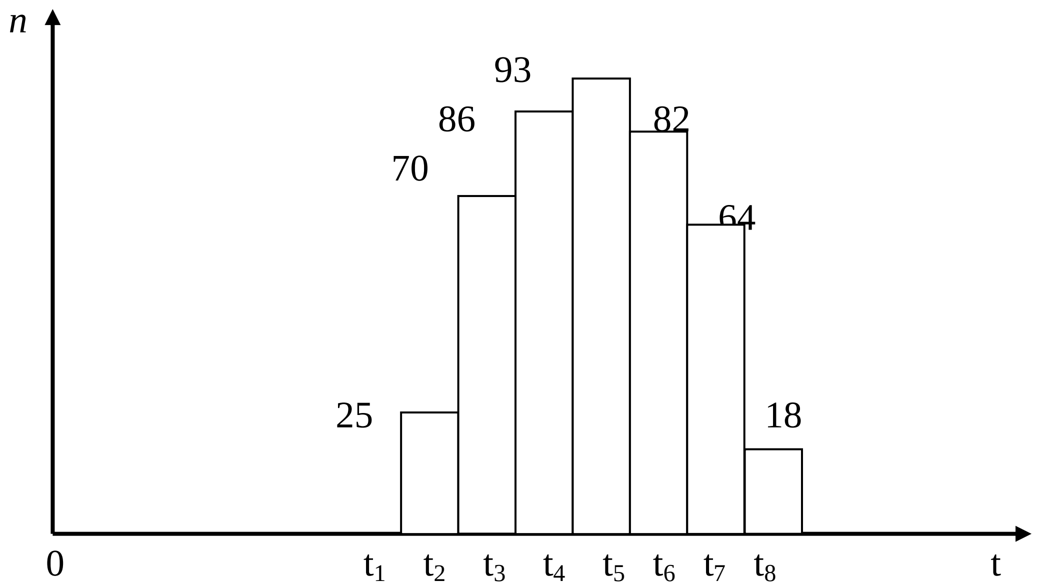


Рис. 3.1. Построение гистограммы плотности распределения параметра.

В данном случае, приведены данные испытаний партии из 438 изделий по наработке на отказ (t – наработка на отказ). Результаты испытаний приведены в таблице 3.1:

Таблица 3.1

Результаты испытания партии изделий на наработку на отказ

Интервал наработки на отказ	Количество изделий, имеющих наработку на отказ, попадающую в данный интервал
$(t_1; t_2)$	25
$(t_2; t_3)$	70
$(t_3; t_4)$	86
$(t_4; t_5)$	93
$(t_5; t_6)$	82
$(t_6; t_7)$	64
$(t_7; t_8)$	18

По гистограмме распределения наработки на отказ можно сделать вывод о том, что в данном случае применим нормальный закон распределения.

Рассмотрим основные распределения, наиболее часто встречающиеся при исследовании надежности технических систем в разные периоды эксплуатации.

3.2. Надежность в период нормальной эксплуатации

В этот период постепенные отказы еще не возникают и надежность объекта характеризуется *внезапными отказами*. Эти отказы вызываются воздействием внешних факторов, происходят с постоянной интенсивностью, которая не зависит от наработки объекта $\lambda = \lambda(t) = const$

$$\lambda = \frac{1}{T_{ср}}; \qquad (3.1)$$

где $T_{ср} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$ – среднее значение (математическое ожидание) наработки до отказа; t_i – наработка до отказа i-го изделия.

В этот период надежность изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения.

Интенсивность отказов, функция распределения, плотность распределения, вероятность безотказной работы приведены в виде зависимостей и в виде графиков на рисунке 3.2.

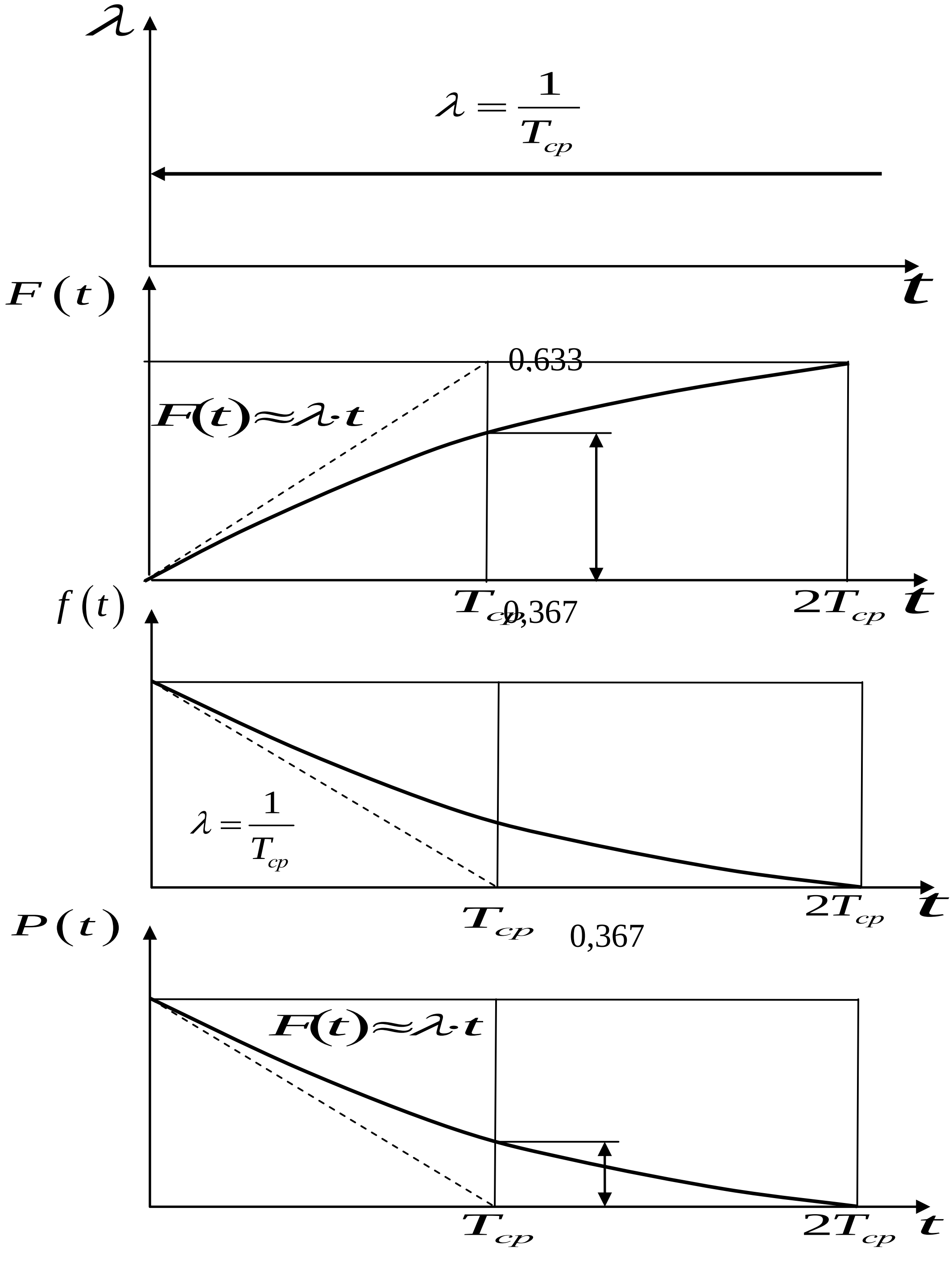


Рис. 3.2. Интенсивность отказов, функция распределения, плотность распределения и вероятность безотказной работы при экспоненциальном распределении

$$F(t)=Q(t)=1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-\frac{t}{T_{ср}}};$$

$$P(t)=1-Q(t)=e^{-\frac{t}{T_{ср}}}; \tag{3.2}$$

$$f(t)=\lambda \cdot e^{-\lambda t}=\frac{t}{T_{ср}}\cdot e^{-\frac{t}{T_{ср}}}.$$

Таблица 3.2

Вероятность безотказной работы при экспоненциальном распределении

$\lambda \cdot t=\left(\frac{t}{T_{ср}}\right)$	1,0	0,1	0,01	0,001	0,0001
$P(t)$	0,367	0,9	0,99	0,999	0,9999

Таким образом, при наработке технической системы равной средней наработке вероятность безотказной работы $P(t) \approx 0{,}37$. Другими словами, 63 % отказов возникает при наработке меньшей $T_{ср}$ и только 37% позднее. Для обеспечения высокой вероятности безотказной работы можно использовать только очень малую долю среднего срока службы.

Приближенно можно считать:

$$P(t) \approx 1-\lambda \cdot t \tag{3.3}$$

$$Q(t) \approx \lambda \cdot t. \tag{3.4}$$

Особенностью данного распределения является то, что вероятность появления события на интервале времени длительностью Δt не зависит от длительности предшествующего промежутка времени, на котором событие не появилось, а зависит только от длительности периода Δt при заданной интенсивности событий.

3.3. Надежность в период постепенных отказов

Наиболее часто при эксплуатации технических систем в самый первый период (достаточно короткий) происходит довольно много отказов. Это так называемый период обкатки или приработки. В этот период проявляются заводские дефекты. Далее следует режим нормальной работы, когда отказов происходит немного. По мере расходования ресурса отказов происходит все больше, но при достижении среднего ресурса количество отказов быстро падает из-за уменьшения количества оставшихся работоспособными экземпляров технических систем, находящихся в эксплуатации. Для описания постепенных отказов нужно использовать такие законы распределения времени безотказной работы, которые дают подобное распределение.

Рассмотрим некоторые из таких законов.

3.3.1. Закон нормального распределения

Нормальное распределение имеет место, когда отклонение случайной величины вызвано действием нескольких примерно равнозначных и независимых (или слабо зависимых) друг от друга факторов. Так как на практике часто выполняются именно такие условия, то нормальное распределение встречается наиболее часто. Нормальному распределению подчиняются: наработка на отказ восстанавливаемых и невосстанавливаемых изделий; размеры при изготовлении и погрешностии измерения деталей; механические характеристики материалов (пределы текучести, прочности, выносливости) и т.д.

Плотность распределения при нормальном распределении описывается следующей формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-M(x))^2}{2\sigma_x^2}}, \qquad (3.5)$$

из которой видно, что оно определяется двумя параметрами – математическим ожиданием $M(x)$ и средним квадратическим отклонением σ_x.

