Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Краткий конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике

Владимир 2014г.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Событием в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти в результате некоторого испытания. Наблюдаемые нами события можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные, случайные.

Событие достоверное, если при всех испытаниях рассматриваемое событие всегда наступает. Например, при взрыве снаряда достоверное событие – разрушение оболочки.

Событие невозможное, если при всех испытаниях событие никогда не наступает. Например, при отсутствии тока в электрической цепи невозможное событие – загорание лампочки.

Событие случайное, если в результате испытания событие может появиться или не появиться. Например, выигрываем на купленный билет лотереи.

Классическое определение вероятностей

Пространством элементарных исходов называется множество всех взаимно исключающихся исходов испытания. Его обозначают Ω.

Те исходы, при которых интересующее нас событие наступает, назовем **благоприятствующими** этому событию.

Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n равновозможных несовместных элементарных исходов испытания и обозначается $p(A)$, т.е. $p(A)=\dfrac{m}{n}$.

Свойства вероятностей:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события заключена между нулем и единицей $0 \le p(A) \le 1$.

Относительная частота

Относительной частотой события называется отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний и обозначается $w(A)$.

Отличие классической вероятности события от его частоты состоит в том, что вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта. Относительную частоту или число, близкое к ней, принимают в качестве статистической вероятности.

Для успешного решения задач с использованием классического определения вероятности необходимо знать основные формулы *комбинаторики* – раздела математики, изучающего, в частности, методы решения задач на подсчет числа различных комбинаций.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающихся только порядком следования. Число всех возможных перестановок из n различных элементов равно $P_n = n!$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком следования. Число возможных размещений из n различных элементов по k равно $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k, которые отличаются составом элементов. Число возможных сочетаний из n различных элементов по k равно $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 1. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно взять 6 деталей из 10, т.е. $n = C_{10}^6$. Подсчитаем исходы, благоприятствующие интересующему нас событию: 4 стандартных из 7 можно взять C_7^4 способами, при этом остальные 2 детали должны быть нестандартными, их можно взять из 3 нестандартных деталей C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$. Искомая вероятность равна $p(A) = \dfrac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 24}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 0{,}5$.

2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Суммой *A+B* двух событий *A* и *B* называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Суммой нескольких событий $A_1 + A_2 + ... + A_n$ называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, равна сумме вероятностей этих событий: $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Следствие

Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$.

Произведением двух событий *A* и *B* называют событие AB, состоящее в их одновременном осуществлении. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Условной вероятностью *$P_A(B)$* называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло $p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$.

Следствие

Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли $p(A_1 A_2 \dots A_n) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot \dots \cdot p_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. $p_A(B) = p(B)$. Для независимых событий вероятность совместного появления равна произведению вероятностей этих событий

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B).$$

Несколько событий называют независимыми в совокупности, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы в совокупности, то $p(A_1 A_2 \dots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n)$.

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно наступает тогда, когда A не наступает. Для противоположных событий справедливо равенство: $p(A) + p\left(\overline{A}\right) = 1$.

Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots \overline{A}_n$

$$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}_1\right) \cdot \dots \cdot p\left(\overline{A}_n\right).$$

В частности, если события $A_1, A_2, \dots A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна $p(A) = 1 - q^n$, где $q = 1 - p$.

Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна $p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$.

Пример. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны извлекаются шары до появления черного шара. Найти вероятность, что произведено ровно три извлечения, если: а) после каждого извлечения шар возвращается в урну; б) извлеченные шары откладываются в сторону.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в появлении черного шара при i-ом извлечении. Тогда интересующее нас событие $A=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Но в пункте а) эти события независимы, поэтому $p(A)=p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)p(A_3)=\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}=\frac{150}{1331}\approx 0{,}11$. А в пункте б) эти события зависимы, поэтому $p(A)=p(\overline{A}_1)p_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)p_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(A_3)=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{4}{33}\approx 0{,}12$.

3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу (т.е. сумма этих событий есть достоверное событие и никакие два из них не могут произойти одновременно). Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), \dots, p_{B_n}(A)$.

<u>Теорема</u>

Вероятность события *A*, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу равна

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(B_i)\cdot p_{B_i}(A).$$

Эту формулу называют формулой полной вероятности.

Поскольку заранее неизвестно, какое из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$ произойдет, их называют гипотезами. Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Необходимо произвести переоценку вероятностей этих гипотез, т.е. надо найти *апостериорные* (получаемые после испытания) условные вероятности гипотез $p_A(B_1), p_A(B_2), \dots, p_A(B_n)$.

