Владимирский государственный университет

Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей: типовые расчеты

Владимир 2010

Министерство образования и науки РФ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей: типовые расчеты

Составитель:
Крашенинникова О.В.

Владимир 2010

УДК 51(07)

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
Владимирского государственного университета
Л.А. Буланкина

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой геометрии
Владимирского государственного гуманитарного университета
Ю.А. Алхутов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей содержит 250 задач по всем основным темам, изучаемым в курсах теории вероятностей в высших технических учебных заведениях. В каждом разделе имеется теоретическое введение с примерами решения задач.

Сборник предназначен для студентов технических и экономических специальностей вузов.

УДК 51(07)

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Событием в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти в результате некоторого испытания. Наблюдаемые нами события можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные, случайные.

Событие достоверное, если при всех испытаниях рассматриваемое событие всегда наступает. Например, при взрыве снаряда достоверное событие – разрушение оболочки.

Событие невозможное, если при всех испытаниях событие никогда не наступает. Например, при отсутствии тока в электрической цепи невозможное событие – загорание лампочки.

Событие случайное, если в результате испытания событие может появиться или не появиться. Например, выигрываем на купленный билет лотереи.

Классическое определение вероятностей

Пространством элементарных исходов называется множество всех взаимно исключающихся исходов испытания. Его обозначают Ω.

Те исходы, при которых интересующее нас событие наступает, назовем **благоприятствующими** этому событию.

Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n равновозможных несовместных элементарных исходов испытания и обозначается $p(A)$, т.е. $p(A) = \dfrac{m}{n}$.

Свойства вероятностей:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события заключена между нулем и единицей $0 \le p(A) \le 1$.

Относительная частота

Относительной частотой события называется отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний и обозначается $w(A)$.

Отличие классической вероятности события от его частоты состоит в том, что вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта. Относительную частоту или число, близкое к ней, принимают в качестве статистической вероятности.

Для успешного решения задач с использованием классического определения вероятности необходимо знать основные формулы *комбинаторики* – раздела математики, изучающего, в частности, методы решения задач на подсчет числа различных комбинаций.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающихся только порядком следования. Число всех возможных перестановок из n различных элементов равно $P_n = n!$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком следования. Число возможных размещений из n различных элементов по k равно $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k, которые отличаются составом элементов. Число возможных сочетаний из n различных элементов по k равно $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 1. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно взять 6 деталей из 10, т.е. $n = C_{10}^6$. Подсчитаем исходы, благоприятствующие интересующему нас событию: 4 стандартных из 7 можно взять C_7^4 способами, при этом остальные 2 детали должны быть нестандартными, их можно взять из 3 нестандартных деталей C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$. Искомая вероятность равна $p(A) = \dfrac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 24}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 0{,}5$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1.1. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

1.2. В урне 16 шаров, среди которых 6 черных, а остальные белые. Определить вероятность того, что среди 5 наудачу взятых шаров: а) все белые; б) 2 белых и 3 черных.

1.3. В конверте среди 100 фотокарточек находится разыскиваемая карточка. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная карточка.

1.4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набирал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.5. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них выходит на любом из семи этажей, начиная со второго. Найти вероятность следующих событий:

а) все пассажиры выйдут на четвертом этаже;

б) все пассажиры выйдут на одном этаже;

в) все пассажиры выйдут на разных этажах.

1.6. В ящике 14 деталей, среди которых 3 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что: а) извлеченные детали качественные; б) среди извлеченных 1 бракованная и 2 качественные.

1.7. В ящике 16 деталей, среди которых 3 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что: а) извлеченные детали качественные; б) среди извлеченных 1 бракованная.

1.8. Среди 20 поступающих в ремонт часов 8 нуждаются в общей чистке механизма. Найти вероятность, что среди взятых одновременно наудачу 3 часов по крайней мере двое нуждаются в общей чистке.

1.9. Из 20 филиалов Сбербанка 10 расположены за четой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 филиалов. Найти вероятность, что среди отобранных окажется в черте города: а) 3 филиала; б) хотя бы один.

1.10. В магазине имеется 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется не менее 3 импортных.

1.11. В группе из 25 студентов 10 юношей и 15 девушек. Выбирается делегация из 5 человек. Какова вероятность, что она будет состоять из трех юношей и двух девушек?

1.12. В ящике 10 деталей, среди которых 4 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали качественные.
1.13. Из урны, содержащей 4 белых, 3 красных и 2 черных шаров, достают наугад 4 шара. Найти вероятность, что будут вынуты шары: а) одного цвета; б) двух цветов (один из них красный).
1.14. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук. Вынуты наудачу 3 лампы. Какова вероятность того, что: а) они одинаковой мощности; б) хотя бы 2 из них по 100 Вт?
1.15. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают три карандаша. Найти вероятность того, что они все: а) разных цветов; б) одного цвета.
1.16. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Найти вероятность того, что из трех наудачу выбранных студентов: а) все – разрядники; б) один – разрядник; в) хотя бы один разрядник.
1.17. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, занимают очередь в библиотеку. Найти вероятность, что между ними в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек.
1.18. Найти вероятность, что из 10 книг, расположенных в случайном порядке, 2 определенные книги окажутся рядом.
1.19. В пакете находятся 8 яблок и 10 груш. Из пакета случайным образом извлекают 6 фруктов. Какова вероятность, что среди них 3 яблока и 3 груши?
1.20. Из колоды, содержащей 36 карт, извлекаются все карты трефовой масти и случайным образом выкладываются на столе в одну линию. Найти вероятность того, что при этом дама и валет окажутся рядом.
1.21. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные части по 26 карт. Найти вероятности следующих событий: а) в каждой пачке окажется по два туза; б) в одной части не будет ни одного туза, а в другой – все четыре.
1.22. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстракласса. Найти вероятности следующих событий: а) все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу; б) две команды экстракласса попадут в одну из групп, а три – в другую.
1.23. 10 человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность, что два фиксированных лица окажутся сидящими рядом.
1.24. Маршрутное такси, в котором находятся 6 пассажиров, делает остановки в пяти пунктах. Каждый из пассажиров выходит с равной вероятностью на любой остановке. Найти вероятность, что на одной остановке выйдут четыре пассажира, а на другой – два.
1.25. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово «ананас». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность, что у него снова получится слово «ананас».

2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события хотя бы одного из них.

Суммой нескольких событий $A_1 + A_2 + ... + A_n$ называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, равна сумме вероятностей этих событий: $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Следствие

Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$.

Произведением двух событий *A* и *B* называют событие AB, состоящее в их одновременном осуществлении. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Условной вероятностью *P*$_A$*(B)* называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие *A* уже наступило.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло $p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$.

Следствие

Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли $p(A_1 A_2 \ldots A_n) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot \ldots \cdot p_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. $p_A(B) = p(B)$. Для независимых событий вероятность совместного появления равна произведению вероятностей этих событий

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B).$$

Несколько событий называют независимыми в совокупности, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то $p(A_1 A_2 \ldots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n)$.

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно наступает тогда, когда A не наступает. Для противоположных событий справедливо равенство: $p(A) + p\left(\overline{A}\right) = 1$.

Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n$

$$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}_1\right) \cdot \ldots \cdot p\left(\overline{A}_n\right).$$

В частности, если события $A_1, A_2, \ldots A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна $p(A) = 1 - q^n$, где $q = 1 - p$.

Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Пример. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны извлекаются шары до появления черного шара. Найти вероятность, что произведено ровно три извлечения, если: а) после каждого извлечения шар возвращается в урну; б) извлеченные шары откладываются в сторону.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в появлении черного шара при i-ом извлечении. Тогда интересующее нас событие $A = \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$. Но в пункте а) эти события независимы, поэтому $p(A) = p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)p(A_3) = \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} = \frac{150}{1331} \approx 0{,}11$. А в пункте б) эти события зависимы, поэтому $p(A) = p(\overline{A}_1)p_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)p_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(A_3) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{33} \approx 0{,}12$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

2.1. Схема освещения комнаты предполагает наличие трёх ламп. Необходимые три лампы вынимаются из ящика, содержащего 190 годных и 10 бракованных. Найти вероятность того, что комната будет освещена, предполагая, что: а) лампы соединены последовательно; б) лампы соединены параллельно. Комната считается освещенной, если горит хотя бы одна лампа.

2.2. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует вмешательства рабочего, равна для первого станка 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,65. Определить вероятность того, что: а) в течение часа ни один станок не потребует вмешательства рабочего; б) все три станка потребуют вмешательства рабочего; в) первый и второй станки не потребуют вмешательства рабочего, а третий потребует; г) по крайней мере один станок не потребует вмешательства рабочего.

2.3. На складе 3 штабеля железобетонных плит по 8 плит каждый. В первом штабеле две бракованные плиты, во втором – одна, в третьем – две. С каждого штабеля берут по одной плите и грузят на трейлер. Найти вероятность того, что среди погруженных плит окажется не более одной бракованной.

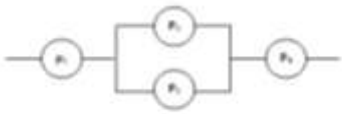
2.4. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно 0,6, 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что эта формула содержится: а) в двух справочниках; б) хотя бы в одном.