Общим называют нормальное распределение с произвольными параметрами $M(x)$ и σ_x ($\sigma_x > 0$).

Нормированным называют нормальное распределение с параметрами $M(x) = 0$ и $\sigma_x = 1$.

Графически этот закон интерпретируется кривой Гаусса с максимумом при $x = M(x)$ (см. рис. 3.3)

$$f(x)_{max}=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}=\frac{0,4}{\sigma_x}. \qquad (3.6)$$

Параметр σ_x характеризует ширину кривой плотности распределения, а, следовательно, и остроту кривой. Действительно, вся площадь под кривой, выражающая вероятность достоверного события не зависит от формы и всегда должна быть равна единице. Следовательно, более узкая кривая должна быть более высокой и наоборот.

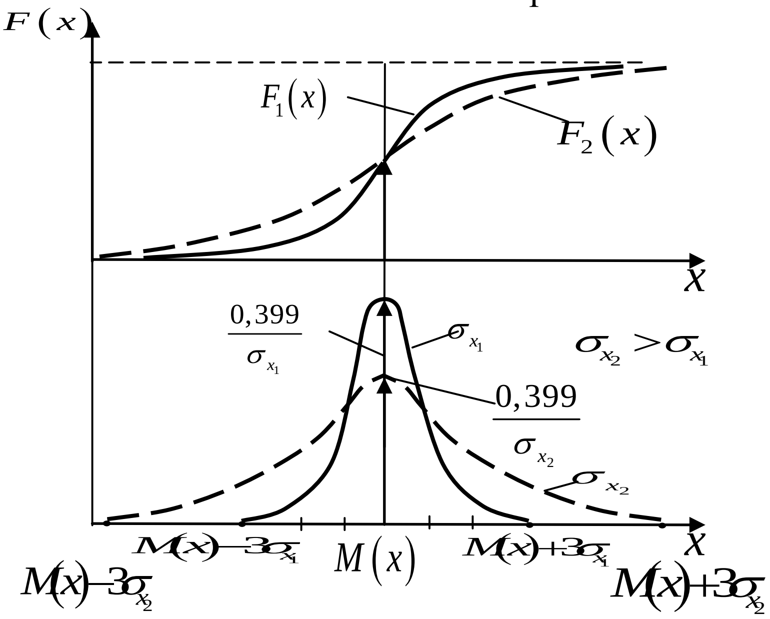


Рис. 3.3. Функция и плотность нормального закона распределения

Функция плотности распределения, подчиняющаяся нормальному закону распределения определена в диапазоне от $x = -\infty$ до $x = +\infty$, однако, это не является существенным недостатком, так как площадь, очерченная уходящими в бесконечность ветвями на диапазонах $-\infty < x < M(x)-3\sigma_x$ и $M(x)+3\sigma_x > x > +\infty$ составляет всего 0,27%. Таким образом, вероятность отказа за границами $\pm 3\sigma_x$ не превышает 0,27% и обычно не учитывается при расчетах. Функция нормального распределения определяется интегрированием функции плотности распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-M(x))^2}{2\sigma_x^2}}\,dx \qquad (3.7)$$

Интеграл такого вида не выражается через элементарные функции.

Решение в этом случае проводится заменой переменных в интеграле, введением квантили

$$u=\frac{x-M(x)}{\sigma_x} \qquad (3.8)$$

и переходом к нормированному распределению $(M(x)=0,\ \sigma_x=1)$.

Пропуская вывод уравнения, запишем:

$$F(x)=0,5+\Phi(u) \qquad (3.9)$$

где $\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^u e^{-\frac{u^2}{2}}du$ – интеграл Лапласа.

Как правило, функцией нормального распределения задается вероятность отказа в заданном интервале времени *F(x)* = *Q(x)*, таким образом вероятность безотказной работы будет:

$$P(t)=1-Q(t)=0,5-\Phi(u) \qquad (3.10)$$

где $u=\frac{t-M(t)}{\sigma}$ – квантиль нормального распределения, см. таблицу 3.3

Таблица 3.3

Связь *P(t)* с квантилью *u*

Квантиль *u*	Вероятность безотказной работы *P*(*t*)	Квантиль *u*	Вероятность безотказной работы *P*(*t*)	Квантиль *u*	Вероятность безотказной работы *P*(*t*)
0,0	0,5000	–0,7	0,7580	–2,000	0,9772
–0,1	0,5398	–0,8	0,7881	–2,200	0,9861
–0,2	0,5793	–0,9	0,8159	–2,326	0,9900
–0,3	0,6179	–1,0	0,8413	–2,500	0,9938
–0,4	0,6552	–1,282	0,9000	–3,090	0,9990
–0,5	0,6915	–1,400	0,9192	*–3,500*	*0,9998*
–0,6	0,7257	–1,600	0,9452	–3,719	0,9999

Пример 1.

Определить вероятность *P(t)* безотказной работы технической системы в течение времени $t = 1,5\cdot10^4$ часов, если ее ресурс подчиняется нормальному закону распределения с параметрами: $M(t) = 4\cdot10^4$ ч, $\sigma = 10^4$ ч.

Решение:

$u=\frac{1,5\cdot10^4-4\cdot10^4}{10^4}=-2,5$, по таблице определяем *P(t)* = 0,9938.

Помимо прямой задачи – оценки вероятности безотказной работы за данную наработку, часто требуется решить обратную задачу – определить наработку, соответствующую заданной вероятности безотказной работы.

Пример 2.

Оценить 90% ресурс технической системы, если известно, что ее долговечность ограничена и ресурс подчиняется нормальному закону распределения с параметрами: $M(t) = 4 \cdot 10^4$ ч, $\sigma = 10^4$ ч.

Решение:

$$t = \sigma u + M(t).$$

При $P(t) = 0{,}9$ квантиль $u = -1{,}282$, следовательно

$$t = 10^4 \cdot (-1{,}282) + 4 \cdot 10^4 = 2{,}718 \text{ ч.}$$

3.3.2. Логарифмически нормальное распределение

В ряде случаев характер распределения отказов становится явно ассиметричным. Иногда его удается свести к симметричному (т.е. нормальному), если в качестве аргумента рассматривать не само время наступления отказа, а его логарифм

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_{\ln} \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma_{\ln}^2}}, \qquad (3.11)$$

где μ – математическое ожидание логарифма времени; $\sigma_{\ln t}$ – среднее квадратическое отклонение логарифма времени.

По результатам испытания μ и $\sigma_{\ln t}$ определяют по формулам:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln t_i; \quad \sigma_{\ln} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (\ln t_i - \mu)^2} \qquad (3.12)$$

Вероятность безотказной работы можно определить по таблице для нормального распределения в зависимости от квантили, которая будет определяться как

$$u = (\ln t - \mu)/\sigma_{\ln} \rightarrow P(t)_{табл}. \qquad (3.13)$$

Логарифмически нормальное распределение справедливо при любом основании логарифма, но наиболее употребительны десятичные и натуральные логарифмы.

Данное распределение хорошо моделирует отказы, происходящие вследствие накопления элементарных повреждений в материале деталей, поэтому оно применяется в качестве одной из статистических моделей для описания усталостных отказов, которые происходят в результате постепенного суммирования внутренних дефектов металла.

3.3.3. Распределение Вейбулла

Распределение Вейбулла соответствует более общей статистической модели, чем предыдущие виды распределений и описывает различные законы изменения случайной величины с течением времени.

Плотность распределения Вейбулла описывается зависимостью

$$f(t)=\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}\cdot e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}. \qquad (3.14)$$

Как видно из формулы это распределение двухпараметрическое, параметр a называют параметром масштаба; параметр b называют параметром формы.

Функция распределения в данном случае имеет вид:

$$F(t)=Q(t)=\int_{0}^{t} f(t)\,dt=1-e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}} \qquad (3.15)$$

Вероятность безотказной работы:

$$P(t)=e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}. \qquad (3.16)$$

Интенсивность отказов:

$$\lambda(t)=-\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{dP(t)}{dt}=\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}. \qquad (3.17)$$

Средняя наработка на отказ:

$$T_{ср}=\int_{0}^{\infty} P(t)\,dt=a\Gamma, \qquad (3.18)$$

где Γ – табулированная гамма функция.

Математическое ожидание:

$$M(t) = m\cdot a. \qquad (3.19)$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_t = c\cdot a. \qquad (3.20)$$

здесь m и c – коэффициенты, выбираемые по таблице 3.4.

Таблица 3.4

Коэффициенты распределения Вейбулла

Параметр b	m	c	Параметр b	m	c
0,400	3,32	10,4	1,0	1,00	1,00

0,455	2,42	6,22	1,2	0,941	0,787
0,500	2,00	4,47	1,6	0,897	0,574
0,625	1,43	2,39	2,0	0,886	0,463
0,833	1,10	1,33	2,5	0,887	0,380

Возможности и универсальность распределения Вейбулла определяются следующими его особенностями:

– при $b < 1$ плотность распределения $f(t)$ и интенсивность отказов $\lambda(t)$ убывают при увеличении наработки, т.е. теоретически можно описать приработочный износ;

– при $b = 1$ распределение Вейбулла имеет вид экспоненциального распределения $\lambda(t) = const$, что соответствует нормальной работе изделия после приработки;

– при $b > 1$ плотность распределения $f(t)$ одновершинная, а интенсивность отказов $\lambda(t)$ возрастает с течением времени, т.е. описывается процесс постепенных отказов. Вариантами этого случая являются: $b = 2$, это распределение Рэлея; при $b = 3{,}3$ распределение Вейбулла близко к нормальному распределению.

3.4. Совместное действие внезапных и постепенных отказов

Вероятность безотказной работы в этом случае определяется произведением вероятностей внезапных и постепенных отказов

$$P(t) = P_{в}(t)\,P_{п}(t) = e^{[illegible]} \qquad (3.21)$$

Контрольные вопросы и задачи

1. Что является причиной отказов в период нормальной эксплуатации технической системы?

2. Известно, что техническая система имеет экспоненциальное распределение наработки до отказа с параметром $\lambda = 10^{-7}$ ч$^{-1}$. Назначенный ресурс технической системы составляет $T_н = 10^5$ ч. Определить вероятность того, что деталь безотказно проработает в интервале наработки $[0, T_н]$.

