Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Кафедра «Алгебра и геомметрия»

Курс лекций по дисциплине
«Высшая математика»

Составитель:
Кокурина Ю.К.

Владимир, 2016

Введение.

Изучение высшей математики имеет исключительно важное значение для всего процесса обучения в высшем учебном заведении. Значение высшей математики необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин. Математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, производства и экономики. Значение этих методов существенно возрастают в связи с массовой информатизацией и компьютеризацией общества и всех отраслей промышленности.

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и её приложениям; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Пособие содержит краткое изложение разделов математики: «Элементы линейной и векторной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Функции нескольких переменных».

Математика – это наука о пространственных формах и количественных отношениях в самом общем виде, - прошла большой путь развития одновременно с развитием цивилизации и стала неотъемлемой частью культуры человечества и показателем интеллектуального уровня общества. Помимо собственных потребностей развития математика обслуживает потребности многих других наук – естественных, технических, экономических, гуманитарных. С развитием вычислительной техники область использования математики расширяется. В наше время трудно представить себе хорошего специалиста в различных областях, не знающего основных математических методов и математического языка. Поэтому математика включена в учебные планы почти всех специальностей и её изучению отводится немало времени.

Для успешного изучения математики необходимы программа, учебники и учебные пособия, справочная литература, таблицы, инженерный микрокалькулятор и, конечно, волевые усилия. Необходимо посещать все очные занятия в период сессий и стремиться самостоятельно, выполнять контрольные работы, пользуясь руководствами к решению задач, методическими указаниями и конспектами практических занятий.

Предлагаемые «Методические указания» должны помочь студенту-заочнику рационально организовать свой труд по изучению математики и выполнению контрольных работ. Обратите пристальное внимание, на таблицу распределения задач по вариантам и в соответствии с ней выполняйте работы.

Желаем Вам успеха.

Глава 1. Элементы линейной и векторной алгебры.

1.1.Координаты.

Возьмем произвольную прямую, выберем единицу масштаба и положительное направление. Зафиксируем на прямой (принято называть такую прямую осью) произвольную точку **O**. Расстояние от нее до другой точки определится числом единиц длины в соответствующем отрезке.

Знак числа показывает, в каком направлении от точки **O** нужно откладывать отрезок, чтобы попасть в соответствующую точку (точки $\mathbf{A_1}(5)$ и $\mathbf{A_2}(-4)$ на рис. 1.1, например). Число, стоящее в скобках, и есть координата. Этот пример иллюстрирует понятие одномерного пространства **R** и одномерной системы координат.

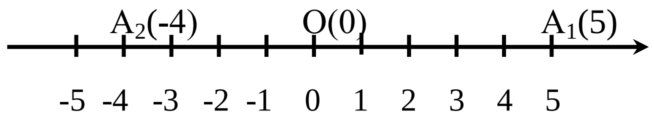


рис.1.1.

А как быть в двумерном случае (в пространстве $\mathbf{R^2}$)? Зададим единицу масштаба и две взаимноперпендикулярные оси. Точка их пересечения **O** называется началом, а оси – осями координат. Горизонтальную ось (ось абсцисс) обозначим **Ox**, а вертикальную (ось ординат) **Oy**. Буквы **x** и **y** ставят у обрыва осей в положительном направлении (рис. 1.2). Так вводится на плоскости система координат, называемая декартовой прямоугольной.

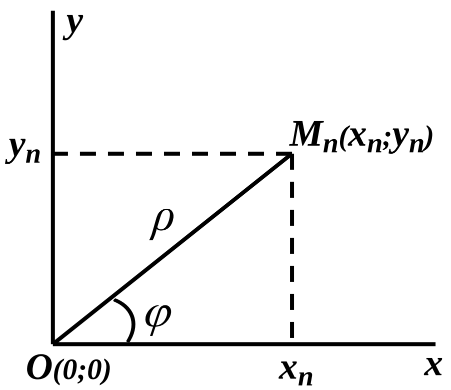


рис.1.2.

Проекции точки $\mathbf{M_n}$ на оси **Ox** и **Oy** (точки $\mathbf{x_n}$ и $\mathbf{y_n}$ соответственно, рис. 1.2) позволяют определить координаты точки $\mathbf{M_n}$ как числа, выражающие длины отрезков $\mathbf{Ox_n}$ и $\mathbf{Oy_n}$ ($\mathbf{x_n}$ – абсцисса, $\mathbf{y_n}$ – ордината точки $\mathbf{M_n}$). Символически положение точки $\mathbf{M_n}$ с известными координатами $\mathbf{x_n}$ и $\mathbf{y_n}$ записывается в виде $\mathbf{M_n(x_n, y_n)}$, произвольной точки – $\mathbf{M(x,y)}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – текущие координаты.

Рассмотрим еще одну систему координат на плоскости – полярную. Она определяется заданием точки **O** (полюса), полярной оси, проходящей через нее, и направлением отсчета угла φ между полярной осью и отрезком, соединяющим полюс **O** с произвольной точкой **M** плоскости.

Полярными координатами точки **M** называют пару чисел ρ и φ, где ρ – длина отрезка **OM**, а φ – упомянутый угол в радианах.(Принятое направление отсчёта - против часовой стрелки от положительного направления оси.) Вернемся к рис. 1.2. Примем за полярную ось **Ox**. Для установления связи между декартовыми и полярными координатами точки $\mathbf{M_n}$ достаточно рассмотреть прямоугольный треугольник $\mathbf{OM_nx_n}$. Легко видеть, что

$$\begin{cases} x_n = \rho\cos\varphi \\ y_n = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad (1.1) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \\ \varphi = arctg\dfrac{y_n}{x_n} \end{cases} \quad (1.2)$$

Для произвольной точки **M** значения $\mathbf{x_n}$ и $\mathbf{y_n}$ заменяются текущими **x** и **y**. Соотношения (1.1) позволяют перейти от полярных координат к декартовым, а соотношения (1.2) – от декартовых к полярным.

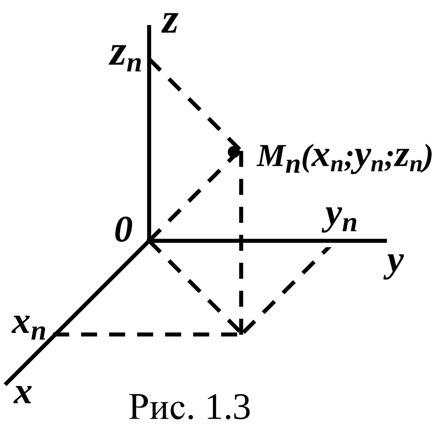


Рис. 1.3

Аналогично тому, как это делалось для плоскости, вводятся декартовы координаты в трехмерном пространстве $\mathbf{R^3}$. Задается единица масштаба и три взаимно перпендикулярные оси **Ox**, **Oy** и **Oz**, пересекающиеся в точке **O**. Положение точки однозначно определяется тремя числами – абсциссой **x**, ординатой **y** и аппликатой **z** (рис. 1.3) (к осям (координатам) **x** и **y** «добавили» ось (координату) **z**).

Контрольные вопросы.

1) Как определяются декартовы координаты точки на плоскости?

2) Чем отличаются друг от друга декартовы координаты двух точек, симметричных относительно а) оси ОХ, б) оси ОУ, в) начала координат?

3) Напишите формулы преобразования координат а) при параллельном переносе системы координат; б) при повороте системы координат.

4) Какой вид примет формула, по которой определяется расстояние между двумя точками, если: а) точки имеют одинаковые ординаты, но различные абсциссы; б) точки имеют одинаковые абсциссы, но различные ординаты; в) одна из точек совпадает с началом координат?
5) Как определяется декартова прямоугольная система координат в пространстве? Как определяются координаты точки в пространстве?

1.2. Определители.

Пусть дана квадратная (число строк равно числу столбцов) таблица (матрица) **A** из четырех элементов (чисел).

Назовем определителем второго порядка некоторое число **Δ**, соответствующее этой таблице и вычисляемое по правилу:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \qquad (1.3)$$

(Из произведения элементов, стоящих по главной диагонали вычитается произведение элементов, стоящих по вспомогательной диагонали).

Аналогично может быть составлен определитель произвольного (<u>**N**-го</u>) порядка, соответствующий квадратной матрице, содержащей <u>**N**</u> строк и <u>**N**</u> столбцов. Сформулируем алгоритм его вычисления на примере определителя третьего порядка (<u>**N**=3</u>).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для нумерации элементов определителя использованы двойные индексы, позволяющие однозначно определить местоположение элемента: первое число индекса – это номер строки, а второе – номер столбца, на перекрестье которых расположен соответствующий элемент.

(Строки и столбцы нумеруются сверху-вниз и справа-налево соответственно).

Пусть дан определитель **N** порядка. Минором $\mathbf{M_{mn}}$ элемента $\mathbf{a_{mn}}$ определителя ($\mathbf{1 \le m \le N}$ – номер строки, а $\mathbf{1 \le n \le N}$ – номер столбца на перекрестьи которых элемент $\mathbf{a_{mn}}$ расположен) назовем определитель **N – 1** порядка, получаемый из исходного вычеркиванием **m** строки и **n** столбца. Алгебраическое дополнение элемента $\mathbf{a_{mn}}$ определим соотношением

$$A_{mn} = (-1)^{m+n} M_{mn} \qquad (1.4)$$

Операция вычисления определителя с помощью вновь введенных величин называется раскрытием определителя по элементам его строки (столбца) и выполняется в соответствии со следующей теоремой: ***Определитель произвольного порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (или столбца) на их алгебраические***

дополнения. Несложно убедиться, что правило вычисления определителя второго порядка есть частный случай предложенного способа.

Определитель третьего порядка, раскрываемый по элементам первой строки, примет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(1.5)

(Это соотношение известно как формула Саррюса.)

Полезно иметь ввиду следующие свойства определителей:

1. Определитель не изменится, если строки заменить столбцами, а столбцы строками.
2. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
3. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.
4. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
5. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца), прибавить соответственные элементы другой строки (столбца) умноженные на одно и то же число.
7. $\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 + b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Контрольные вопросы.

1)Каковы основные свойства определителей?

2)Что называется минором и алгебраическим дополнением?

3)Каковы способы вычисления определителей?

1.3. Решение систем линейных уравнений (метод Крамера).

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

(1.6)

Составим из коэффициентов при неизвестных и свободных членов три определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(1.7)

Решением системы называется совокупность чисел (x, y), которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если не имеет ни одного решения.

Совместная система называется определённой, если она имеет только одно решение, и неопределённой, если она имеет более одного решения.

Легко видеть, что второй и третий определители получаются из первого заменой столбца соответствующих индексу коэффициентов столбцом свободных членов. Правило Крамера решения системы линейных уравнений заключается в использовании соотношений $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ (1.8) Отметим, что использовать их можно при $\Delta \neq$ **0**. Это тот случай, когда система определена и совместна (т.е. имеет единственное решение). Если Δ **= 0**, а хотя бы один из определителей Δ_x**,** Δ_y отличен от нуля $((\Delta_x)^2+(\Delta_y)^2 \neq 0)$, то система несовместна (т.е. не имеет решений), а если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система неопределена и имеет бесконечное множество решений.

Аналогично правило Крамера формулируется и для системы из трех (или **n**) линейных уравнений с тремя (или **n**) неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases} \quad (1.9) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{matrix} \quad (1.8') \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(1.7')

А Δ_x**,** Δ_y**,** Δ_z получаются из Δ заменой столбца соответствующих коэффициентов столбцом свободных членов. Аналогично проводится и исследование системы (возможны те же три случая).

Если свободный член (правая часть) линейного уравнения равен нулю- уравнение называется однородным. Однородной называют и систему таких уравнений (система (1.9) при $d_1=d_2=d_3=0$). При $\Delta \neq 0$ она имеет единственное решение ($x=y=z=0$), называемое тривиальным. Если же $\Delta=0$, то система сводится либо к двум , либо к одному уравнению с тремя неизвестными. В этих случаях однородная система имеет бесконечное множество нетривиальных решений.

Если (1.6) сводится (при $\mathbf{d_1=d_2=d_3=0}$) к двум линейным уравнениям, решения системы можно найти по формулам:

$$x=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}t;\quad y=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}t;\quad z=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}t;\quad (1.10)$$

где t может принимать любые значения.

Контрольные вопросы.

1) Какой вид имеют формулы Крамера и в каком случае они применяются?
2) При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?
3) При каком условии система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?

1.4. Матрицы. Основные свойства и операции.

Матрицей называют прямоугольную таблицу, составленную из каких – либо математических объектов (элементов), в простейшем случае – из чисел. Принятое обозначение:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\qquad Пример: Y=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

В общем случае числа строк **m** и столбцов **n** произвольны и определяют размер матрицы, обозначаемый ($\mathbf{m}\times\mathbf{n}$). Если строка одна, $\mathbf{A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})}$ – матрица-строка; аналогично определяется матрица–столбец (размеры – ($\mathbf{1}\times\mathbf{n}$) и ($\mathbf{m}\times\mathbf{1}$) соответственно).

Если число строк равно числу столбцов – квадратная матрица порядка **n**. Квадратной матрице **A** соответствует определитель, обозначаемый $\mathbf{\Delta_A}$ (или $\mathbf{D_A}$). Если $\mathbf{\Delta_A \neq 0}$, матрица **A** называется невырожденной (неособой), если $\mathbf{\Delta_A = 0}$, то **A** – вырожденная (особая) матрица.

Если в квадратной матрице **A** поменять местами столбцы и строки, то получим новую матрицу, обозначаемую **A*** и называемую траспонированной (сама операция замены называется траспонированием). Квадратная матрица, у которой все элементы (кроме, может быть, стоящих по главной диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол) равны нулю, называется диагональной. Такая матрица, если все диагональные элементы равны единице, называется единичной и обозначается буквой **E.** Нулевой называют матрицу, все элементы которой равны нулю.

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad 0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Квадратную матрицу, в которой $\mathbf{a_{ij} = a_{ji}}$ называют <u>симметрической</u> (такая матрица совпадает со своей транспонированной, т.е. $\mathbf{A = A^*}$).

Две матрицы **A** и **B** считаются равными **(A = B)** тогда и только тогда, когда равны их соответственные элементы, т.е. $\mathbf{a_{mn} = b_{mn}}$.

Матрицы <u>одинакового размера</u> можно складывать, получая новую матрицу того же размера по формуле:

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}&a_{33}+b_{33}\end{pmatrix}\quad(1.11)$$

Произведением числа α на матрицу **A** называют матрицу определяемую равенством:

$$A=\alpha\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_{11}&\alpha a_{12}&\alpha a_{13}\\\alpha a_{21}&\alpha a_{22}&\alpha a_{23}\\\alpha a_{31}&\alpha a_{32}&\alpha a_{33}\end{pmatrix}\quad(1.12)$$

<u>Умножение матриц</u> возможно в том случае, если число столбцов <u>умножаемой</u> матрицы равно числу строк матрицы множителя. Размер матрицы-произведения определяется соотношением $(\mathbf{m}\times\mathbf{n})\times(\mathbf{n}\times\mathbf{k})=(\mathbf{m}\times\mathbf{k})$. Произведение матриц **A** и **B**, обозначаемое **AB** находят по правилу:

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{j1}&\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{j2}&\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{j3}\\\sum_{j=1}^{3}a_{2j}b_{j1}&\sum_{j=1}^{3}a_{2j}b_{j2}&\sum_{j=1}^{3}a_{2j}b_{j3}\\\sum_{j=1}^{3}a_{3j}b_{j1}&\sum_{j=1}^{3}a_{3j}b_{j2}&\sum_{j=1}^{3}a_{3j}b_{j3}\end{pmatrix}\quad(1.13)$$

т.е. элемент матрицы – произведения, стоящий в **i** – й строке и **к** – ом столбце, равен сумме произведений соответственных элементов **i** – й строки матрицы **A** и **к** – ого столбца матрицы **B**. Пример:

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0+3\cdot7&2\cdot1+3\cdot8&2\cdot6+3\cdot9\\4\cdot0+5\cdot7&4\cdot1+5\cdot8&4\cdot6+5\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&26&39\\35&44&69\end{pmatrix}$$

Отметим, что переместительный закон для произведения матриц в <u>общем случае</u> не выполняется: $\mathbf{AB \neq BA}$.

Аналогично понятию обратного числа (произведение числа на число обратное равно единице: $\mathbf{a \cdot a^{-1} = 1}$) вводится понятие обратной матрицы $\mathbf{A^{-1}}$.

$\mathbf{A \cdot A^{-1} = E}$, где **E** – единичная матрица.

Обратную матрицу имеет всякая невырожденная квадратная матрица, причем:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11}/\Delta A & A_{21}/\Delta A & A_{31}/\Delta A \\ A_{12}/\Delta A & A_{22}/\Delta A & A_{32}/\Delta A \\ A_{13}/\Delta A & A_{23}/\Delta A & A_{33}/\Delta A \end{vmatrix} \qquad (1.14)$$

где $\mathbf{A_{mn}}$ – алгебраическое дополнение элемента матрицы $\mathbf{a_{mn}}$ (см. (1.4.))

Альтернативный способ вычисления $\mathbf{A^{-1}}$ приведён в разделе (1.4.3)

Контрольные вопросы.

1)Что называется матрицей? Приведите примеры.

2)Какие действия установлены над матрицами? Как они определяются и каковы их основные свойства?

3)Какая матрица называется обратной для данной матрицы А? Для любой ли матрицы существует обратная? Если нет, то какому условию должна удовлетворять данная матрица, чтобы для неё существовала обратная матрица? Как найти обратную матрицу?

1.4.2. Решение уравнений.

Определение операции умножения матриц позволяет предложить матричный способ решения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Систему уравнений можно представить в матричной форме **AX = B**, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Если $\mathbf{\Delta A \neq 0}$, то решение системы запишется в виде $\mathbf{X = A^{-1}B}$ т.е. для нахождения матрицы – столбца неизвестных надо умножить обратную матрицу системы на матрицу-столбец свободных членов.

Контрольные вопросы.

1)Что называется матрицей системы линейных уравнений и расширенной матрицей системы линейных уравнений?

2)Опишите матричный способ решения систем линейных уравнений

1.4.3. Ранг матрицы.

Пусть дана прямоугольная матрица **A**, содержащая **m** строк и **n** столбцов. Выделим в этой матрице произвольным образом **к** строк и **к** столбцов **(к ≤ m, к ≤ n)**. Определитель **к** – ого порядка, составленный из элементов матрицы **A**, расположенных на пересечении выделенных столбцов и строк, называется минором **к** – ого порядка матрицы **А**. Очевидно, что можно составить миноры любого порядка, не превышающего **m** и **n**, причем (в общем случае) по крайней мере некоторые из них не будут равны нулю. Рангом матрицы **А** называют наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. (Если все элементы матрицы равны нулю, то и ранг ее принимают равным нулю). Отличные от нуля миноры, порядок которых равен рангу матрицы, называют базисными минорами. Ранг матрицы обозначают символом **r(A)**. Если **r(A) = r(B)**, то матрицы **А** и **В** называют эквивалентными **(**Символическая запись: **А ~ В)**. Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга. Это можно использовать при вычислении ранга матрицы. Под элементарными преобразованиями понимают:

1. Замену строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками;
2. Перестановку строк;
3. Вычеркивание строк, все элементы которых равны нулю;
4. Умножение какой – либо строки на отличное от нуля число;
5. Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

Пример: Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}$

Сложим соответствующие элементы 1 и 3 строк, а затем разделим на 4 элементы «обновленной» первой строки. Из элементов 1 строки вычтем соответствующие элементы 2 строки, после чего вычеркнем 1 строку.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}$$

Ранг последней матрицы равен 2 (действительно, $\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\neq 0$).

Следовательно и ранг исходной матрицы **r(A) = 2**.

Можно показать, что ранг матрицы равен числу не обнуляемых элементарными преобразованиями строк.

Примечание:

Элементарные преобразования матриц позволяют упростить вычисление обратной матрицы. Припишем к матрице **А** единичную матрицу **Е** той же размерности, отделённую вертикальной чертой. Умножив обе части сдвоенной матрицы **А|Е** на $\mathbf{A^{-1}}$ получим $AA^{-1}\big|EA^{-1}=E\big|A^{-1}$. Таким образом, если элементарными преобразованиями сдвоенной матрицы левую часть её привести к виду **E**, то в правой части окажется искомая обратная матрица $\mathbf{A^{-1}}$.

Пример: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; Найти $\mathbf{A^{-1}}$.

Составим сдвоенную матрицу $A|E$ и преобразуем её.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \overset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right); \text{ Т.о. } \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

В (1) преобразовании к 1 и 2 строкам прибавляем 3; во (2) прибавляем к 3 строке 1, а из 1 вычитаем 2, умноженную на 4; в (3) вычитаем из 3 строки 2, умноженную на 6; в (4) прибавляем к 2 строке 3, а 3 умножаем на -1.
Проверка $A \cdot A^{-1} = E$ показывает, что $\mathbf{A^{-1}}$ найдена правильно.

Контрольные вопросы.
Что называется рангом матрицы?

