

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)**

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Методические указания к самостоятельной работе студента  
**по дисциплине**  
**«Высшая математика»**

Составитель:  
Кокурина Ю.К.

Владимир, 2016

**Задачи для самостоятельной работы.**

**1 – 20.** Дана система линейных уравнений. Требуется показать, что система совместна и найти её решение тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) методом обратной матрицы. Выполнить проверку решения.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -2 \\ 7x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 7x_1 - 5x_3 = 16 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 18 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 10x_3 = -16 \\ 2x_1 + 7x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 20x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 11 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 - 8x_3 = -7 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = -41 \\ 2x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ -5x_2 + 8x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7 \\ 13x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

**21 – 40      Методом исключения неизвестных найти общее и базисные решения систем уравнений:**

$$21. \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 - 4x_3 = -10 \\ 7x_1 - x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 25 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 7x_1 - 8x_2 - 7x_3 = -25 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 12x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x_1 + 15x_2 + 2x_3 = -6 \\ 6x_1 - 8x_2 - 20x_3 = -1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 30 \\ x_1 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -20 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -14 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 12x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 11x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 9x_3 = 21 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 23 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = -17 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 6x_1 - 6x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -14 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 15x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -22 \\ 11x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 6x_1 - 11x_2 + 7x_3 = 11 \\ 11x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 8x_1 + 5x_2 - 11x_3 = -1 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \\ 21x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

**41 – 60.** Найти произведение матриц  $AB = C$ , если  $A$ ,  $B$  даны:

$$41. A \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$42. A \begin{pmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$43. A \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$44. A \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -7 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$45. A \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$46. A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 8 & 0 & 15 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$47. A \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$48. A \begin{pmatrix} 3 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$49. A \begin{pmatrix} 13 & -7 & 2 \\ 1 & 14 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$50. A \begin{pmatrix} 3 & 13 & 23 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 50 & 25 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$51. A \begin{pmatrix} 44 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$52. A \begin{pmatrix} 9 & -9 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$53. A \begin{pmatrix} 16 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 21 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$54. A \begin{pmatrix} 8 & -11 & 12 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$55. A \begin{pmatrix} 14 & 2 & 6 \\ 4 & 12 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$56. A \begin{pmatrix} 13 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$57. A \begin{pmatrix} -4 & 3 & 12 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$58. A \begin{pmatrix} 18 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$59. A \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 10 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$60. A \begin{pmatrix} 22 & 10 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**61 – 80.**

Даны вершины треугольника  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ .

**Найти:**

**а) уравнения всех трех его сторон;**

**б) систему неравенств, определяющих множество точек, принадлежащих треугольнику, включая его стороны;**

**в) внутренний угол  $A$  треугольника в градусах и минутах;**

**г) длину высоты, проведенной из вершины  $A$ ;**

д) площадь треугольника.

61.  $A(6;14)$ ,  $B(1;2)$ ,  $C(9;8)$ .  
 62.  $A(4;10)$ ,  $B(-1;-2)$ ,  $C(7;4)$ .  
 63.  $A(6;11)$ ,  $B(1;-1)$ ,  $C(9;5)$ .  
 64.  $A(4;13)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(7;7)$ .  
 65.  $A(6;10)$ ,  $B(1;-2)$ ,  $C(9;4)$ .  
 66.  $A(4;14)$ ,  $B(-1;2)$ ,  $C(7;8)$ .  
 67.  $A(6;13)$ ,  $B(1;1)$ ,  $C(9;7)$ .  
 68.  $A(7;11)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(10;5)$ .  
 69.  $A(3;13)$ ,  $B(-2;1)$ ,  $C(6;7)$ .  
 70.  $A(4;11)$ ,  $B(-1;-1)$ ,  $C(7;5)$ .  
 71.  $A(1;0)$ ,  $B(7;3)$ ,  $C(4;4)$ .  
 72.  $A(0;1)$ ,  $B(6;4)$ ,  $C(3;5)$ .  
 73.  $A(-1;-1)$ ,  $B(-7;2)$ ,  $C(-4;3)$ .  
 74.  $A(-1;-1)$ ,  $B(5;2)$ ,  $C(2;3)$ .  
 75.  $A(1;-1)$ ,  $B(-5;2)$ ,  $C(-2;3)$ .  
 76.  $A(1;-1)$ ,  $B(7;2)$ ,  $C(4;5)$ .  
 77.  $A(-1;1)$ ,  $B(-7;4)$ ,  $C(-4;5)$ .  
 78.  $A(-1;1)$ ,  $B(5;4)$ ,  $C(2;5)$ .  
 79.  $A(1;1)$ ,  $B(-5;4)$ ,  $C(-2;5)$ .  
 80.  $A(1;1)$ ,  $B(7;4)$ ,  $C(4;5)$ .

81-100. Не пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

81. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$   
 82. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$  б)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$   
 83. а)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$   
 84. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$   
 85. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$  б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$   
 86. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{4 - \sqrt{x}}$   
 87. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1 - 3x}{x^5 + x}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$

88. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - 1 - x}{x}$
89. a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x^2 + x}$
90. a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$
91. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}$
92. a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$
93. a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}}$
94. a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2}$  б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}$
95. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$
96. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 - 2x + 1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$
97. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{2x^3 - x^2 - 1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{11x-1}}{\sqrt[7]{x}}$
98. a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x+9} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$
99. a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{1+2x} - 3}$
100. a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$  б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-6} + 2}$

101 – 120.