Ответы: 0,9901.

3. Почему распределение Гаусса называют нормальным распределением?

4. Какими параметрами определяется плотность распределения при нормальном законе распределения?

5. Какие виды распределений описывают надёжность технической системы в период постепенных отказов?

4. СТРУКТУРНО-ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1. Структурная схема надежности технической системы

Расчёт надежности технических систем производится с целью выбора лучших конструктивных решений, режимов эксплуатации, организации оптимального режима технического обслуживания и ремонта. Главными задачами при этом являются выявление наиболее ненадежных элементов и определение наиболее эффективных мер повышения показателей надежности этих элементов. Наиболее точное решение этих задач возможно после предварительного структурно-логического анализа системы.

Большинство технических объектов представляют собой сложные системы, состоящие из отдельных деталей, узлов и агрегатов, устройств контроля, управления и т. д. Техническая система (ТС) – совокупность технических устройств (элементов), предназначенных для выполнения определенной функции или функций. Соответственно, элемент – составная часть системы. Расчленение ТС на элементы достаточно условно и зависит от постановки задачи при расчете надежности. Например, при анализе работоспособности технологической линии её элементами могут считаться отдельные станки, транспортные и загрузочные устройства и различное вспомогательное оборудование. В свою очередь, станки и устройства также могут считаться техническими системами и, в свою очередь, при оценке их надежности должны быть разделены на составляющие их элементы – сборочные единицы, детали и подсистемы.

При определении структуры ТС в первую очередь необходимо оценить влияние надежности каждого на надежность и работоспособность системы в целом. С этой точки зрения целесообразно разделить все элементы на четыре группы:

1. Элементы, состояние которых не влияет на работоспособность системы (например, изменение окраски поверхности или наличие вмятин или царапин на декоративных элементах и т. п.).

2. Элементы, работоспособность которых за время эксплуатации не меняется и вероятность безотказной работы близка к единице (корпусные детали, станины, детали с очень большим запасом прочности).

3. Элементы, ремонт или регулировка которых или замена возможна в процессе эксплуатации изделия или во время планового технического

обслуживания (замена сменных элементов, корректирующие регулировки, замена инструмента и т. д.).

4. Элементы, отказ которых сам по себе или в сочетании с отказами других элементов приводит к отказу всей системы.

Очевидно, что при анализе надежности технических систем целесообразно рассматривать только элементы последней группы.

В первую очередь необходимо выявить наиболее слабые элементы системы, для чего требуется составить структурную схему технической системы. Для этого изделие условно разбивают на элементы, а затем рассматривают влияние отказа каждого отдельно взятого элемента на надёжность всего объекта.

Вводятся следующие определения:

– если отказ элемента приводит к отказу всего объекта, то элемент считается встроенным в структурную схему *последовательно;*

– если отказ элемента не приводит к отказу всего объекта, то элемент считается встроенным в структурную схему *параллельно*.

При составлении структурной схемы придерживаются следующих правил:

– элементы изображаются в виде прямоугольников и обозначаются номерами или индексами (например 1 или А);

– одна сторона прямоугольника считается входом, а другая – выходом для сигнала;

– элемент считается работоспособным, если сигнал проходит по элементу от входа до выхода;

– при отказе элемента прохождение сигнала по нему невозможно;

– отказы могут происходить только внутри элементов, а не на линиях связи между ними.

Системы различаются:

– по характеру выполняемых работ;

– по принципу действия (механическая часть, электрическая часть, гидравлическая часть);

– по операциям, выполняемым ТС в ходе рабочего цикла.

В зависимости от цели исследования глубина анализа может быть различной. Для оценки критериев надежности ТС будет достаточно представление составляющих её элементов в виде отдельных сборочных единиц (двигатель, корпус, насос, вентилятор, фильтр, воздуховод и т. п.).

Если же поставлена задача оптимизации конструкции отдельных элементов ТС, то глубина анализа должна быть больше и доходить до уровня отдельных деталей.

Цель расчёта надёжности:

– выяснить, достижима ли требуемая надежность при существующей технологии конструирования и производства данного вида ТС;

– обосновать выбор того или иного конструктивного решения;

– выяснить возможность и целесообразность резервирования отдельных составляющих ТС подсистем.

Анализ структурной надежности ТС, как правило, содержит следующие операции:

1) рассматриваются выполняемые технической системой и её составными частями функции;
2) изучаются взаимосвязи составляющих ТС элементов;
3) для данной ТС уточняется понятие «безотказной работы»;
4) определяются возможные отказы ТС и составляющих её частей, причины отказов и их возможные последствия;
5) производится оценка влияния отказов составных частей системы на ее работоспособность в целом;
6) в системе выделяются элементы с заранее известными показателями надежности;
7) составляется модель безотказной работы ТС в виде структурно-логической схемы;
8) на основании данных по надежности составных частей ТС с учетом структурно-логической схемы составляются расчётные зависимости для определения показателей надёжности;
9) для решения поставленной задачи на основании результатов расчёта характеристик надёжности ТС делаются выводы и принимаются решения о необходимых мерах по повышению надежности (установление определённого режима профилактического обслуживания, изменение элементной базы, резервирование отдельных элементов или узлов, о номенклатуре и количестве запасных элементов для ремонта и т. д.)

Структурно-логические схемы надёжности ТС графически отображают взаимосвязь составных частей ТС и их влияние на работоспособность системы в целом. Структурно-логическая схема представляет собой совокупность выделенных ранее элементов ТС, соединенных друг с другом последовательно или параллельно. Критерием для определения вида соединения элементов (последовательного или параллельного) при построении схемы является особенности влияния их отказа на работоспособность ТС.

Последовательным (с точки зрения надёжности) считается соединение, при котором отказ любого элемента приводит к отказу всей системы (рис. 4.1).

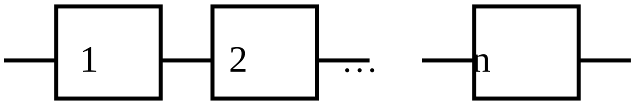


Рис. 4.1. Последовательное соединение элементов системы.

Наиболее наглядным примером последовательных систем могут служить автоматические станочные линии без резервных цепей и накопителей.

Параллельным (с точки зрения надежности) считается соединение, при котором отказ каждого отдельно взятого элемента не приводит к отказу системы до тех пор, пока не откажут все соединенные вместе элементы (рис. 4.2).

Примером параллельных систем являются многомоторные самолеты, восьмиколесные бронетранспортеры, резервные системы и т.д.

Не всегда структурная схема надежности аналогична конструктивной или электрической схеме расположения элементов. Например, подшипники на валу автомобильного колеса работают конструктивно параллельно друг с другом, однако выход из строя любого из них приводит к отказу системы в целом. Эти элементы с точки зрения надежности образуют последовательное соединение.

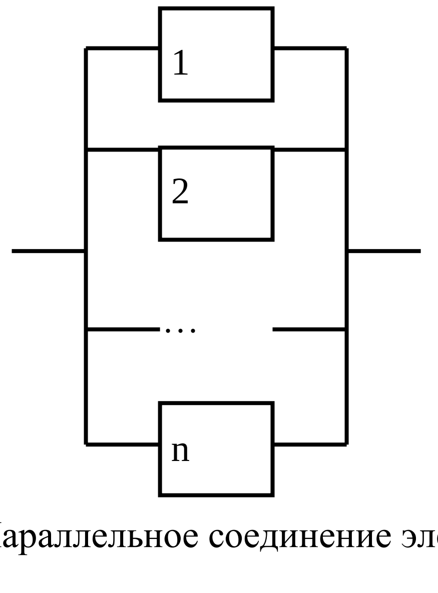
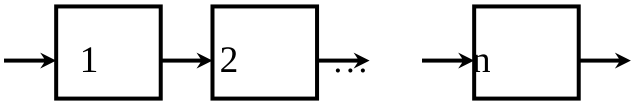


Рис. 4.2. Параллельное соединение элементов системы

4.2. Расчёт надёжности систем с последовательным соединением элементов

Работоспособность системы с последовательным соединением элементов обеспечивается тогда и только тогда, когда все n элементов системы находятся в работоспособном состоянии (рис. 4.3).



$P_1(t)$ $P_2(t)$ $P_i(t)$ $P_n(t)$

Рис. 4.3. Расчётная схема последовательного соединения элементов

Безотказность работы *i*-го элемента зависит от безотказности других: Вероятность безотказной работы технической системы $P_c(t)$ за время *t*:

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \ldots \cdot P_i(t) \cdot \ldots \cdot P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t); \tag{4.1}$$

Вероятность отказа технической системы $Q_c(t)$ за время *t*:

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t); \tag{4.2}$$

Вероятность безотказной работы *i*-го элемента для экспоненциального закона распределения за время *t*:

$$P_i(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt}, \tag{4.3}$$

таким образом, принимая $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathrm{t})$

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt} = e^{-\int_0^t \lambda_C(t)dt}; \tag{4.4}$$

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt}. \tag{4.5}$$

Если все элементы одинаковы, то:

1) при $n = 10$

$P_1 = P_2 = \ldots = P_i = \ldots P_{10}$;

$P_c(t) = P(t)^n$;

$P(t) = 0{,}99$;

$P_c(t) = 0{,}99^{10} = 0{,}9044$;

2) при $n = 100$

$P_c(t) = 0{,}366$;

3) при $n = 1000$

$P_c(t) = 4{,}3171 \cdot 10^{-5}$.

Из (4.3)–(4.4) следует, что для системы из n элементов с одинаковой надежностью ($\lambda = \lambda_1$) верно условие:

$$\lambda_c = n\lambda \;; \tag{4.6}$$

$$T_0 = \frac{T_{0i}}{n}; \tag{4.7}$$

т. е. интенсивность отказов в n раз больше, а средняя наработка в n раз меньше, чем у каждого из составляющих систему элемента. При последовательном соединении общая надёжность системы ниже надёжности самого слабого её элемента. При очень большом количестве элементов, даже если все составляющие элементы обладают очень высокой надежностью, вся система может оказаться настолько ненадежной, что её эксплуатация будет невозможна.

Повысить надёжность такой системы можно следующими путями:

– увеличение надёжности составных элементов;

– сокращение количества элементов;

–уменьшение времени эксплуатации.