1.4.4. Исследование системы m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Системе уравнений соответствуют матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots a_{3n} & b_3 \end{array}\right)$$

называемые <u>матрицей</u> и <u>расширенной матрицей</u> системы. Теорема Кронекера – Капелли гласит: ***Для совместности системы уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*** $\mathbf{r(A) = r(A_1) = r}$

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных $\mathbf{(r = n)}$ – система определенная. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система – неопределенная (имеет бесконечное множество решений).

Контрольные вопросы.

1)Каково условие совместности систем линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли)?

2)Каково условие определённости и неопределённости совместной системы?

1.4.5. Решение системы уравнений методом Гаусса.

Использование определителей при большом числе уравнений (неизвестных) приводит к большим по объему вычислениям. Существенные преимущества дает метод Гаусса, заключающийся в последовательном исключении неизвестных, позволяющем привести систему к так называемому ступенчатому виду.

Процесс нахождения коэффициентов ступенчатой (треугольной) системы называется обычно прямым ходом, а процесс нахождения значений неизвестных – обратным ходом.

Можно (и целесообразно) приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу системы с контрольным столбцом.

Контрольный столбец, каждый элемент которого равен сумме элементов соответствующей строки, вводят для проверки правильности преобразования.

(При линейных преобразованиях матрицы соответствующие операции выполняются над всеми элементами ее. При этом каждый элемент контрольного столбца остается равным сумме всех других элементов соответствующей строки преобразованной матрицы). Напомним, что переход к эквивалентной матрице обозначают: **~** .

$$\text{Пример: } \begin{cases} x_1 + x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - \qquad x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 & -16 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 9/5 & 36/5 & 9 \end{array}\right) \overset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

(В первом преобразовании умножаем первую строку на –2 и складываем со второй, умножаем первую на –1 и складываем с третьей, умножаем первую на –3 и складываем с четвертой. Во втором – умножаем на –3 третью строку и прибавляем к ней вторую, умножаем на – 3/4 четвертую строку и прибавляем к ней вторую. В третьем преобразовании умножаем третью строку на – 2/5 и прибавляем результат к четвертой. В четвертом – умножаем на 5/9 четвертую строку).

Полученная матрица позволяет записать преобразованную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7 \\ 5x_3 - 7x_4 = -13 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

и последовательно определить неизвестные: $\mathbf{x_4 = 4}$; $\mathbf{x_3 = 3}$; $\mathbf{x_2 = 2}$; $\mathbf{x_1 = 1}$.

Аналогично преобразования выполняются при любой размерности системы. Если система определена, то ступенчатая система оказывается треугольной (последнее уравнение содержит одно неизвестное). В неопределенной системе (число неизвестных больше числа уравнений) последнее уравнение содержит больше одной неизвестной.

Если система несовместна (не имеет решений), то после приведения к ступенчатому виду в ней окажется хотя бы одно уравнение вида **0 = 1**.

Метод Гаусса удобен и при решении однородных систем уравнений.

Рассмотрим систему $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$ Составим расширенную матрицу системы и линейно преобразуем её:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -5 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ 8 & -6 & 3 & -7 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 0 & 8 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -5 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ 8 & -6 & 3 & -7 & 0 & -2 \\ 8 & -6 & 3 & -7 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -5 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ 8 & -6 & 3 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 3 & -5 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ 8 & -6 & 3 & -7 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

В (1) преобразовании умножаем первую строку на 2 и складываем с третьей, во (2) преобразовании вычитаем из третьей строки вторую, в (3) преобразовании отбрасываем третью (состоящую из нулей) строку.

Легко видеть, что ранг матрицы системы (см. раздел 1.4.3) $\mathbf{r = 2}$.

Выделив число неизвестных, равное рангу матрицы, назовём их <u>базисными неизвестными</u>, а остальные - <u>свободными неизвестными</u> системы. Через последние выражаются базисные неизвестные.

В нашем случае преобразованная система запишется в виде: $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$ Приняв за базисные неизвестные x_1 и x_2

перенесём их направо: $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = x_3 + 2x_4 \\ 8x_1 - 6x_2 = 7x_4 - 3x_3 \end{cases}$. Обозначив $2x_4 + x_3 = \alpha$ и $7x_4 - 3x_3 = \beta$,

получим $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & \alpha \\ 8 & -6 & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & \alpha \\ 0 & 22 & 3\beta - 8\alpha \end{array}\right)$ откуда $x_2 = \frac{3\beta - 8\alpha}{22} = \frac{5x_4 - 17x_3}{22}$;

$$x_1 = \frac{5\beta - 6\alpha}{22} = \frac{23x_4 - 21x_3}{22}.$$

Примечание:

Методы Гаусса и Крамера являются прямыми методами, приводящими, если не совершать вычислительной погрешности, к точному решению. Однако:

1. Метод Гаусса требует существенно меньшего ($\approx \frac{n}{2}$ раз; n – порядок системы) объёма арифметических операций по сравнению с методом Крамера.
2. Метод Гаусса, в отличие от метода Крамера, позволяет оперировать <u>с частью</u> уравнений системы и алгоритм преобразований «по Гауссу» много проще алгоритма по Крамеру. Недостаток метода Гаусса- в накоплении погрешностей вычисления от шага к шагу, из-за чего метод Гаусса практически не применяется для систем с более чем 1000 неизвестных.

Контрольные вопросы.

1)В чём состоит сущность метода Гаусса для исследования и решения системы линейных уравнений? Опишите схему его применения.

2)Что называется рангом системы линейных уравнений и как, пользуясь методом Гаусса можно найти ранг системы?

3)Что называется прямым и обратным ходом метода Гаусса?

1.5. Векторы. Основные операции над векторами.

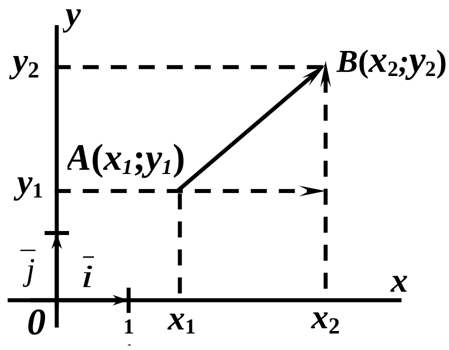


Рис. 1.4

Зададим на плоскости **xOy** две произвольные точки **A(x_1,y_1)** и **B(x_2,y_2)** рис.1.4). Длина отрезка **AB** легко определяется из прямоугольного треугольника **ABB\`** и составит:

$$AB = \sqrt{(AB`)^2 + (B`B)^2} = \sqrt{(AB)_x^2 + (AB)_y^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$, где **$(AB)_x$** и **$(AB)_y$** – проекции отрезка **AB** на соответствующие оси. Эта величина определена своим численным значением и называется <u>скалярной</u>.

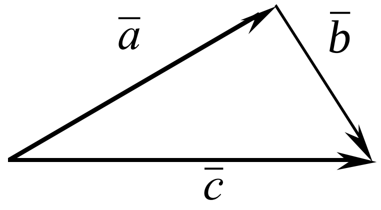


Рис. 1.5

<u>Геометрическим вектором</u> называют направленный отрезок, обозначают его $\overline{AB}$ точки **A** и **B** – начало и конец вектора) и характеризуют двумя параметрами: <u>модулем</u> (длиной) (обозначается $|\overline{AB}|$ = **AB**) и <u>направлением</u>. Вектор, который без изменения длины и направления можно перенести в любую точку пространства, называют <u>свободным</u>. (В предлагаемом курсе рассматриваются эти векторы). Вектор удобнее обозначать $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и т.д. Векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равны ($\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$), если совпадают их длины | $\bar{\mathbf{a}}$ |= | $\bar{\mathbf{b}}$| или **a** = **b**) и направления. Если модули равны, а направления противоположны, векторы отличаются знаком т.е. $\overline{AB} = -\overline{BA}$. <u>Суммой</u> векторов $\bar{\mathbf{a}}$ **и** $\bar{\mathbf{b}}$ называют вектор $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$, определяемый (рис.1.5) по правилу треугольника: начало $\bar{\mathbf{b}}$ совмещают с концом $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ соединяет начало $\bar{\mathbf{a}}$ с концом $\bar{\mathbf{b}}$. ($\overline{AB} = \overline{AB'} + \overline{B'B}$ на рис 1.5). <u>Произведением</u> вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на скаляр **λ (λ∈R)** называют вектор **λ** $\bar{\mathbf{a}}$, длина которого равна |λ $\bar{\mathbf{a}}$| = | $\bar{\mathbf{a}}$| |λ|. Если положить **λ = 1/a** получим $\bar{\mathbf{a}}$ **/ a =** $\bar{\mathbf{a}}_0$ – вектор единичной длины, имеющий тоже направление, что и $\bar{\mathbf{a}}$ (<u>единичный</u> вектор). При **λ = 0** получим $\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{0} = \bar{\mathbf{0}}$ (<u>нуль</u> вектор).

Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр называют <u>линейными</u>.

Сумму вида $\bar{d} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c}$, где λ, μ, ν - скаляры, называют <u>линейной комбинацией</u> векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. (Или говорят, что вектор $\bar{d}$ <u>линейно выражается</u> через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.) Векторы называют <u>линейно независимыми</u>, если ни один из них не выражается линейно через другие (не может быть представлен их линейной комбинацией). Формальное определение таково:

векторы $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ называют линейно – зависимыми, если $\lambda_1\ \bar{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2\ \bar{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \lambda_n\ \bar{\mathbf{a}}_n = \mathbf{0}$ (1.15),
где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – числа, хотя бы одно из которых отлично от нуля. В этом случае один из векторов может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.
Если соотношение (1.15) выполняется только в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$ линейно независимы.

Вернемся к рис.1.4. Зададим направления осей **Ox** и **Oy** единичными векторами $\bar{\mathbf{i}}$ и $\bar{\mathbf{j}}$ соответственно. Очевидно, что $\overline{AB} = \overline{AB'} + \overline{B'B}$. Но очевидно также, что $\overline{AB} = \bar{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{AB`} = \bar{\mathbf{i}} \cdot (\mathbf{AB})_x$ и $\overline{B'B} = \bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{B`B} = \bar{\mathbf{j}} \cdot (\mathbf{AB})_y$. Таким образом вектор $\bar{\mathbf{a}}$ в двумерных декартовых координатах можно представить в виде: $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_x\ \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{a}_y\ \bar{\mathbf{j}}$ ($a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$) а в трехмерных $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_x\ \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{a}_y\ \bar{\mathbf{j}} + \mathbf{a}_z\ \bar{\mathbf{к}}$, где $\mathbf{a_x, a_y, a_z}$ – проекции вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на соответствующие оси, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, а $\mathbf{i}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{к}}$ – единичные векторы этих осей. Такое представление вектора называется разложением его по декартову ортонормированному базису. (Системе линейно независимых единичных векторов $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \mathbf{к}$). (Базисом на плоскости называют любую упорядоченную пару $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ линейно независимых векторов. Вектор $\bar{\mathbf{a}}$ на плоскости можно единственным образом разложить по базису, т.е. представить в виде $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_1\ \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{a}_2\ \bar{\mathbf{e}}_2$ $(\mathbf{a_1, a_2} \in \mathbf{R})$, где $\mathbf{a_1}$ **и** $\mathbf{a_2}$ – координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в выбранном базисе (проекции вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на соответствующие оси, направления которых заданы векторами $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$). Вектор в разложении по базису запишется в виде $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a_1, a_2})$.
Аналогично определяется базис в трехмерном пространстве, где любой вектор можно представить в виде $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_1\ \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{a}_2\ \bar{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{a}_3\ \bar{\mathbf{e}}_3$ или $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a_1, a_2, a_3})$, где $\mathbf{a_1, a_2, a_3}$ координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в базисе $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$.
Ортонормированным называется базис взаимноперпендикулярных векторов единичной длины (ортов).
Направление $\bar{\mathbf{a}}$ определяется углами α, β, γ образованными с осями **Ox**, **Oy**, **Oz** соответственно. Направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{a}}$ определяются выражениями:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} \quad (1.16)$$

и связаны соотношением: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (1.17).
Линейные операции над векторами, данными в разложении по декартову базису записывают так: $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = (\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x)\ \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y)\ \bar{\mathbf{j}} + (\mathbf{a}_z + \mathbf{b}_z)\ \bar{\mathbf{к}}$ (1.18) и $\bar{\mathbf{a}}\,\lambda = \mathbf{a}_x\,\lambda\mathbf{i} + \mathbf{a}_y\,\lambda\mathbf{j} + \mathbf{a}_z\,\lambda\mathbf{к}$ (1.19)

Произвольной точке **M (x, y, z)** можно поставить в соответствие вектор $\bar{\mathbf{r}}$, соединяющий начало координат с точкой **M**, называемый <u>радиусом – вектором</u> точки **M** и обозначаемый $\bar{\mathbf{r}}$ **(M)**. Очевидно, что $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{i}}\,\mathbf{x} + \bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{y} + \bar{\mathbf{k}}\mathbf{z}$, где **x, y, z** координаты этой точки. Вектор $\overline{AB}$ где **A** $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})$ и **B** $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}, \mathbf{z_2})$ начало и конец вектора можно представить в виде $\overline{AB} = \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1$.

Контрольные вопросы.

1) Что называется вектором? Что называется модулем вектора?
2) Как определяется равенство векторов?
3) Как определяются операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр (линейные операции над векторами)? Каковы их свойства?
4) Как определяются координаты вектора в пространстве?
5) Как выражаются модель вектора и его направляющие косинусы через координаты вектора?
6) Как выражаются координаты вектора через координаты точек, являющихся началом и концом этого вектора?
7) Напишите формулу для вычисления расстояния между двумя точками в пространстве.
8) Как производится сложение векторов и умножение вектора на скаляр (линейные операции над векторами), если векторы заданы своими координатами?

1.5.2. Скалярное произведение.

Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла **φ** между ними:

$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{ab\cos\varphi}$ (1.20).

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2$ ($\bar{a}^2 = a^2$)
2) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ если $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = 0$, $\bar{a} = \bar{b} = 0$ или $\bar{a} \perp \bar{b}$ ($\varphi = \pi / 2$)
3) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (переместительный закон)
4) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}$ (распределительный закон)
5) $(\lambda\,\bar{a})\,\bar{b} = \bar{a}(\lambda\,\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\,\bar{b})$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).

Из 1) следует, что $\bar{\mathbf{i}}^2 = \bar{\mathbf{j}}^2 = \bar{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{1}$, а из 2) что $\bar{\mathbf{i}}\,\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{i}}\,\bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{j}}\,\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$ (единичные вектора <u>ортогональны</u> (взаимно-перпендикулярны)).

Если вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ заданы своими координатами (проекциями на оси **Ox, Oy, Oz**), то $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$ (1.21).

Действительно, $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{b}} = (\bar{\mathbf{i}}\,\mathbf{a_x} + \bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{a_y} + \bar{\mathbf{k}}\,\mathbf{a_z})(\bar{\mathbf{i}}\,\mathbf{b_x} + \bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{b_y} + \bar{\mathbf{k}}\,\mathbf{b_z}) = \bar{\mathbf{i}}^2\,\mathbf{a_x b_x} + \bar{\mathbf{i}}\,\bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{a_y b_x} + \bar{\mathbf{k}}\,\bar{\mathbf{i}}\,\mathbf{a_z b_x} + \bar{\mathbf{i}}\,\bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{a_x b_y} + \bar{\mathbf{j}}^2\,\mathbf{a_y b_y} + \bar{\mathbf{k}}\,\bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{a_z b_y} + \bar{\mathbf{i}}\,\bar{\mathbf{k}}\,\mathbf{a_x b_z} + \bar{\mathbf{j}}\,\bar{\mathbf{k}}\,\mathbf{a_y b_z} + \bar{\mathbf{k}}^2\,\mathbf{a_z b_z}$ = [мы уже знаем, что квадраты ортов равны **1**, а попарные произведения – **0**] = $\mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$.

Контрольные вопросы.

1)Что называется скалярным произведением векторов? Каковы его свойства и выражение через координаты векторов-сомножителей?

2)По какой формуле можно вычислить угол между двумя векторами?

1.5.3. Векторное произведение.

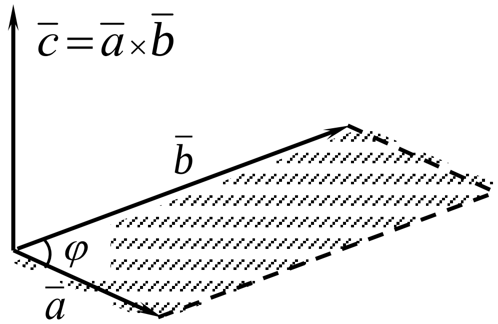


Рис. 1.6

Векторным произведением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на вектор $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$, определяемый следующим образом (рис 1.6):

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = \mathbf{c} = \mathbf{ab} \sin \varphi$ (площади параллелограмма, построенного на $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$; φ – угол между векторами)
2) $\bar{\mathbf{c}}$ перпендикулярен $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$
3) векторы $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ после приведения к общему началу образуют (так же как $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{к}}$) правую тройку векторов.

(Это значит, что если смотреть с конца вектора $\bar{\mathbf{c}}$ на векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, то вектор $\bar{\mathbf{a}}$ для совмещения с вектором $\bar{\mathbf{b}}$ поворачивается против часовой стрелки через наименьший угол.)

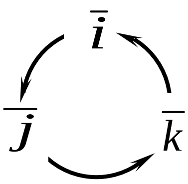
Свойства векторного произведения.

1) $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = -\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}}$ (векторное произведение не обладает переместительным свойством).
2) $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ если $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ или $\bar{\mathbf{a}} \parallel \bar{\mathbf{b}}$ $(\varphi = 0)$
3) $(\mathbf{m}\,\bar{\mathbf{a}}) \times \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \times (\mathbf{m}\,\bar{\mathbf{b}}) = \mathbf{m}\,\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю)
4) $\bar{\mathbf{a}} \times (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}}) = \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{c}}$ (распределительное свойство)

Легко убедиться (см. свойства 1 и 2), что $\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{к}} \times \bar{\mathbf{к}} = \mathbf{0}$;

$\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{j}} = -\bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{к}}$; $\bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{к}} = -\bar{\mathbf{к}} \times \bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{i}}$; $\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{к}} = -\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{к}} = \bar{\mathbf{j}}$

Эти соотношения наглядно иллюстрируются следующим рисунком –



если два вектора перемножаются «против часовой стрелки» (положительное направление обхода окружности) – третий вектор получается «с плюсом»: $\bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{к}} = \bar{\mathbf{i}}$; если “по часовой” – с минусом: $\bar{\mathbf{к}} \times \bar{\mathbf{j}} = -\bar{\mathbf{i}}$.

Найдем векторное произведение, если вектора заданы своими координатами. $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = (\bar{\mathbf{i}}\mathbf{a}_x + \bar{\mathbf{j}}\mathbf{a}_y + \bar{\mathbf{к}}\mathbf{a}_z)(\bar{\mathbf{i}}\mathbf{b}_x + \bar{\mathbf{j}}\mathbf{b}_y + \bar{\mathbf{к}}\mathbf{b}_z) = \bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{i}}\mathbf{a}_x\mathbf{b}_x$

$+ \ + \mathbf{\bar{j}} \times \mathbf{\bar{i}} a_y b_x + \mathbf{\bar{к}} \times \mathbf{\bar{j}} a_z b_x + \mathbf{\bar{i}} \times \mathbf{\bar{j}} a_x b_y + \mathbf{\bar{j}} \times \mathbf{\bar{j}} a_y b_y + \mathbf{\bar{к}} \times \mathbf{\bar{j}} a_z b_y + \mathbf{\bar{j}} \times \mathbf{\bar{к}} a_x b_z + \ + \mathbf{\bar{j}} \times \mathbf{\bar{к}} a_y b_z + \mathbf{\bar{к}} \times \mathbf{\bar{к}} a_z b_z = \mathbf{\bar{i}}(a_y b_z - a_z b_y) - \mathbf{\bar{j}}(a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{\bar{к}}(a_x b_y - a_y b_x).$

Сравнив полученное выражение с (1.6), легко убедиться в том, что векторное произведение векторов $\mathbf{\bar{a}}$ и $\mathbf{\bar{b}}$, заданных в разложении по декартову базису, удобнее всего вычислять по формуле

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{к} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

Контрольные вопросы.

1)Что называется векторным произведением векторов? Каковы его свойства и выражение через координаты векторой-сомножителей?

2)Каковы условия коллинеарности и перпендикулярности двух векторов и как они выражаются через координаты векторов?

1.5.4. Смешанное (векторно – скалярное) произведение векторов.