2.5. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы: а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам.

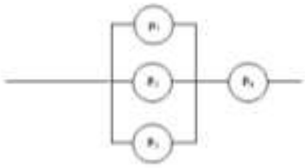
2.6. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,9. Найти вероятности того, что при одновременном залпе: а) три стрелка поразят мишень; б) два стрелка поразят мишень; в) хотя бы один стрелок поразит мишень.

2.7. Имеются три партии деталей: в первой партии бракованные детали составляют 5% от общего числа, во второй 3%, в третьей 4%. Из каждой партии берут для контроля по одной детали. Найти вероятность, что среди взятых деталей ровно одна бракованная.

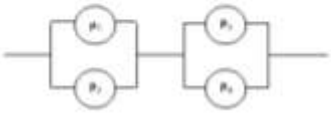
2.8. На рис. 1 изображена схема электроцепи с включенными в нее лампочками. Вероятность безотказной работы первой лампочки равна $p_1 = 0{,}7$, второй – $p_2 = 0{,}8$, третьей – $p_3 = 0{,}6$ и четвертой – $p_4 = 0{,}9$. Найти вероятность безотказной работы цепи.



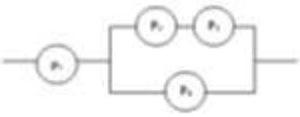
2.9. На рис. 2 изображена схема электроцепи с включенными в нее лампочками. Вероятность безотказной работы первой лампочки равна $p_1 = 0{,}6$, второй – $p_2 = 0{,}7$, третьей – $p_3 = 0{,}7$ и четвертой – $p_4 = 0{,}8$. Найти вероятность безотказной работы цепи.



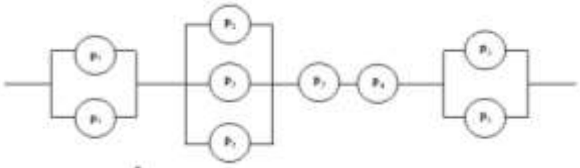
2.10. На рис. 3 изображена схема электроцепи с включенными в нее лампочками. Вероятность безотказной работы первой лампочки равна $p_1 = 0{,}8$, второй – $p_2 = 0{,}8$, третьей – $p_3 = 0{,}7$ и четвертой – $p_4 = 0{,}9$. Найти вероятность безотказной работы цепи.



2.11. На рис. 4 изображена схема электроцепи с включенными в нее лампочками. Вероятность безотказной работы первой лампочки равна $p_1 = 0{,}7$, второй – $p_2 = 0{,}8$, третьей – $p_3 = 0{,}6$ и четвертой – $p_4 = 0{,}9$. Найти вероятность безотказной работы цепи.



2.12. На рис. 5 изображена схема электроцепи с включенными в нее лампочками. Вероятности безотказной работы каждой лампочки следующие $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}6$, $p_4 = 0{,}9$, $p_5 = 0{,}5$. Найти вероятность безотказной работы цепи.



2.13. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при первом выстреле, равна 0,9 и уменьшается на 0,1 при каждом следующем выстреле. Найти вероятность того, что при трех выстрелах будет: а) два попадания; б) хотя бы одно.

2.14. Над изготовлением изделия работают последовательно трое рабочих. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0,1, второй с вероятностью 0,2, третий с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что ровно двое рабочих допустили брак.

2.15. Некоторое устройство состоит из четырех блоков, причем вероятности безотказной работной работы в течение промежутка времени Т для этих блоков равны 0,8, 0,7, 0,9 и 0,5 соответственно. Найти вероятность, что за промежуток времени Т откажет ровно один блок.

2.16. На склад поступили две партии изделий, изготовленных в двух цехах. Для изделий первой партии вероятность брака равна 0,1, для изделий второй партии – 0,2. Для контроля берут по два изделия из каждой партии. Найти вероятность, что среди взятых изделий ровно три бракованных.

2.17. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,9, третий – 0,8. найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только один экзамен; б) по крайней мере два экзамена; в) хотя бы один экзамен.

2.18. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременно доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. найти вероятность следующих событий: а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

2.19. Мастер обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,6, третий – 0,4 и четвертый – 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.

2.20. Имеются три коробки с оловянными солдатиками. В первой коробке солдатики с одной ногой составляют 5% от общего числа, во второй 10%, в третьей 15%. Из каждой коробки берут наудачу по одному солдатику. Найти вероятность того, что среди взятых солдатиков не менее двух с одной ногой.

2.21. В трех урнах находятся белые и черные шары: в первой урне 5 белых и 6 черных, во второй 2 белых и 3 черных, в третьей 7 белых и 4 черных. Из каждой урны извлечено по одному шару. Найти вероятность того, что извлечено не менее двух белых шаров.

2.22. Имеются три партии деталей: в первой партии бракованные составляют 5% от общего числа, во второй 3%, в третьей 4%. Из каждой партии берут для контроля по одной детали. Найти вероятность того, что среди взятых деталей окажется ровно одна бракованная.

2.23. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что: а) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания; б) для запуска двигателя понадобится включать зажигание не более трех раз.

2.24. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Оба они делают по одному выстрелу по мишени, а затем каждый из стрелков стреляет еще раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Найти вероятность того, что в мишени две пробоины.

2.25. Произведено три выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,75, при втором – 0,8, при третьем – 0,9. Найти вероятность того, что будет: а) три попадания; б) хотя бы одно попадание.

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу (т.е. сумма этих событий есть достоверное событие и никакие два из них не могут произойти одновременно). Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), \ldots, p_{B_n}(A)$.

<u>Теорема</u>

Вероятность события *A*, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу равна

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p_{B_i}(A).$$

Эту формулу называют формулой полной вероятности.

Поскольку заранее неизвестно, какое из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ произойдет, их называют гипотезами. Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Необходимо произвести переоценку вероятностей этих гипотез, т.е. надо найти *апостериорные* (получаемые после испытания) условные вероятности гипотез $p_A(B_1), p_A(B_2), \ldots, p_A(B_n)$.

Следствие. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{p(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 1. В первой урне 3 белых и 5 черных шаров, во второй 6 белых и 4 черных шаров, в третьей 1 белый и 2 черных шара. Бросают игральную кость. Если выпадает 1 или 2, то берут шар из первой урны. Если выпадает 4, 5, 6, то берут шар из третьей урны. Найти вероятность того, что наудачу взятый шар окажется белым.

Решение. Обозначим через A событие – взятый шар окажется белым. Пусть гипотеза B_i состоит в том, что выбрана i-я урна $(i=1,2,3)$. Тогда вероятности гипотез равны $p(B_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $p(B_2)=\frac{1}{6}$ и $p(B_3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Условные вероятности равны $p_{B_1}(A)=\frac{3}{8}$, $p_{B_2}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $p_{B_3}(A)=\frac{1}{3}$. По формуле полной вероятности имеем

$$p(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{47}{120}\approx 0{,}39.$$

Пример 2. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Случайно выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это будет мужчина.

Решение. Пусть событие A – выбранное лицо оказалось дальтоником.

Гипотеза B_1 – выбран мужчина, гипотеза B_2 – выбрана женщина.

Можно считать, что число женщин и мужчин равно, тогда $p(B_1)=p(B_2)=0{,}5$.

Условные вероятности равны $p_{B_1}(A)=\frac{5}{100}=0{,}05$, $p_{B_2}(A)=\frac{0{,}25}{100}=0{,}0025$. Тогда по формуле Байеса имеем $p_A(B_1)=\frac{0{,}5\cdot 0{,}05}{0{,}5(0{,}05+0{,}0025)}\approx 0{,}95$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

3.1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника 0,9, для велосипедиста 0,8 и для бегуна 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

3.2. В телевизионном ателье 4 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок.

3.3. Для участия в студенческих соревнованиях выделено с первого курса – 4, со второго – 6, с третьего – 5 студентов. Вероятность того, что студент первого, второго и третьего курса попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Какому курсу вероятнее всего принадлежал студент?

3.4. Две строительные фирмы ведут строительство микрорайона. Первая фирма выполняет 60% работ, а вторая – 40%. Вероятность того, что наудачу взятый объект, выполненный первой фирмой, будет сдан в срок, равна 0,9, для второй – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый объект микрорайона будет сдан в срок.

3.5. В общем потоке поездов на сортировочную станцию приходят из пункта A – 12 поездов, из пункта B – 8 поездов, из пункта C – 10 и пункта D – 14. В поезде, прибывшем из пункта A, 30% вагонов пойдет в пункт Z; в поезде из пункта B в пункт Z направятся 15% вагонов, в поезде из пункта C – 10%, в поезде из пункта D – 20%. Определить вероятность того, что наудачу взятый вагон из расформированных поездов войдет в состав поезда, идущего в пункт Z.

3.6. На стройку поступает кирпич с трех заводов. Завод №1 поставляет 30% всего кирпича, завод №2 – столько же, завод №3 – 40%. Вероятность того, что наудачу взятая партия кирпича с завода №1 соответствует ГОСТу – 0,7; с завода

№2 – 0,85; с завода №3 – 0,9. Наудачу взятая на стройке партия кирпича выдержала ГОСТ. Найти вероятность того, что эта партия кирпича с завода №2.