4.3. Расчёт надёжности системы с параллельным соединением элементов

Отказ системы произойдёт при отказе всех элементов (рис. 4.5).

$$Q_c(t) = Q_1(t) \cdot Q_2(t) \cdot \ldots \cdot Q_i(t) \cdot \ldots \cdot Q_n(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t), \tag{4.8}$$

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i(t)) \cdot \tag{4.9}$$

Например, при $P_i(t) = 0{,}6$, $n = 5$ $P(t) = 1 - (1 - 0{,}6)^5 = 0{,}9898$.

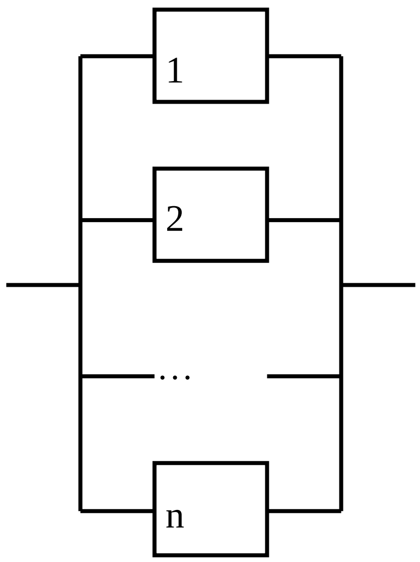


Рис. 4.4. Расчетная схема параллельного соединения элементов

При параллельном соединении можно сформировать надёжную конструкцию из самых ненадёжных элементов, т.к. $(P(t) + Q(t))^m = 1$, где m – количество элементов.

Например, при $m = 2$: $(P(t) + Q(t))^m = P^2 + 2PQ + Q^2 = 1$,

где P^2 означает вероятность безотказной работы обоих элементов;

$2PQ$ – вероятность отказа одного элемента, при этом второй элемент останется работоспособным;

$P^2 + 2PQ$ – из строя выйдет (откажет) не более одного элемента;

Q^2 – вероятность отказа обоих элементов;

$$P = Q = 0{,}5;\ 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1;$$

при $m = 3$: $(P(t) + Q(t))^m = P^3 + 3P^2Q + 3PQ^2 + Q^3 = 1$,

где P^3 – все три элемента работоспособны;

$3P^2 Q$ – из строя выйдет не более одного элемента;

$3QP^2$ – из строя выйдет не более двух элементов;

Q^3 – из строя выйдут все три элемента.

Из приведенного примера видно, что надёжность системы с параллельным соединением повышается при увеличении числа элементов.

При экспоненциальном распределении наработки выражение (4.9) принимает вид:

$$P = 1 - [1 - \exp(-\lambda\, t)]^n, \qquad (4.10)$$

откуда после интегрирования и преобразований средняя наработка системы определяется:

$$T_0 = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = T_{0i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\ , \qquad (4.11)$$

где $T_{0i} = 1/\lambda_i$ – средняя наработка элемента.

При больших значениях *n* справедлива приближенная формула

$$T_0 = T_{0i}(\ln n + \frac{1}{2n} + 0{,}577)\,. \qquad (4.12)$$

Таким образом, средняя наработка системы с параллельным соединением больше средней наработки составляющих её элементов.

4.4. Анализ сложных систем

Недостаточная надежность проектируемой или существующей технической системы может стать проблемой, решение которой потребует больших материальных затрат или займёт много времени (например, отказ от производства ТС и замена ее новой, более совершенной; повышение надёжности существующей системы до требуемого уровня; улучшение условий эксплуатации существующей системы и т. д.).

На практике встречаются системы, для описания которых параллельное или последовательное соединение не годится. Примерами систем со сложным соединением элементов могут быть дорожная сеть, соединение энергетических систем и др. В качестве примера показана система, изображённая на рис. 4.6.

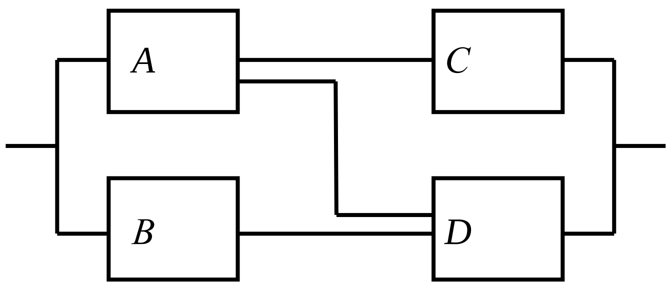


Рис. 4.5. Система со сложным соединением элементов

Здесь отказ элемента *A* нарушает сразу два пути *AB* и *AD*. Таким образом, это соединение не является параллельным. Последовательным такое соединение назвать также нельзя: в случае отказа элементов *B* и *C* система остаётся работоспособной.

Для определения вероятности безотказной работы системы или надёжности функционирования системы используют несколько методов.

Самый простой из этих методов – метод прямого перебора. Он позволяет рассмотреть влияние отказов элементов на работу системы, т. е. на устойчивость функционирования системы в целом. С помощью этого метода можно определить надёжность работы любого типа технических систем, он легко поддаётся проверке. Недостатком данного метода является громоздкость и трудность в составлении универсальной программы для применения вычислительной техники.

Метод состоит в том, что рассматриваются все возможные способы появления отказов, т. е. не отказал ни один элемент, отказал один элемент, отказали два элемента и т. д. до отказа всех элементов.

При рассмотрении системы, изображённой на рис. 4.6, предполагается, что в данном случае элементы системы имеют следующие вероятности безотказной работы:

$$P(A) = 0{,}9;\ P(B) = 0{,}8;\ P(C) = 0{,}6;\ P(Д) = 0{,}7.$$

Событие A определяется как событие, состоящее в том, что элемент A работает безотказно, тогда $\bar{A}$ – событие, состоящее в том, что элемент A отказал. Аналогично определяются события для всех остальных элементов. Затем вычисляется вероятность состояния системы для каждого способа появления отказа. Результаты всех вычислений записываются в табл. 4.1.

Первая строка табл. 4.1 заполняется следующим образом: вначале предполагается, что в системе не отказал ни один элемент, $A \cap B \cap C \cap Д$, вероятность этого вычисляется по формуле

$$P^{(0)} = P(A)P(B)P(C)P(Д) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}3024.$$

В графе «Отметка о работоспособности» ставится знак «+», если система работоспособна, и знак «–», если неработоспособна.

Вторая строка табл. 4.1 предполагает, что в системе отказал один элемент (элемент A), $\bar{A} \cap B \cap C \cap Д$, вероятность такого состояния системы:

$$P^{(1)} = P(\bar{A})P(B)P(C)P(Д) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}0336 \text{ при } P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

где $P(\bar{A})$ и $P(A)$ – вероятности отказа и безотказной работы элемента A.

Остальные строки табл. 4.1 заполняются аналогично с учетом отказа одного, двух, трёх и четырёх элементов системы.

Таблица 4.1

Таблица состояний

№ состояния	Число отказавших элементов	События, характеризующие состояние системы	Вероятность состояния системы	Отметка о работоспособности системы, изображённой на рис. 4.6
1	0	$A \cap B \cap C \cap Д$	0,3024	+
2	1	$\overline{A} \cap B \cap C \cap Д$	0,0336	+
3	1	$A \cap \overline{B} \cap C \cap Д$	0,0756	+
4	1	$A \cap B \cap \overline{C} \cap Д$	0,1295	+
5	1	$A \cap B \cap C \cap \overline{Д}$	0,2016	+
6	2	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap Д$	0,0084	–
7	2	$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap Д$	0,0144	+
8	2	$\overline{A} \cap B \cap C \cap \overline{Д}$	0,0224	–
9	2	$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap Д$	0,0324	+
10	2	$A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{Д}$	0,0504	+
11	2	$A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{Д}$	0,0864	–
12	3	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap Д$	0,0036	–
13	3	$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{Д}$	0,0096	–
14	3	$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{Д}$	0,0056	–
15	3	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{Д}$	0,0216	–
16	4	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{Д}$	0,0024	–
		$\sum$	1,0000	0,8400

Таким образом, система со сложным соединением элементов (подсистем) имеет вероятность безотказной работы 0,84.

Оценивая устойчивость функционирования технической системы, необходимо оценить ее поведение в будущем. Если бы системы и объекты были абсолютно безотказны, то большинство проблем, связанных с безопасностью, исчезло бы. Как известно, основная аксиома безопасности гласит: невозможно обеспечить абсолютную безопасность. Все объекты, изделия и системы обладают отличной от нуля вероятностью отказа, поэтому необходимо знать наработку, в течение которой их вероятность отказа достаточно мала, чтобы свести к минимуму вероятность аварий, вызванных отказами техники. Справедливости ради заметим, что при современном уровне развития техники и технологий самым ненадёжным элементом систем «человек – машина - окружающая среда» стал человек. Наиболее часто аварии и катастрофы вызываются сейчас воздействием человеческого фактора. Чем меньше будет участвовать человек в работе технических систем, тем надёжнее их работа.

4.5. Расчёт структурной надёжности систем

Показатели надёжности ТС рассчитываются на основании предположения, что система и любой её элемент могут находиться только в одном из двух возможных состояний – работоспособном и неработоспособном, и отказы элементов независимы. Состояние системы (работоспособное или неработоспособное) определяется состоянием элементов и их сочетанием. Поэтому теоретически возможно свести расчет безотказности любой ТС к перебору всех возможных комбинаций состояний элементов, определению вероятности каждого из них и сложению вероятностей работоспособных состояний системы.

Такой метод (метод прямого перебора – см. п. 4.4) практически универсален и может использоваться при расчете любых ТС. Однако при большом количестве элементов системы n такой путь становится нереальным из-за большого объема вычислений (например, при $n = 10$ число возможных состояний системы составляет $2^n = 1024$, при $n = 20$ превышает 10^6, при $n = 30$ – более 10^9). Поэтому на практике используют более эффективные и экономичные методы расчета, не связанные с большим объемом вычислений. Возможность применения таких методов связана со структурой ТС.

Контрольные вопросы и задачи

1. В чем состоит условие безотказной работы технических систем с последовательным соединением элементов?

2. Как можно повысить вероятность безотказной работы технической системы с последовательным соединением элементов?