Смешанным произведением векторов $\mathbf{\bar{a}}, \mathbf{\bar{b}}, \mathbf{\bar{c}}$ называют скалярное произведение вектора $\mathbf{\bar{a}} \times \mathbf{\bar{b}}$ на вектор $\mathbf{\bar{c}}$, т.е. $\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{c}} = (\mathbf{\bar{a}} \times \mathbf{\bar{b}})\,\mathbf{\bar{c}}$ (1.23)

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение равно нулю, если:
   а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;
   б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;
   в) перемножаемые векторы компланарны.
2) смешанное произведение не изменится, если знаки векторного и скалярного произведения поменять местами, т.е $(\mathbf{\bar{a}} \times \mathbf{\bar{b}})\,\mathbf{\bar{c}} = \mathbf{\bar{a}}\,(\mathbf{\bar{b}} \times \mathbf{\bar{c}})$.
3) смешанное произведение не меняется, если перемножаемые векторы переставлять в круговом порядке: $\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{c}} = \mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{c}}\,\mathbf{\bar{a}} = \mathbf{\bar{c}}\,\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{b}}$
4) при перестановке двух любых векторов смешанное произведение меняет знак: $\mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{c}} = -\,\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{c}}$; $\mathbf{\bar{c}}\,\mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{a}} = -\,\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{c}}$; $\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{c}}\,\mathbf{\bar{b}} = -\,\mathbf{\bar{a}}\,\mathbf{\bar{b}}\,\mathbf{\bar{c}}$

Если векторы заданы своими координатами, то:
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(1.24)

Условие компланарности векторов принимает вид: $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$ (1.25)

(Компланарные вектора параллельны одной плоскости; векторное произведение двух векторов даст вектор, перпендикулярный этой плоскости и, соответственно, третьему вектору и их скалярное произведение будет равно нулю).

Объемы призмы $\mathbf{V_1}$ и пирамиды $\mathbf{V_2}$ построенных на $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ определятся так: $\mathbf{V_1} = |\ \bar{\mathbf{a}}\ \bar{\mathbf{b}}\ \bar{\mathbf{c}}\ |$ и $\mathbf{V_2} = \mathbf{1/6}\ |\ \bar{\mathbf{a}}\ \bar{\mathbf{b}}\ \bar{\mathbf{c}}\ |$ (1.26).

Контрольные вопросы.

1)Что называется смешанным произведением векторов? Каковы его свойства и выражение через координаты векторов-сомножителей?

2)Каковы условия компланарности трёх векторов и как они выражаются через координаты векторов?

1.5.5. Собственные значения и собственные векторы матрицы.

<u>Характеристическим</u> уравнением матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называют уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.27)$$

Корни λ_1, λ_2, λ_3 этого уравнения называют <u>характеристическими числами (собственными значениями)</u> матрицы.

Система уравнений $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$, в которой $\boldsymbol{\lambda}$ имеет одно из значений λ_1, λ_2, λ_3 и определитель которой в силу этого равен нулю, определяет тройку чисел **($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$)**, <u>соответствующую данному характеристическому числу.</u> Эта совокупность чисел с точностью до постоянного множителя определяет ненулевой вектор $\bar{r}(x_1, x_2, x_3)$, называемый <u>собственным вектором</u> матрицы. Таким образом, квадратная матрица 3-его порядка имеет три собственных значения и три собственных вектора. (В общем случае среди собственных значений могут быть и кратные (одинаковые), в том числе и комплексные и мнимые. Собственные значения симметрической матрицы- только действительные числа.) Векторы эти могут быть записаны в матричной форме, в виде вектора-столбца, где **t** – произвольное постоянное число. $\bar{r}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} t$ (Зачастую его удобнее использовать, чем уже привычный вектор-строку).

(1.28)

Пример: Найти собственные значения и собственные векторы матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение матрицы примет вид: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -8 \\ -8 & -6-\lambda & -2 \\ 4 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$ Раскроем определитель по элементам первой строки $(2-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}-8\begin{vmatrix} -8 & -6-\lambda \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=0$

$$(2-\lambda)(6-\lambda+6\lambda+\lambda^2+6)+5(-8+8\lambda+8)-8(-24+24+4\lambda)=0$$

$$(2-\lambda)(5\lambda+\lambda^2)+40\lambda-32\lambda=0 \Rightarrow 10\lambda-5\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3+8\lambda=0$$

$$\lambda^3+3\lambda^2-18\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+3\lambda-18)=0$$

$$\lambda_1=0;\quad \lambda_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{-3\pm 9}{2}=\left|\begin{matrix} 3 \\ -6 \end{matrix}\right.$$

Теперь можно найти собственные векторы матрицы

I. $\lambda=0;\ \begin{cases} 2x_1-5x_2-8x_3=0 \\ -8x_1-6x_2-2x_3=0; \\ 4x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases}\ \begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\overset{(1)}{\sim}\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\overset{(2)}{\sim}\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Используя (1.10) найдём $\bar{r}=\begin{pmatrix} 19 \\ -34 \\ 26 \end{pmatrix} t$

II. $\lambda=3;\ \begin{cases} x_1+5x_2+8x_3=0 \\ 8x_1+9x_2+2x_3=0; \\ 4x_1+3x_2-2x_3=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 8 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\overset{(1)}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}\overset{(2)}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\overset{(3)}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\overset{(4)}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) - разделим 3-ий столбец на 2, (2) - заменим строки столбцами, (3) - вычтем из 2-ой строки 1-ую, (4 - вычтем из 3-ей строки 2-ую, используя

(1.10) найдём: . $\bar{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 31 \end{pmatrix} t$

III. Аналогично вычисляется собственный вектор и для $\lambda_3 = -6$.

Контрольные вопросы.
1)Что называют характеристическим уравнением матрицы?
2)Что такое характеристические числа (собственные значения) матрицы?
3)Что такое собственный вектор матрицы?

1.5.6. Линейные (векторные) пространства.

Рассмотрим множество **R** элементов **x, y, z,…** для любых $x \in R$ и $y \in R$ которого определена сумма **x+y**$\in R$ и для любого действительного числа λ определено произведение $\lambda x \in R$.

Если эти операции удовлетворяют условиям:

1. x+y = y+x ;
2. x+(y+z) = x+(y+z);
3. Существует такой элемент $0 \in R$, (нуль- элемент) что x+0 = x для любого $x \in R$;
4. Для каждого $x \in R$ существует $y \in R$ такой, что x+y = 0 (y = -x, т.е. x+(-x) =0);
5. $1 \cdot x = x$;
6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

то множество R называют линейным (или векторным) пространством, а его элементы **x, y, z,…**- векторами.

Очевидно, что множество геометрических векторов, рассмотренное ранее, является линейным пространством, а предложенное определение расширяет понятие вектора.

Линейная независимость векторов определяется через соотношение (1.15), рассмотренное ранее. Максимально возможное число **n** линейно независимых векторов называют размерностью этого пространства (обозначение: $d(R) = n$) - его называют **n**-мерным и обозначают $\mathbf{R^n}$ (рассматриваем конечномерные пространства). Любые **n** линейно независимых векторов в пространстве $\mathbf{R^n}$ образуют базис в этом пространстве. По векторам базиса можно единственным образом разложить любой вектор пространства.

Контрольные вопросы.

1) Дайте определение линейного пространства и приведите примеры линейных пространств. Что называется вектором7

2) Дайте определение линейной зависимости и независимости системы векторов.

3) Что называется размерностью линейного пространства? Приведите примеры.

4) Что называется базисом линейного пространства и координатами вектора в данном базисе? Приведите примеры.

1.5.7. Линейные преобразования.

Говорят, что в линейном пространстве **R** задано преобразование **A,** если каждому вектору $x \in R$ по некоторому правилу ставится в соответствие вектор $\mathbf{A}x \in R$. Преобразование называют линейным, если для любых **x** и **y** и любого действительного числа λ выполняются равенства **A(x+y)=Ax+Ay** и **A(λx)=λAx** (его можно рассматривать как линейное преобразование координат точки или вектора- переход к другим координатам). Пусть в пространстве $\mathbf{R^3}$ с базисом $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ задано линейное преобразование **A**. Каждый из векторов $A\overline{e_i}$ можно единственным образом разложить по векторам базиса

$$\begin{aligned} A\overline{e_1} &= a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + a_{31}\overline{e_3} \\ A\overline{e_2} &= a_{21}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + a_{32}\overline{e_3}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \\ A\overline{e_3} &= a_{31}\overline{e_1} + a_{32}\overline{e_2} + a_{33}\overline{e_3} \end{aligned}$$

матрица линейного преобразования **A** в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$. (аналогично - в пространстве R^n при $n > 3$).

Действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами. Например, если вектор $\overline{x}$ переводится в вектор $\overline{y}$ преобразованием **A**, а вектор $\overline{y}$ переводится в вектор $\overline{z}$ преобразованием **B**, это равносильно преобразованию **C**, переводящему вектор $\overline{x}$ в вектор $\overline{z}$ (его называют произведением составляющих преобразований).

Матрица этого линейного преобразования **C = BA.**

Пример: Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Искомое преобразование **C** определится произведением **A** и **B**

$$C = BA = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & 14 & 23 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{cases} z_1 = 15x_1 \quad\quad\quad + \ 7x_3 \\ z_2 = \ \ 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}; \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вид матрицы линейного преобразования определяется выбором базиса. Если за базис принять совокупность <u>собственных векторов</u> (см. 1.5.5), то матрица линейного преобразования принимает диагональный вид, причём на главной диагонали стоят собственные значения. Например, в $\mathbf{R}^2$ это матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, линейное преобразование: $\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$.

Число собственных векторов может быть меньше размерности пространства. В этом случае простейшая матрица линейного преобразования формируется иначе. Рассмотрим в **n**-мерном базисе преобразование **F** вида:

$$\begin{aligned} Fe_1 &= \lambda e_1 \\ Fe_2 &= e_1 + \lambda e_2 \\ Fe_3 &= e_2 + \lambda e_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Fe_n &= e_{n-1} + \lambda e_n \end{aligned}$$

Матрица этого преобразования в базисе e_n обозначается $J_n(\lambda)$ и называется <u>**n**-мерной жордановой клеткой</u> соответствующей числу λ.

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & . & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Говорят, что матрица **A** имеет <u>каноническую жорданову форму</u>, если по главной диагонали её расположены жордановы клетки, а все остальные элементы - нули.

$$A = \begin{pmatrix} Jk_1(\lambda_1) & & & & & 0 \\ & Jk_2(\lambda_2) & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ 0 & & & & & Jk_s(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

При этом возможно, что $k_i = k_j$ или $\lambda_i = \lambda_j$ для некоторых номеров **i** и **j**.

Контрольные вопросы.

1)Что называют линейным преобразованием?

2)Что называют матрицей линейного преобразования?
3)Чем определяется вид матрицы линейного преобразования?

1.5.8. Квадратичные формы.

Квадратичной формой $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ переменных $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ называют многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий членов нулевой и первой степени.

При **n=2** $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}^2x_2^2$;

при **n=3** $f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{a_{ij} = a_{ji}}$ называют матрицей квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$. Матрица **A** симметрическая, собственные значения её- действительные числа.

Пусть $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ нормированные собственные векторы в ортонормированном базисе $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$. Векторы e_1', e_2', e_3' также образуют ортонормированный базис. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$- матрица перехода о т базиса $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ к базису e_1', e_2', e_3'. Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису примут вид:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3' \\ x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3' \\ x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3' \end{array}\right.$$

Переходя к новым координатам получаем квадратичную форму $f(x_1', x_2', x_3') = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2$ не содержащую членов с произведениями переменных. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. (Предполагалось, что среди собственных чисел матрицы **A** нет кратных. В случае, если они есть, задача решается немного сложнее).

Пример: Привести к каноническому виду уравнение линии $17x^2+12xy+8y^2=80$. В левой части - квадратичная форма с матрицей $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Найдём собственные значения: $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0;\ \ \lambda^2 - 25\lambda = 0;\ \ \lambda_1 = 5; \lambda_2 = 20.$ Матрица преобразования принимает вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, квадратичная форма преобразуется к канонической, а уравнение линии к виду $5(x')^2 + 20(y')^2 = 80$ или $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{4} = 1$ - (каноническое уравнение эллипса).

Контрольные вопросы.
1) Что называют квадратичной формой?
2) Что называют матрицей квадратичной формы?

Глава 2. Аналитическая геометрия.

2.1. Линия на плоскости.

Всякая линия на плоскости представляет собой совокупность точек. Если известно аналитическое соотношение (формула), связывающее координаты любой (текущей) точки **M(x,y)**, лежащей на этой линии, говорят – линия задана своим уравнением **y = f (x)** (в общем случае **F(x,y) = 0**).

Если в уравнение линии подставить координаты любой ее точки, то уравнение обратится в тождество.

2.1.1. Прямая на плоскости.

Всякое уравнение первой степени (линейное) относительно **x** и **y** вида

$$\mathbf{Ax + By + C = 0} \qquad (2.1),$$

(**A, B, C** – постоянные величины, причем $\mathbf{A^2 + B^2 \neq 0}$) определяет на плоскости некоторую прямую и называется общим уравнением прямой. Рассмотрим частные случаи:

1. $\mathbf{A \neq 0, B \neq 0, C = 0}$. Очевидно, что **Ax + By = 0** – уравнение прямой проходящей через начало координат.
2. $\mathbf{A = 0, B \neq 0, C \neq 0}$. Уравнение (2.1) преобразуется к виду **y = – C / B = b** и определяет прямую параллельную оси **Ox** (При **C = 0 => b = 0** и прямая совпадает с осью **Ox**)
3. $\mathbf{A \neq 0, B = 0, C \neq 0}$. Уравнение (2.1) принимает вид **x = – C /A = a** и определяет прямую параллельную оси **Oy** (При **C = 0 => a = 0** и прямая совпадает с осью **Oy**)
4. Если $\mathbf{B \neq 0}$, то, разрешив (2.1) относительно **y**, получим уравнение вида

   $$\mathbf{y = кx + b} \qquad (2.2)$$

   (**к = – A / B, b = – C / B**), называемое уравнением с угловым коэффициентом, (**к = tg**$\boldsymbol{\alpha}$, где α – угол между прямой и положительным направлением оси **Ox**. **b** – ордината точки пересечения прямой с осью **Oy**).

5. Если в (2.1) **C ≠ 0**, то разделив обе части равенства на **-C**, получим уравнение вида **(x / a) – (y / b) = 1** (2.3)
   (**a = – C/A; b = – C/B**, называемое уравнением прямой в отрезках (**|a|** и **|b|** – длины отрезков, отсекаемых на осях **Ox** и **Oy** от начала координат).
6. Умножив обе части (2.1) на $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (нормирующий множитель, знак которого выбирают из условия **μ C < 0**) получим <u>нормальное</u> уравнение прямой **x cos φ + y sin φ – p = 0** (2.4),

$\cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $\sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $p = -C\cdot\mu$, где **p** – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а **φ** – угол между ним и осью **Ox**.

Используя предложенные формы уравнений прямой можно получить следующие соотношения:

<u>Острый угол</u> между прямыми **y = к₁x + b₁, y = к₂x + b₂**, определится по формуле: $tg\varphi = \left|\dfrac{\kappa_1-\kappa_2}{1+\kappa_1\kappa_2}\right|$ (2.5)

Из нее легко получить условие параллельности **$\kappa_1 = \kappa_2$** (2.6) и перпендикулярности **$\kappa_2 = -1/\kappa_1$** (2.7) прямых.

<u>Уравнение прямой</u>, <u>проходящей через точку</u> **$M_0(x_0, y_0)$** под <u>заданным углом</u> **α** к оси **Ox** (с заданным угловым коэффициентом **к = tgα**) примет вид

$y - y_0 = \kappa(x - x_0)$ (2.8),

а уравнение прямой, проходящей через заданные точки **$M_1(x_1, y_1)$** и **$M_2(x_2, y_2)$.**

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (2.9)$$

Найти <u>координаты точки пересечения</u> прямых можно решив систему уравнений, определяющих эти прямые.

<u>Расстояние</u> от точки **$M_0(x_0, y_0)$** до прямой **Ax + By + C = 0** определяется по формуле: $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (2.10)

<u>Деление отрезка в данном отношении</u>. Приведем еще одно соотношение, часто используемое в аналитической геометрии. Проведем прямую через точки **$A(x_1, y_1)$** и **$B(x_2, y_2)$**. Всякая третья точка **C(x, y)** прямой делит отрезок **AB** в некотором отношении **λ = ± AC / CB** (если точка **C** лежит внутри отрезка **AB**, то **λ > 0**, если вне, то **λ < 0**). Координаты точки **C** определяются выражениями:

$x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ (2.11) (**λ = 1**, если точка **C** – середина отрезка).

Контрольные вопросы.

1) Каков характерный признак, отличающий уравнение прямой в декартовой системе координат от уравнений других линий?
2) Как расположена прямая относительно декартовой системы координат, если в её уравнении отсутствует: а) свободный член; б) одна из координат; в) одна из координат и свободный член?
3) Как вычислить угол между двумя прямыми? Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямых?
4) Как можно найти угловой коэффициент прямой, если известно её общее уравнение? Можно ли найти угловой коэффициент прямой, не составляя её уравнения, если известны две её точки? Если да, то как это сделать?
5) Напишите уравнение прямой проходящей: а) через данную точку в данном направлении; б) через две данные точки.
6) Напишите формулы, выражающие координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, через координаты его концов.
7) Напишите формулы, выражающие координаты: а) середины отрезка через координаты его концов; б) центра тяжести треугольника через координаты его вершин.
8) Напишите формулу, выражающую площадь треугольника через координаты его вершин.
9) Как найти расстояние от данной точки до прямой, заданной уравнением общего вида?
10)Напишите уравнения осей декартовой системы координат.

2.1.2. Кривые второго порядка.

Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости **xOy** имеет вид

$$\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Дx + 2Ey + F = 0} \quad (2.12)$$

(Порядок кривой определяется наивысшей степенью неизвестных, входящих в ее уравнение). Можно показать, что это уравнение описывает либо две пересекающиеся прямые, либо одну из следующих кривых: эллипс, гиперболу или параболу (включая вырожденные случаи). В любом случае кривую можно определить как геометрическое место точек, обладающих некоторым общим свойством. Используя преобразование координат (изменяя расположение кривой по отношению к осям координат) можно сделать так, чтобы в новых координатах уравнение кривой принимало наиболее простую и удобную для анализа форму. Рассмотрим последовательно кривые, именно так расположенные на плоскости **xOy**.

Эллипс. Окружность.

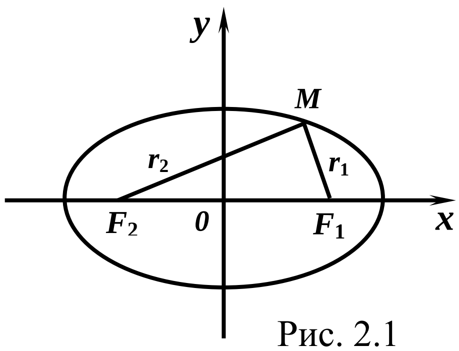


Рис. 2.1

Эллипсом называют множество (геометрическое место) точек, суммы расстояний которых до двух данных точек, называемых <u>фокусами</u>, есть величина постоянная (ее обозначают через **2a**), причем эта величина больше расстояния между фокусами (его обозначают через **2c**). Если фокусы эллипса размещаюся на оси **Ox** симметрично началу координат в точках **F₁(c, 0)** и **F₂ (-c, 0)** (рис.2.1), то уравнение эллипса примет простейшую (каноническую) форму: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (2.13)

где **a** и **b** – большая и малая полуоси эллипса, причем **a, b, c** связаны соотношением $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$. Форма эллипса (мера сжатия) характеризуется <u>эксцентриситетом</u> $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ (2.14).

Очевидно, что $\mathbf{0 \le e \le 1}$; $\mathbf{e = 1}$ при $\mathbf{b = 0}$ и эллипс вырождается в отрезок длиной **2a**; $\mathbf{e = 0}$ при $\mathbf{b = a}$, когда эллипс вырождается в окружность радиуса **a**.

Расстояния произвольной точки **M(x, y)** эллипса от его фокусов называются <u>фокальными радиусами – векторами</u> этой точки, обозначаются $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ и могут быть вычислены по формулам $\mathbf{r_1 = a - ex}$ (2.15) (правый радиус – вектор) и $\mathbf{r_1 = a + ex}$ (2.15`) (левый радиус – вектор).

При **e = 0 (a = b = r)** уравнение примет вид $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$ (2.16)

Это уравнение окружности – геометрического места точек равноудаленных от данной точки, называемой центром (в ней «сошлись» фокусы эллипса), с центром в начале координат. Уравнение окружности с центром в заданной точке **C(a, b)** примет вид $\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$ (2.16`)

<u>Гипербола</u>. Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых <u>фокусами</u>, есть величина постоянная (ее обозначают через **2a**),

причем эта величина меньше расстояния между фокусами (ее обозначают через **2c**).

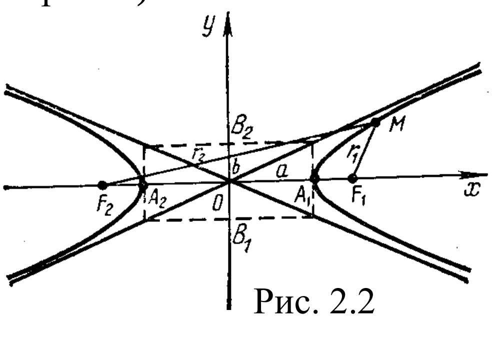


Рис. 2.2

Если фокусы гиперболы расположены на оси **Ox** симметрично началу координат в точках **F₁(c, 0)** и **F₂(–c, 0)**, уравнение гиперболы примет каноническую форму

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (2.17), причем $\mathbf{b^2 = c^2 - a^2}$ (2.18).