3.7. Группа состоит из 2 отличных, 4 хороших и 4 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель для отличного, хорошего и посредственного стрелка равны соответственно 0,9; 0,75; 0,6. Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что стрелок отличный?

3.8. Среди производимых первым заводом ламп 8% бракованных, вторым заводом - 7% бракованных, третьим заводом - 6% бракованных. В партии из 1000 ламп 400 изготовлено первым заводом, 350 – вторым, остальные – третьим. Найти вероятность того, что: а) выбранная наугад лампа бракованная; б) выбранная наугад лампа изготовлена на первом заводе, при условии, что она оказалась бракованной.

3.9. В первой урне содержится 10 шаров, из них 4 белых, во второй урне 6 шаров, из них 2 белых. Из первой урны наудачу извлекли 3 шара и переложили во вторую. Затем из второй урны извлекли 2 шара. Найти вероятность того, что это будут 2 белых шара.

3.10. Имеются 5 кубиков, у которых на гранях стоят 3 «единицы», 2 «двойки», остальные «тройки» и 5 кубиков, у которых 2 «единицы», 1 «двойка», остальные «тройки». Берут наугад 2 кубика и подбрасывают. Найти вероятность того, что: а) выпадет сумма цифр, равная 4; б) выпадет сумма цифр, равная 5. Найти вероятность, что были выбраны кубики первого вида.

3.11. На базу поступают радиолампы с трех заводов в отношении 5:3:2. Вероятность того, что лампа проработает определенное число часов, если она выпущена первым заводом, равна 0,8, вторым – 0,9, третьим – 0,7. Какова вероятность, что наугад выбранная лампа проработает определенное число часов?

3.12. В первой урне содержится 8 шаров, из них 2 белых, во второй урне 10 шаров, из них 7 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложила во вторую. Найти вероятность того, что извлеченный после этого шар из второй урны окажется белым.

3.13. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая- 35%, третья 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4, 2 %. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный.

3.14. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй - 85%, третьей - 75%. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие окажется стандартным. Какова вероятность, что оно изготовлено третьей фирмой?

3.15. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 – подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

3.16. Деталь может принадлежать к одной из четырех партий с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4, где $p_1 = p_3 = 0{,}15$, $p_2 = 0{,}2$, $p_4 = 0{,}5$. Вероятности того, что деталь бракованная равна для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,15; 0,25. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь оказалась качественной.

3.17. На столе лежат 3 колоды карт по 36 карт в каждой. Из первой колоды берут даму пик и даму треф, из второй – даму червей, из третьей – даму треф. Все взятые карты откладываются в сторону. После этого из наугад выбранной колоды берут первую попавшуюся карту. Найти вероятность того, что эта карта окажется дамой.

3.18. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от первого, второго и третьего поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно 98, 88 и 92%. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока. Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее поступил этот телевизор?

3.19. Известно, что в среднем 95% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной продукцию с вероятностью 0,98, если она стандартна, и с вероятностью 0,06, если она нестандартна. Найти вероятность того, что: а) взятое наудачу изделие пройдет упрощенный контроль; б) изделие стандартное, если оно прошло упрощенный контроль.

3.20. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.

3.21. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой – 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

3.22. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой урне 4 белых и 5 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров, в третьей только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что это белый шар.

3.23. В ящике находятся 4 новых теннисных мячей и 6 игранных. Из ящика наугад вынимают два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут наугад два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми.

3.24. Группа студентов состоит из 4 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 слабо занимающихся. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные отметки, хорошо успевающие студенты с равной вероятностью – хорошие и отличные отметки, а слабо занимающиеся – хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные отметки. Для сдачи экзамена вызываются наугад три студента. Найти вероятность того, что они получат отметки: отлично, хорошо и удовлетворительно (в любом порядке).

3.25. В кладовке на трех полках стоят банки с малиновым и вишневым вареньем. На первой полке 3 банки малинового и 2 банки вишневого, на второй – 4 банки малинового и 3 вишневого, на третьей – 5 банок вишневого. Некто забрался в кладовку и случайно уронил на пол одну из банок со второй полки, потом взял первую попавшуюся банку с одной из полок. Найти вероятность того, что это банка с вишневым вареньем.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

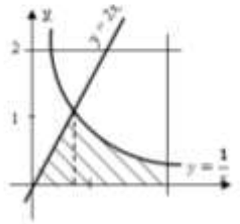
Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу бросается точка. Это означает, что все точки области G «равноправны» в отношении попадания туда брошенной случайной точки. Полагая, что вероятность события A – попадания брошенной точки на фигуру g – пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g, найдем $p(A) = \frac{S_g}{S_G}$, где S_g и S_G – соответственно площади областей g и G.

Область, на которую распространяется понятие геометрической вероятности, может быть одномерной (прямая, отрезок) и трехмерной (некоторое тело в пространстве). Обозначая меру (длину, площадь, объем) области через mes, приходим к следующему определению.

Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области, т.е. $p(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}$.

Пример1. Наудачу берутся два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.

Решение. Взятые два числа можно интерпретировать как одну точку с координатами (x, y) на плоскости. Множество всех таких точек составляет квадрат со стороной 2. Неравенствами $xy \le 1$, $\frac{y}{x} \le 2$ определяется множество точек, заштрихованное на рисунке 1.



Согласно геометрическому определению вероятности имеем

$$p\left(xy \le 1, \frac{y}{x} \le 2\right) = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{1}{4}\left(\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(x^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}} + \ln|x|\Big|_{1/\sqrt{2}}^{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2\right) =$$

$$= \frac{1 + 3\ln 2}{8} \approx 0{,}38.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

В задачах 4.1 – 4.10 на интервале (0,1) наудачу берутся две точки x и y. Найти вероятность, что выполняются указанные соотношения. В задачах 4.11 – 4.20 на том же интервале наудачу берутся три точки x, y, z. Найти вероятность того, что скалярное произведение вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ на вектор $\vec{b}$ будет меньше единицы.

4.1. $x^2 \le y \le \sin(\pi x/2)$.

4.2. $\frac{2x^2}{1+x} \le y \le \sqrt[3]{x}$.

4.3. $y \ge \max\left(\sqrt{x}, \sqrt{1-x}\right)$.

4.11. $\vec{b} = \{2,3,1\}$

4.12. $\vec{b} = \{2,1,1\}$

4.13. $\vec{b} = \{2,3,2\}$

4.4. $y \le \min(tg(\pi x/2), 2(1-x))$.

4.5. $y \le \min(\cos(\pi x/2), \sqrt{2}x)$.

4.6. $y \le \min(\sin(\pi x), (1-x)/x)$.

4.7. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \le y \le \sqrt{x}$.

4.8. $tg(\pi x/4) \le y \le \sqrt{x}$.

4.9. $x^2 \le y \le \sin x / \sin 1$.

4.10. $y \le \min(\sin(\pi x/2), \sqrt{2}(1-x))$.

4.14. $\vec{b} = \{1, 2, 4\}$

4.15. $\vec{b} = \{2, 3, 4\}$

4.16. $\vec{b} = \{2, 4, 1\}$

4.17. $\vec{b} = \{3, 4, 1\}$

4.18. $\vec{b} = \{2, 4, 3\}$

4.19. $\vec{b} = \{1, 2, 3\}$

4.20. $\vec{b} = \{1, 2, 2\}$

4.21. На отрезке *AB* длины *l* наудачу поставлены две точки *L* и *M*. Найти вероятность того, что точка *L* будет ближе к точке *M*, чем к точке *A*.

4.22. В куб $0 \le x \le l$, $0 \le y \le l$, $0 \le z \le l$ наудачу бросают точку; пусть (x_1, y_1, z_1) – ее координаты. Найти вероятность следующих неравенств: а) $\alpha_1 \le x_1 \le \alpha_2$ $(0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le l)$; б) $\alpha_1 \le x_1 \le \alpha_2$, $\beta_1 \le y_1 \le \beta_2$ $(0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le l, \quad 0 \le \beta_1 < \beta_2 \le l)$; в) $x_1 + y_1 + z_1 > l$.

4.23. Наудачу берутся два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

4.24. Два лица условились встретиться в определенном месте между 18 и 19 ч. Пришедший первым ждет второго в течение 10 мин, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

4.25. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

5. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события *A* в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события *A*.

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может появиться с вероятностью p . Тогда вероятность того, что событие *A* появится ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p .$$

Число k_0 наступления события *A* в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность того, что событие наступит k_0 раз не меньше остальных возможных исходов испытаний. Можно показать, что это число удовлетворяет двойному неравенству:

$$np - q \le k_0 \le np + p . \qquad (*)$$

Так как разность $np + p - (np - q) = 1$, то всегда существует целое число k_0, удовлетворяющее неравенству (*). При этом, если $np + p -$целое число, то наивероятнейших чисел два: $k_0 = np + p$ и $k_0^{/} = np - q$.

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0{,}9$. Найти вероятность того, что в ближайшие 5 суток расход электроэнергии в течение 3 суток не превысит нормы.