3. Техническая система состоит только из последовательно соединенных 10 элементов первого типа, 15 элементов второго типа, 32 элементов третьего типа и 8 элементов четвертого типа. Интенсивности отказов элементов известны и равны: $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$, $\lambda_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$, $\lambda_3 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$, $\lambda_4 = 5 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$.

Определить среднюю наработку до отказа T_{0c} и вероятность безотказной работы системы при наработках $t_1 = 100$ ч и $t_2 = 1000$ ч.

Ответ: $T_{0c} = 5 \cdot 10^3$ ч, $P(t_1) = 0{,}98$, $P(t_2) = 0{,}819$.

4. В чем состоит условие безотказной работы технических систем с параллельным соединением элементов?

5. Как определить вероятность безотказной работы технической системы с параллельным соединением элементов?

6. Как можно повысить надёжность технической системы с параллельным соединением элементов?

7. Как определить вероятность безотказной работы технической системы со со сложным соединением элементов?

5. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для повышения надежности технических систем можно пойти по одному из трех путей (или применить различные их комбинации):

а) применить резервирование недостаточно надежных подсистем и элементов для повышения надежности всей ТС;

б) повысить надежность элементов, из которых состоит ТС;

в) разработать всю техническую систему или её наименее надежную часть заново, с использованием других принципов функционирования.

5.1. Резервирование

Наиболее простым приемом повышения надежности системы в целом является повышение надежности элементов, входящих в состав технической системы, без внесения в ТС структурных изменений. Всегда можно теоретически рассчитать характеристики элементов системы, при которых вероятность безотказной работы ТС удовлетворяла бы заданным требованиям. Однако практическая реализация такой надежности элементов ТС не всегда возможна практически или экономически целесообразна.

Задачу повышения надежность всей ТС всегда можно решить при помощи резервирования. Обычно резервирование применяется в системах, для которых не удается достичь требуемого уровня надежности повышением безотказности составляющих ее элементов.

Термин *резервирование* означает применение дополнительных средств и (или) возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких его элементов. При резервировании в состав ТС вводятся избыточные элементы, включающиеся в работу при отказе основных. Резервирование осуществляет принцип избыточности.

Избыточность – дополнительные средства и (или) возможности, приданные объекту сверх наименьшего числа необходимых для выполнения объектом заданных функций. Осуществление избыточности обеспечивает нормальное функционирование объекта после возникновения отказов его элементов.

Работоспособность систем без резервирования требует высокой надежности всех элементов системы. В сложных технических устройствах без резервирования практически никогда не удается достичь высокой надежности, даже если использовать составляющие элементы с высокими показателями надежности.

Пример: однажды американский бомбардировщик В-52 в силу ряда обстоятельств был вынужден сбросить термоядерную бомбу, находившуюся у него на борту, на территорию достаточно многонаселенного штата Южная Каролина. Для того, чтобы бомба при аварийном сбросе не взорвалась, на нее установили шесть предохранителей. Когда бомба была найдена, оказалось, что из шести предохранителей пять были неисправны и не сработали. Катастрофа не произошла благодаря шестому исправному предохранителю.

В системах с резервированием работоспособность обеспечивается до тех пор, пока для замены отказавших основных элементов имеются в наличии резервные.

Различают следующие методы резервирования:

1) *По виду резервирования*: структурное, временно́е, информационное, функциональное, нагрузочное.

При *структурном* резервировании в объект с наименьшим достаточным для выполнения требуемых функций количеством элементов вводятся дополнительные элементы. *Основным* считается элемент, необходимый для выполнения требуемых функций объектом без отказов.

Резервный элемент функционально заменяет основной в случае его отказа. В ряде условий и режимов работы основной элемент может быть резервным.

Резервируемый элемент – основной, для замены которого предназначается *резервный* элемент.

Временное резервирование подразумевает использование запасов времени. Объекту для выполнения заданных функций изначально отводится заведомо больше времени, чем необходимо. Резервы времени создаются, например, за счет интенсификации работы объекта.

Информационное резервирование обеспечивается избытком информации.

В каналах связи для этого одно и то же сообщение передается многократно, используются избыточные символы для отображения передаваемой информации и т. д. с целью уменьшения или устранения искажений.

Функциональное резервирование осуществляется при выполнении заданных функций разными способами и техническими средствами (например, одновременное использование различных средств связи в системах управления). Оценку надежности в таких случаях ведут не по *наработке на отказ*, а по *коэффициенту готовности*.

Нагрузочное резервирование – применение нагрузочных резервов с целью обеспечения оптимальной нагрузочной способности элементов.

2) *По способу соединения элементов системы*: общее, раздельное, смешанное.

Если резервирование применено к системе в целом, то оно называется *общим*, если к одному или нескольким элементам – *раздельным.*

Смешанное резервирование осуществляется при сочетании нескольких разных видов резервирования в одном объекте.

3) *По способу включения резервных элементов*: постоянное, динамическое, в том числе резервирование замещением, скользящее, мажоритарное.

Постоянное резервирование производится без изменения структуры объекта при возникновении отказа его элемента. Резервный элемент включается в работу без дополнительных переключающих устройств, на переключение время не расходуется.

Динамическое резервирование выполняется посредством изменения структуры объекта и, в свою очередь, подразделяется на несколько разновидностей:

– резервирование з*амещением*, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного;

– *скользящее* резервирование, при котором несколько основных элементов резервируются одним или несколькими резервными, каждый из которых может заменить любой основной;

– *мажоритарное* резервирование, при котором используется «голосование», т. е. дополнительный (мажоритарный) логический элемент сравнивает сигналы, поступающие от элементов с одинаковыми функциями. При совпадении результатов сигналы передаются на выход.

4) *По кратности резервирования*: с целой кратностью, с дробной кратностью.

Важной характеристикой структурного резервирования является *кратность* резервирования – отношение числа резервных элементов к числу резервируемых ими основных элементов, выраженное несокращаемой дробью (типа 2 : 3; 4 : 2 и т. д.).

Резервирование с целой кратностью выполняется при резервировании одного основного элемента одним или несколькими резервными элементами. Резервирование одного основного элемента одним резервным (т. е. с кратностью 1 : 1) называется *дублированием*.

Резервирование с дробной кратностью – при резервировании двух (или более) однотипных элементов одним (или более) резервным элементом. Количество резервных элементов меньше количества резервируемых элементов.

5) *По режиму работы резерва*: нагруженный, облегченный, ненагруженный.

– *нагруженное* резервирование, при котором резервные элементы (или один из них) находятся в режиме основного элемента;

– *облегченное* резервирование, действительное в случаях, когда резервные элементы (по крайней мере один из них) находятся в менее нагруженном режиме по сравнению с основными;

– *ненагруженное* резервирование, при котором резервные элементы до начала выполнения ими функций находятся в ненагруженном режиме.

6) *По возможности восстановления*: с восстановлением, без восстановления.

Если работоспособность резервируемых элементов восстанавливается при эксплуатации, то применяется резервирование *с восстановлением*, в остальных случаях используется резервирование *без восстановления.*

Схемы различных способов резервирования показаны на рис. 5.1.

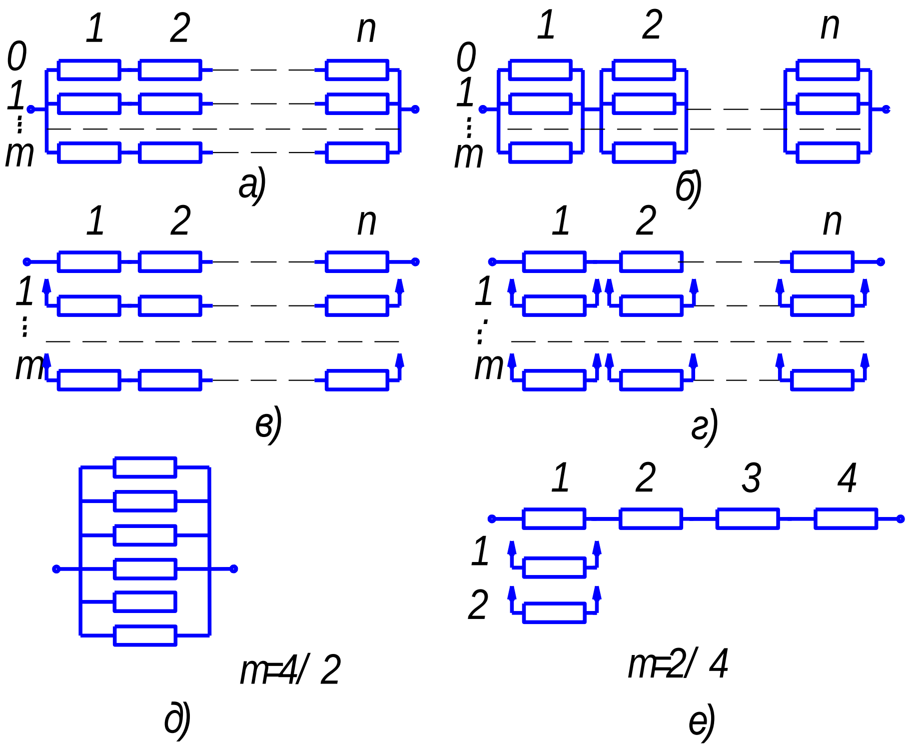


Рис. 5.1. Схемные обозначения различных способов резервирования: а – общее постоянное с целой кратностью; б – раздельное постоянное с целой кратностью; в – общее замещением с целой кратностью; г – раздельное замещением с целой кратностью; д – общее постоянное с дробной кратностью; е – раздельное замещением с дробной кратностью

5.2. Кратность резервирования и основные расчетные формулы

Кратность резервирования является основным параметром резервирования, определяемым как m/n – отношение числа резервных элементов к числу основных (резервируемых).

Как указано ранее (п. 5.1), различают резервирование с целой и дробной кратностью. При резервировании с целой кратностью величина m рассматривается как целое число; при резервировании с дробной кратностью величина m представляется в виде несокращаемой дроби. Например, m = $^4/_2$ означает, что имеется резервирование с дробной кратностью, при котором число резервных элементов равно четырем, число основных – двум, а общее их число равно шести.

По способу включения различают *постоянное резервирование* или *резервирование замещением.*

При *постоянном* резервировании резервные элементы подключены к основным в течение всего времени работы и работают в одинаковом с ними режиме.