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки $\mathbf{A_1(a,\ 0)}$ и $\mathbf{A_2(-a,\ 0)}$ называются <u>вершинами</u> гиперболы (рис.2.2). Отрезки $\mathbf{A_1A_2 = 2a}$ и $\mathbf{B_1B_2 = 2b}$ называют <u>действительной</u> и <u>мнимой</u> осями гиперболы. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ (2.19) - наклонные асимптоты гиперболы.

(Прямая называется наклонной асимптотой кривой, если расстояние между этой прямой и точкой **M(x, y)** кривой стремится к нулю при стремлении **x** к $\pm\infty$ $(\mathbf{x}\to\pm\infty)$).

Величину $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ (2.20) называют эксцентриситетом гиперболы.

Очевидно, что $\mathbf{1 \le e < \infty}$; при **b = 0 (e = 1)** гипербола вырождается в две полупрямые, лежащие на оси **Ox** и разделенные промежутком **(–a, a)**. Фокальные радиусы – векторы определяются соотношениями:

Левая ветвь гиперболы		Правая ветвь гиперболы		
$\mathbf{r_1 = -ex + a}$	Правый	$\mathbf{r_1 = ex - a}$	Правый	(2.21)
$\mathbf{r_2 = -ex - a}$	Левый	$\mathbf{r_2 = ex + a}$	Левый	

При **a = b** $(\mathbf{e} = \sqrt{2})$ (такая гипербола называется <u>равнобочной</u>) асимптоты гиперболы – биссектрисы координатных углов.

Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, имеющие одни и те же оси и асимптоты (мнимая ось одной совпадает с действительной осью другой) называют <u>сопряженными</u>.

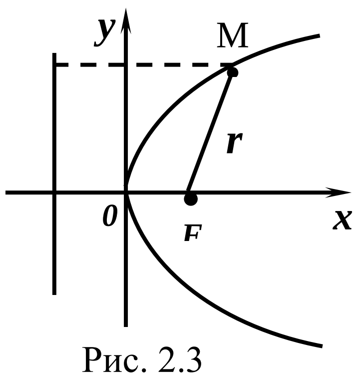


Рис. 2.3

<u>Парабола</u>. Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если фокус параболы в точке **F(p/2, 0)**, а уравнение директрисы **x = –p / 2,** то уравнение параболы примет вид $\mathbf{y^2 = 2px}$ (2.22).

Эта парабола симметрична относительно оси **Ox** и при **p > 0** расположена как на рис. (2.3). $\mathbf{x^2 = 2py}$ (2.22`) уравнение параболы, симметричной относительно оси **Oy**. Фокальный радиус – вектор параболы (2.22) определяется соотношением:

$$\mathbf{r = x + (p / 2)\ (p > 0)} \qquad (2.23).$$

Контрольные вопросы.

1) Что называется уравнением линии. Приведите примеры.
2) Как убедиться, что данная точка лежит на данной линии?
3) Как Найти точку пересечения двух линий, заданных своими уравнениями?
4) Что называется порядком алгебраической линии?
5) По какому признаку можно определить, является ли данное уравнение второго порядка уравнением окружности в декартовой системе координат? Как в этом случае можно найти её центр и радиус?
6) Сформулируйте определения эллипса, гиперболы и параболы. Каковы канонические уравнения этих линий и при каком расположении осей координат имеют место эти уравнения?
7) Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы и какие значения он может иметь для каждой из этих линий?

2.2. Плоскость и прямая в пространстве. Поверхности второго порядка.

2.2.1. Плоскость.

Рассмотрим в декартовом базисе произвольную плоскость **P** и вектор <u>нормали</u> (перпендикулярный) к ней $\mathbf{\bar{n}}$ **(A, B, C)**. Возьмем в этой плоскости произвольную фиксированную точку $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ и текущую точку **M(x, y, z)**. Очевидно, что $\overline{M_0M}\cdot\mathbf{\bar{n}} = \mathbf{0}$ (2.24)

(см.(1.20) при $\varphi = \pi/2$). Это <u>уравнение плоскости в векторной форме</u>. Переходя к координатам, получим <u>общее уравнение плоскости</u>

$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0}$ (2.25).

$(\mathbf{D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0;\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0})$.

Можно показать, что в *декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени и, обратно, каждое уравнение первой степени определяет плоскость*, (т.е. плоскость есть поверхность первого порядка и поверхность первого порядка есть плоскость).

Рассмотрим некоторые частные случаи расположения плоскости, заданной общим уравнением:

A = 0 – параллельна оси **Ox;** **B = 0** – параллельна оси **Oy;** **C = 0** – параллельна оси **Oz**. (Такие плоскости, перпендикулярные одной из координатных плоскостей, называют <u>проектирующими</u>); **D = 0** – проходит через начало координат; **A = B = 0** – перпендикулярна оси **Oz** (параллельна плоскости **xOy**); **A = B = D = 0** – совпадает с плоскостью **xOy (z = 0)**. Аналогично анализируются все остальные случаи.

Если $\mathbf{D \neq 0}$, то, разделив обе части (2.25) на **-D,** можно привести уравнение плоскости к виду: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (2.26),

a = – D /A, b = –D/ B, c =–D /C. Соотношение (2.26) называется уравнением плоскости в отрезках; **a, b, c** – абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями **Ox, Oy, Oz**, а **|a|, |b|, |c|** – длины отрезков, отсекаемых плоскостью на соответствующих осях от начала координат.

Умножая обе части (2.25) на нормирующий множитель $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ **(μD < 0)** получим нормальное уравнение плоскости:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (2.27)$$

где **cosα = Aμ, cosβ = Bμ, cosγ = Cμ** – направляющие косинусы нормали к плоскости, **p** – расстояние до плоскости от начала координат.

Рассмотрим основные соотношения, используемые в расчетах. Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ легко определить как угол между нормалями этих плоскостей $\bar{n}_1\,(A_1, B_1, C_1)$ и

$\bar{n}_2\,(A_2, B_2, C_2)$: $$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1\bar{n}_2}{n_1 n_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (2.28)$$

Из (2.28) легко получить условие перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \qquad (2.29)$$

и параллельности $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (2.30)$$ плоскостей и их нормалей.

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости (2.25) определяется выражением: $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (2.31)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ удобнее всего записать используя условие компланарности (1.25) векторов $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, где $M(x, y, z)$ – текущая точка плоскости.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.32)$$

Приведем уравнение пучка плоскостей (т.е. множества плоскостей, проходящих через одну прямую) – его удобно использовать в ряде задач.

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (2.33)$$

Где $\lambda \in \mathbf{R}$, а в скобках - уравнения двух любых плоскостей пучка.

Контрольные вопросы.

1)Как проверить, что данная точка лежит на поверхности, заданной данным уравнением?

2)Каков характерный признак, отличающий уравнение плоскости в декартовой системе координат от уравнения других поверхностей?

3)Как расположена плоскость относительно системы координат, если в её уравнении отсутствует: а) свободный член; б) одна из координат; в) две координаты; г) одна из координат и свободный член; д) две координаты и свободный член?

2.2.2. Прямая.

Плоскости, нормали которых не коллинеарны, $\left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}\right.$ или $\left.\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\right)$ пересекаются, однозначно определяя прямую как линию их пересечения, что и записывается следующим образом:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.34)$$

Через эту прямую можно провести бесконечно много плоскостей (пучок плоскостей (2.33)), в том числе и проектирующие ее на координатные плоскости. Чтобы получить их уравнения, достаточно преобразовать (2.34), исключив из каждого уравнения по одной неизвестной и приведя их, например, к виду $\begin{cases} x = dz + c \\ y = bz + d \end{cases}$ (2.34`).

Поставим задачу – провести через точку $\mathbf{M_0(x_0,y_0,z_0)}$ прямую, параллельную вектору $\bar{\mathbf{S}}$ **(*l*, m, n)** (его называют <u>направляющим</u>). Возьмем на искомой прямой произвольную точку **M(x,y,z)**. Векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{S}$ должны быть коллинеарны, откуда получаем канонические уравнения прямой.

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (2.35) \qquad \text{или} \quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma} \qquad (2.35`)$$

где **cosα, cosβ, cosγ** – направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{S}}$. Из (2.35) легко получить уравнение прямой, проходящей через заданные точки $\mathbf{M_1(x_1, y_1, z_1)}$ и $\mathbf{M_2(x_2, y_2, z_2)}$ (она параллельна $\overline{M_1M_2}$)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{или} \quad \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} = \frac{z-z_2}{z_1-z_2} \qquad (2.35``)$$

(Значения дробей в (2.35) равны для каждой точки прямой и могут быть обозначены через **t**, где **t**$\in$**R**. Это позволяет ввести параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \\ z = nt + z_1 \end{cases}$

Каждому значению параметра **t** соответствует набор координат **x, y, z** точки на прямой или (иначе) - значения неизвестных, удовлетворяющих уравнениям прямой).

Используя уже известные свойства векторов и операций над ними и канонические уравнения прямой легко получить следующие формулы:

Угол между прямыми: $\cos\varphi = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \dfrac{\overline{S}_1\overline{S}_2}{S_1 S_2}$ (2.36)

где $\overline{\mathbf{S}}_1$ и $\overline{\mathbf{S}}_2$ – направляющие векторы прямых.

Условие параллельности $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ (2.37)

перпендикулярности $\boldsymbol{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$ (2.38) прямых.

Угол между прямой и плоскостью (легко получить, найдя угол между прямой и нормалью к плоскости, составляющий в сумме с искомым $\boldsymbol{\pi/2}$)

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (2.39)$$

Из (2.37) получаем условие параллельности $\boldsymbol{Al + Bm + Cn = 0}$ (2.40)

и перпендикулярности $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$ (2.41) прямой и плоскости.

Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых в одной плоскости легко получить из условия компланарности (1.25).

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.42)$$

Контрольные вопросы.

1)Каковы способы задания прямой линии в пространстве?

2.2.3. **Поверхности второго порядка.**

Если линейное уравнение в трехмерном декартовом базисе однозначно определяет плоскость, любое нелинейное уравнение, содержащее **x, y, z** описывает какую – то иную поверхность. Если уравнение имеет вид $\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0}$, то оно описывает поверхность второго порядка (общее уравнение поверхности второго порядка). Выбором или преобразованием декартовых координат уравнение можно максимально упростить, приведя к одной из следующих форм, описывающих соответствующую поверхность.

1. Канонические уравнения цилиндров второго порядка, образующие которых параллельны оси **Oz**, а направляющими служат соответствующие кривые второго порядка, лежащие в плоскости **xOy:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2.43), \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2.44), \qquad \mathbf{y^2 = 2px} \ (2.45)$$

эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры соответственно.

(Напомним, что цилиндрической называют поверхность, полученную перемещением прямой, называемой образующей, параллельно самой себе. Линию пересечения этой поверхности с плоскостью, перпендикулярной образующей, называют направляющей – она определяет форму поверхности).

По аналогии можно записать уравнения таких же цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси **Oy** и оси **Ox**. Направляющую можно задать, как линию пересечения поверхности цилиндра и соответствующей координатной плоскости, т.е. системой уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

2. Уравнения конуса второго порядка с вершиной в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \ (2.46)$$

(осями конуса служат оси **Oz**, **Oy** и **Ox** соответственно)

3. Каноническое уравнение эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (2.47).

Частными случаями являются эллипсоиды вращения, например $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – поверхность, полученная вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси **Oz** (При **a** > **c** эллипсоид сжат, при **a** < **c** – удлинен) и сфера (при **a = b = c = r** получим

$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + = r^2}$ – уравнение сферы радиуса **r** с центром в начале координат).

4. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2.48)$$

(знак “ – ” может стоять перед любым из трех слагаемых левой части – это изменяет только положение поверхности в пространстве). Частные случаи

– однополостные гиперболоиды вращения, например $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – поверхность, полученная вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси **Oz** (мнимой оси гиперболы).

5. Каноническое уравнение двухполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (2.49)$$

(знак “ – ” может стоять перед любым из трех слагаемых левой части).
Частные случаи – двухполостные гиперболоиды вращения, например $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – поверхность, полученная вращением гиперболы вокруг оси **Oz** (действительной оси гиперболы).

6. Каноническое уравнение эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \ \ \textbf{(p >0, q >0)} \qquad (2.50)$$

(переменная **z** может поменяться местами с любой из переменных **x** и **y** – изменится положение поверхности в пространстве).

7. Каноническое уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad \textbf{(p >0, q >0)} \qquad (2.51)$$

(переменная **z** может поменяться местами с любой из переменных **x** и **y** – изменится положение поверхности в пространстве).
Отметим, что представление об особенностях (форме) этих поверхностей легко получить, рассматривая сечения этих поверхностей плоскостями, перпендикулярными осям координат.

Контрольные вопросы.
1)Какое множество точек в пространстве определяет уравнение $F(x,y)=0$?
2)Каковы канонические уравнения цилиндров второго порядка; конуса второго порядка; эллипсоида; однополостного гиперболоида; двухполостного гиперболоида; эллиптического параболоида; гиперболического параболоида?

Глава 3. Введение в математический анализ.

3.1. Функция.

Напомним несколько необходимых понятий. Переменной называют величину, которая принимает различные значения. Постоянной – величину, значение которой остается неизменным. Постоянную величину можно рассматривать, как частный случай переменной. Областью изменения переменной величины называют совокупность всех ее значений. Интервалом называют совокупность всех чисел **x**, заключенных между данными числами **a** и **b** **(a < b)** причем сами **a** и **b** не принадлежат рассматриваемой совокупности **x∈(a,b)** (открытый интервал). Частный случай – **x∈ (–∞, ∞).** Отрезок (закрытый интервал) – совокупность всех **x** заключенных между **a** и **b** включая границы **x∈[a, b]**. Если одна из границ (например **a**) входит, а другая не входит в рассматриваемую область **x∈ [a, b)**– полузакрытый интервал. Окрестностью точки $\mathbf{x_0}$ называют произвольный интервал, содержащий $\mathbf{x_0}$ внутри себя $(\mathbf{a < x_0 < b})$. Если $x_0 = \frac{a+b}{2}$, ее называют центром, а $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ – радиусом окрестности. (**ε** окрестность).

Если каждому значению переменной **x**, принадлежащему некоторой области, по определенному правилу ставится в соответствие значение другой переменной **y**, то говорят, что **y** есть функция от **x** (символическая запись: **y = f(x)** или **y = y(x)** и т.п.); **x** называют независимой переменной (аргументом). Совокупность значений **x** называют областью определения (существования), а совокупность значений **y** – областью изменения функции.

Рассмотрим основные способы задания функции.

1. Табличный способ (часто используется в экспериментальных исследованиях) заключается в составлении таблицы, в которой в соседних клетках одного столбца (строки) расположены соответствующие значения аргумента и функции, например:

X	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**…..**	$\mathbf{x_i}$	**…..**	$\mathbf{x_n}$
У	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y_2}$	**…..**	$\mathbf{y_i}$	**…..**	$\mathbf{y_n}$

2. Графический способ. Значения **x** и **y** рассматриваются как координаты точек. Совокупность точек плоскости **xOy**, абсциссы которых суть значения аргумента, а ординаты – значения функции, называют графиком функции. Если известен график, функция задана графически.

3. Аналитический способ. Аналитическим выражением называется символическое обозначение математических операций, производимых в определенной последовательности над постоянными и переменными величинами (например $\sqrt{x^3-2}$ **;** $\mathbf{lg\,sinx^2}$ и т.д.).

Если **y = f(x)** и **f(x)** обозначает аналитическое выражение, говорят, что функция задана аналитически (например $y = \sqrt{\cos x}$).

Элементарной функция называется, если ее можно задать одной формулой вида **y = f(x),** где выражение, стоящее справа, составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции. (Функцию от функции называют сложной функцией).

Напомним, что основными элементарными функциями (их свойства и графики полагаем известными из курса средней школы) являются:

1) Степенная функция: $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, $x > 0$
2) Показательная функция: $y = a^{x}$, где $a > 0$, $a \neq 1$
3) Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$
4) Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, $y = \sec x$, $y = \mathrm{cosec}\, x$
5) Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $y = \mathrm{arcsec}\, x$, $y = \mathrm{arccosec}\, x$

Контрольные вопросы.

1) Что называется функцией?
2) Что называется областью определения функции?
3) Перечислите основные элементарные функции.

3.2. Предел. Непрерывность функции.

Переменную величину **x** называют упорядоченной, если известна область **D** изменения ее и про каждое из двух любых значений можно сказать, какое предыдущее и какое последующее.

Рассмотрим упорядоченную переменную, изменяющуюся специальным образом, определяемым термином «Переменная величина стремится к пределу».

*Число **a** называют пределом переменной **x**, если для всякого сколь угодно малого положительного **ε** можно указать такое значение **x**, начиная с которого все последующие значения будут удовлетворять неравенству* $|x - a| < \varepsilon$. В этом случае говорят, что **x** стремится к **a** (символически $x \to a$ или $\lim x = a$).

Геометрическая интерпретация (рис.3.1): постоянная **a** есть предел переменной **x**, если для любой сколь угодно малой **ε** – окрестности точки **a** найдется такое значение **x**, что все точки, соответствующие последующим значениям **x**, будут находиться в этой окрестности.

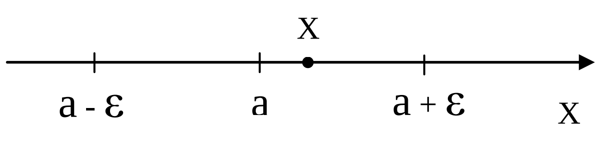
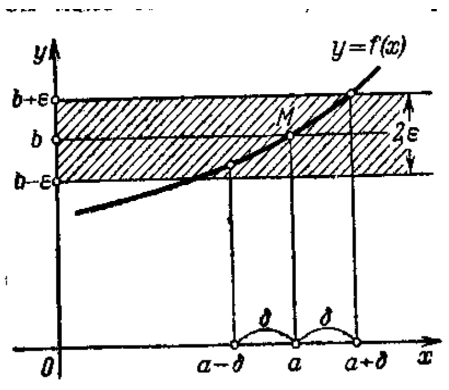


Рис. 3.1

Отметим: 1. Предел постоянной равен самой постоянной; 2. Переменная не может иметь двух пределов; 3. Не всякая переменная имеет предел.



Пусть функция **y** = **f(x)** определена в некоторой окрестности точки **a**. Число **b** называют пределом функции **f(x)** при **x → a**, если для любого сколь угодно малого **ε > 0** найдется такое **δ > 0**, что **|f(x) – b| < ε** при **|x – a| < δ**, (т.е. если для **y = f(x)** при любом малом **ε** можно найти такое **δ**, что из неравенства **a – δ < x < a + δ** следует неравенство **b – ε < y < b + ε**. Символическая запись $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Геометрическая интерпретация (рис.3.2.) – для всех точек **x** отстоящих от **a** не более чем на **δ**, точки **M** графика функции **y = f(x)** лежат внутри полосы шириной **2ε**, ограниченной прямыми **y = b –ε** и **y = b + ε**.

Если **x < a** и **x → a**, то пишут **x → a – 0**; если **x > a** и **x → a** – пишут **x → a + 0**. Числа $b_1 = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $b_2 = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называют левым и правым пределом функции **f(x)** в точке **a**. Если $\mathbf{b_1}$ и $\mathbf{b_2}$ существуют и равны, т.е. $\mathbf{b_1 = b_2 = b}$, то **b** и будет пределом в точке **a** в смысле данного выше определения. Отметим, что для существования предела в точке **a** не требуется, чтобы функция была определена в точке **a**. (Рассматриваются значения **x** в окрестности точки **a**, отличные от **a**).

Говорят, что функция **f(x)** стремится к пределу **b** при **x → ∞**, если для всякого **ε > 0** можно указать такое **N > 0**, что для всех **x** удовлетворяющих условию **|x| > N** будет выполняться неравенство **|f(x) – b| < ε**.

Функция **f(x)** стремится к бесконечности при **x → a**, (является *бесконечно большой* при **x → a**) если для всякого **M > 0**, как бы велико оно ни было, можно найти такое **δ > 0**, что для всех **x ≠ a** и удовлетворяющих условию **|x – a| < δ** имеет место **|f(x)| > M**, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (При этом возможно как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, так и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$). Отметим, что функция может и не стремиться к конечному пределу при **x → a** или **x → ∞**. Примеры: **y = sin x** не имеет предела при **x → ∞**, а **y = sin 1/x** – при **x → 0.**

Функция **α(x)** называется *бесконечно малой* при **x → a** или **x → ∞**, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$.