Следствие. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса

$$p_A(B_i)=\frac{p(B_i)\cdot p_{B_i}(A)}{p(A)} \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Пример 1. В первой урне 3 белых и 5 черных шаров, во второй 6 белых и 4 черных шаров, в третьей 1 белый и 2 черных шара. Бросают игральную кость. Если выпадает 1 или 2, то берут шар из первой урны. Если выпадает 4, 5, 6, то берут шар из третьей урны. Найти вероятность того, что наудачу взятый шар окажется белым.

Решение. Обозначим через A событие – взятый шар окажется белым. Пусть гипотеза B_i состоит в том, что выбрана i-я урна $(i = 1, 2, 3)$. Тогда вероятности гипотез равны $p(B_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(B_2) = \frac{1}{6}$ и $p(B_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Условные вероятности равны $p_{B_1}(A) = \frac{3}{8}$, $p_{B_2}(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $p_{B_3}(A) = \frac{1}{3}$. По формуле полной вероятности имеем

$$p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{47}{120} \approx 0{,}39.$$

Пример 2. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Случайно выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это будет мужчина.

Решение. Пусть событие A – выбранное лицо оказалось дальтоником.

Гипотеза B_1 – выбран мужчина, гипотеза B_2 – выбрана женщина.

Можно считать, что число женщин и мужчин равно, тогда $p(B_1) = p(B_2) = 0{,}5$.

Условные вероятности равны $p_{B_1}(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05$, $p_{B_2}(A) = \frac{0{,}25}{100} = 0{,}0025$. Тогда по формуле Байеса имеем $p_A(B_1) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}5(0{,}05 + 0{,}0025)} \approx 0{,}95$.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

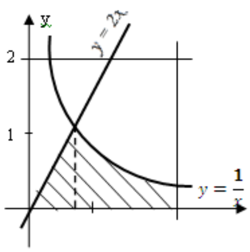
Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу бросается точка. Это означает, что все точки области G «равноправны» в отношении попадания туда брошенной случайной точки. Полагая, что вероятность события A – попадания брошенной точки на фигуру g – пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g, найдем $p(A) = \frac{S_g}{S_G}$, где S_g и S_G – соответственно площади областей g и G.

Область, на которую распространяется понятие геометрической вероятности, может быть одномерной (прямая, отрезок) и трехмерной (некоторое тело в пространстве). Обозначая меру (длину, площадь, объем) области через mes, приходим к следующему определению.

Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области, т.е. $p(A)=\dfrac{mes\,g}{mes\,G}$.

Пример1. Наудачу берутся два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность, что произведение xy будет не больше единицы, а частное $\dfrac{y}{x}$ не больше двух.

Решение. Взятые два числа можно интерпретировать как одну точку с координатами (x,y) на плоскости. Множество всех таких точек составляет квадрат со стороной 2. Неравенствами $xy\le 1$, $\dfrac{y}{x}\le 2$ определяется множество точек, заштрихованное на рисунке



Согласно геометрическому определению вероятности имеем

$$p\left(xy\le 1,\frac{y}{x}\le 2\right)=\frac{S(g)}{S(G)}=\frac{1}{4}\left(\int_0^{1/\sqrt{2}}2x\,dx+\int_{1/\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x}\right)=\frac{1}{4}\left(x^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}}+\ln|x|\Big\|_{1/\sqrt{2}}^{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln 2\right)=$$

$$=\frac{1+3\ln 2}{8}\approx 0{,}38.$$

5. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события *A* в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события *A*.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может появиться с вероятностью p. Тогда вероятность того, что событие *A* появится ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли

$$p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\text{, где } q=1-p.$$

Число k_0 наступления события *A* в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность того, что событие наступит k_0 раз не меньше остальных возможных исходов испытаний. Можно показать, что это число удовлетворяет двойному неравенству:

$$np - q \le k_0 \le np + p\,. \qquad (*)$$

Так как разность $np + p - (np - q) = 1$, то всегда существует целое число k_0, удовлетворяющее неравенству (*). При этом, если $np + p -$ целое число, то наивероятнейших чисел два: $k_0 = np + p$ и $k_0^{/} = np - q$.

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0{,}9$. Найти вероятность того, что в ближайшие 5 суток расход электроэнергии в течение 3 суток не превысит нормы.

Решение. Т.к. $p = 0{,}9$, то вероятность перерасхода электроэнергии равна $q = 1 - p = 0{,}1$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна $p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2$ = $10 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2$ =0,0729.

Пример 2. По данным примера 1 найти наивероятнейшее число суток из ближайших пяти, в которые расход электроэнергии не превысит установленной нормы, и вероятность этого наивероятнейшего числа.