При *резервировании замещением* резервные элементы замещают основные после их отказа. Резервные элементы до момента включения их в работу могут находиться в трех состояниях:

– нагруженном резерве;

– облегченном резерве;

– ненагруженном резерве.

Для известных методов резервирования используются следующие расчётные формулы.

1. *Для общего резервирования с постоянно включенным (нагруженным) резервом и с целой кратностью* (рис. 5.1, а):

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^{m+1}, \tag{5.1}$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы i-го элемента за время t;

n – число элементов основной или любой резервной цепи.

Кратность резервирования m/n – отношение числа резервных элементов к числу основных. Дробь не сокращается.

При экспоненциальном законе распределения, когда

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t},$$

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda_c t}\right]^{m+1}, \tag{5.2}$$

$$T_{ср.с} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i+1} = T_{ср.0} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i+1}, \tag{5.3}$$

где $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ – интенсивность отказов нерезервированной системы или любой из m резервных систем;

$T_{ср.0}$ – среднее время безотказной работы нерезервированной системы или любой из m резервных систем.

При резервировании элементов не одинаковой степени надежности

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} q_i(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} \left[1 - p_i(t)\right], \tag{5.4}$$

где $q_i(t)$, $p_i(t)$ – вероятность отказов и вероятность безотказной работы в течение времени t i-го изделия соответственно.

2. *Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом и с целой кратностью* (рис. 5.1, б):

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{m} \left\{ 1 - \left[1 - p_t(t) \right]^{m_i + 1} \right\}, \qquad (5.5)$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы i-го элемента;

m_i – (кратность резервирования i-го элемента;

n – число элементов основной системы.

При экспоненциальном законе надежности, когда $p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$,

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{m} \left\{ 1 - \left[1 - e^{-\lambda_c t} \right]^{m_i + 1} \right\}. \qquad (5.6)$$

Для элементов одинаковой степени надежности и одинаковой кратности их резервирования

$$P_c(t) = \left\{ 1 - \left[1 - e^{-\lambda c_t} \right]^{m+1} \right\}, \qquad (5.7)$$

$$T_{ср.c} = \int_0^{\infty} P_c(t)\,dt = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\nu_i(\nu_i + 1)\ldots(\nu_i + n - 1)}, \qquad (5.8)$$

где $\nu_i = (i+1) / (m + 1)$.

3. *Общее резервирование замещением с целой кратностью* (рис.5.1, в):

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \int_0^t P(t-\tau) a_m(\tau)\,d\tau, \qquad (5.9)$$

где $P_{m+1}(t)$, $P_m(t)$ – вероятности безотказной работы резервированной системы кратности $m + 1$ и m соответственно;

$P(t - \tau)$ – вероятность безотказной работы основной системы в течение времени $(t - \tau)$;

$a_m(\tau)$ – частота отказов резервированной системы кратности m в момент времени τ.

Формула (5.8) позволяет получить расчетные соотношения для устройств любой кратности резервирования. Для получения таких формул необходимо выполнить интегрирование в правой части, подставив вместо $P(t - \tau)$ и $a_m(\tau)$ их значения в соответствии с выбранным законом распределения и состоянием резерва.

При экспоненциальном законе надежности и ненагруженном состоянии резерва

$$P_a(t)=e^{-\lambda t}\sum_{i-0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)i}{i!}, \qquad (5.10)$$

$$T_{ср.с}=T_{ср.0}(m+1), \qquad (5.11)$$

где λ_0, $T_{ср.0}$ — интенсивность отказов и средняя наработка до первого отказа основного (нерезервированного) устройства.

При экспоненциальном законе и недогруженном состоянии резерва

$$P_c(t)=e^{-\lambda_0 t}\left[1+\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}(1-e^{-\lambda_i t})^i\right], \qquad (5.12)$$

$$T_{ср.с}=\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{1+ik}, \qquad (5.13)$$

где $a_i=\prod_{j=0}^{i-1}\left(j+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$; $k=\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$; λ_1 – интенсивность отказов резервного устройства до замещения.

При нагруженном состоянии резерва формулы для $P_c(t)$ и $T_{ср.с}$ совпадают с (5.2).

4. *Раздельное резервирование замещением с целой кратностью* (рис. 5.1, г):

$$P_c(t)=\prod_{i=1}^{n}p_i(t), \qquad (5.14)$$

где $p_i(t)$ – вероятность безотказной работы системы из-за отказов элементов i-го типа, резервированных по способу замещения. Вычисляется $p_i(t)$ по формулам общего резервирования замещением (формулы (5.9), (5.10), (5.12)).

5. *Общее резервирование с дробной кратностью и постоянно включенным резервом* (рис. 6.1, д):

$$p_c(t)=\sum_{i=0}^{i-h}C_i^l p^{l-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^{\ j}C_1^j p_0^j(t), \qquad (5.15)$$

$$T_{ср.с}=\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{1-h}\frac{1}{h+i}, \qquad (5.16)$$

где $p_0(t)$ – вероятность безотказной работы основного или любого резервного элемента;

l – общее число основных и резервных систем;

h – число систем, необходимых для нормальной работы резервированной системы.

В данном случае кратность резервирования

$$m = (l - h)/h. \tag{5.17}$$

Приведенные выше формулы (кроме (5.9), (5.12), (5.13)) могут быть использованы только в тех случаях, когда справедливо допущение об отсутствии последствий отказов.

Последствия отказов проявляются практически всегда при постоянном включении резерва, а также в случае резервирования замещением при недогруженном состоянии резерва.

Выражение (5.9) является основным при получении расчетных формул в случае учета влияния последействия отказов. При этом члены $p(t - \tau)$ и $a_m(\tau)$ должны быть записаны с учетом последствий отказов, вида резервирования и его кратности.

В ряде случаев элементы резервированных устройств могут иметь два вида отказов – «обрыв» и «короткое замыкание». В этом случае вычислять вероятность безотказной работы следует, суммируя вероятности всех благоприятных (не приводящих к отказу) гипотез, т. е.

$$P_c(t) = \sum_{j=1}^{k} p_j(t), \tag{5.18}$$

где $p_j(t)$ – вероятность j-й благоприятной гипотезы, вычисленной с учетом двух видов отказав; k – число благоприятных гипотез.

При вычислениях $p_j(t)$ следует иметь в виду, что для элементов сложной системы справедливы выражения

$$p(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t)dt\right], \quad \varphi_0 + \varphi_з = 1, \tag{5.19}$$

где $\lambda(t)$ – интенсивность отказов элемента; φ_0, $\varphi_з$ – вероятность возникновения «обрыва» и «короткого замыкания» соответственно.

При экспоненциальном законе распределения

$$p(t)= e^{-\lambda t}, \quad \varphi_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_0+\lambda_3}, \quad \varphi_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_3}, \tag{5.20}$$

где λ_0, λ_3 – интенсивность отказов элемента по «обрыву» и «короткому замыканию» соответственно.

Остальные количественные характеристики надежности в случае необходимости вычисляются через $P_c(t)$ по известным аналитическим зависимостям, приведенным в главе 1.

Расчет надежности резервированных систем иногда полезно выполнять при помощи схемы «гибели» («чистого размножения»). В соответствии с этой схемой преобразование Лапласа вероятности возникновения n отказов вычисляется по формуле

$$P_n(s) = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{(s+\lambda_0)(s+\lambda_1)\ldots(s+\lambda_n)}. \tag{5.21}$$

При неравных корнях знаменателя обратное преобразование Лапласа $P_n(s)$ будет

$$P_n(s) = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{s}k^{t}}{B^{I}(s_k)}. \tag{5.22}$$

В формулах (5.22) и (5.23) приняты обозначения: λ_0 – интенсивность отказов системы до выхода из строя первого элемента; λ_1 – интенсивность отказов системы в промежутке времени от момента отказа первого элемента до второго; λ_2 – интенсивность отказов системы в промежутке времени от момента отказа второго элемента до третьего и т. д.; n – число отказавших элементов; $s_k= -\lambda_h$ – k-й корень знаменателя выражения (5.22); $B'(s_k)$ – производная знаменателя в точке s_k .

При одинаковых опасностях отказов λ_i, т. е. $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, расчетные формулы имеют вид:

$$P_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{(s+\lambda_0)^{n+1}}, \tag{5.23}$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda_c t)^n}{n!}e^{-\lambda_0 t}. \tag{5.24}$$

При расчетах надежности по формулам (5.22)–(5.24) следует помнить, что они не определяют вероятности безотказной работы (или вероятности отказа) резервированной системы, а определяют лишь вероятность i-го состояния системы, т е. вероятность того, что в системе откажут n элементов. Для вычисления вероятности безотказной работы следует находить вероятности 0, 1, ..., n отказов, когда система еще находится в работоспособном состоянии (исправна), и суммировать полученные вероятности.

Среднее время безотказной работы системы при использовании схемы «гибели» вычисляется по формуле

$$T_{ср.с} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_c}, \tag{5.25}$$

где λ_i – интенсивность отказов системы до выхода из строя i-го элемента.

При схемной реализации резервирования в ряде случаев конкретные технические решения не приводятся к логическим схемам расчёта надёжности.

В таких случаях для получения аналитических выражений для количественных характеристик надежности необходимо использовать метод перебора благоприятных гипотез. Вероятность безотказной работы при этом вычисляется по выражению (5.20).

При анализе надежности резервированных устройств на этапе проектирования приходится сравнивать различные схемные решения. В этом случае за критерий качества резервирования принимается выигрыш надежности.

Выигрышем надежности называется отношение количественной характеристики надежности резервированного устройства к той же количественной характеристике нерезервированного устройства или устройства с другим видом резервирования.

Наиболее часто используются следующие критерии качества резервированных устройств: $G_0(t)$ i – выигрыш надежности в течение времени t по вероятности отказов; $G_0(t)$ – выигрыш надежности в течение времени t по вероятности безотказной работы; G_T – выигрыш надежности по среднему времени безотказной работы.

При резервировании элементов электроники (резисторов, конденсаторов, контактов реле, диодов и т. п.) всегда произведение интенсивности отказов элемента и времени его работы значительно меньше единицы, т. е. $\Lambda t<1$, поэтому при вычислении $G_q(t)$ *и* $G_q(p)$ целесообразно функции вида $e^{-k\lambda t}$ (экспоненциальный случай) разложить в ряд:

$$e^{-k\lambda t} = 1 - k\lambda t + \frac{k^2\lambda^2 t^2}{2!} \text{ (при небольшом } k\text{).} \tag{5.26}$$

Если система исправна при отказе m элементов, то необходимо брать не менее чем $m + 2$ членов разложения.