Говорят, что если **α(x)** и **β(x)** – бесконечно малые при **x → a**, и:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ (или $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$) – то **α** – *бесконечно малая высшего порядка* по сравнению с **β** и пишут **α = 0 (β).**

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=m$, где **m** – число отличное от нуля, то **α** и **β** *бесконечно малые одного порядка.* Если **m = 1**, **α** и **β** – *эквивалентные* бесконечно малые, что можно записать используя уже знакомый символ эквивалентности: **α ~β.**

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=m$, где **m** - число отличное от нуля, то α- бесконечно малая **n**-го порядка по сравнению с β (т.е. $\alpha\sim\beta^n$).

Отметим, что *предел отношения бесконечно малых не изменится при замене их (или одной из них) эквивалентными бесконечно малыми*. Это позволяет упростить решение многих задач теории пределов.

Аналогично сравниваются и бесконечно большие функции.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями определяется теоремой: *если **α(x)** - бесконечно малая при **x → a**, то функция **f(x)=1/α(x)** - бесконечно большая при **x → a**, и обратно, если **f(x)** - бесконено большая при **x → a,** то **α(x)=1/f(x)** - бесконечно малая при **x → a***

Основные теоремы о пределах.

1. *Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще определенного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных, т.е.*

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_n$$

2. Предел произведения определенного числа переменнных равен произведению пределов этих переменных, т.е.

$$\lim (u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_n$$

3. Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел знаменателя отличен от нуля, т.е. $\lim\dfrac{u}{V}=\dfrac{\lim u}{\lim V}$ *если* $\lim V\neq 0$.

3. *Если для соответствующих значений функций **u = u(x), z = z(x), v = v(x)** выполняются неравенства **u ≤ z ≤ v** и при этом **u(x)** и **v(x)** при **x → a** (или **x → ∞**) стремятся к одному и тому же пределу **b**, то **z = z(x)** при **x → a** (или **x → ∞**) стремится к тому же пределу.*

Теорема 4 позволяет доказать справедливость важного соотношения, называемого <u>первым замечательным пределом</u>. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (3.1)$$

Из (3.1) следует эквивалентность бесконечно малых **x** и **sin x: sin x ~x.**

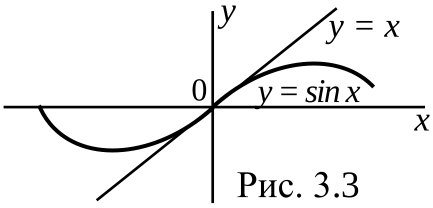


Рис. 3.3

Удобно пояснить это графически. На рис. 3.3 приведены графики функций **y = x** и **y = sinx**. Легко видеть, что чем меньше **x** отличается от нуля, тем меньше отличие ординат (значений функций) соответствующих графиков, а при **x = 0** они совпадают. (Это позволяет с высокой точностью при очень малых **x** определять приближенное значение **sin x**).

Еще одно важное соотношение теории пределов, называемое *вторым замечательным пределом имеет* вид: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x} = e$

(3.2)

Число **e** – иррациональное (также как и число **π**) и может быть записано в виде бесконечной десятичной непериодической дроби **e = 2,71828…**; играет важную роль в вычислительной математике, служа, в частности, основанием натурального логарифма, обозначаемого $\mathbf{\ln x = \log_e x}$. Функцию $\mathbf{y = e^x}$ называют *экспоненциальной* функцией (иногда обозначается как **exp x**). В решении задач теории пределов могут быть полезны следующие равенства: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x} = m$. Можно также заменять бесконечно малые величины эквивалентными им:

$$\sin x \sim x,\quad tgx \sim x,\quad \arcsin x \sim x,\quad artgx \sim x,\quad \log_a(1+x) \sim x\log_a e;\quad \ln(x+1) \sim x,$$

$$a^{x-1} \sim x\ln a;\quad e^x - 1 \sim x;\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x;\quad \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2};\quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2};$$

Непрерывность функций. Функцию **y = f(x)** называют непрерывной в точке **a** если:

1.Эта функция определена в некоторой окрестности точки **a** и в самой точке;

2.Существует предел функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Можно предложить и иное определение. Пусть аргумент $\mathbf{x_0}$ получит приращение **Δx** и примет значение $\mathbf{x = x_0 + \Delta x}$. В общем случае функция также получит некоторое приращение $\mathbf{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$.

Функцию **f(x)** называют непрерывной в точке $\mathbf{x_0}$, если она определена в этой точке и некоторой окрестности ее и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ (3.3) или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ (3.3`)

Приведем формулировку теоремы: *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена* и получим важное для решения задач теории пределов следствие. Запишем условие непрерывности в виде $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ или, что тоже самое, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Но $x_0=\lim\limits_{x\to x_0} x$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ (3.4), т.е. для любой непрерывной функции во всех точках области определения ее справедливо соотношение (3.4) – *предел функции равен функции предела* (символы (и соответствующие операции) предела и функции можно поменять местами): $\lim\limits_{x\to a} F(f(x))=F\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

В ряде случаев удобно использовать следующее соотношение:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Говорят, что если функция **f(x)** непрерывна в каждой точке некоторого интервала **(a, b)**, где **a < b**, то функция непрерывна на этом интервале. Точка внутри или на границе области определения, в которой нарушается условие непрерывности, называется *точкой разрыва.* Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$, причем не все три числа $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ и **f(a)** равны между собой, точка **a** называется *точкой разрыва первого рода*. Эти точки подразделяются на точки *скачка*, когда $\mathbf{b_1 \neq b_2}$ (скачок равен $\mathbf{b_2 - b_1}$) и точки *устранимого разрыва,* когда $\mathbf{b_1 = b_2}$. Точки разрыва , не являющиеся точками разрыва первого рода, называются точками *разрыва второго рода*. В этих точках не существует хотя бы один из односторонних пределов (Пример – "бесконечный" разрыв: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$).

Рассмотрим некоторые свойства непрерывных функций (доказательства теорем можно найти в рекомендуемой литературе).

1. *Если функция **f(x)** непрерывна на некотором отрезке **[a, b]**, то на этом отрезке найдется по крайней мере одна точка* $\boldsymbol{x = x_1}$ *такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению* $\boldsymbol{f(x_1) \geq f(x)}$, *где **x** – любая другая точка отрезка, и найдется по крайней мере одна точка* $\boldsymbol{x_2}$ *такая, что значение функции в этой точке будет удовлетворять соотношению* $\boldsymbol{f(x_2) \leq f(x)}$.

Значения $\mathbf{f(x_1) = M}$ и $\mathbf{f(x_2) = m}$ – *наибольшее* и *наименьшее* значения функции

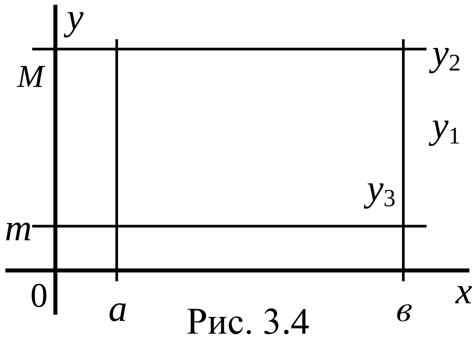


Рис. 3.4

f(x) на этом отрезке. Поясним с помощью рис. 3.4, на котором представлены графики трех непрерывных на **[a, b]** функций $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$ и $\mathbf{y_3}$. Легко видеть, что на интервале **[a, b]** функция $\mathbf{y_1}$ один раз достигает наибольшего **M** и наименьшего **m** значений. Функция $\mathbf{y_2}$ во всех точках **[a, b]** имеет одно и то же значение – оно одновременно и наибольшее и наименьшее. Функция $\mathbf{y_3}$ на **[a, b]** дважды принимает наибольшее **M** и наименьшее **m** значения. Но *хоть один раз* наибольшее и наименьшее значения принимает каждая из них!

(Отметим, что на интервале **(a, b)** утверждение теоремы может оказаться неверным. Пример: **y = x** – функция не имеет на интервале **(a, b)** наибольшего и наименьшего значений, т.к. не достигает значений **a** и **b** !)

2. *Если функция **f(x)** непрерывна на отрезке **[a, b]** и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то между точками **a** и **b** найдется по крайней мере одна точка **x = c**, в которой функция обращается в нуль.* (Это значит, что график функции хотя бы раз пересечет ось **Ox** в пределах этого отрезка; **x = c** – как раз такая точка). На рис. 3.5: графики функций $\mathbf{y_1}$ и $\mathbf{y_2}$ таковы, что на концах интервала **[a, b]** их ординаты (значения функций) различны. При этом график $\mathbf{y_1}$ пересекает ось **Ox** один раз, а график $\mathbf{y_2}$ – три раза, но хоть один раз – каждый из них.

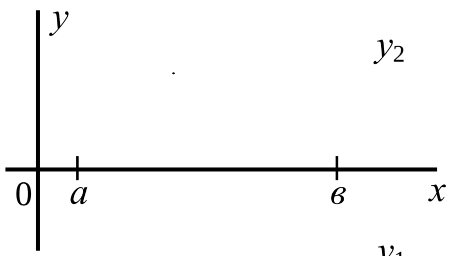


Рис. 3.5

3. *Если функция **f(x)** определена и непрерывна на отрезке **[a, b]** и на концах этого отрезка принимает неравные значения **f(a) = A** и **f(b) = B** то, каково бы ни было число $\boldsymbol{\mu}$, заключенное между числами **A** и **B**, найдется такая точка **x = c**, заключенная между **a** и **b**, что **f(c) =** $\boldsymbol{\mu}$* (легко видеть, что теорема 2 является частным случаем теоремы 3).

Следствие: *Если функция **f(x)** непрерывна на некотором интервале и принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, то на этом интервале она принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между ее наибольшим и наименьшим значениями.*

Контрольные вопросы.

1) Что называется пределом переменной, пределом функции?
2) Что называется бесконечно малой функцией?
3) Поясните графически первый замечательный предел?
4) Какая функция называется непрерывной в точке?

5) Какая точка называется точкой разрыва I рода, II рода (в чём отличие)?
6) Что является наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке?

Глава 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

4.1. Производная.

Рассмотрим функцию **y = f(x)** определенную на некотором интервале. Дадим аргументу **x** приращение **Δx**. Новому значению аргумента **x + Δx** будет, в общем случае, соответствовать новое значение функции **f (x + Δx)**, т.е. функция также получит некоторое приращение **Δy = f (x + Δx) – f (x)**. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует, то его называют *производной* данной функции и обозначают **y`** (или **f `(x)** или **dy / dx**). Иногда используют обозначение **y`**$_{\mathbf{x}}$ – индекс показывает, по какому аргументу берется производная.

$$y`=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4.1) \quad \text{или} \quad y`=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (4.1`)$$

Производной данной функции **y = f(x)** по аргументу **x** называют предел отношения приращения функции **Δy** к приращению аргумента **Δx**, когда последнее *произвольным* образом стремится к нулю. В общем случае производная также является некоторой функцией от **x**. **(f `(x) = φ(x))**. Конкретное значение производной при **x = a** обозначают **f `(a)** или **y`/**$_{\mathbf{x\,=\,a}}$. Операцию нахождения производной называют *дифференцированием* функции.

Понятие производной (и соответствующий математический аппарат) широко используются в различных прикладных задачах. Пример: Известно, что средняя скорость движения тела определяется выражением **V = s / t** (**s = s (t)** – путь пройденный телом, **t** время движения). Очевидно, что *мгновенную* скорость можно найти, как $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ (механический смысл производной). Рассмотрим геометрическую интерпретацию.

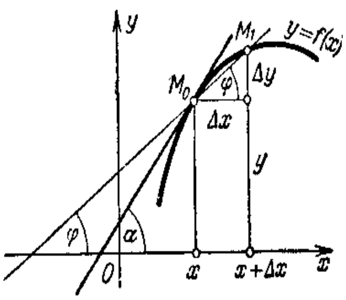


Рис. 4.1

Возьмем на графике функции **y = f(x)** (рис.4.1) произвольные точки **M$_0$(x, y) и M$_1$(x + Δx, y + Δy)** и проведем секущую **M$_0$M$_1$**. Очевидно, что угол наклона секущей к оси **Ox** определяется выражением $\mathrm{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если точка **M$_1$** приближается к точке **M$_0$**, то секущая поворачивается вокруг точки **M$_0$** (при этом **Δx**

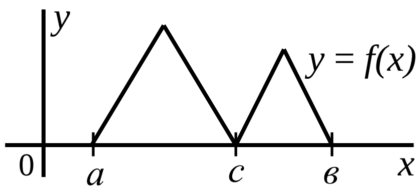
$\to$ **0**) и в пределе занимает положение касательной к графику функции, проведенной через точку $\mathbf{M_0}$.

Угол наклона касательной определится выражением $tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x)$.

Геометрический смысл производной очевиден: *Значение производной* ***f`(x)*** *при данном значении аргумента* ***x*** *равняется тангенсу угла наклона касательной к графику функции* ***f(x)*** *в соответствующей точке* ***M(x, y)***. Это, с учетом (2.8), позволяет записать уравнение касательной к кривой **y = f(x)** в точке $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ в виде $\mathbf{y - y_0 = f`(x_0)(x - x_0)}$ (4.3).

Говорят, что если функция **y = f(x)** имеет производную в точке $\mathbf{x = x_0}$, т.е. если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, она *дифференцируема* в этой точке. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка (интервала), говорят, что она дифференцируема на отрезке (интервале).

Теорема. *Если функция y = f(x) дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна*. Действительно, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x_0)$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x_0) + \gamma$, где γ – бесконечно малая величина, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \gamma = 0$. Но тогда $\mathbf{\Delta y = f`(x_0)\,\Delta x + \gamma\Delta x}$, откуда следует, что $\mathbf{\Delta y \to 0}$ при $\mathbf{\Delta x \to 0}$ и функция **f(x)** непрерывна в точке $\mathbf{x_0}$. Очевидно, в точках разрыва функция не может иметь производной. Это не значит однако, что если функция непрерывна в точке $\mathbf{x_0}$, то она дифференцируема в ней. Рассмотрим функцию, график которой представлен



на рисунке. Функция непрерывна во всех точках **[a, b]**. Однако в точке **c** к графику функции можно провести две различные касательные, т.е. в этой точке первая производная не существует (испытывает разрыв) и функция непрерывна, но не дифференцируема.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$ в точке **x = 0**. $f`(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \infty$, т.е. в точке **x = 0** рассматриваемая функция непрерывна, но не дифференцируема.

Рассмотрим производные основных элементарных функций. Пусть $\mathbf{y = x^2}$. Очевидно $\mathbf{\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta^2 x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$, т.е. если $\mathbf{y = x^2}$, то **y` = 2x**. Рассуждая аналогично, несложно доказать, что производная функции $\mathbf{y = x^n}$, где **n** – целое положительное число, равна

$\mathbf{nx^{n-1}}$, т.е. если $\mathbf{y = x^n}$, то $\mathbf{y` = nx^{n-1}}$ (4.4). Эта формула, как будет показано ниже, верна и в случае любого действительного **n**. Приведем без доказательств следующие утверждения:

Если **y = sinx**, то **y` = cosx** (4.5) Если **y = cosx**, то **y` = – sinx** (4.6)

Производная постоянной равна нулю, т.е. если **y = c**, где **c** – постоянная, то **c` = 0** (4.7)

Постоянный множитель можно выносить за знак производной, если **y = c f(x)**, где **c = const**, то **y` = cf `(x)** (4.8).

Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций, т.е. если $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, то $y` = \sum_{i=1}^{n} f`_i(x)$ (4.9)

($y = \sum_{i=k}^{n} P_i$ – символ суммы индексированных (нумерованных) величин, где **i** – текущий индекс, **к** и **n** – нижний и верхний пределы суммы – т.е. номера первой и последней складываемых величин.)

Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй, т.е. если **y = uv**, то

y` = u`v + uv` (4.10).

Производная дроби (частного от деления двух функций) равна дроби, знаменатель которой есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель есть разность произведений производной числителя на знаменатель и производной знаменателя на числитель, т.е. если **y = u / v**, то $y` = \dfrac{u`v - v`u}{v^2}$ (4.11).

Используя приведенные соотношения можно получить производные других элементарных функций и составить таблицу производных. Приведем их, опуская доказательства.

Если $\mathbf{y = \log_a x}$, то $y` = \dfrac{1}{x \ln a}$ (4.12). Очевидно, $(\ln x)` = \dfrac{1}{x}$ (4.12`)

Если **y = tg x**, то $y` = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (4.13). Если **y = ctg x**, то $y` = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ (4.14)

Если $\mathbf{y = a^x}$ **(a > 0)**, $\mathbf{y` = a^x \ln a}$ (4.15) и $\mathbf{(e^x)` = e^x}$ (4.15`)

Рассмотрим особенности нахождения производной от сложной функции - функции вида **y = F(u)**, где **u = f(x)**, или **y = F(f(x)**. Переменную **u** называют *промежуточным аргументом*.

Теорема: *Если функция **u = f(x)** имеет в некоторой точке **x** производную $\boldsymbol{u_x`}$ **= f `(x),** а функция **y = F(u),** имеет при соответсвующем значении и производную $\boldsymbol{y`_u}$ **= F(u)**, то сложная функция **y = F(f(x))** в указаной точке*

x *также имеет производную* $y'_x = F'_u(u)f'(x)$ *или* $y'_x = y'_u u'_x$ (4.16)
(Иначе – производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента).
Пример: $y = \sin x^2$ => $y = \sin u$, $u = x^2$, используя (4.16). (4.5) и (4.4) получим: $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$, $y'_x = 2x\cos x^2$.
Приведенное правило позволяет получить производную неявной функции т.е. функции, заданной уравнением **F(x, y) = 0** (4.17).
(Отметим, что если в (4.17) удастся привести уравнение к виду **y = f (x)**, то функция оказывается заданной в явном виде. Операция эта осуществима далеко не всегда).
Пример: $F(x, y) = \sin(x + y) - e^{(x-y)} = 0$. Дифференцируя обе части равенства по **x** и помня, что **y** есть функция от **x**, получим:

$$(1+y')\cos(x+y)-(1-y')e^{(x-y)}=0 \Rightarrow y'=\frac{e^{(x-y)}-\cos(x+y)}{e^{(x-y)}+\cos(x+y)}$$

В некоторых случаях, прежде чем найти производную, бывает удобно прологарифмировать уравнение, задающее функцию. Пусть $\mathbf{y = x^n}$. Прологарифмировав обе части равенства, получим **ln y = n ln x**, откуда $\frac{y'}{y}=\frac{n}{x} \Rightarrow y'=nx^{n-1}$ для произвольного действительного **n**. Выражение $\frac{y'}{y}=(\ln y)'$ называют логарифмической производной. (Отметим, что логарифмическое дифференцирование удобно применять при нахождении производных от произведения большого количества функций и показательно-степенных функций).

Найдем производную *обратной функции*. Пусть **y = f(x)** возрастающая или убывающая функция, определенная на некотором интервале **(a, b), (a < b)**. (Если большему значению аргумента соответствует большее значение функции $\mathbf{(f(x_2) > f(x_1)}$ при $\mathbf{x_2 > x_1)}$ ее называют *возрастающей*. Если $\mathbf{f(x_2) < f(x_1)}$ при $\mathbf{x_2 > x_1}$ функция *убывающая*). Для определенности (без потери общности) рассмотрим возрастающую функцию. Из определения ее очевидно, что значения **x** и **y** связывает *взаимно однозначное соответствие*. Рассматривая **y** как аргумент, а **x** как функцию, свяжем их значения соотношением **x = φ(y).** Эта функция является обратной для функции **y = f(x)**, а функция **y = f(x)** обратной для **x = φ(y).** Эти функции имеют один и тот же график и функция **x = φ(y)** находится как решение уравнения **y = f(x)** относительно **x**. Отметим, что:

1. *Если возрастающая (убывающая) функция непрерывна на отрезке* ***[a, b]****, причем* ***f(a) = c, f(b) = d****, то обратная функция определена и непрерывна на отрезке* ***[c, d];***

*2. Если функция **y = f(x)** не является ни возрастающей, ни убывающей на некотором интервале, то она может иметь несколько обратных функций (однозначных).*

Пример: $y = x^2$ на интервале (–∞, ∞) не является ни возрастающей, ни убывающей и имеет две обратные функции: $x = \sqrt{y}$ (0 ≤ x < ∞) и $x = -\sqrt{y}$ (- ∞ < x < 0).