Решение. Т.к. $p = 0{,}9$, то вероятность перерасхода электроэнергии равна $q = 1 - p = 0{,}1$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна $p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2$ =0,0729.

Пример 2. По данным примера 1 найти наивероятнейшее число суток из ближайших пяти, в которые расход электроэнергии не превысит установленной нормы, и вероятность этого наивероятнейшего числа.

Решение. По формуле (*) имеем: $5 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 5 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$ или $4{,}4 \le k_0 \le 5{,}4$. Единственное целое число, удовлетворяющее этому неравенству, $k_0 = 5$. А его вероятность $p_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}9^5 = 0{,}59049$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

5.1. По цели производится 5 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что будет: а) три попадания; б) не менее трех попаданий; в) хотя бы одно попадание.

5.2. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Какова вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдет: а) 8 семян; б) по крайней мере 8; в) хотя бы одно.

5.3. Два кубика бросают 6 раз. Найти вероятность того, что не меньше трех раз выпадут одинаковые числа или одна «3».

5.4. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время сохранятся: а) два; б) более двух.

5.5. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров.

5.6. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытания и вероятность этого наивероятнейшего числа.

5.7. Сколько раз необходимо подбросить монету, чтобы наивероятнейшее число выпадений тройки было равно 10?

5.8. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано: а) 5 пакетов; б) менее 2 пакетов; в) хотя бы 2 пакета.

5.9. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.

5.10. Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух прекратят свою деятельность в течение года.

5.11. Прибор состоит из 6 узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t для каждого узла равна 0,9. узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t: а) откажет хотя бы один узел; б) откажет ровно один узел; в) откажет не менее двух узлов.

5.12. Известно, что в среднем 60% всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Найти вероятность того, что из 8 аппаратов окажется первого сорта: а) 6 аппаратов; б) не менее 6; в) хотя бы один.

5.13. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из шести?

5.14. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз; в) хотя бы один.

5.15. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

5.16. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

5.17. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,3. Найти вероятность того, что в пяти испытаниях событие A появится: а) ровно 2 раза; б) хотя бы 2 раза.

5.18. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

5.19. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

5.20. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы 4 элемента.

5.21. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином и с вероятностью 0,1 – рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятность того, что: а) в составе группы не меньше четырех блондинов, б) хотя бы один рыжий.

5.22. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

5.23. В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными между собой, определить вероятность того, что в данной семье: а) не менее трех мальчиков; б) не более трех мальчиков.

5.24. Монета бросается 8 раз. Найти вероятность того, что герб появится не менее 3 раз и не более 6 раз.

5.25. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t для каждого узла равна 0,9. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t: а) откажет хотя бы один узел; б) откажет ровно один узел; в) откажут ровно два узла; г) откажет не менее двух узлов.

6. ФОРМУЛА ПУАССОНА. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ МУАВРА–ЛАПЛАСА

Вычисление вероятности по формуле Бернулли при больших значениях n не всегда удобно. Поэтому применяются приближенные формулы к формуле Бернулли. Если n велико, p мало, а $np = \lambda \le 10$, то применяют приближенную формулу Пуассона

$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. В таблице 3 приложений приведены значения функции Пуассона при различных значениях λ.

В случае, когда $np > 10$, используют приближенную формулу, вытекающую из локальной теоремы Муавра-Лапласа:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - функция Гаусса. Значения этой функции приведены в таблице 1 приложений. Функция Гаусса является четной функцией, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, монотонно убывающей при положительных значениях x, причем при $x \to \infty$ $\varphi(x) \to 0$. (Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$).

Если требуется найти вероятность того, что число появлений k события A не меньше k_1 и не больше k_2, то применяют приближенную формулу, вытекающую из интегральной теоремы Муавра-Лапласа:

$$p_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \; x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \; i = 1, 2,$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ - нормальная функции распределения. Ее значения приведены в табл.1 приложений для неотрицательных значений x, поэтому полезно иметь в виду равенство $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Пример 1. В урне находятся 99 черных и 1 белый шар. Производится 200 извлечений шара из урны, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну, и шары перемешиваются. Найти вероятность появления не менее двух белых шаров.

Решение. Вероятность появления белого шара при однократном извлечении $p = 0{,}01$; $np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$. По формуле Пуассона имеем $p(k \geq 2) = 1 - p(k < 2) =$ $1 - p_{200}(0) - p_{200}(1) = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \approx 0{,}59$.

Пример 2. В урне находятся 4 черных и 5 белых шаров. Производится 180 извлечений шара из урны, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну, и шары перемешиваются. Найти вероятность того, что белый шар появиться ровно 99 раз.

Решение. Вероятность появления белого шара при однократном извлечении $p = \frac{5}{9}$, тогда $q = \frac{4}{9}$, $np = 100 > 9$, поэтому применяем локальную теорему Муавра-Лапласа: $x = \frac{99 - 100}{\sqrt{400/9}} = -\frac{3}{20} = -0{,}15$. По таблице 2 приложений находим $\varphi(-0{,}15) = \varphi(0{,}15) = 0{,}3945$, и, окончательно, $p_{180}(99) \approx \frac{3}{20} \cdot 0{,}3945 \approx 0{,}059$.

Пример 3. Найти вероятность того, что в эксперименте, описанном в предыдущем примере, количество k извлеченных белых шаров будет удовлетворять неравенству $80 \leq k \leq 120$.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа. В рассматриваемом случае $k_1 = 80$, $k_2 = 120$. Тогда имеем

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100}{20/3} = -3, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{120 - 100}{20/3} = 3.$$

Искомая вероятность $p_{180}(80{,}120) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0{,}997$.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке равна 0,1. Определить вероятность того, что среди 50 отобранных деталей не менее трех окажутся бракованными.

6.2. Из колоды, содержащей 52 карты, извлекается одна. Затем карта возвращается в колоду и она тщательно перетасовывается. Опыт повторяется 208 раз. Найти вероятность того, что король треф появился при этом не более одного раза.

6.3. Игральная кость изготовлена в форме додекаэдра – правильного многогранника, гранями которого являются 12 правильных пятиугольников. На грани додекаэдра нанесены числа $1, \ldots, 12$. Такую необычную игральную кость бросают 9000 раз. Найти вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет ровно 3020 раз (выпавшим считается число очков, нанесенное на верхнюю грань).

6.4. Имеется 800 коробок с шурупами. Вероятность наличия хотя бы одного дефектного шурупа в любой коробке равна 0,4. Найти вероятность того, что не меньше 350 коробок содержат дефектные шурупы.

6.5. Игральная кость изготовлена в форме икосаэдра – правильного многогранника, гранями которого являются 20 правильных треугольников. На грани икосаэдра нанесены числа от 1 до 20. Такую необычную игральную кость бросают 100 раз. Найти вероятность того, что цифра 1 выпадет не менее двух раз (выпавшим считается число очков, нанесенное на верхнюю грань).

6.6. В книге 900 страниц. Вероятность наличия опечатки на одной странице равна 1/3. Найти вероятность того, что в книге не меньше 320 опечаток.

6.7. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Производится 800 выстрелов. Найти вероятность того, что число попаданий заключено между 540 и 580.

6.8. В большой партии деталей бракованные составляют 1,2%. Детали упаковываются в коробки по 250 штук. Найти вероятность того, что в наудачу взятой коробке будет ровно 3 бракованные детали.

6.9. В лотерее выигрывает каждый третий билет. Куплено 500 билетов. Найти вероятность того, что число выигравших билетов заключено между 140 и 175.

6.10. Производятся испытания 500 приборов. Вероятность отказа любого из них равна 0,008. Найти вероятность того, что при испытаниях откажут более двух приборов.

6.11. Некоторое сложное техническое устройство состоит из 2500 деталей, вероятность выхода из строя каждой из которых равна 0,0012. При выходе из строя более трех деталей устройство перестает функционировать. Найти вероятность того, что устройство перестанет функционировать.

6.12. По каналу связи передаются сообщение, состоящее из 12000 символов. Вероятность ошибки при передаче одного символа равна 0,2. Найти вероятность того, что число ошибок заключено между 2300 и 2450.

6.13. В новом доме установлено 340 лампочек. Вероятность перегореть в течение месяца для каждой лампочки равна 0,015. Найти вероятность того, что в течение месяца перегорят не менее двух лампочек.

6.14. В некотором институте учатся 1460 студентов, родившихся в 1979 году. Полагая, что будущий студент может родиться с равной вероятностью в любой из дней, найти вероятность того, что не менее трех студентов института родились 1 сентября.

6.15. Телефонная станция обслуживает 10000 абонентов. В течение определенного промежутка времени каждый из них может сделать вызов с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что общее число вызовов будет заключено между 1980 и 2040.

6.16. Игральная кость изготовлена в форме тетраэдра – правильного многогранника, гранями которого являются 4 правильных треугольников. На грани тетраэдра нанесены цифры 1,2,3,4. Такую необычную игральную кость бросают 950 раз. Найти вероятность того, что цифра 4 выпадет 236 раз (выпавшим считается число очков, нанесенное на верхнюю грань).