Пример. Дана система, схема расчета надежности которой изображена на рис. 5.2. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы при известных вероятностях безотказной работы ее элементов (значения вероятностей указаны на рисунке).

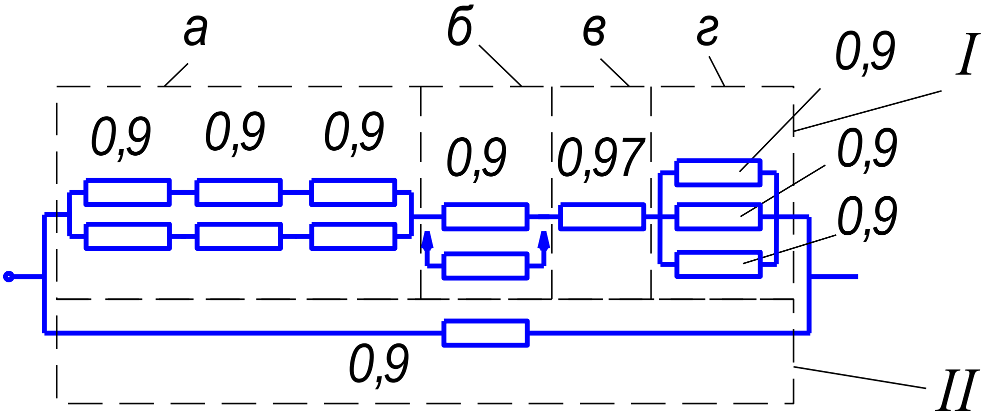


Рис. 5.2. Схема расчета надежности

Решение. На рис. 5.2 видно, что система состоит из двух (I и II) устройств с разной степенью надежности.

Устройство I состоит из четырех узлов: *а* – дублированного узла с постоянно включенным резервом, причем каждая часть узла состоит из трех последовательно соединенных (в смысле надежности) элементов расчета; *б* – дублированного узла по способу замещения; *в* – узла с одним нерезервированным элементом; *г* – резервированного узла с кратностью m = $^1/_2$ (схема группирования).

Устройство II представляет собой нерезервированное устройство, надежность которого известна.

Так как оба устройства неравнонадежны, то на основании формулы (5.3) имеем

$$p_c(t)=1-\prod_{t-0}^{m}\left[1-p_i(t)\right]=1-\left[1-p_I(t)\right]\cdot\left[1-p_{II}(t)\right] .$$

Определяется вероятность $p_I(t)$. Вероятность безотказной работы устройства I равна произведению вероятностей безотказной работы всех узлов, т. е.

$$p_I(t) = p_a p_б p_в p_г.$$

В узле *а* число элементов основной и резервной цепи n = 3, а кратность резервирования m = 1. Тогда на основании формулы (5.1)

$$p_a = 1-\left[1-\prod_{i=1}^{3} p_i(t)\right]^2 = 1-[1-0{,}9^3]^2 \cong 0{,}93$$

В узле *б* кратность общего резервирования замещением m=1, тогда на основании формулы (5.9) получается:

$$p_б(t) = e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^t}{i!} = e^{-\lambda_0 t}(1+\lambda_0) \approx 0{,}9(1+0{,}1) = 0{,}99\cdot$$

В узле *г* применено резервирование с дробной кратностью, когда общее число основных и резервных систем l = 3, число систем, необходимых для нормальной работы, h = 2.

Тогда на основании формулы (5.14) вероятность безотказной работы устройства I будет

$$p_x = p_a p_б p_в p = 0{,}93 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}999 \approx 0{,}892,$$

а вероятность безотказной работы резервированной системы будет

$$P_0 = l-(l-p_{\rm I})\,(1-p_{\rm II}) - 1-(1-0{,}868)\,(1-0{,}9) = 0{,}987.$$

Количественно повышение надежности системы в результате резервирования или применения высоконадежных элементов можно оценить по коэффициенту выигрыша надежности, определяемому как отношение показателя надежности до и после преобразования системы.

Например, для системы из n последовательно соединенных элементов после резервирования одного из элементов (k-го) аналогичным по надежности элементом коэффициент выигрыша надежности по вероятности безотказной работы составит:

$$G_p = \frac{P'}{P} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}\left[1-(1-p_k)^2\right]p_{k+1}\cdots p_n}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_k p_{k+1}\cdots p_n} = \frac{1-(1-p_k)^2}{p_k} = 2 - p_k, \quad (5.27)$$

где P' – вероятность безотказной работы резервированной системы;

P – вероятность безотказной работы нерезервированной системы.

Из формулы (5.26) следует, что эффективность резервирования (или другого приема повышения надежности) тем больше, чем меньше надежность резервируемого элемента (если p_k = 0,9, то G_p = 1,1; если p_k = 0,5, то G_p = 1,5).

Следовательно, при структурном резервировании наибольшего эффекта можно добиться при резервировании самых ненадежных элементов (или групп элементов).

В общем случае при выборе элемента (или группы элементов) для повышения надежности или резервирования необходимо исходить из условия обеспечения при этом наилучшего результата.

5.3. Особенности расчета надежности систем с нагруженным и ненагруженным резервированием

Расчёт систем с нагруженным резервированием осуществляется по формулам последовательного и параллельного соединения элементов аналогично расчету комбинированных систем. При нагруженном резервировании различие между основными и резервными элементами только в названии, резервные элементы постоянно работают в том же режиме, что и основные, независимо от состояния основных элементов. Поэтому надёжность резервных элементов не зависит от момента их перехода из резервного состояния в основное и равна надежности основных элементов.

При нагруженном резервировании резервные элементы расходуют свой ресурс, имеют одинаковое распределение наработок до отказа и интенсивность отказов основных λ_0 и резервных λ_p элементов одинакова ($\lambda_0 = \lambda_p$).

Для обеспечения нормальной работы (сохранения работоспособности) необходимо, чтобы количество работоспособных элементов не становилось меньше минимально необходимого.

Пусть n – число однотипных элементов в системе; r – число элементов, необходимых для функционирования системы.

Кратность резервирования – соотношение между общим числом однотипных элементов и элементов, необходимых для работы системы:

$$k = (n - r)/r.$$

Кратность резервирования может быть целой, если $r = 1$, или дробной, если $r > 1$.

Для системы с последовательным соединением n элементов (рис. 5.1) при общем резервировании с кратностью k (рис. 5.3, а)

$$P_{об} = 1-(1-p)^{k+1} = 1-(1-\prod_{i=1}^{n} p_i)^{k+1}. \tag{5.28}$$

Приведенная формула (5.28) идентична формуле (5.1).

В частности, при дублировании ($k = 1$)

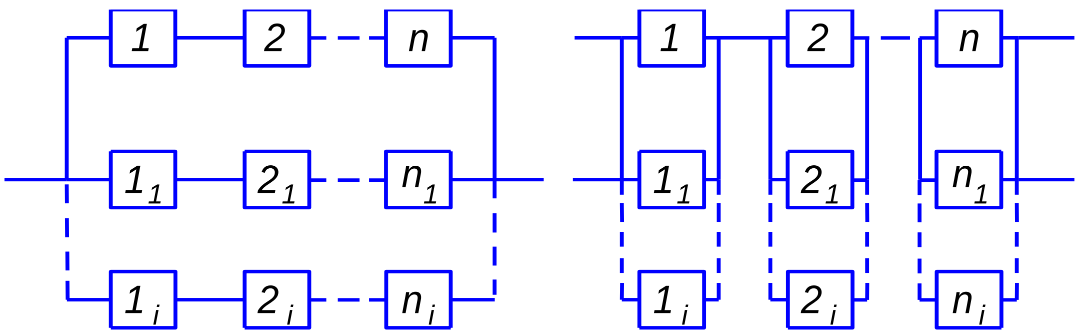
$$P_{об} = 1-(1-P)^2 = P(2-P). \tag{5.29}$$

При раздельном резервировании (рис. 5.4, б)

$$p_{раз} = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(1-p_i\right)^{k+1}\right], \tag{5.30}$$

а при раздельном дублировании ($k = 1$)

$$p_{раз} = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(1-p_i\right)^{2}\right] = \prod_{i=1}^{n} p_i\left(2-p_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(2-p_i\right)\cdot \tag{5.31}$$



а) б)

Рис. 5.3. Общее (а) и раздельное (б) нагруженное резервирование

Тогда коэффициенты выигрыша надежности по вероятности безотказной работы при дублировании запишутся в виде:

$$G_{об} = \frac{P_{об}}{P} = 2 - P, \quad G_{раз} = \frac{P_{об}}{P} = \prod_{i=1}^{n} \left(2 - p_i\right), \tag{5.32}$$

откуда следует, что раздельное резервирование эффективнее общего (например, для системы из трех одинаковых элементов при $P = 0{,}9$ $G_{об} = 1{,}27$, G = 1,33.

При ненагруженном резервировании резервные элементы последовательно включаются в работу при отказе основного, затем первого резервного и т. д. (рис. 5.4), поэтому надежность резервных элементов зависит от момента их перехода в основное состояние. При ненагруженном резервировании резервные элементы не подвергаются нагрузке, их показатели надежности не изменяются и они не могут отказать за время нахождения в резерве, т. е. интенсивность отказов резервных элементов λ_p = 0.

Такое резервирование в различных ТС встречается наиболее часто, так как по сути оно аналогично замене отказавших элементов и узлов на запасные.