Теорема: *Если для функции **y = f(x)** существует обратная функция **x = φ(y)**, которая в рассматриваемой точке **y** имеет производрую **φ`(y)** отличную от нуля, то в соответствующей точке **x** функция **y = f(x)** имеет производную **f `(x)** равную **1 / φ`(y)**, т.е. справедлива формула*

$$\mathbf{f`(x) = 1 / \varphi`(y)} \qquad (4.18).$$

Используя полученное правило, пополним таблицу производных:

Если **y = arcsin x**, то $y` = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (4.19) Если **y = arccos x**, то $y` = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (4.20)

Если **y = arctg x**, то $y` = \frac{1}{1+x^2}$ (4.21) Если **y = arcctg x**, то $y` = \frac{-1}{1+x^2}$ (4.22)

Примеры:

$$y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2) => y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$$

$$y` = (x^{\frac{3}{2}})(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)` = [см.(4.4),(4.8),(4.7)]$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}}\frac{3}{x} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x - 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x$$

$y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ используя (4.11) найдем

$$` = \frac{(\sin x - \cos x)`(\sin x + \cos) - (\sin x - \cos)(\sin x + \cos x)`}{(\sin x + \cos x)^2} = \text{[см. (4.5) и (4.6)]} =$$

$$` = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (-\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x} = \frac{2}{1+\sin 2x}$$

(Напомним, что $\sin^2x + \cos^2x=1$; sin2x = 2sinx cosx)

$y = x^x$. Прологарифмировав обе части равенства по основанию е получим lny = xlnx. Продифференцировав обе части равенства, найдем (lny)` = (xlnx)` => y`/ y = lnx + 1 => y` $= x^x$ (lnx + 1).

Выведем формулу (4.19). Итак, y = arc sin x => sin y = sin arc sin x => x = sin y. Воспользуемся (4.18):

$$y`= \frac{1}{x`_y} \Rightarrow y`= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = [\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}] = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

В ряде случаев функциональную зависимость (линию, поверхность) удобно задавать в *параметрической форме*: каждая неизвестная (координата точки) представляется функцией *параметра* **t**, причём каждому значению параметра соответствуют координаты некоторой точки (значения неизвестных, удовлетворяющих обычному уравнению зависимости); $x = \varphi(t), (1)$, $y = \psi(t) (2)$, и т.д. (Пример - параметрические уравнения прямой в разделе 2.2.1)

(От параметрического задания функции легко перейти к привычному $y = f(x)$, исключив из уравнений параметр **t** - разрешив уравнение (1) относительно **t** и подставив его в (2)). Производная функции, заданной параметрически, определяется выражением: $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$ (4.23)

Рассмотрим понятие производных высшего порядка. Производную от функции **y = f(x)** (ее называют первой), обозначаемую **y` = f `(x) = dy / dx** можно рассматривать как новую (по отношению к **f(x)**) функцию той же переменной. Эта функция, в свою очередь, может быть продифференцирована, т.е. найдена первая производная от первой производной исходной функции **f(x)**; **(y`)`=(f`(x))`.** Она называется второй производной, обозначается **y``** = **f ``(x)** = $\mathbf{d^2y / dx^2}$ и является производной высшего (второго) порядка. Очевидно, что таким же образом может быть определена производная **n–го** порядка (**n** $\in$ **Z**), обозначаемая $\mathbf{y^{(n)} = f^{(n)}(x)}$ (**n** – берется в скобках, чтобы не путать с показателем степени). Иногда порядок производной обозначают римскими цифрами.

Контрольные вопросы.

1) В чём состоит геометрический, механический смысл производной?

2) Исходя из определения $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ доказать, что $\left(e^x\right)' = e^x$.

3) Может ли функция иметь производную в точке, в которой она разрывна?

4) Функция в данной точке дифференцируема. Следует ли отсюда, что она непрерывна в этой точке?

5) Сформулируйте общие правила дифференцирования функции и напишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.

6) Как находится производная сложной функции?
7) Как найти производную неявной функции?
8) Что называют обратной функций?
9) Как находится производная обратной функции $x = \varphi(y)$ для данной *x=f(x)*, при каких условиях?
10) Как находится производная функции, заданной параметрически?
11) Дать понятие производных высшего порядка.

4.2. Дифференциал.

Если функция **y = f(x)** дифференцируема на некотором отрезке, то производная $y` = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x)$ принимает определенные значения. Отношение **Δy/Δx** при **Δx → 0** можно представить в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f`(x) + \alpha,$ где **α → 0** при **Δx → 0**. Умножая равенство на **Δx** получим **Δy = f \`(x) Δx + αΔx**. В общем случае **f \`(x) ≠ 0** и произведение **f \`(x) Δx** есть величина бесконечно малая одного порядка с **Δx**, а **αΔx** – бесконечно малая высшего порядка. Первое из двух слагаемых (**f\`(x) Δx**) называют главной частью приращения функции, линейной относительно **Δx**, или *дифференциалом функции* и обозначают **dy = f \`(x) Δx** .
Пусть **y = x**. Очевидно, что **dy = dx** и дифференциал независимого переменного совпадает с приращением и можно записать **dy = f \`(x)dx** (4.24).
Производную функции **f \`(x) = dy / dx** можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.
То, что в выражении **Δy = dy + αΔx** второе слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка, позволяет в приближенных вычислениях использовать следующий алгоритм:
Δy ≈ f \`(x)Δx => f (x+Δx) – f (x) ≅ f \`(x) Δx => f (x + Δx) ≅ f(x) + f \`(x) Δx (4.25.),
причем вычисления тем точнее, чем меньше величина **Δx**.

Пример: Вычислим приближенное значение $\sin 46^0$;
$46^0 = 45^0 + 1^0 = \pi/4 + \pi/180$; Из (4.25) очевидно, что $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cos x$ и $\sin 46^0 = \sin(\pi/4 + \pi/180) \cong \sin \pi/4 + (\pi/180)\cos \pi/4 \approx 0{,}7194$.

Из (4.24) следует, что большинство теорем и формул, относящихся к производной, справедливы и для дифференциалов. Так
d(u + v) = du + dv (4.26), **d(uv) = vdu + udv** (4.27) и т.д.

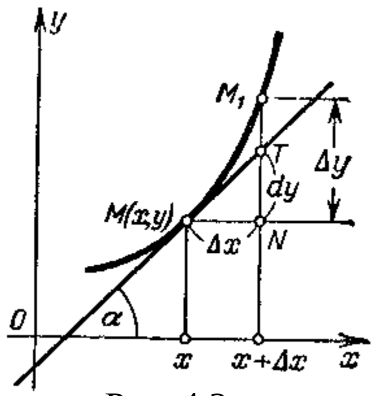


Рис. 4.2

Геометрический смысл дифференциала легко уяснить из рис. 4.2. Возьмем на кривой **y = f(x)** произвольную точку **M(x, y)** и проведем касательную. Приращению **Δx** аргумента соответствует приращение **Δy** функции и точка **M_1(x + Δx, y + Δy)**. Из треугольника **MNT** находим **NT = MN tg α = Δx f \`(x) = dy** (по определению дифференциала), т.е. геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке **M (x,y)**.

Аналогично тому, как определяются производные высших порядков, определяются и их дифференциалы. Дифференциал от дифференциала называют дифференциалом второго порядка (вторым дифференциалом) и обозначают $\mathbf{d(dy) = dy^2}$. По определению дифференциала $\mathbf{d^2y = [f\,\grave{}(x)\,dx]\grave{}\,dx = f\,\grave{}\grave{}(x)(dx)^2}$, так как **dx** от **x** не зависит. Очевидно, таким же образом определяется дифференциал любого порядка $\mathbf{d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n}$; принято записывая порядок дифференциала опускать скобки, т.е окончательно общее выражение примет вид

$$\mathbf{d^ny = f^{(n)}(x)dx^n} \qquad (4.24')$$

Контрольные вопросы.

1) Что называют дифференциалом функции?

2) Где применяется $\Delta y \approx dy$ или $\Delta y \approx f'(x)\cdot\Delta x$?

3) Как находятся дифференциалы высших порядков?

4.3. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя. Формула Тейлора.

Приведем (без доказательств) несколько теорем, утверждения которых играют большую роль в аппарате дифференциального исчисления.

1. Теорема Ролля о корнях производной. *Если функция **f(x)** непрерывна на отрезке **[a, b]**, дифференцируема в интервале **(a, b)** и **f(a) = f(b)**, то в интервале **(a, b)** найдется хотя бы одно значение **x = ξ**, при котором **f \`(ξ) = 0**.* Если **f(a) = f(b) = 0** (частный случай), то теорема Ролля означает, что между двумя корнями функции содержится хотя бы один корень ее производной. Геометрическое истолкование: *если непрерывная на отрезке **[a, b]** кривая имеет в каждой точке касательную, не параллельную оси **Oy**, и равные ординаты в точках **a** и **b**, то найдется по крайней мере одна точка **ξ (a < ξ < b)** такая, в которой касательная к кривой параллельна оси **Ox (tgα = f \`(ξ) = 0)**.*

2. Теорема Лагранжа (о конечных приращениях): *Если функция **f(x)** непрерывна на отрезке **[a, b]** и дифференцируема в интервале **(a, b)**, то в*

этом интервале найдется хотя бы одно значение ***x* = *ξ***, *при котором выполяется равенство* ***f(b) – f(a) = (b – a) f `(ξ)***.
Геометрический смысл: *на дуге **AB** непрерывной кривой **y = f(x)** имеющей в каждой точке касательную не параллельную оси **Oy** найдется хотя бы одна точка **ξ (a < ξ < b)** такая, в которой касательная параллельна хорде **AB***.
3. Теорема Коши (об отношении приращений двух функций): *Если функции **f(x)** и **φ(x)** непрерывны на отрезке **[a, b]** и дифференцируемы в интервале **(a, b)**, причем **φ`(x) ≠ 0**, то в этом интервале найдется хотя бы одно значение **x = ξ ( a < ξ < b)** такое, что* $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f`(\xi)}{\varphi`(\xi)}$. Теорема Коши позволяет доказать два важных для решения задач теории пределов утверждения, известных под названием правила Лопиталя.

Теорема 1. *Пусть функции **f(x)** и **φ(x)** на некотором отрезке **[a, b]** удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль точке **a** т.е.*
f(a) = φ(a) = 0; *тогда, если существует* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f`(x)}{\varphi`(x)}$, *то существует и*
$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$,
причем $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f`(x)}{\varphi`(x)}$. Это правило позволяет во многих случаях раскрыть неопределенности вида **0/0** (такие, например, как первый замечательный предел), причем: а) теорема справедлива и в случае, когда **f(x)** и **φ(x)** неопределены при **x = a**, но $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$; б) если **f `(a) = φ`(a) = 0**, а функции **f `(x)** и **φ`(x)** удовлетворяют условиям теоремы Коши, то, применяя правило Лопиталя дважды, получим $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{Y(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f``(x)}{\varphi``(x)}$; в) процедура (при выполнении соответствующих условий) может быть повторяема до получения результата.
Правило справедливо и в случае $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$.

Теорема 2. *Пусть функции **f(x)** и **φ(x)** удовлетворяют условиям теоремы Коши при всех **x ≠ a** в окресности точки **a**,* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, *и пусть существует предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f`(x)}{\varphi`(x)}=A$. *Тогда существует и предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f`(x)}{\varphi`(x)}=A \qquad (4.28).$$

Это правило позволяет раскрывать неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Оно справедливо и в случаях: а) **A = ∞**; б) **x → ∞**.
Во многих случаях это правило позволяет раскрыть неопределенности и других видов, применив предварительно те или иные преобразования. Так, неопределенности вида **0** · ∞ или ∞ – ∞ приводят к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований данной функции; в случае неопределенности вида $\mathbf{0^0}$, $\infty^{\mathbf{0}}$, или $\mathbf{1}^{\infty}$ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.
Примеры:

1. Неопределенность вида (∞-∞) : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln x}=$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя). $=$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0};\text{правило Лопиталя}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$
2. Неопределенность вида 0^0: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$. Обозначим $y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.
Прологарифмируем обе части равенства $\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\pi-2x)\cos x=$ (неопределенность вида ∞·0) $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\pi-2x)}{\frac{1}{\cos x}}=\left(\frac{0}{0};\right.$ правило Лопиталя$\left.\right)=$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{-2}{\pi-2x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}=-2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{-2(2x-\pi)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2x-\pi}=\left(\frac{0}{0};\right.$$
правило Лопиталя$\left.\right)$ $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin 2x}{2}=0$; $\ln y=0$; $y=e^0=1$ т.е. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}=1$;

Формула Тейлора. Нередко вычисление значений функции **y = f(x)** при конкретных значениях **x** оказывается затруднительным. Один из эффективных приемов в этом случае – замена функции степенным многочленом (полиномом) вида: $\mathbf{P_n(x-a)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\ldots+C_n(x-a)^n}$ (1) значение которого при **x = a** равно значению функции **f(a)**.

Если функция **y = f(x)** дифференцируема **(n + 1)** раз в некоторой окрестности точки **a**, то коэффициенты C_i можно определить так: потребуем, чтобы в точке **a** выполнялись условия $f_{(a)}^{(i)} = P_n^{(i)}(a)$, т.е. чтобы в точке **a** были равны значения соответствующих производных. Получим:
f(a)= C_0; f \`(a) = $C_1$; f \`\`(a) = $2C_2 = C_2 \cdot 2!$ …… ; $f^{(n)}$(a) = $C_n \cdot n!$
где **n! = n(n –2)(n –3) … (n – k) … 3 · 2 · 1** (символ **n!** называется **n** – факториал). Отсюда легко находятся все $C_i = \dfrac{f_{(a)}^{(i)}}{i!}$ (4.29).

Подставив в (1) получим: $P_n(x) = f(a) + f\grave{}(a)(x-a) + \dfrac{f\grave{}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
(4.30)
Очевидно, что совпадая при **x = a**, в других точках значения **f(x)** и $\mathbf{P_n(x)}$ отличаются. Обозначив это отличие через $\mathbf{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$ получим:

$$f(x) = f(a) + \frac{f\grave{}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f\grave{}\grave{}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \qquad (4.31)$$

Величину $\mathbf{R_n(x)}$ называют остаточным членом. Для значений **x**, при которых остаточный член мал, многочлен $\mathbf{P_n(x)}$ дает приближенное значение **f(x)**. Оценить величину $\mathbf{R_n(x)}$ при различных **x** позволяет выражение

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f_{(\xi)}^{(n+1)}, \text{ где } \mathbf{a < \xi < x} \qquad (4.32).$$

(Форма Лагранжа для остаточного члена). Величину ξ можно представить в виде: $\mathbf{\xi = a + \theta(x - a)}$**,** где $\mathbf{0 < \theta < 1}$ и тогда (4.32) примет вид

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f_{[a+\theta(x-a)]}^{(n+1)} \qquad (4.32\grave{})$$

(Очевидно, что, если **x** расположено в достаточно малой окрестности **a**. величина $\mathbf{R_n}$ при достаточно большом **n** может быть достаточно мала, чтобы обеспечить требуемую точность).
Выражение (3.31), называется формулой Тейлора. Частный случай ее при **a = 0** $f(x) = f(0) + \dfrac{f\grave{}(0)}{1!}x + \dfrac{f\grave{}\grave{}(0)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{f_{(0)}^{(n)}}{n!}x^n + R_n$ (4.31\`), где $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f_{(\theta x)}^{(n+1)}$, $\mathbf{0 < \theta < 1}$ называется формулой Маклорена. Используя правила дифференцирования, несложно получить разложения многих функций по формуле Маклорена. Приведем некоторые из них:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n; \qquad R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (4.33)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2m-1}(-1)^{m+1}}{(2m-1)!} + R_{2m}; \qquad R_{2m} = (-1)^m \sin\theta x \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \qquad (4.34)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}; \qquad R_{2m+1} = (-1)^{m+1} \cos\theta x \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \quad (4.35)$$

Формула Тейлора может быть применена и для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Функции в числителе и знаменателе дроби «раскладываются» по формуле Тейлора и, после некоторых преобразований, предел вычисляется.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} =$ (с учетом соотношений (4.34) и (4.35)) =

$$\lim_{x\to 0} \cdot \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots}{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{x^2}{5\cdot 4} + \frac{x^4}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4} - \cdots\right)}{\frac{x^3}{3!}\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5\cdot 4} + \cdots\right)} = \left(\frac{x^3}{3!}\right.$$

сокращается; все члены сумм в числителе и знаменателе содержание **x** (включая остаточные члены в (4.34) и (4.35)) в пределе равны нулю) = 1.

Контрольные вопросы.

1) Какую роль играют в аппарате дифференциального исчисления теоремы Роля, Лагранта, Коши?

2) Можно ли применять правило Лопиталя при неопределённости вида $0;\infty$?

3) Можно ли с помощью формулы Тейлора приближённо представить (аппроксимировать) произвольную функцию *f(x)* в виде многочлена?

4) Как выглядит формула Маклорена?

5) Можно ли с помощью формулы Тейлора для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$?

4.4. Исследование функций с помощью производных.

1. Выяснить, является ли функция *возрастающей (убывающей*) и найти области возрастания (убывания) функции можно, используя теоремы:

Если функция ***f(x)****, имеющая производную на отрезке* ***[a, b]*** *возрастает на этом отрезке, то ее производная на отрезке* ***[a, b]*** *неотрицательна, т.е.* ***f `(x)*** $\geq$ ***0***.

*Если функция **f(x)** непрерывна на отрезке **[a, b]** и дифференцируема в интервале **(a, b)**, причем **f `(x) > 0** для **a < x < b**, то эта функция возрастает на отрезке **[a, b]**.*
*Если **f(x)** убывает на отрезке **[a, b]**, то **f `(x) ≤ 0** на этом отрезке.*
*Если **f `(x) < 0** в интервале **(a, b)**, то **f(x)** убывает на отрезке **[a, b]**.*
Полагаем, что **f(x)** непрерывна на **[a, b]** и дифференцируема на **(a, b)**.
Геометрическая интерпретация: если функция возрастает, то касательная к ее графику образует острый угол с осью **Ox**; если функция убывает – угол наклона касательной – тупой.

2. *Экстремумы*. Говорят, что функция **f(x)** имеет *максимум **(max)*** в точке $\mathbf{x_0}$, если значение функции в этой точке больше, чем значения во всех точках малой окресности ее, т.е. если при достаточно малом **h > 0** выполняются неравенства: $\mathbf{f(x_0 - h) < f(x_0)}$ и $\mathbf{f(x_0 + h) < f(x_0)}$.
Функция **f(x)** имеет *минимум **(min)*** в точке $\mathbf{x_0}$, если значение функции в этой точке меньше, чем значения во всех точках малой окрестности ее, т.е. если при достаточно малом **h > 0** выполняются неравенства:

$$\mathbf{f(x_0 - h) > f(x_0)} \text{ и } \mathbf{f(x_0 + h) > f(x_0)}.$$

Максимум (минимум) функции называется ее *экстремумом*. Точки максимума (минимума) – *точками экстремума* функции.
Рассмотрим метод отыскания экстремумов.
Необходимое условие существования экстремума можно сформулировать так*: Если функция **f(x)** в точке $\mathbf{x_0}$ имеет экстремум, то производная **f `($\mathbf{x_0}$)** обращается в нуль или не существует*.
Это означает, что функция *может* иметь экстремум *только* в этих точках, но может и не иметь его в них. Точки эти (в которых производная равна нулю или не существует) называются критическими точками первого рода.
Достаточное условие экстремума можно сформулировать так:
*Если $\mathbf{x_0}$ – критическая точка функции **f(x)** и при произвольном достаточно малом **h > 0** выполняется неравенство **f `($\mathbf{x_0 - h}$) > 0, f `($\mathbf{x_0 + h}$) < 0**, то функция **f(x)** имеет в точке $\mathbf{x_0}$ максимум; если **f `($\mathbf{x_0 - h}$) < 0, а f `($\mathbf{x_0 + h}$) > 0**, то функция **f(x)** в точке $\mathbf{x_0}$ имеет минимум.* (Если знаки **f `($\mathbf{x_0 - h}$)** и **f `($\mathbf{x_0 + h}$)** одинаковы, то функция **f(x)** в точке $\mathbf{x_0}$ экстремума не имеет). (Наличие экстремума можно определить и с помощью второй производной. Если $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум-max, если $f''(x_0)<0$ и min, если $f''(x_0)>0$.)
Отметим, что: а) функция, определенная на отрезке, может достигать экстремума только во *внутренних* точках этого отрезка; б) экстремум функции не обязательно является наибольшим (наименьшим) значением функции на рассматриваемом отрезке.

3. *Наибольшее и наименьшее* значения функции, непрерывной на отрезке **[a, b]** можно отыскать, выбрав их из значений функции на концах и в критических точках внутри этого отрезка.

4. *Выпуклость и вогнутость* графика функции.

Говорят, что кривая $\mathbf{y = f(x)}$ выпукла на интервале **(a, b)**, если все точки ее лежат *ниже* любой ее касательной, проведенной на этом интервале, (*вогнутой* – если все ее точки лежат *выше* любой касательной, проведенной на этом интервале). Условия выпуклости (вогнутости) графика функции на интервале **(a, b)** можно сформулировать так: *Если во всех точках интервала **(a, b)** вторая производная функции **f(x)** отрицательна, т.е.* $f''(x) < 0$, *то кривая* $y = f(x)$ *на этом интервале выпукла; если вторая производная положительна, т.е* $f''(x) > 0$ *– кривая вогнута.*

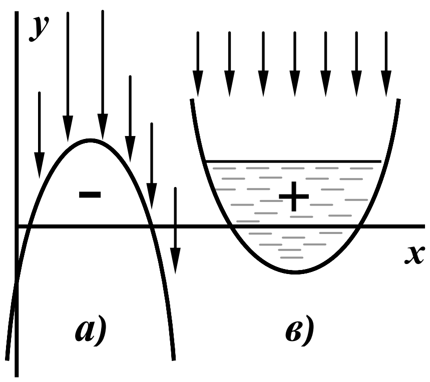


Рис. 4.3

Выпуклость и вогнутость графика функции наглядно иллюстрируются удобным для запоминания “*правилом дождя*”, поясняемым рис. 4.3. Заключается оно в следующем: если *вторая производная отрицательна*, то говорят, что “*нет дождя*” – случай а) на рисунке, кривая $\mathbf{y_1 = f_1(x)}$ – выпукла, «*струи дождя*» скатываются с выпуклой кровли и под ней сухо.