Решение. По формуле (*) имеем: $5 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 5 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$ или $4{,}4 \le k_0 \le 5{,}4$. Единственное целое число, удовлетворяющее этому неравенству, $k_0 = 5$. А его вероятность $p_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}9^5 = 0{,}59049$.

6. ФОРМУЛА ПУАССОНА. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ МУАВРА–ЛАПЛАСА

Вычисление вероятности по формуле Бернулли при больших значениях n не всегда удобно. Поэтому применяются приближенные формулы к формуле Бернулли. Если n велико, p мало, а $np = \lambda \le 10$, то применяют приближенную формулу Пуассона $p_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. В таблице 3 приложений приведены значения функции Пуассона при различных значениях λ.

В случае, когда $np > 10$, используют приближенную формулу, вытекающую из локальной теоремы Муавра-Лапласа:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)\,, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\,,$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - функция Гаусса. Значения этой функции приведены в таблице 1 приложений. Функция Гаусса является четной функцией, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, монотонно убывающей при положительных значениях x, причем при $x \to \infty$ $\varphi(x) \to 0$. (Практически можно считать, что уже при $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$).

Если требуется найти вероятность того, что число появлений k события A не меньше k_1 и не больше k_2, то применяют приближенную формулу, вытекающую из интегральной теоремы Муавра-Лапласа:

$$p_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),\ x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}},\ i = 1, 2,$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ - нормальная функции распределения. Ее значения приведены в табл.1 приложений для неотрицательных значений x, поэтому полезно иметь в виду равенство $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Пример 1. В урне находятся 99 черных и 1 белый шар. Производится 200 извлечений шара из урны, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну, и шары перемешиваются. Найти вероятность появления не менее двух белых шаров.

Решение. Вероятность появления белого шара при однократном извлечении $p = 0{,}01$; $np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$. По формуле Пуассона имеем $p(k \ge 2) = 1 - p(k < 2) =$ $1 - p_{200}(0) - p_{200}(1) = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \approx 0{,}59$.

Пример 2. В урне находятся 4 черных и 5 белых шаров. Производится 180 извлечений шара из урны, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну, и шары перемешиваются. Найти вероятность того, что белый шар появиться ровно 99 раз.

Решение. Вероятность появления белого шара при однократном извлечении $p = \frac{5}{9}$, тогда $q = \frac{4}{9}$, $np = 100 > 9$, поэтому применяем локальную теорему Муавра-Лапласа:

$x = \frac{99 - 100}{\sqrt{400/9}} = -\frac{3}{20} = -0{,}15$. По таблице 2 приложений находим $\varphi(-0{,}15) = \varphi(0{,}15) = 0{,}3945$, и, окончательно, $p_{180}(99) \approx \frac{3}{20} \cdot 0{,}3945 \approx 0{,}059$.

Пример 3. Найти вероятность того, что в эксперименте, описанном в предыдущем примере, количество k извлеченных белых шаров будет удовлетворять неравенству $80 \le k \le 120$.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа. В рассматриваемом случае $k_1 = 80$, $k_2 = 120$. Тогда имеем

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-100}{20/3} = -3, \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{120-100}{20/3} = 3.$$

Искомая вероятность $p_{180}(80{,}120) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0{,}997$.

7. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называется числовая функция, определенная на множестве элементарных исходов. Например, число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, …, 100.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \ldots$, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами $x, y, z, \ldots$.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. **Дискретные случайные величины** – это случайные величины, которые принимают не более счетного множества отдельных возможных значений с определенными вероятностями. **Непрерывные случайные величины** – это случайные величины, которые могут принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Пусть X – дискретная случайная величина. Вероятность того, что X приняла значение x_k, обозначим $p(X = x_k) = p_k$. **Законом распределения дискретной случайной величины** называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически и графически. Таблица, в которой указаны значения случайной величины и их вероятности, называется рядом распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Так как областью определения случайной величины является пространство элементарных исходов, то сумма вероятностей второй строки таблицы равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится и его сумма равна 1.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), которые соединяют отрезками прямых. Полученную фигуру называют **многоугольником распределения**.

Пример 1. В партии из 12 деталей 8 стандартных. Наудачу взяли 5 деталей. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди взятых.