6.17. Игральная кость изготовлена в форме октаэдра – правильного многогранника, гранями которого являются 8 правильных треугольников. На грани октаэдра нанесены числа от 1 до 8. Такую необычную игральную кость бросают 5000 раз. Найти вероятность того, что цифра 8 выпадет ровно 624 раза (выпавшим считается число очков, нанесенное на верхнюю грань).

6.18. При искусственном выращивании жемчуга вероятность получить жемчужину от одного моллюска равна 0,22. Найти вероятность того, что количество жемчужин, полученных от 20000 моллюсков, заключено между 4340 и 4460.

6.19. По дороге в течение одной секунды с вероятностью 0,46 проезжает автомобиль. Найти вероятность того, что количество автомобилей, проехавших по дороге в течение часа, заключено между 1600 и 1700.

6.20. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 раз и не более 80 раз; б) не менее 70 раз.

6.21. Известно, что в среднем 60% всего числа изготовляемых заводом изделий является продукцией первого сорта. Выбирают первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий первого сорта окажется: а) от 120 до 150 штук; б) точно 20 штук.

6.22. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

6.23. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз.

6.24. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят: а) 180 студентов; б) не менее 180 студентов.

6.25. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.

7. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называется числовая функция, определенная на множестве элементарных исходов. Например, число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, …, 100.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \ldots$, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами $x, y, z, \ldots$.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. **Дискретные случайные величины** – это случайные величины, которые принимают не более счетного множества отдельных возможных значений с определенными вероятностями.

Непрерывные случайные величины – это случайные величины, которые могут принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Пусть $X-$ дискретная случайная величина. Вероятность того, что X приняла значение x_k, обозначим $p(X=x_k)=p_k$. **Законом распределения дискретной случайной величины** называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически и графически. Таблица, в которой указаны значения случайной величины и их вероятности, называется рядом распределения:

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

Так как областью определения случайной величины является пространство элементарных исходов, то сумма вероятностей второй строки таблицы равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится и его сумма равна 1.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), которые соединяют отрезками прямых. Полученную фигуру называют **многоугольником распределения**.

Пример 1. В партии из 12 деталей 8 стандартных. Наудачу взяли 5 деталей. Составить закон распределения случайной величины $X-$числа стандартных деталей среди взятых.

Решение. Очевидно, возможные значения X таковы: 1, 2, 3, 4, 5. Вычислим вероятности этих значений:

$$p(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_4^4}{C_{12}^5}=\frac{8\cdot 5!\cdot 7!}{12!}=\frac{1}{99};$$

$$p(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_4^3}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 4\cdot 5!\cdot 7!}{2!\cdot 6!\cdot 12!}=\frac{14}{99};$$

$$p(X=3)=\frac{C_8^3\cdot C_4^2}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 7!}{3!\cdot 5!\cdot 2\cdot 2\cdot 12!}=\frac{42}{99};$$

$$p(X=4)=\frac{C_8^4\cdot C_4^1}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 4\cdot 5!\cdot 7!}{4!\cdot 4!\cdot 12!}=\frac{35}{99};$$

$$p(X=5)=\frac{C_8^5}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 5!\cdot 7!}{5!\cdot 3!\cdot 12!}=\frac{7}{99}.$$

Искомый закон распределения: $\begin{array}{cccccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & 1/99 & 14/99 & 42/99 & 35/99 & 7/99 \end{array}$.

Контроль: $\frac{1}{99}+\frac{14}{99}+\frac{42}{99}+\frac{35}{99}+\frac{7}{99}=\frac{99}{99}=1.$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Если случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то математическое ожидание равно

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Если случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, при условии, что ряд в правой части сходится абсолютно.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M\big(X-M(X)\big)^2 .$$

Для вычисления дисперсии удобно пользоваться формулой: $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F(x)=p(X<x)=\sum p\left(X=x_i\right)$, где суммирование распространяется на все i, для которых $x_i<x$.

Пример 2. Для случайной величины, построенной в примере 1, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения.

Решение. $M(X)=1\cdot\frac{1}{99}+2\cdot\frac{14}{99}+3\cdot\frac{42}{99}+4\cdot\frac{35}{99}+5\cdot\frac{7}{99}=\frac{330}{99}=\frac{10}{3}$;

$$D(X)=1^2\cdot\frac{1}{99}+2^2\cdot\frac{14}{99}+3^2\cdot\frac{42}{99}+4^2\cdot\frac{35}{99}+5^2\cdot\frac{7}{99}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{70}{99};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{70}{99}}\approx 0{,}84;$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 1/99, & 1<x\le 2,\\ 15/99, & 2<x\le 3,\\ 57/99, & 3<x\le 4,\\ 92/99, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Примеры дискретных случайных величин

1. Биномиальное распределение.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Пусть $X-$число появлений события A в этих n испытаниях. Возможные значения $X=\{0,1,2,\ldots,n\}$. Вероятности возможных значений можно найти по формуле Бернулли:

$$p\left(X=x_k\right)=p_k=p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} . \qquad (1)$$

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой (1).

Биномиальный закон:

X	n	$n-1$	$\ldots$	k	$\ldots$	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	q^n

$$\sum_{k=0}^{n} p_k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

Математическое ожидание $M(X)$ числа появления события A в n независимых испытаниях равно $M(X) = np$, а дисперсия $D(X) = npq$.

2. Распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Если n велико, p мало, а $np = \lambda \le 10$, то

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона массовых (n велико) и редких (p мало) событий. Математическое ожидание в распределении Пуассона равно $M(X) = \lambda$ и дисперсия $D(X) = \lambda$.

3. Геометрическое распределение.

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$). Обозначим через X случайную величину, равную числу испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Очевидно, возможные значения этой случайной величины – натуральные числа: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …

Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, а в k-ом появилось. По теореме умножения вероятностей независимых событий имеем

$$p(X = k) = p \cdot q^{k-1} \qquad (2)$$

Полагая $k = 1, 2, \ldots$ в формуле (2), получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем $q = 1 - p$ $(0 < q < 1)$:

$$p, \quad pq, \quad pq^2, \ldots, pq^{k-1}, \ldots$$

По этой причине распределение, определяемое формулой (2), называют геометрическим. Найдем $\sum_{k=0}^{\infty} pq^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$. Математическое ожидание в геометрическом распределении равно $M(X) = \frac{1}{p}$, а дисперсия $D(X) = \frac{q}{p^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

В каждой из предлагаемых ниже задач определена некоторая дискретная случайная величина X. Для этой случайной величины построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность $p(X \le 3)$.

7.1. Эксперимент состоит в извлечении наудачу карты из колоды. Извлеченная карта затем возвращается в колоду и колода перетасовывается. Эксперимент проводится до появления первого короля. Случайная величина X равна количеству проведенных экспериментов.

7.2. На полке стоят 4 книги, одна из которых – «Краткий курс теории вероятностей», остальные книги не имеют отношения к теории вероятностей. Студент, желающий подготовиться к экзамену по теории вероятностей, берет наудачу книги с полки по одной, пока не возьмет нужную. Случайная величина X равна количеству взятых книг.

7.3. Из колоды, содержащей 36 карт, берут наудачу 4 карты. Случайная величина X равна количеству королей среди взятых карт.

7.4. В лотерее выигрывает каждый пятый билет, причем выигрыш выплачивается на месте. Некто покупает билеты по одному до тех пор, пока не купит выигрышный. Случайная величина X равна количеству купленных билетов.

7.5. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – равна 0,7, а третьим – равна 0,8. Случайная величина X равна числу попаданий в цель при одновременном залпе трех стрелков.
7.6. Из урны, содержащей 5 белых и 7 черных шаров, достают наугад 3 шара. Случайная величина X равна числу белых шаров среди вынутых.
7.7. Бросают два кубика. Случайная величина X равна наибольшей из двух выпавших цифр.
7.8. Из урны, содержащей 3 белых и 6 черных шаров, достают наугад 4 шара. Случайная величина X равна числу черных шаров среди оставшихся.
7.9. Бросают два кубика. Случайная величина X равна наименьшей из двух выпавших цифр.
7.10. Из урны, содержащей 4 белых и 8 черных шаров, достают наугад 6 шара. Случайная величина X равна разности между числом черных и белых шаров среди вынутых (по модулю).
7.11. Монету бросают 6 раз. Случайная величина X равна числу выпавших решек.
7.12. Монету бросают 7 раз. Случайная величина X равна разности по модулю между числом выпавших орлов и решек.
7.13. В билете 3 задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Случайная величина X равна числу правильно решенных задач.
7.14. Производится залп из 4 орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Случайная величина X равна числу попаданий в объект при одновременном залпе.
7.15. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбрано 3. Случайная величина X равна числу телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.
7.16. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна $0{,}2$. Случайная величина X равна числу кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных.
7.17. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны извлекается шар 3 раза подряд, причем каждый раз вынутый шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Случайная величина X- число извлеченных белых шаров.
7.18. Две игральные кости брошены одновременно. Случайная величина X равна сумме очков, выпавших на верхних гранях.
7.19. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу извлечены четыре детали. Случайная величина X равна числу нестандартных деталей среди четырех отобранных
7.20. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Случайная величина X равна числу библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки.
7.21. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем – уменьшается на 0,1. Случайная величина X равна числу патронов, израсходованных охотником.
7.22. Вероятность того, что терпеливый казак станет атаманом, равна 0,75. Имеются 4 терпеливых казака. Случайная величина равна числу тех из них, которые стали атаманами.
7.23. На прилавке стоят 4 включенных телевизора, в одном из которых спрятался Заяц. Чтобы обнаружить его, нужно выключить соответствующий телевизор. Волк начинает наудачу выключать телевизоры, пока не обнаружит Зайца. Случайная величина равна количеству выключенных телевизоров.
7.24. Бросают два кубика. Случайная величина X равна разности по модулю между выпавшими цифрами.