Если *вторая производная положительна,* то говорят, что «*есть дождь*» – случай б) на рисунке – кривая $\mathbf{y_2 = f_2(x)}$ вогнута и «*струи дождя*» собираются в чаше.

Точка, отделяющая вогнутую часть графика от выпуклой, называется *точкой перегиба*. Можно доказать справедливость утверждения: *Если* $f''(a) = 0$ *или* $f''(a)$ *не существует и при переходе через значение* $x = a$, $f''(x)$ *меняет знак, то точка кривой* $y = f(x)$ *с абсциссой* $x = a$ *есть точка перегиба.*

В этой формуле объединены необходимое (равенство нулю или «несуществование» второй производной в некоторой точке) и достаточное (перемена знака второй производной) условия наличия точки перегиба.

Точки, в которых выполняются указанные *необходимые* условия, называются *критическими точками второго рода*.

Отметим, что интервалы выпуклости и вогнутости могут быть разделены и точкой разрыва функции, не являющейся точкой перегиба.

5. *Асимптоты*. Прямая **L** называется асимптотой кривой $\mathbf{y = f(x)}$, если расстояние точки **M(x, y)** кривой от прямой **L** стремится к нулю при

неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Прямая **x = a** является *вертикальной асимптотой* кривой **y = f(x)**, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ (подразумевается, что исследуются и левый и правый пределы, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$).

Прямая **y = b** является *горизонтальной асимптотой* кривой **y = f(x)**, если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

В общем случае кривая может иметь и *наклонную асимптоту*, уравнение которой можно записать в виде **y = kx + b**. Определим значения **k** и **b** с помощью рис.4.4 **M(x, y)** – точка на кривой, **N(x, y)** – точка на асимптоте.

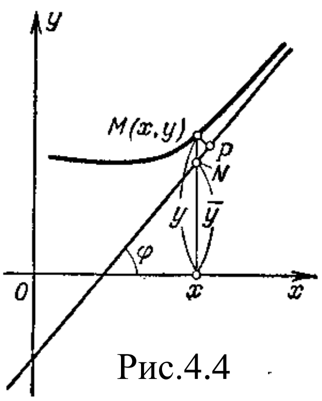


Рис.4.4

Отрезок **MP** – расстояние от точки **M** до асимптоты. По определению $\lim\limits_{x\to\infty} MP=0$. Из треугольника **MNP** определим $NM=\dfrac{MP}{\cos\varphi}$. Т.к. **φ = arctg к** – постоянная,

то $\lim\limits_{x\to\infty} MP=\lim\limits_{x\to\infty} MN\cos\varphi=\cos\varphi\lim\limits_{x\to\infty} MN=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} MP=0$. Но **NM = |y – $\bar{y}$| = |f(x) – (kx +b)|**, откуда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$. Вынесем **x** за скобки:

$\lim\limits_{x\to\infty} x[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}]=0$. При постоянном **b** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x}=0$, и, следовательно,

$\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{f(x)}{x}-k]=0$, откуда $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Зная **k** находим **b**: $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

Т.о. прямая **y = kx + b** является наклонной асимптотой кривой y = f(x), если существуют пределы $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (4.36) и $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ (4.37)

или $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (4.36`) и $b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]$ (4.37`).

(Если хотя бы один из каждых двух пределов не существует, то кривая наклонных асимптот не имеет).

Рекомендуемая схема построения графиков по характерным точкам:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти (если они существуют) точки разрыва и установить характер разрыва; найти асимптоты кривой.
5. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.
6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба.

Отметим, что иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из особенностей функции. Может быть пополнен и перечень исследуемых характеристик (например вопросом о периодичности функции).

Контрольные вопросы.

1) Как найти интервалы возрастания и убывания функции?
2) Что называют точками экстремума функции и как находятся?
3) Как найти наибольшее и наименьшее значение функции?
4) Как найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба?
5) Что называют асимптотой кривой *y=f(x)*?

4.5. Элементы дифференциальной геометрии.

Углом смежности дуги плоской линии называют угол **φ** между касательными, проведёнными к этой линии на концах дуги. Отношение угла смежности **φ** к длине дуги **S** называют *средней кривизной дуги* $\kappa_{cp} = \varphi / S$. Кривизной линии в данной точке называют предел средней кривизны при неограниченном сближении концов дуги $\kappa = \lim\limits_{S \to 0} \varphi / S$. (Очевидно, что кривизна прямой равна **0**, окружности (радиуса **r**) – $\frac{1}{\mathrm{r}}$).

Если линия задана своим уравнением $y = f(x)$, то $\kappa = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}}$;

в полярных координатах: $\rho = f(\varphi)$, $\kappa = \frac{\left|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''\right|}{\sqrt{(\rho^2 + (\rho')^2)^3}}$; параметрически:

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \kappa = \frac{\left|x_t' y_t'' - y_t' x_t''\right|}{\sqrt{((x_t')^2 + (y_t')^2)^3}}$. *Радиусом кривизны* называют величину, обратную кривизне: $R = 1 / |\kappa|$; *окружностью кривизны* данной линии в точке В предельную окружность проходящую через точки **А, В, С** кривой при $A \to B$ и $C \to B$. Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны, а центр этой окружности называют *центром кривизны*. (Он находится на нормали к линии в точке **В** в сторону вогнутости линии).

Координаты ζ и η центра кривизны линии $y = f(x)$ определяются соотношениями $\zeta = x - \frac{y'(1+(y')^2)}{y''}$ и $\eta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$. Геометрическое место центров кривизны линии называют её *эволютой*.

Если кривые $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют общую точку **$M(x_0,y_0)$**, а касательные к ним в этой точке *не совпадают*, т.е. $f(x_0)=\varphi(x_0)$, но $f'(x_0)\neq\varphi'(x_0)$, то говорят, что кривые *пересекаются* в этой точке. Если кривые имеют общую точку и касательные к ним в этой точке совпадают, т.е. $f(x_0)=\varphi(x_0)$ и $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$, то говорят, что кривые касаются в точке **M**. Если же в общей для кривых точке равны все их производные до порядка **n** включительно, то говорят, что кривые имеют касание **n**-го порядка. (Если $n \geq 2$, то кривые имеют в этой точке общую касательную и одинаковую кривизну).

Пространственную кривую можно задать параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ (пример - параметрические уравнения прямой в разделе 1.7.1) или векторным уравнением $\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{\kappa}$. Это уравнение задаёт $\bar{r}$ как *вектор - функцию* скалярного аргумента **t**, т.е. $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Соответствующую кривую называют *годографом* вектора $\bar{r}$.

Производная вектор - функции по скалярному аргументу **t** - новая вектор- функция, определяемая равенством $\bar{r}'_t = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ и может вычисляться по формуле $\bar{r}'_t = x'_t\cdot\bar{i} + y'_t\cdot\bar{j} + z'_t\cdot\bar{\kappa}$. Она определяет вектор, направленный по касательной к годографу в сторону возрастания параметра **t**. (Если **t**- время, то $\bar{r}'_t$- скорость, а $\bar{r}''_t$- ускорение конца вектора).

Правила дифференцирования вектор - функции скалярного аргумента:

1. Если $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3$, то $\bar{r}'_t = \bar{r}'_1 + \bar{r}'_2 + \bar{r}'_3$.
2. Если $\bar{c}$ - постоянный вектор, то $\bar{c}'_t = 0$.
3. Если $\lambda = \lambda(t)$ (скалярная функция t), то $(\lambda\bar{r})' = \lambda'_t\bar{r} + \lambda\bar{r}'_t$.
4. $(\bar{r}_1\cdot\bar{r}_2)'_t = \bar{r}'_1\cdot\bar{r}_2 + \bar{r}_1\cdot\bar{r}'_2$.
5. $(\bar{r}_1\times\bar{r}_2)'_t = \bar{r}'_1\times\bar{r}_2 + \bar{r}_1\times\bar{r}'_2$.

Уравнения касательной к кривой $\bar{r} = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j} + z(t)\cdot\bar{\kappa}$ в точке **$M_0(x_0,y_0,z_0)$**

имеют вид: $\frac{x-x_0}{x'_0} = \frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{z-z_0}{z'_0}$, где $x'_0,\ y'_0,\ z'_0$- производные функций $x(t),\ y(t),\ z(t)$ в точке t_0.

Уравнение *нормальной плоскости*, проходящей через точку касания перпендикулярно касательной, имеет вид: $x'_0(x-x_0) + y'_0(y-y_0) + z(z-z_0) = 0.$

Дифференциал дуги пространственной кривой $ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt$.
В произвольной точке пространственной кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$ можно провести три ортогональных единичных вектора: *касательной* $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\bar{r}_t'}{|\bar{r}_t'|}$, *главной нормали* $\bar{\nu} = \frac{\bar{\tau}_s'}{|\tau_s'|}$ и *бинормали* $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$ (им соответствуют вектора касательной $\bar{T} = \bar{r}_t'$, бинормали $\bar{B} = \bar{r}_t' \times \bar{r}_t''$ и главной нормали $\bar{N} = \bar{B} \times \bar{T}$).
Плоскость, содержащую $\bar{\tau}$ и $\bar{\nu}$ называют *соприкасающейся*, содержащую $\bar{\nu}$ и $\bar{\beta}$ - *нормальной*, $\bar{\beta}$ и $\bar{\tau}$ - *спрямляющей*. Трёхгранник с вершиной в точке **M**, образованный этими тремя плоскостями, называют *сопровождающим трёхгранником* пространственной кривой. Её *кривизной* в точке **M** называют число $k = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi}{\Delta S}$, где φ - угол поворота касательной (угол смежности) на дуге MN, ΔS - длина этой дуги. $k = \left|\bar{r}_t' \times \bar{r}_t''\right| : \left|\bar{r}_t'\right|^3$.

Кручением кривой в точке **M** называют число $\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S}$, где θ - угол поворота бинормали (угол смежности второго рода) на дуге MN, $\sigma = (\bar{r}_t' \cdot \bar{r}_t'' \cdot \bar{r}_t''') : \left|\bar{r}_t' \times \bar{r}_t''\right|^2$.

Контрольные вопросы.

1) Что называют углом смежности дуги плоской линии?
2) Какую величину называют радиусом кривизны, окружностью кривизны, центром кривизны?
3) Что является вектором – функцией скалярного аргумента?
4) Как выглядит уравнение касательной и кривой $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ в точке $M_0\,(x_0;\, y_0; z_0)$?
5) Что называют кручением кривой в точке?

Глава 5. Функции нескольких переменных.

5.1. Основные определения. Частные производные. Дифференциалы.

Представление о функции нескольких переменных могут дать простые примеры. Площадь прямоугольника **S = xy**. Если длины сторон **x** и **y** рассматривать как независимые переменные, то **S** – функция этих переменных. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}xy\sin\varphi$(**x** и **y** – стороны треугольника, **φ** – угол между ними) можно рассматривать как функцию трех независимых переменных.

Если каждой паре значений независимых друг от друга переменных величин **x** и **y** из некоторой области **D** соответствует определенное значение величины **z**, говорят, что **z** есть функция независимых переменных **x** и **y**, определенная в области **D**. Символическая запись: **z = f(x, y), φ(x, y)** и т.д.

Областью определения **D** функции называют совокупность значений **x** и **y**, при которых функция **z = f(x, y)** существует**.** Геометрически это некая совокупность точек плоскости **xOy**, в простейшем случае часть ее, ограниченная замкнутой кривой (точки этой линии могут принадлежать (*замкнутая*), или не принадлежать (*открытая*) области определения). Геометрическое представление функции **z = f(x, y)** – поверхность в трехмерном пространстве. (Простейший случай – плоскость, уравнение которой можно представить в виде: **z = py + qx + t**, (см. (2.25)).

Аналогично определяется функция произвольного числа переменных (исключая вопрос о геометрической интерпретации). Далее, без потери общности, будем рассматривать функцию двух переменных.

Наглядное представление о геометрической интерпретации функций двух и трёх независимых переменных **z=f(x,y)** и **u=f(x,y,z)** могут дать линии и поверхности уровня соответственно. *Линией уровня* функции **z=f(x,y)** называется линия **f(x,y) = c** на плоскости **xOy,** в точках которой функция сохраняет постоянное значение. Примеры: линии уровня на географических картах, позволяющие получить представление о рельефе местности, изобары и изотермы в физике и метеорологии и т.д.

Поверхностью уровня функции **u=f(x,y,z)** называется поверхность **f(x,y,z)=c**, в точках которой функция сохраняет постоянное значение **u = c**. Позволяют, например, получить представление о распределении (поле) температур в части пространства (материальном теле).

Если одной из независимых переменных дать некоторое приращение, то, в общем случае, получит приращение и функция. Величины: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называют *частными приращениями* функции.

Величина $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ (обе независимых переменных получают приращения Δx и Δy) называется *полным приращением*.

Окрестностью радиуса **r** точки $M_0(x_0, y_0)$ называют совокупность всех точек **(x, y)**, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$ (всех точек, лежащих внутри круга радиуса **r** с центром в точке M_0).

Пусть дана функция **z = f(x, y)** определенная в области **D,** и точка $M_0(x_0, y_0)$, лежащая в области **D** или на ее границе.

*Число **A** называется пределом функции **f(x, y)** при стремлении точки **M(x, y)** к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для всякого $\varepsilon > 0$, найдется такое $r > 0$, что для всех точек **M(x, y)**, для которых выполняется неравенство $MM_0 < r$, справедливо неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Символическая запись:* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$. *Функция* **z = f(x, y)** *называется непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *если* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, *причем точка **M(x, y)** стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.* Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, непрерывна в области.

Частной производной по **x** от функции **z = f(x, y)** называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$z`_x = f`_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Аналогично определяется частная производная по **y**:

$$z`_y = f`_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Вычисляются производные по каждой переменной с помощью известных уже приемов, причем *другая переменная полагается постоянной*.

Рассмотрим полное приращение функции $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ в предположении, что функция **f(x, y)** в точке **x, y** имеет непрерывные частные производные.

Аналогично тому, как это было сделано для функции одной переменной, полное приращение можно представить в виде: $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ (1), где γ_1 и γ_2 стремятся к нулю, если Δx и Δy стремятся к нулю.

Сумма первых двух слагаемых линейна относительно Δx и Δy и при $z`_x \neq 0$ и $z`_y \neq 0$ представляет собой *главную часть приращения*, отличаясь от Δz на бесконечно малую высшего порядка относительно Δx и Δy. Такая функция называется *дифференцируемой* в данной точке, а линейная часть приращения называется *полным дифференциалом* и обозначается **dz** или **df**.

Таким образом, если функция **f(x, y)** имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал $dz = f_x`(x, y)\,\Delta x + f_y`(x, y)\,\Delta y$ (5.1)

или $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ (5.1\`), где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ называют дифференциалами независимых переменных. Как и в случае функции одной переменной, дифференциал можно применить для приближенного вычисления функции с помощью равенства, легко получаемого из (1):

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \qquad (5.2)$$

(с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно **Δx** и **Δy**).

Производные сложной и неявной функций

Пусть **z = F(u, v)**, где **u = f(x, y)** и **v = φ(x, y)**. Функция **F(u, v)** – сложная функция двух независимых переменных. Предположим, что функции **F(u, v)**, **f(x,y)** и **φ(x, y)** имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Можно показать, что в этом случае частные производные от функции **F(u, v)** по **x** и **y** определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

Если функция двух независимых переменных задана уравнением **F(x, y) = 0** (2) (неявная функция), причем функции **F(x, y), F_x\`(x, y)** и **$F_y$\`(x,y)** непрерывны в некоторой **r** окрестности точки **(x, y)**, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), а **F_y\`(x,y) ≠ 0** в этой точке, то функция **y** от **x** имеет производную $y\grave{}_x = \frac{-F\grave{}_x(x,y)}{F\grave{}_y(x,y)}$ (5.4).

В случае неявной функции трех независимых переменных, заданной уравнением **F(x, y, z) = 0** (2\`) аналогичные соотношения позволяют найти частные производные функции **z(x, y)**, определяемой уравнением (2\`):

$$z\grave{}_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \qquad z\grave{}_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (5.4\grave{}).$$

Пример: найти частные производные неявной функции **$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.**
Используя (5.4\`) получим $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$.

Производные и дифференциалы высших порядков определяются, по сути, так же, как и для функции одной переменной.

Вторые частные производные (частные производные от частных производных) обозначаются: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = z\grave{}\grave{}_{xx}$ (5.5). $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = z\grave{}\grave{}_{xy}$ (5.5\`)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = z\grave{}\grave{}_{yx}$ (5.5\`\`) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = z\grave{}\grave{}_{yy}$ (5.5\`\`\`)

В (5.5) функция дважды дифференцируется по **x**, в (5.5') - сначала по **x,** потом по **y,** в (5.5")- сначала по **y**, потом по **x** и в (5.5"')- дважды по **y**.
Аналогично находятся производные высших порядков, обозначаемые $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$, где **n** – номер порядка, **p** – число дифференцирований по **x**, а **n – p** число дифференцирований по **y**. Отметим, что если функция **z = f(x, y)** и ее частные производные определены и непрерывны в точке **M(x, y)** и некоторой ее окрестности, то в этой точке $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $(f''_{xy} = f''_{yx})$.
Это же утверждение, при выполнении соответствующих условий, справедливо для производных любых порядков т.е. $\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^{n-p}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-p} \partial x^p}$ и для функции любого числа переменных, например $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$ т.е. *смешанные* производные, отличающиеся лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны.
Дифференциалом второго порядка от функции **z = f(x, y)** называется дифференциал от ее полного дифференциала, т.е.

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \quad (5.6).$$

Аналогично может быть найден дифференциал произвольного порядка.

Контрольные вопросы.
1) Что называется линией уровня, поверхностью уровня функции $u=f(x,y,z)$?
2) Как определяются частные производные функции $z=f(x,y)$?
3) Что называют полным дифференциалом функции $z=f(x,y)$?
4) Как находятся производные сложной и неявной функции двух независимых переменных?
5) Что называется дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x,y)$?

5.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

Пусть поверхность задана уравнением **F(x, y, z) = 0**. Прямая называется касательной к поверхности в точке $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$, если она является касательной к какой – либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку $\mathbf{M_0}$. Если в точке $\mathbf{M_0}$ все три производные $\mathbf{F_x`}$, $\mathbf{F_y`}$, $\mathbf{F_z`}$ равны нулю или хотя бы одна из них не существует, то точка $\mathbf{M_0}$ называется *особой* точкой поверхности. Если в точке $\mathbf{M_0}$ все три производные существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля, то точка $\mathbf{M_0}$ называется *обыкновенной* точкой поверхности. Можно показать, что *все касательные прямые к данной* *поверхности в ее обыкновенной точке лежат в одной плоскости,* называемой *касательной плоскостью* к поверхности в точке $\mathbf{M_0}$. (В особых точках поверхности касательная плоскость может не существовать).

Касательная плоскость перпендикулярна вектору $\bar{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}$ и её уравнение имеет вид:

$$F_x`(x - x_0) + F_y`(y - y_0) + F_z`(z - z_0) = 0 \qquad (5.7).$$

Если уравнение поверхности задано в виде $\mathbf{z = f(x, y)}$, то уравнение касательной плоскости примет вид: $z - z_0 = f_x`(x - x_0) + f_y`(y - y_0)$ (5.7`).