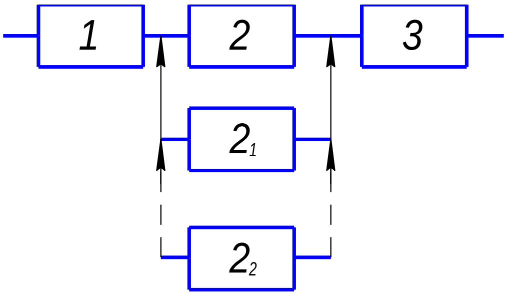


Рис. 5.4. Ненагруженное резервирование

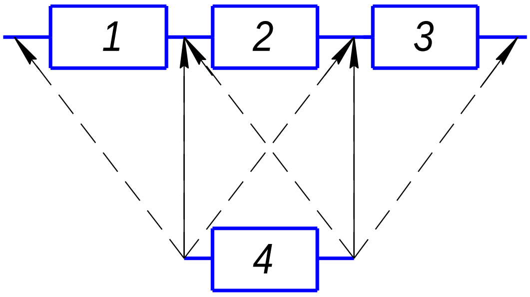


Рис. 5.5. Скользящее резервирование

Если резервные элементы до их включения обладают высокой степенью надежности, то для системы с ненагруженным резервированием кратности k (всего количество элементов k + 1)

$$Q = \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=1}^{k+1} q_i; \quad P = 1 - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=1}^{k+1}(1-p_i), \tag{5.33}$$

т. е. вероятность отказа в $(k+1)!$ раз меньше, чем при нагруженном (параллельном соединении, см. формулу (5.34)).

Для идентичных (одинаковых) по надежности основного и резервного элементов

$$P = 1 - \frac{1}{(k+1)!}(1-p)^{k+1}. \tag{5.34}$$

При экспоненциальном распределении наработки (простейшем потоке отказов) в случае $\lambda t << 1$ можно воспользоваться приближенной формулой

$$P \approx 1 - \frac{(\lambda)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{5.35}$$

При ненагруженном резервировании средняя наработка на отказ

$$T = \sum_{i=1}^{k+1} T_{0i}, \tag{5.36}$$

а для идентичных элементов $T_0 = nT_{0i}$.

Примеры ненагруженного резервирования (рис. 5.6):

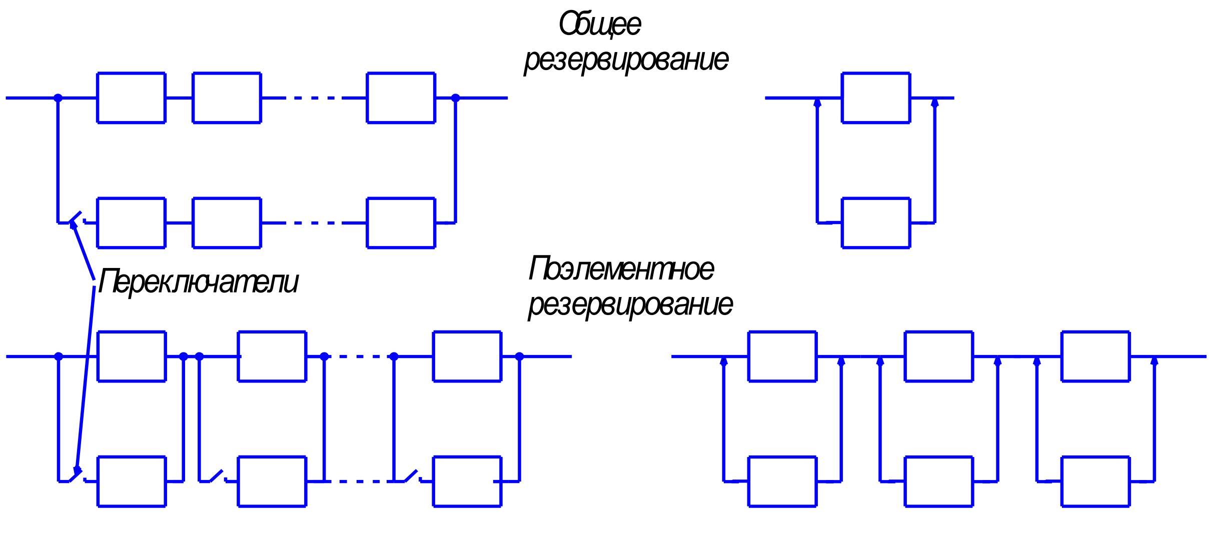


Рис. 5.6 Ненагруженное резервирование

Резервные элементы включаются в работу только после отказа основных. Переключение производится вручную или автоматически.

Если рассмотреть два характерных вида резервирования (рис. 5.7), то очевидно, что при равенстве числа основных и резервных элементов ненагруженный резерв обеспечивает большую надежность. Но это справедливо только тогда, когда перевод резервного элемента в работу происходит абсолютно надежно. Выполнение этого условия связано со значительными техническими трудностями или является иногда нецелесообразным по экономическим или техническим причинам.

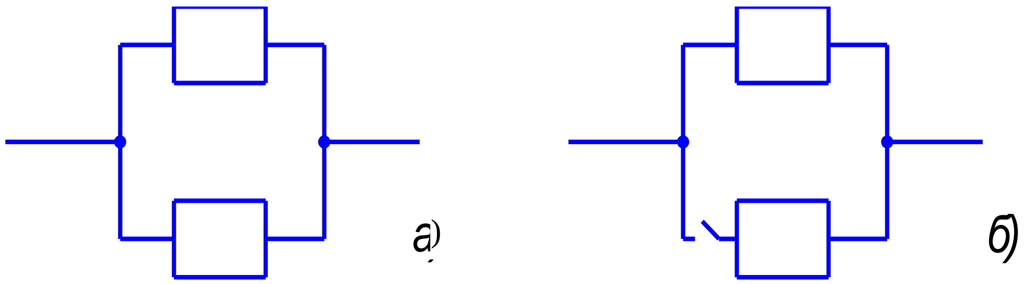


Рис. 5.7. Нагруженное (а) и ненагруженное (б) резервирование

Облегченное резервирование используется при большой инерционности переходных процессов, происходящих в элементе при его переходе из резервного в основной режим, и нецелесообразности применения нагруженного резервирования из-за недостаточного выигрыша в надежности.

Очевидно, облегченный резерв занимает промежуточное положение между нагруженным и ненагруженным. Интенсивность отказов резервных элементов λ_p ниже, чем у основных λ_0, т. е. $\lambda_0 > \lambda_p$.

Точные выражения для расчета надежности систем при облегченном резервировании громоздки и неоднозначны, однако при экспоненциальном распределении наработки справедлива приближенная формула

$$P = \frac{1}{(k+1)!}\lambda(\lambda+\lambda_0)(\lambda+2\lambda_0)\ldots[\lambda k\lambda_0]\cdot t^{k+1} = \\ = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(\lambda+i\lambda_0), \qquad (5.37)$$

где λ_0 – интенсивность отказов элементов в облегченном режиме; k – кратность резервирования.

Разновидностью ненагруженного резервирования является скользящее резервирование, когда один и тот же резервный элемент может быть использован для замены любого из элементов основной системы.

Скользящее резервирование используется для резервирования нескольких одинаковых элементов системы одним или несколькими одинаковыми резервными (рис. 5.2, здесь все элементы идентичны, а элемент 4 – избыточный). Очевидно, отказ системы произойдет, если из общего количества идентичных элементов (основных и резервных) число отказавших превышает число резервных. Поэтому скользящее резервирование считается активным с дробной кратностью. Расчет вероятности безотказной работы систем со скользящим резервированием аналогичен расчету систем типа «*m* из *n*».

Пример. Определить безотказность системы, состоящей из двух последовательно соединенных элементов и с одним резервным. Элементы системы взаимозаменяемы. Вероятность безотказной работы элементов известна: $P(A) = 0{,}9$; $P(B) = 0{,}8$; $P(R) = 0{,}95$. Схема изображена на рис. 5.8.

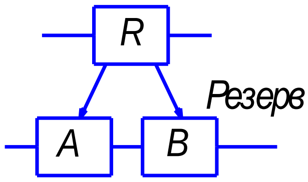


Рис. 5.8. Схема для определения безотказной работы системы с резервным элементом

Решение. Вероятность безотказной работы системы без резерва

$$P = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72 .$$

Для определения вероятности безотказности системы необходимо рассмотреть все возможные состояния системы, определить вероятность каждого состояния системы, затем значения вероятностей, при которых система работоспособна, сложить их, это и будет вероятность безотказной работы системы. Вычисления записываются в табл. 5.1. Таким образом, вероятность безотказной работы системы, состоящей из двух последовательно соединенных элементов и с одним резервным, равна 0,967.

Таблица 5.1

Значения вероятностей состояния системы

№ п/п	Состояние системы	Вероятность	Отметка о работоспособном состоянии
1	$A \cap B \cap R$	0,9 · 0,8 · 0,95 = 0,684	+
2	$\overline{A} \cap B \cap R$	0,1 · 0,8 · 0,95 = 0,076	+
3	$A \cap \overline{B} \cap R$	0,9 · 0,2 · 0,95 = 0,171	+
4	$A \cap B \cap \overline{R}$	0,9 · 0,8 · 0,05 = 0,036	+
5	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap R$	0,1 · 0,2 · 0,95 = 0,019	–
6	$\overline{A} \cap B \cap \overline{R}$	0,1 · 0,8 · 0,05 = 0,004	–
7	$A \cap \overline{B} \cap \overline{R}$	0,9 · 0,2 · 0,05 = 0,009	–
8	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{R}$	0,1 · 0,2 · 0,05 = 0,001	–
		$\sum = 1{,}00$	0,967

Данным методом можно определить вероятность безотказной работы любой технической системы с любым возможным подключением резерва, однако метод требует громоздких вычислений.

Рассмотренный метод оценки безопасности системы можно назвать *индуктивным*. При анализе математической модели вначале вычисляют вероятности состояний системы для всех возможных отказов элементов системы, затем определяют влияние отказа каждого элемента или комбинации элементов на работоспособность системы. При таком подходе случайный пропуск неработоспособных состояний системы маловероятен. Однако этот метод очень трудоемок, ведь приходится рассматривать все возможные варианты.

Контрольные вопросы

1. Какие виды резервирования существуют?
2. В чем отличие нагруженного и ненагруженного резервирования?
3. Что такое кратность резервирования и в чем отличие целой и дробной кратности?
4. Что представляет собой ненагруженное резервирование и как случайная наработка до отказа системы связана со случайными наработками составляющих систему элементов?
5. К какому закону распределения стремится наработка до отказа системы при больших значениях кратности резервирования?
6. Как изменяется вероятность безотказной работы системы с увеличением кратности резервирования.
7. При каких условиях ненагруженное резервирование значительно эффективнее нагруженного?
8. Что представляет собой облегченный резерв и видом какого резервирования он является?
9. Как определить вероятность безотказной работы для системы с облегченным резервом.
10. Что представляет собой скользящее резервирование и видом какого резервирования оно является?