7.25. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шаров, достают наугад 5 шара. Случайная величина X равна числу черных шаров среди вынутых .

8. Непрерывные случайные величины.

Наряду с дискретными случайными величинами в теории вероятностей изучаются также непрерывные случайные величины, множество возможных значений которых несчетно и обычно представляет собой некоторый промежуток. Такую случайную величину можно охарактеризовать функцией распределения $F(x) = p(X < x)$ или плотностью вероятности $f(x) = F'(x)$. Плотность вероятности является неотрицательной функцией, для которой выполняется равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Если известна плотность вероятности, то функцию распределения можно найти по формуле $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Вероятность попадания случайной величины на некоторый интервал вычисляется по формуле:

$$p(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение определяются соответственно формулами:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx, \qquad D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - M^2(X), \qquad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad или \quad x \ge 7/4; \\ x^3, & 0 \le x < 1; \\ a, & 1 \le x < 7/4. \end{cases}$$

Для этой случайной величины найти параметр a, функцию распределения, построить графики функции плотности и функции распределения; Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность попадания случайной величины на интервал $(0{,}5; 1)$.

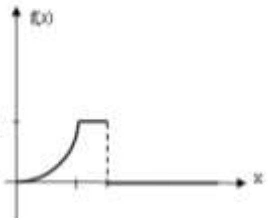
Решение. Параметр a найдем из условия

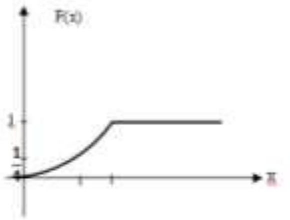
$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} x^3 dx + \int\limits_{1}^{7/4} a\,dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}a,$$

следовательно, $a = 1$. Найдем функцию распределения по формуле $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0; \\ \int\limits_0^x t^3 dt = \dfrac{x^4}{4}, \quad 0 \le x < 1 \\ \int\limits_0^1 t^3 dt + \int\limits_1^x dt = \dfrac{1}{4} + x - 1 = x - \dfrac{3}{4}, \quad 1 \le x < \dfrac{7}{4}; \\ 1, \quad x \ge \dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Графики функции плотности и функции распределения представлены на рис.





Математическое ожидание $M(X)=\int\limits_0^1 x^4dx+\int\limits_1^{7/4} x\,dx=\dfrac{197}{160}$.

Дисперсия $D(X)=\int\limits_0^1 x^5dx+\int\limits_1^{7/4} x^2\,dx-\left(\dfrac{197}{160}\right)^2=\dfrac{311}{192}-\left(\dfrac{197}{160}\right)^2\approx 0{,}4$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}64$.

Вероятность попадания в заданный интервал $p(0{,}5<X<1)=\int\limits_{0,5}^1 x^3dx=\dfrac{15}{64}$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

В предлагаемых ниже задачах задана плотность вероятности некоторой непрерывной случайной величины. Для этой случайной величины найти параметр a, функцию распределения, построить графики функции плотности и функции распределения; Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность попадания случайной величины на интервал (α,β).

8.1. $\alpha=2$, $\beta=3$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \quad \textit{или} \quad x\ge 4;\\ 2(x-1)/3, & 1\le x<2;\\ a(x-4), & 2\le x<4.\end{cases}$$

8.2. $\alpha=1$, $\beta=2$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \textit{или} \quad x\ge 3;\\ 2x/3, & 0\le x<1;\\ a(3-x), & 1\le x<3.\end{cases}$$

8.3. $\alpha=0$, $\beta=2$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \quad \textit{или} \quad x\ge 3;\\ (x+1)/6, & -1\le x<2;\\ a(3-x), & 2\le x<3.\end{cases}$$

8.4. $\alpha=3$, $\beta=4$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2 \quad \textit{или} \quad x\ge 5;\\ 1/2, & 2\le x<3;\\ a(5-x)/2, & 3\le x<5.\end{cases}$$

8.5. $\alpha=2$, $\beta=3$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \quad \textit{или} \quad x\ge 4;\\ 2/9, & -1\le x<3;\\ a(x-4), & 3\le x<4.\end{cases}$$

8.6. $\alpha=-1$, $\beta=0$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-2 \quad \textit{или} \quad x\ge 2;\\ 1/3, & -2\le x<0;\\ a(2-x), & 0\le x<2.\end{cases}$$

8.7. $\alpha=-1$, $\beta=0$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-2 \quad \textit{или} \quad x\ge 1;\\ (x+2)/3, & -2\le x<0;\\ a(1-x)/2, & 0\le x<1.\end{cases}$$

8.8. $\alpha=4$, $\beta=5$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<3 \quad \textit{или} \quad x\ge 7;\\ 2/5, & 3\le x<4;\\ a(7-x)/3, & 4\le x<7.\end{cases}$$

8.9. $\alpha=0$, $\beta=1$;

8.10. $\alpha=1/2$, $\beta=1$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-2 \quad \textit{или} \quad x\ge 1;\\ (x+2)/3, & -2\le x<0;\\ a(1-x)/2, & 0\le x<1.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \textit{или} \quad x\ge 3;\\ 2x/5, & 0\le x<1;\\ a, & 1\le x<3.\end{cases}$$

8.11. $\alpha=0$, $\beta=1$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \quad \textit{или} \quad x\ge 3;\\ a\left(x^2-2x-3\right), & -1\le x<3.\end{cases}$$

8.12. $\alpha=7/2$, $\beta=4$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<3 \quad \textit{или} \quad x\ge 7;\\ 2(x-3)/7, & 3\le x<4;\\ a, & 4\le x<7.\end{cases}$$

8.13. $\alpha=2$, $\beta=3$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \quad \textit{или} \quad x\ge 4;\\ a\left(x^2-5x+4\right), & 1\le x<4.\end{cases}$$

8.14. $\alpha=-1$, $\beta=0$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-2 \quad \textit{или} \quad x\ge 2;\\ (x+2)/6, & -2\le x<0;\\ a, & 0\le x<2.\end{cases}$$

8.15. $\alpha=1/2$, $\beta=3/2$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \quad \textit{или} \quad x\ge 2;\\ a\sin(\pi x), & 1\le x<2.\end{cases}$$

8.16. $\alpha=1/2$, $\beta=1$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \textit{или} \quad x\ge 2;\\ (6x-3x^2)/7, & 0\le x<1;\\ a, & 1\le x<2.\end{cases}$$

8.17. $\alpha=0$, $\beta=1/2$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \textit{или} \quad x\ge 1;\\ a\cos(\pi x/2), & 0\le x<1.\end{cases}$$

8.18. $\alpha=2$, $\beta=3$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \quad \textit{или} \quad x\ge 4;\\ (x+1)/12, & -1\le x<3;\\ a, & 3\le x<4.\end{cases}$$

8.19. $\alpha=1/2$, $\beta=1$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-2 \quad \textit{или} \quad x\ge 2;\\ 1/3, & -2\le x<0;\\ a\left(x^2-2x\right), & 0\le x<2.\end{cases}$$

8.20. $\alpha=3/2$, $\beta=2$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \quad \textit{или} \quad x\ge 4;\\ 2(x-1)/5, & 1\le x<2;\\ a, & 2\le x<4.\end{cases}$$

8.21. $\alpha=-2$, $\beta=-1$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-3 \quad \textit{или} \quad x\ge 0;\\ a\left(x^2+3x\right), & -3\le x<0.\end{cases}$$

8.22. $\alpha=5/2$, $\beta=3$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2 \quad \textit{или} \quad x\ge 5;\\ 2(x-2)/5, & 2\le x<3;\\ a, & 3\le x<5.\end{cases}$$

8.23. $\alpha=0$, $\beta=1/4$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad \textit{или} \quad x\ge 3/2;\\ 3(x-x^2)/5, & 0\le x<1/2;\\ a, & 1/2\le x<3/2.\end{cases}$$

8.24. $\alpha=0$, $\beta=1/2$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \quad \textit{или} \quad x\ge 1;\\ a\cos(\pi x/2), & -1\le x<1.\end{cases}$$

8.25. $\alpha=1$, $\beta=5/3$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \quad \textit{или} \quad x\ge 2;\\ a\sin(\pi x/2), & 1\le x<2.\end{cases}$$

9. Нормальный закон распределения.