Решение. Очевидно, возможные значения X таковы: 1, 2, 3, 4, 5. Вычислим вероятности этих значений:

$$p(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_4^4}{C_{12}^5}=\frac{8\cdot 5!\cdot 7!}{12!}=\frac{1}{99};$$

$$p(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_4^3}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 4\cdot 5!\cdot 7!}{2!\cdot 6!\cdot 12!}=\frac{14}{99};$$

$$p(X=3)=\frac{C_8^3\cdot C_4^2}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 7!}{3!\cdot 5!\cdot 2\cdot 2\cdot 12!}=\frac{42}{99};$$

$$p(X=4)=\frac{C_8^4\cdot C_4^1}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 4\cdot 5!\cdot 7!}{4!\cdot 4!\cdot 12!}=\frac{35}{99};$$

$$p(X=5)=\frac{C_8^5}{C_{12}^5}=\frac{8!\cdot 5!\cdot 7!}{5!\cdot 3!\cdot 12!}=\frac{7}{99}.$$

Искомый закон распределения:

X	1	2	3	4	5
p	$1/99$	$14/99$	$42/99$	$35/99$	$7/99$

Контроль: $\frac{1}{99}+\frac{14}{99}+\frac{42}{99}+\frac{35}{99}+\frac{7}{99}=\frac{99}{99}=1$.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Если случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то математическое ожидание равно

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Если случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, при условии, что ряд в правой части сходится абсолютно.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2.$$

Для вычисления дисперсии удобно пользоваться формулой: $D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X)$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = p(X < x) = \sum p\left(X = x_i\right)$, где суммирование распространяется на все i, для которых $x_i < x$.

Пример 2. Для случайной величины, построенной в примере 1, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения.

Решение. $M(X) = 1 \cdot \frac{1}{99} + 2 \cdot \frac{14}{99} + 3 \cdot \frac{42}{99} + 4 \cdot \frac{35}{99} + 5 \cdot \frac{7}{99} = \frac{330}{99} = \frac{10}{3}$;

$$D(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{99} + 2^2 \cdot \frac{14}{99} + 3^2 \cdot \frac{42}{99} + 4^2 \cdot \frac{35}{99} + 5^2 \cdot \frac{7}{99} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{70}{99};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{70}{99}} \approx 0{,}84;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1/99, & 1 < x \le 2, \\ 15/99, & 2 < x \le 3, \\ 57/99, & 3 < x \le 4, \\ 92/99, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Примеры дискретных случайных величин

1. Биномиальное распределение.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Пусть $X -$ число появлений события A в этих n испытаниях. Возможные значения $X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Вероятности возможных значений можно найти по формуле Бернулли:

$$p\left(X = x_k\right) = p_k = p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (1)$$

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой (1).
Биномиальный закон:

X	n	$n-1$	$\dots$	k	$\dots$	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	q^n

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Математическое ожидание $M(X)$ числа появления события A в n независимых испытаниях равно $M(X) = np$, а дисперсия $D(X) = npq$.

2. Распределение Пуассона.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Если n велико, p мало, а $np = \lambda \le 10$, то $p_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Эта формула выражает закон распределения Пуассона массовых (n велико) и редких (p мало) событий. Математическое ожидание в распределении Пуассона равно $M(X) = \lambda$ и дисперсия $D(X) = \lambda$.

3. Геометрическое распределение.

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$). Обозначим через X случайную величину, равную числу испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Очевидно, возможные значения этой случайной величины – натуральные числа: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …

Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, а в k-ом появилось. По теореме умножения вероятностей независимых событий имеем

$$p(X = k) = p \cdot q^{k-1} \qquad (2)$$

Полагая $k = 1, 2, \dots$ в формуле (2), получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем $q = 1 - p$ $(0 < q < 1)$:

$$p, \quad pq, \quad pq^2, \dots, pq^{k-1}, \dots$$

По этой причине распределение, определяемое формулой (2), называют геометрическим. Найдем $\sum_{k=0}^{\infty} pq^{k-1} = p \cdot \dfrac{1}{1-q} = 1$. Математическое ожидание в геометрическом распределении равно $M(X) = \dfrac{1}{p}$, а дисперсия $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

7. Непрерывные случайные величины.

Наряду с дискретными случайными величинами в теории вероятностей изучаются также непрерывные случайные величины, множество возможных значений которых несчетно и обычно представляет собой некоторый промежуток. Такую случайную величину можно охарактеризовать функцией распределения $F(x) = p(X < x)$ или плотностью вероятности $f(x)=F'(x)$. Плотность вероятности является неотрицательной функцией, для которой выполняется равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Если известна плотность вероятности, то функцию распределения можно найти по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Вероятность попадания случайной величины на некоторый интервал вычисляется по формуле:

$$p(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение определяются соответственно формулами:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx,\qquad D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx-M^2(X),\qquad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \quad или \quad x\geq 7/4;\\ x^3, & 0\leq x<1;\\ a, & 1\leq x<7/4.\end{cases}$$

Для этой случайной величины найти параметр a, функцию распределения, построить графики функции плотности и функции распределения; Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность попадания случайной величины на интервал $(0{,}5;1)$.