Прямая, проведенная через точку $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ поверхности перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью к поверхности*. Ее направление определяется вектором $\bar{\mathbf{N}}$ и канонические уравнения примут вид:

$$\frac{x - x_0}{F_x`} = \frac{y - y_0}{F_y`} = \frac{z - z_0}{F_z`} \qquad (5.8),$$

а если уравнение поверхности задано в виде $\mathbf{z = f(x, y)}$, то

$$\frac{x - x_0}{F_x`} = \frac{y - y_0}{F_y`} = \frac{z - z_0}{-1} \qquad (5.8`).$$

Обсудим геометрический смысл частных производных и полного дифференциала функции $\mathbf{z = f(x, y)}$ $\mathbf{(F(x, y, z) = 0)}$. Проведем через точку $\mathbf{P(x_0, y_0, z_0)}$ плоскость $\mathbf{x = x_0}$. В сечении ее поверхностью (рис. 5.1) получим линию. Если дать приращение $\mathbf{\Delta y = MN = PT`}$ переменной $\mathbf{y}$ (при неизменном $\mathbf{x}$), функция получит приращение $\mathbf{\Delta_y z = TT`}$. Очевидно, предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = tg\beta$, где β – угол, образуемый касательной $\mathbf{PB}$ к кривой $\mathbf{PT}$ в точке $\mathbf{P_0}$ с положительным направлением оси $\mathbf{Oy}$. Аналогично, $\frac{\partial z}{\partial x} = tg\alpha$, где α – угол, образуемый касательной к сечению поверхности $\mathbf{z = f(x, y)}$ плоскостью $\mathbf{y = y_0}$ с положительным направлением оси $\mathbf{Ox}$. Если в (5.7') положим $\mathbf{x - x_0 = \Delta x}$, $\mathbf{y - y_0 = \Delta y}$, то оказывается, что правая часть ее – полный дифференциал функции $\mathbf{z = f(x, y)}$ и $\mathbf{z - z_0 = dz}$, т.е. полный дифференциал функции двух переменных в точке $\mathbf{M(x, y)}$, соответствующий приращениям $\mathbf{\Delta x}$ и $\mathbf{\Delta y}$ независимых переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, равен соответствующему

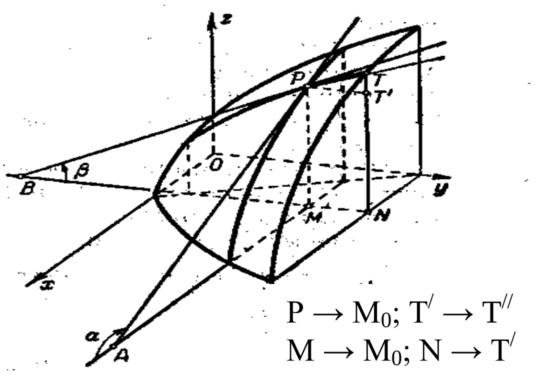


Рис. 5.1

приращению аппликаты **z** плоскости касательной к поверхности **z = f(x, y)**.

Контрольные вопросы.

1) Какая точка называется особой точкой поверхности?
2) Какая плоскость называется касательной к поверхности в точке?
3) Что называется нормалью к поверхности?
4) В чём состоит геометрический смысл частных производных и полного дифференциала функции *z=f (x,y)*?

5.3. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.

Пусть в пространстве **(x, y, z)** есть область **D**, в которой задана функция **u = u(x, y, z)**. В этом случае говорят, что в области **D** задано *скалярное поле*, т.е. каждая точка из этой области характеризуется скаляром (числом) **u**, однозначно связанным с ее координатами. (Если **u = f(x, y, z)** определяет температуру в точке **M (x, y, z)** – поле температур и т.п.).

Проведем из точки **M** области **D** (рис. 5.2) вектор $\bar{\mathbf{s}}$, направляющие косинусы которого **cosα, cosβ, cosγ** (**α, β, γ** – углы наклона вектора к осям **Ox. Oy, Oz**). Возьмем на **s** точку **M₁** $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Расстояние MM_1 определится выражением $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Полагаем, что функция и ее производные по **x, y, z** непрерывны в области **D**. Полное приращение функции представим как $\Delta u = u_x' \Delta x + u_y' \Delta y + u_z' \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$ (1) где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ стремятся к нулю при $\Delta s \to 0$.

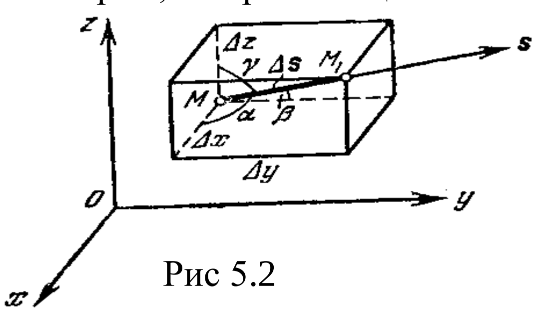


Рис 5.2

Разделим все члены (1) на **Δs**:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s} \quad (2).$$

Очевидно, что $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$, $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$ и (2) можно записать в виде:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma \quad (3).$$ в точке *(x,y,z)*

Предел отношения **Δu / Δs** при $\Delta s \to 0$ называется *производной от функции* **u = f(x, y, z)** *в точке* **(x, y, z)** *по направлению вектора* $\bar{\mathbf{s}}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$; $\lim\limits_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}$ (4). Переходя к пределу в (3) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (5.9)$$

Зная частные производные легко найти производную по любому направлению $\bar{\mathbf{s}}$. (Сами частные производные являются производными по направлению векторов $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$).

Градиентом функции **u = f(x, y, z)** в точке **M(x, y, z)** называется вектор, проекции которого на оси координат являются значениями частных производных функции в этой точке: $grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ (5.10)

Т.о. каждой точке области **D** задания функции **u** соответствует градиент **grad u**, т.е. в области **D** определено *векторное поле градиентов*. Можно показать, что если в области **D** задано скалярное поле **u = u(x, y, z)** и в нем определено поле градиентов (5.10), то $\frac{\partial u}{\partial s}$(производная по направлению $\bar{\mathbf{s}}$) равняется проекции вектора **grad u** на вектор $\bar{\mathbf{s}}$, т.е. $grad\ u \cdot \bar{s}_0 = \frac{\partial u}{\partial s}$ (5.11),

откуда, обозначив через **φ** угол между $\bar{\mathbf{s}}$ и **grad u**, получим

$|grad\ u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$ 5.11\`) или $пр_S grad\ u = \frac{\partial u}{\partial s}$ (5.11\`\`).

Отметим важное свойство градиента – производная в данной точке по направлению вектора $\bar{\mathbf{s}}$ имеет наибольшее значение и равна **|grad u|**, если направление $\bar{\mathbf{s}}$ совпадает с направлением градиента.

Контрольные вопросы.

1) Какое поле называется скалярным?
2) Как находится производная от функции *u=f(x,y,z)* в точке *(x,y,z)* по направлению вектора $\vec{s}$?
3) Что называют градиентом функции (поля) *u=f(x,y,z)* в точке *(x,y,z)*?

5.4. Экстремум функции двух независимых переменных.

Говорят, что функция **z = f(x, y)** имеет максимум в точке $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$, если $\mathbf{f(x_0, y_0) > f(x, y)}$ и минимум, если $\mathbf{f(x_0, y_0) < f(x, y)}$ для всех точек, достаточно близких к $\mathbf{M_0}$ и отличных от нее. Максимум и минимум называют экстремумами функции. Экстремумы можно определить и иначе: Положим $\mathbf{x = x_0 + \Delta x}$ и $\mathbf{y = y_0 + \Delta y}$, тогда $\mathbf{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f}$. Если **Δf > 0** при *всех* достаточно малых приращениях независимых переменных, то функция **f(x, y)** достигает минимума в точке $\mathbf{M_0}$. Если **Δf < 0** при *всех* достаточно малых приращениях аргументов, то функция **f(x, y)** достигает *максимума* в точке $\mathbf{M_0}$.

Определения эти справедливы для функций любого числа переменных. *Необходимое условие экстремума* можно сформулировать так:

*Если функция **z = f(x, y)** достигает экстремума при $x = x_0$, $y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка от **z** или обращается в нуль при этих значениях аргументов, или не существует.*

Действительно, если функция **z = f(x, y)** имеет в некоторой точке $\mathbf{M_0(x_0,y_0)}$ экстремум, в этой точке имеют экстремум и функции одной переменной $\mathbf{z = f(x_0, y)}$ и $\mathbf{z = f(x, y_0)}$ и, соответственно, их производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в этой точке или равны нулю или не существуют. Точки, в которых выполняются эти условия, называются критическими, и в этих точках может быть (а может и не быть) экстремум. Критические точки, в которых $\mathbf{z_x` = 0}$ и $\mathbf{z_y` = 0}$ называют *стационарными.* О наличии экстремума в стационарных точках можно во многих случаях судить на основании следующей теоремы:

Если в некоторой области, содержащей точку $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, функция имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно и точка $\boldsymbol{M_0}$ является стационарной, то в этой точке:

*Функция имеет максимум, если **Δ > 0**, а **A < 0** или **(C < 0)***

*Функция имеет минимум, если **Δ > 0**, а **A > 0** или **(C > 0)***

*Функция не имеет экстремума, если **Δ < 0***

*Если **Δ = 0** – сомнительный случай, требуется дополнительное исследование.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \qquad (5.12)$$

, где:

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}; \qquad B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}; \qquad C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

Контрольные вопросы.

1) Сформулируйте необходимое условие экстремума функции $z=f(x,y)$.

2) При каких условиях функция $z=f(x,y)$ имеет максимум, минимум и при каких условиях не имеет экстремума?

5.5. Метод наименьших квадратов.

В задачах практики нередки случаи, когда известны дискретные значения $\mathbf{y_i}$ некоторой функции при соответствующих значениях $\mathbf{x_i}$ аргумента на интервале **[a, b].** (Например, значения, полученные в ходе экспериментальных исследований). Для определения значений функции **y** в других точках интервала, можно подобрать функцию **φ(x)**, в некотором смысле близкую к **y(x)** – аппроксимирующую её на этом интервале. В простейшем случае- полиномом вида $\mathbf{\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}$, коэффициенты $\mathbf{a_i}$ которого определяются так, чтобы обеспечить необходимое приближение к функции **y**. (Число слагаемых определяется расположением точек $\mathbf{(x_i, y_i)}$ и требуемой точностью аппроксимации). Задача удовлетворительно решается методом наименьших квадратов, заключающемся в следующем. Рассмотрим сумму квадратов разностей значений функций **y** и **φ(x)** при известных значениях аргумента $\mathbf{x_i}$. $S=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi_{(x_i)}]^2$ Очевидно, что и **φ(x)** и **S** – функции параметров $\mathbf{a_i}$ (в данном случае – коэффициентов полинома). Необходимо так подобрать эти параметры, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальна, т.е. нужно найти минимум функции нескольких переменных $\mathbf{S(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)}$. Необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=0\,;\ \frac{\partial S}{\partial a_1}=0\,;\ldots;\ \frac{\partial S}{\partial a_n}=0 \qquad (5.13.).$$

и сводится к системе уравнений, число которых равно числу неизвестных параметров $\mathbf{a_i}$.

Пример: В ходе эксперимента получены значения $\mathbf{y_i}$ функции при четырех **(n = 4)** значениях аргумента $\mathbf{x_i}$ (см. таблицу)

x_i	1	2	3	5
y_i	3	4	2,5	0,5

Будем искать аппроксимирующую зависимость **φ(x)** функции **y(x)** в виде полинома первой степени **φ(x) = кx + b** $(\mathbf{a_0 = b,\ a_1 = к})$ (линейная зависимость).

Получим $S(\kappa,b)=\sum_{i=1}^{4}[y_i-(\kappa x_i+b)]^2=\sum_{i=1}^{4}[y_i-\kappa x_i-b]^2$.

Из условия (1) находим:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial \kappa}=0\\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial b}=0\end{cases} => \begin{cases}2\sum\limits_{i=1}^{4}[y_i-\kappa x_i-b](-x_i)=0\\ 2\sum\limits_{i=1}^{4}[y_i-\kappa x_i-b](-1)=0\end{cases} => \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{4}y_ix_i-\kappa\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2-b\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\ =0\\ \sum\limits_{i=1}^{4}y_i-\kappa\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\ -\sum\limits_{i=1}^{4}b=0\end{cases} => \begin{cases}21-39\kappa-11b=0\\ 10-11\kappa-4b=0\end{cases}$$

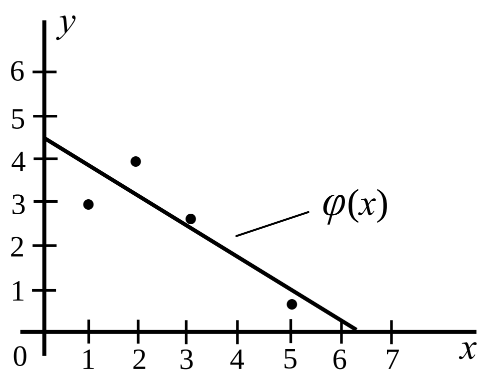


Рис. 5.3

(Используя таблицу, найдем:

$\sum_{i=1}^{4}y_ix_i=21$; $\sum_{i=1}^{4}x_i^2=39$; $\sum_{i=1}^{4}x_i=11$; $\sum_{i=1}^{4}y_i=10$)

k = -26/35, b=150/35.

Получена система двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решая которую найдем: $\kappa=-\dfrac{26}{35}$ и $b=\dfrac{159}{35}$.

Искомая функция **φ(x)** принимает вид: $\varphi(x) = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}$.

На рис. 5.3. нанесены точки **(x_i, y_i)** и найденная прямая. В случае аппроксимации функции полиномом более высокого порядка и при ином задании аппроксимирующей функции **φ(x)** метод отыскания ее параметров остается прежним, но усложняются необходимые вычисления (что может быть оправдано точностью аппроксимации). Отметим, что аппроксимацию табличной функции по методу наименьших квадратов (МНК) с помощью степенных многочленов обычно производят, когда степень многочлена не превышает шестую. При дальнейшем увеличении степени многочлена происходит, как правило, накопление вычислительных погрешностей решения системы. Избежать этого можно ища приближения табличной функции с помощью большого числа линеаризуемых функций.

И ещё - МНК применяется, когда число экспериментальных точек хотя бы на единицу больше числа определяемых коэффициентов многочлена. При равенстве этих величин задача аппроксимации МНК трансформируется в задачу интерполяции.

Контрольные вопросы.

1) В чём состоит МНК?
2) При равенстве каких величин задача аппроксимации МНК трансформируется в задачу интерполяции?

5.6. Условный экстремум функции нескольких переменных.

Экстремумы функции нескольких *независимых* переменных называются *абсолютными*.

Аргументы функции нескольких переменных могут быть *связаны некими соотношениями (условиями).* В этом случае экстремумы функции **f(x,y)** называют *условными* или *относительными*. Рассмотрим ситуацию на примере функции двух переменных.

Поставим задачу: найти наибольшее и наименьшее значение функции **f(x,y)** в некоторой замкнутой области. Задача решается в два этапа. Сначала мы ищем *абсолютные* экстремумы *внутри* области. Затем находим *условные* экстремумы на *границах* области. (Уравнения границ и есть условия, связывающие аргументы функции **f(x,y)**). Из найденных значений (*абсолютных* экстремумов *внутри* области и *условных* на *границах ее*) выбирают наибольшее и наименьшее.

Пусть на плоскости **x0y** дан треугольник **AOB**, образованный осями координат **Ox (y = 0), Oy (x = 0)** и прямой **x + y – 1 = 0**. Найдем точку **C** треугольника, для которой сумма квадратов расстояний ее от вершины треугольника (обозначим ее через **Z**) была бы *наименьшей*.

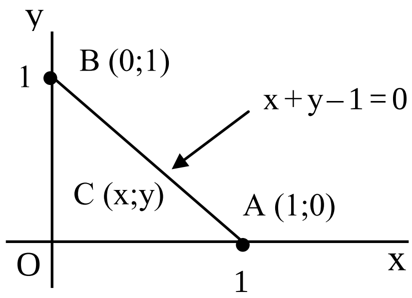


Рис. 5.4

$Z = OC^2 + OB^2 + OA^2 =$
$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)$

откуда $Z = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$

Найдем *абсолютные* экстремумы внутри рассматриваемой области.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 2(x-1) = 6x - 2;$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y + 2\,(y-1) = 6y - 2$

$\begin{cases} 6x - 2 = 0 \\ 6y - 2 = 0 \end{cases}; \quad x = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{1}{3}$ Это координаты стационарной точки. (точки возможного экстремума)

$$A = \left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{\substack{x=1/3 \\ y=1/3}} = 6 \;; \qquad C = \left.\frac{d^2z}{dy^2}\right|_{\substack{x=1/3 \\ y=1/3}} = 6 \;; \qquad B = \left.\frac{d^2z}{dxdy}\right|_{\substack{x=1/3 \\ y=1/3}} = 0$$

$\Delta = AC - B^2 = 36 > 0$; $A > 0$ и, следовательно, в точке $F(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ функция

$Z = f(x,y)$ имеет минимум $z = \frac{4}{3}$.

Найдём *условные* экстремумы на границах области.

1. Прямая OA; y=0; $0 < x < 1$; Подставляя уравнение границы в $z = f(x,y)$ получим функцию одной переменной $z = 2x^2 + (x-1)^2 + 1$ и найдём её экстремум $\frac{dz}{dx} = 4x + 2(x-1) = 6x - 2;$ Критическая точка: $x = \frac{1}{3};\; y = 0;\; z = \frac{5}{3};$
2. Прямая OB; x=0; $0 < y < 1;$ $z = 2y^2 + (y-1)^2 + 1;$ $\frac{dz}{dy} = 6y - 2;$ Критическая точка $x = 0;\; y = \frac{1}{3};\; z = \frac{5}{3};$
3. Прямая AB; $y = 1 - x;$ $0 < x < 1;$ $0 < y < 1;$ $z = 3x^2 + 3(x-1)^2;$ $\frac{dz}{dx} = 12x - 6;$ Критическая точка $x = \frac{1}{2};\; y = \frac{1}{2};\; z = \frac{3}{2}.$

Сравнивая полученные значения *абсолютного* и *условных* экстремумов находим *наименьшее* значение функции в замкнутой области $z=\frac{4}{3}$; $x=\frac{1}{3}$; $y=\frac{1}{3}$.

Рассмотренный способ отыскания условного экстремума не всегда пригоден. (Например, если уравнение границы области задано неявной функцией $\varphi(x,y)=0$, неразрешимой относительно переменных). В этом случае целесообразно использовать *способ множителей Лагранжа*. Рассмотрим его на примере функции двух переменных.

Найдём экстремум функции $z=f(x,y)$ (1) при условии, что **x** и **y** связаны уравнением $\varphi(x,y)=0$ (5.14). Напомним, что при значениях **x**, соответствующих стационарным точкам, $\frac{\partial z}{\partial x}=0$. Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$ помня, что y есть функция от **x**: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$; В точках экстремума $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ (5.15). Из (5.14.) находим $\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ (5.16.). Это равенство справедливо для всех **x** и **y**, удовлетворяющих (5.14.). Умножив (5.16.) на неопределённый коэффициент λ (его и называют м*ножителем Лагранжа*) и сложив результат с (5.15.) получим: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$ (5.17.).

Это равенство выполняется во всех точках экстремума. Подберём $\boldsymbol{\lambda}$ так, чтобы в точках экстремума функции **z**, вторая скобка в (5.17.) обратилась в нуль. (Без потери общности полагаем, что в критических точках $\frac{\partial \varphi}{\partial y}\neq 0$). Тогда (при значениях **x** и **y** соответствующих экстремумам) из (5.17.) следует равенство $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$.

Получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$

(5.18.) Левые части уравнений системы (5.18.) представляют собой частные производные функции $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ (5.19.) по переменным **x**, **y**, $\boldsymbol{\lambda}$. Уравнения системы являются *необходимыми условиями относительного экстремума*. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области надо:

1. Найти стационарные точки и вычислить значения функции в них.
2. Найти *наибольшее* и *наименьшее* значения функции на границах области.
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Рассмотренный метод исследования на условный экстремум легко распространяется на функции произвольного числа переменных.

Пример: Из данного куска жести площадью 2a надо сделать закрытую коробку в форме прямоугольного параллелепипеда максимального объёма, т.е. надо найти максимум функции $u = xyz$, где (x, y, z- размеры) при условии что $xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ z > 0)$ (5.20.) . Составим вспомогательную функцию $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$. Найдя её частные производные и приравняв их нулю получим ещё три уравнения (относительно x, y, z и λ).

$$\begin{cases} yz + \lambda(y+z) = 0 \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + \lambda(x+y) = 0 \end{cases} \qquad (5.21.)\,.$$

Умножим первое уравнение на x, второе на y, третье на z и сложим их; с учётом (5.20.) находим $\lambda = \frac{-3xyz}{2a}$. Подставляя в (5.21.) получим:

$$\begin{cases} yz\left[1 - \frac{3x}{2a}(y+z)\right] = 0 \\ xz\left[1 - \frac{3y}{2a}(x+z)\right] = 0 \\ xy\left[1 - \frac{3z}{2a}(x+y)\right] = 0 \end{cases}$$

x, y, z по смыслу задачи отличны от нуля, следовательно,

$\frac{3x}{2a}(y+z) = 1;\ \ \frac{3y}{2a}(x+z) = 1;\ \ \frac{3z}{2a}(x+y) = 1$. Из первых двух уравнений находим x = y, из второго и третьего y = z. Из (5.20.) получим $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$. Это единственная система значений x, y, z при которых может быть максимум или минимум. Из геометрических соображений очевидно, что это максимум (набор единствен, размер коробки ограничен и при каких-то размерах максимален).

Контрольные вопросы.

1) Как находятся условные экстремумы функции *f(x,y)*?

2) Всегда ли применяется способ отыскания условного экстремума?
3) Что называют множителем Лагранжа?
4) Что нужно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области?