Говорят, что непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону, если ее плотность вероятности задается равенством

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X равны соответственно $M(X)=a$, $\sigma(X)=\sigma$. Вероятность попадания случайной величины X на интервал (α,β) равна $p(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt-$ нормальная функция распределения.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(a-0{,}804;\ a+0{,}804)$ равна $p_1=0{,}8198$, а вероятность попадания на интервал $(a;\ 3{,}732)$ равна $p_2=0{,}4573$. Требуется найти параметры a и σ, а также вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(2{,}4;\ 3{,}4)$.

Решение. Имеем

$p(a-0{,}804<X<a+0{,}804)=\Phi\left(\frac{0{,}804}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{0{,}804}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}804}{\sigma}\right)-1=0{,}8198$, т.е.

$\Phi\left(\frac{0{,}804}{\sigma}\right)=0{,}9099$. По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $\Phi(x)=0{,}9099$ при $x\approx 1{,}34$. Таким образом, $\frac{0{,}804}{\sigma}\approx 1{,}34$ и $\sigma\approx 0{,}6$. Далее,

$p(a<X<3{,}732)=\Phi\left(\frac{3{,}732-a}{\sigma}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\frac{3{,}732-a}{0{,}6}\right)-0{,}5=0{,}4573$. Следовательно,

$\Phi\left(\frac{3{,}732-a}{0{,}6}\right)=0{,}9573$. По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $\Phi(x)=0{,}9573$ при $x\approx 1{,}72$. Отсюда $a\approx 2{,}7$. Осталось найти вероятность попадания случайной величины X на интервал $(2{,}4;\ 3{,}4)$. Имеем

$p(2{,}4<X<3{,}4)=\Phi\left(\frac{3{,}4-2{,}7}{0{,}6}\right)-\Phi\left(\frac{2{,}4-2{,}7}{0{,}6}\right)=\Phi(1{,}17)-\Phi(-0{,}5)=\Phi(1{,}17)+\Phi(0{,}5)-1\approx$

$\approx 0{,}879+0{,}6915-1\approx 0{,}57$.

Задачи для самостоятельного решения

В предлагаемых ниже задачах непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(a-c;\ a+c)$ равна p_1, а вероятность попадания на интервал $(a;\ b)$ равна p_2. Требуется найти параметры a и σ, а также вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(\alpha;\ \beta)$.

9.1. $c = 0{,}06$, $p_1 = 0{,}2358$,
$b = 3{,}95$, $p_2 = 0{,}0987$,
$\alpha = 4$, $\beta = 4{,}4$.

9.2. $c = 0{,}11$, $p_1 = 0{,}7286$,
$b = 2{,}285$, $p_2 = 0{,}3023$,
$\alpha = 2{,}1$, $\beta = 2{,}3$.

9.3. $c = 0{,}61$, $p_1 = 0{,}7776$,
$b = 4{,}52$, $p_2 = 0{,}4671$,
$\alpha = 3{,}5$, $\beta = 4{,}4$.

9.4. $c = 0{,}28$, $p_1 = 0{,}8384$,
$b = 2{,}452$, $p_2 = 0{,}4608$,
$\alpha = 2$, $\beta = 2{,}4$.

9.5. $c = 0{,}405$, $p_1 = 0{,}823$,
$b = 3{,}895$, $p_2 = 0{,}4505$,
$\alpha = 3{,}2$, $\beta = 3{,}8$.

9.6. $c = 0{,}23$, $p_1 = 0{,}3182$,
$b = 1{,}793$, $p_2 = 0{,}1217$,
$\alpha = 1{,}8$, $\beta = 2{,}3$.

9.7. $c = 0{,}07$, $p_1 = 0{,}516$,
$b = 1{,}36$, $p_2 = 0{,}2257$,
$\alpha = 1{,}2$, $\beta = 1{,}4$.

9.8. $c = 0{,}552$, $p_1 = 0{,}6424$,
$b = 2{,}29$, $p_2 = 0{,}0596$,
$\alpha = 2{,}1$, $\beta = 2{,}8$.

9.9. $c = 0{,}288$, $p_1 = 0{,}251$,
$b = 1{,}787$, $p_2 = 0{,}1664$,
$\alpha = 1{,}2$, $\beta = 2{,}1$.

9.10. $c = 0{,}136$, $p_1 = 0{,}135$,
$b = 3{,}18$, $p_2 = 0{,}4821$,
$\alpha = 1{,}2$, $\beta = 1{,}9$.

9.11. $c = 0{,}484$, $p_1 = 0{,}7738$,
$b = 2{,}872$, $p_2 = 0{,}4236$,
$\alpha = 2{,}2$, $\beta = 2{,}9$.

9.12. $c = 1{,}224$, $p_1 = 0{,}8262$,
$b = 4{,}158$, $p_2 = 0{,}4474$,
$\alpha = 2{,}5$, $\beta = 3{,}6$.

9.13. $c = 1{,}136$, $p_1 = 0{,}8444$,
$b = 4{,}836$, $p_2 = 0{,}4222$,
$\alpha = 3{,}5$, $\beta = 4{,}4$.

9.14. $c = 1{,}029$, $p_1 = 0{,}8584$,
$b = 3{,}545$, $p_2 = 0{,}1368$,
$\alpha = 3{,}2$, $\beta = 4{,}5$.

9.15. $c = 1{,}74$, $p_1 = 0{,}853$,
$b = 4{,}352$, $p_2 = 0{,}1772$,
$\alpha = 3{,}7$, $\beta = 5{,}7$.

9.16. $c = 0{,}66$, $p_1 = 0{,}8132$,
$b = 3{,}31$, $p_2 = 0{,}0871$,
$\alpha = 3$, $\beta = 4{,}1$.

9.17. $c = 0{,}1$, $p_1 = 0{,}0796$,
$b = 1{,}62$, $p_2 = 0{,}1985$,
$\alpha = 1{,}2$, $\beta = 3{,}2$.

9.18. $c = 0{,}065$, $p_1 = 0{,}1034$,
$b = 2{,}59$, $p_2 = 0{,}219$,
$\alpha = 2{,}5$, $\beta = 3$.

9.19. $c = 0{,}04$, $p_1 = 0{,}1586$,
$b = 1{,}32$, $p_2 = 0{,}2257$,
$\alpha = 1{,}4$, $\beta = 1{,}6$.

9.20. $c = 0{,}088$, $p_1 = 0{,}1742$,
$b = 1{,}808$, $p_2 = 0{,}1985$,
$\alpha = 1{,}7$, $\beta = 2{,}2$.

9.21. $c = 2{,}42$, $p_1 = 0{,}9722$,
$b = 2{,}922$, $p_2 = 0{,}3461$,
$\alpha = 1{,}5$, $\beta = 3{,}1$.

9.22. $c = 1{,}69$, $p_1 = 0{,}8064$,
$b = 3{,}72$, $p_2 = 0{,}4192$,
$\alpha = 2$, $\beta = 3{,}4$.

9.23. $c = 1{,}44$, $p_1 = 0{,}7698$,

9.24. $c = 0{,}195$, $p_1 = 0{,}1192$,

$b = 3{,}78$, $p_2 = 0{,}4192$,
$\alpha = 2$, $\beta = 4{,}5$.

$b = 4{,}28$, $p_2 = 0{,}2257$,
$\alpha = 3{,}4$, $\beta = 4{,}8$.

9.25. $c = 0{,}064$, $p_1 = 0{,}1272$,
$b = 3{,}24$, $p_2 = 0{,}3023$,
$\alpha = 3$, $\beta = 3{,}7$.

9.26. $c = 0{,}147$, $p_1 = 0{,}1664$,
$b = 2{,}925$, $p_2 = 0{,}2734$,
$\alpha = 2{,}5$, $\beta = 4{,}3$.

10. Непрерывные двумерные случайные величины.

Кроме одномерных случайных величин изучают величины, возможные значения которых определяются двумя, тремя,…, n числами. Такие величины называют соответственно двумерными, трехмерными,…, n-мерными. Двумерную величину обозначают (X, Y). Аналогично тому, как вводилась функция распределения одной случайной величины, можно определить функцию распределения двумерной случайной величины.