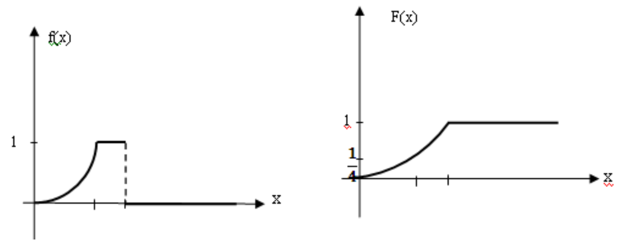
Решение. Параметр a найдем из условия

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{0}^{1} x^3dx+\int\limits_{1}^{7/4} a\,dx=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}a,$$

следовательно, $a=1$. Найдем функцию распределения по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \int\limits_0^x t^3dt=\dfrac{x^4}{4}, & 0\leq x<1\\ \int\limits_0^1 t^3dt+\int\limits_1^x dt=\dfrac{1}{4}+x-1=x-\dfrac{3}{4}, & 1\leq x<\dfrac{7}{4};\\ 1, & x\geq\dfrac{7}{4}.\end{cases}$$

Графики функции плотности и функции распределения представлены на рис.



Математическое ожидание $M(X)=\int\limits_0^1 x^4dx+\int\limits_1^{7/4} x\,dx=\dfrac{197}{160}$.

Дисперсия $D(X)=\int\limits_0^1 x^5dx+\int\limits_1^{7/4} x^2\,dx-\left(\dfrac{197}{160}\right)^2=\dfrac{311}{192}-\left(\dfrac{197}{160}\right)^2\approx 0{,}4$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}64$.

Вероятность попадания в заданный интервал $p(0{,}5<X<1)=\int\limits_{0{,}5}^1 x^3dx=\dfrac{15}{64}$.

9. Нормальный закон распределения

Говорят, что непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону, если ее плотность вероятности задается равенством

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X равны соответственно $M(X)=a$, $\sigma(X)=\sigma$. Вероятность попадания случайной величины X на интервал (α,β) равна $p(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt-$ нормальная функция распределения.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(a-0{,}804;\ a+0{,}804)$ равна $p_1=0{,}8198$, а вероятность попадания на интервал $(a;\ 3{,}732)$ равна $p_2=0{,}4573$. Требуется найти параметры a и σ, а также вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(2{,}4;\ 3{,}4)$.

Решение. Имеем $p\left(a-0{,}804<X<a+0{,}804\right)=\Phi\left(\frac{0{,}804}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{0{,}804}{\sigma}\right)=$

$2\Phi\left(\frac{0{,}804}{\sigma}\right)-1=0{,}8198$, т.е. $\Phi\left(\frac{0{,}804}{\sigma}\right)=0{,}9099$. По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $\Phi(x)=0{,}9099$ при $x\approx 1{,}34$. Таким образом, $\frac{0{,}804}{\sigma}\approx 1{,}34$ и $\sigma\approx 0{,}6$. Далее,

$p\left(a<X<3{,}732\right)=\Phi\left(\frac{3{,}732-a}{\sigma}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\frac{3{,}732-a}{0{,}6}\right)-0{,}5=0{,}4573$. Следовательно,

$\Phi\left(\frac{3{,}732-a}{0{,}6}\right)=0{,}9573$. По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $\Phi(x)=0{,}9573$ при $x\approx 1{,}72$. Отсюда $a\approx 2{,}7$. Осталось найти вероятность попадания случайной величины X на интервал $(2{,}4;\ 3{,}4)$. Имеем

$$p\left(2{,}4<X<3{,}4\right)=\Phi\left(\frac{3{,}4-2{,}7}{0{,}6}\right)-\Phi\left(\frac{2{,}4-2{,}7}{0{,}6}\right)=\Phi(1{,}17)-\Phi(-0{,}5)=\Phi(1{,}17)+\Phi(0{,}5)-1\approx$$
$$\approx 0{,}879+0{,}6915-1\approx 0{,}57.$$

Приложения

Таблица 1. Нормальная функция распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5120	0,5159	0,5239	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8380
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8718	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9083	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9387	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9758	0,9762	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9964	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998

Таблица 2 . Плотность вероятности нормального распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,333	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,003	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009

Таблица 3. Распределение Пуассона $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k| λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0021
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k| λ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1242	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,004	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019