Функцией распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) называется функция, определяемая равенством $F(x, y) = p(X < x, Y < y)$. Непрерывную двумерной случайной величины (X, Y) можно задать с помощью плотности распределения. Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения, т.е. $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$. Плотность распределения является неотрицательной функцией и для нее выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1.$$

Вероятность попадания случайной точки (x, y) в область D вычисляется по формуле $p((x, y) \in D) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Плотности распределения составляющих X и Y, входящих в систему (X, Y), вычисляются по формулам $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$. Условной плотностью $\varphi_y(x)$ распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$ называется отношение плотности совместного распределения $f(x, y)$ к плотности распределения составляющей Y: $\varphi_y(x) = \dfrac{f(x, y)}{f_2(y)}$. Аналогично определяется условная плотность $\varphi_x(y)$ распределения составляющей Y при заданном значении $X = x$: $\varphi_x(y) = \dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$. Как и любая плотность распределения, условная плотность обладает свойствами:

$$\varphi_y(x) \ge 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(x)dx = 1;$$

$$\varphi_x(y) \ge 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(y)dy = 1.$$

Случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая; в противном случае случайные величины X и Y называются зависимыми. Для независимых случайных величин $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Зная плотности распределения составляющих X и Y непрерывной двумерной случайной величины, можно найти их математические ожидания и дисперсии:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_1(x)dx,\quad M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_2(y)dy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2\cdot f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f_1(x)dx-M^2(X);$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M(Y)\right)^2\cdot f_2(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot f_2(y)dy-M^2(Y).$$

Иногда удобнее использовать формулы, содержащие двумерную плотность вероятности:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,y)dxdy,\ M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x,y)dxdy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x,y)dxdy-M^2(X);$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M(Y)\right)^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot f(x,y)dxdy-M^2(Y).$$

Корреляционным моментом μ_{xy} (или ковариацией) системы (X,Y) называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$\mu_{xy}=M\left((X-M(X))\cdot(Y-M(Y))\right).$

Для вычисления корреляционного момента непрерывных случайных величин используют формулы:

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)\left(y-M(Y)\right)f(x,y)dxdy,$$

или

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\cdot f(x,y)dxdy-M(X)M(Y).$$

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами X и Y. Корреляционный момент двух независимых случайных величин равен 0.

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Две случайные величины называются коррелированными, если их корреляционный момент (или коэффициент корреляции) не равен 0, и некоррелированными, если $\mu_{xy}=0$. Две коррелированные величины также и зависимы. Обратное утверждение не всегда имеет место.

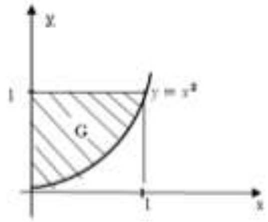
Пример. Множество G на плоскости задается неравенствами: $0<x<1,\ x^2<y<1$.

Плотность распределения системы случайных величин (X,Y) равна

$f(x,y)=\begin{cases}ax^3y^2, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$. Найти параметр a, плотности распределения отдельных величин X и Y, входящих в систему; условные плотности распределения составляющих;

вероятность попадания случайной величины (X, Y) в область $x > \frac{1}{2}$; найти ковариацию и коэффициент корреляции. Выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

Решение. Область G изображена на рис.



Параметр a находим из равенства $a\iint\limits_G xy\,dxdy = 1$, имеем

$$1 = a\int_0^1 x^3 dx \int_{x^2}^1 y^2 dy = a\int_0^1 x^3 dx \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^1 = a\int_0^1 x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{x^6}{3}\right)dx = \frac{a}{3}\left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{10}\right)\right|_0^1 = \frac{a}{20}.$$

Следовательно, $a = 20$. Далее,

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x^2}^1 20x^3y^2 dy = \left.\frac{20}{3}x^3y^3\right|_{x^2}^1 = \frac{20}{3}x^3\left(1 - x^6\right) \text{ при } 0 < x < 1,$$

$f_1(x) = 0$ при остальных значениях x.

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{y}} 20x^3y^2 dx = \left.5y^2x^4\right|_0^{\sqrt{y}} = 5y^4 \text{ при } 0 < y < 1,$$

$f_2(y) = 0$ при прочих значениях y.

$$\varphi_y(x) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{20x^3y^2}{5y^4} = 4\frac{x^3}{y^2} \text{ в } G,\ \varphi_y(x) = 0 \text{ вне } G.$$

$$\varphi_x(y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{60x^3y^2}{20x^3\left(1 - x^6\right)} = \frac{3y^2}{\left(1 - x^6\right)} \text{ в } G,\ \varphi_x(y) = 0 \text{ вне } G.$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x)dx = \frac{20}{3}\int_0^1 \left(x^4 - x^{10}\right)dx = \frac{20}{3}\left.\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^{11}}{11}\right)\right|_0^1 = \frac{8}{11}.$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y)dy = \int_0^1 5y^5 dy = \frac{5}{6}.$$

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x,y)dxdy - M(X)M(Y) = 20\int_0^1 x^4 dx \int_{x^2}^1 y^3 dy - \frac{20}{33} = 5\int_0^1 x^4\left(1 - x^8\right)dx - \frac{20}{33} = \frac{4}{429}.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_1(x)dx - M^2(X) = \frac{20}{3}\int_0^1 \left(x^5 - x^{11}\right)dx - \frac{64}{121} = \frac{29}{1089}, \text{ тогда } \sigma_x = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}163.$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_2(y)dy - M^2(Y) = 5\int_0^1 y^6 dy - \frac{25}{36} = \frac{5}{252}, \text{ а } \sigma_y = \sqrt{D(Y)} \approx 0{,}141.$$

$r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \approx 0{,}406$. Т.к. коэффициент корреляции не равен нулю, то рассматриваемые случайные величины зависимы.

Найдем $p\left(\frac{1}{2} < x < 1,\ x^2 < y < 1\right) = 20\int_{1/2}^1 x^3 dx \int_{x^2}^1 y^2 dy = \frac{20}{3}\int_{1/2}^1 x^3\left(1 - x^6\right)dx = \frac{1377}{1536} \approx 0{,}896$.

Задачи для самостоятельного решения

В предлагаемых ниже задачах указана плотность распределения $f(x,y)$ системы случайных величин (X,Y). Требуется найти параметр a, плотности распределения отдельных величин X и Y, входящих в систему; условные плотности распределения составляющих; вероятность попадания случайной величины (X,Y) в область $x > \frac{1}{2}$; найти ковариацию и коэффициент корреляции. Выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

10.1. $G: 0 < x < 1,\ x < y < \sqrt{x}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} axy, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.2. $G: 0 < x < 1,\ x^3 < y < \sqrt[3]{x}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^3y, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.3. $G: 0 < x < 1,\ x < y < x^3$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.4. $G:\ 0 < x < 1,\ x^4 < y < 1$,

$$f(x,y) = \begin{cases} axy^3, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.5. $G:\ 0 < x < 1,\ \sqrt{x^3} < y < x$,

$$f(x,y) = \begin{cases} axy, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.6. $G: 0 < x < 1,\ x^4 < y < \sqrt[4]{x}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.7. $G:\ 0 < x < 1,\ \sqrt{x} < y < 1$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^3y, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.8. $G: 0 < x < 1,\ x^4 < y < x^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^3y^2, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.9. $G:\ 0 < x < 1,\ x^4 < y < x$,

$$f(x,y) = \begin{cases} axy^2, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.10. $G: 0 < x < 1,\ \sqrt[4]{x} < y < 1$,

$$f(x,y) = \begin{cases} axy^2, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.11. $G: 0 < x < 1,\ 0 < y < x$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^3y^4, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.12. $G:\ 0 < x < 1,\ x < y < \sqrt[3]{x^2}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ay^2, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.13. $G:\ 0 < x < 1,\ x < y < 1$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.14. $G:\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \sqrt[3]{x}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^3, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.15. $G:\ 0 < x < 1,\ x^2 < y < \sqrt{x}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^3y, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.16. $G:\ 0 < x < 1,\ \sqrt[3]{x} < y < 1$,

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^3, & (x,y) \in G; \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

10.17. $G:\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x$,

10.18. $G:\ 0 < x < 1,\ x^3 < y < \sqrt{x}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} axy, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^3, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

10.19. $G:\ 0<x<1,\ x^4<y<x^3,$

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^2, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

10.20. $G:\ 0<x<1,\ x^4<y<1,$

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^2, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

10.21. $G:\ 0<x<1,\ 0<y<x^4,$

$$f(x,y)=\begin{cases} ay^2, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

10.22. $G:\ 0<x<1,\ \sqrt[3]{x^2}<y<1,$

$$f(x,y)=\begin{cases} axy^2, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

10.23. $G:\ 0<x<1,\ 0<y<\sqrt{x},$

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^3y, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

10.24. $G:\ 0<x<1,\ 0<y<\sqrt{x},$

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^3y, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

10.25. $G:\ 0<x<1,\ 0<y<\sqrt[3]{x^2},$

$$f(x,y)=\begin{cases} axy^3, & (x,y)\in G; \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$$

Приложения

Таблица 1. Нормальная функция распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5120	0,5159	0,5239	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8380
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8718	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9083	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9387	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9758	0,9762	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9964	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998

Таблица 2 . Плотность вероятности нормального распределения $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,333	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,003	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009

Таблица 3. Распределение Пуассона $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$k \mid \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0021
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

$k \mid \lambda$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1242	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,004	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк.,1999.– 479 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 365 с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 551 с.
5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.
6. Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. – СПб.: Питер, 2004. – 461 с.
7. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. Учеб. пособие для вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 368 с.
8. Иванков П.Л., Муранов Ю.В. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей: типовые расчеты. – ВлГУ, 1997. – 56 с.

Оглавление

1. Основные понятия теории вероятностей……………………………………….4
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей……………………………………6
3. Формула полной вероятности и формулы Байеса………………………………...10
4. Геометрическое определение вероятности……………………………………..14
5. Формула Бернулли……………………………………………………………..15
6. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа……..17
7. Дискретные случайные величины……………………………………………….20
8. Непрерывные случайные величины……………………………………………..25
9. Нормальный закон распределения……………………………………………….28
10. Непрерывные двумерные случайные величины…………………………………...30