Найти производные  $\frac{dy}{dx}$  следующих функций:

101. a)  $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ ; б)  $y = x \ln \cos x$ ; в)  $y = 1 + \sin(2xy)$ .
102. a)  $y = \ln^3 \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ ; б)  $y = x^2 \sin \sqrt{x}$ ; в)  $y = x \ln y$ .
103. a)  $y = \sqrt[3]{x\sqrt{1+x^2}}$ ; б)  $y = x \sin x^2$ ; в)  $xy + x^2 - y^2 = 1$ .
104. a)  $y = \ln^8 \sqrt{\frac{4+x^2}{4-x^2}}$ ; б)  $y = \frac{2 \cos^2 x}{1 - \sin 2x}$ ; в)  $\frac{x}{y} - 2x^2 + 3 = 0$ .

105. a)  $y = 2\sqrt[3]{(2-x^3)^2}$ ; б)  $y = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$ ; в)  $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 4$ .
106. a)  $y = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9}$ ; б)  $y = \frac{4\ln x}{1-\ln x}$ ; в)  $y = x \sin y$ ;
107. a)  $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(2-x^2)^3}}$ ; б)  $y = x^3 \sin^3 x$ ; в)  $y = x \operatorname{arctg} \frac{y}{2}$ .
108. a)  $y = \frac{20}{\sqrt{x^3 x + 1}}$ ; б)  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ; в)  $xy^3 - x^2 + 3y = 0$ .
109. a)  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ; б)  $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \sin 2x}$ ; в)  $y = \arcsin \sqrt{x} - e^{2y}$ .
110. a)  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; б)  $y = \operatorname{tg}^2(1-x)$ ; в)  $xy - 3^{\sin y} = 0$ .
111. а)  $y = \ln^3 \sqrt{\left(\frac{7x-4}{7x+4}\right)^2}$ ; б)  $y = 2^{\sqrt{x-2}}$ ; в)  $\frac{x}{y} - 3\sqrt{y} = 10$ .
112. а)  $y = \ln \sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$ ; б)  $y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2}$ ; в)  $ye^{-xy} = 2$ .
113. а)  $y = \ln^6 \sqrt{\left(\frac{x^6-1}{6x+5}\right)^7}$ ; б)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$ ; в)  $y = x \sin 2y$ .
114. а)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$ ; б)  $y = 3^{\sin^3 3x}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt{xy}} - x^3 = 0$ .
115. а)  $y = \ln^4 \sqrt{\frac{1-8x}{x^8+1}}$ ; б)  $y = \frac{2}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ ; в)  $y = x \sin 2y$ .
116. а)  $y = \frac{3-x^2}{6\sqrt{x}}$ ; б)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; в)  $y = 1 + xe^y$ .
117. а)  $y = x^2 \sqrt{16-x^2}$ ; б)  $y = \frac{\sin 5x}{1-2\sin 5x}$ ; в)  $xy = e^{2x} - e^{-3y}$ .
118. а)  $y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}$ ; б)  $y = e^{-x}(2\sin 5x + \cos 5x)$ ; в)  $x^3 y - \frac{1}{y} + x = 0$ .
119. а)  $y = \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ; б)  $y = 2^{\sin^2 10x}$ ; в)  $x = y + \operatorname{arctg} y$ .
120. а)  $y = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$ ; б)  $y = \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^2 8x - 1}$ ; в)  $x^2 \sin y + \cos y = 0$ .

121-140.

Пользуясь правилом Лопиталья найти пределы функций:

121. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$  б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+1}$



122. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{1 - \cos x}$
123. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2}$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln x}$
124. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}$
125. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x - \sin x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x}{e^x}$
126. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}$
127. a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
128. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^2}{1 - 3x^2}$
129. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$       б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$
130. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{x^3}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}$
131. a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3}$       б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 5}$
132. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{e^x}$
133. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} x}$
134. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{3x^2 + x}$
135. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{3x}$
136. a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg} x}{\cos 2x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + x - 10}$
137. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1 - x^3}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$
138. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$       б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos 4x}$
139. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\operatorname{tg} x}$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x}$
140. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x} - e^{2x}}$       б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3x^2 - 1}$

**141-160.**

**Исследовать функцию и построить ее график**

**141.**  $y = \frac{2x}{x^2 + 1};$

**142.**  $y = \frac{y^x}{x};$

**143.**  $y = x^2 - 2\ln x.$

**144.**  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$

**145.**  $y = \ln(x^2 - 4);$

**146.**  $y = xe^{-x}.$

**147.**  $y = \frac{\ln x}{x};$

**148.**  $y = xe^{-x^2};$

**149.**  $y = 2x^4 - x^2.$

**150.**  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$

**151.**  $y = \frac{9}{x^2 - 9};$

**152.**  $y = x - \ln(x + 1).$

**153.**  $y = \ln(1 - 2x);$

**154.**  $y = e^{\frac{1}{x}};$

**155.**  $y = \ln(9 - x^2).$

**156.**  $y = \frac{x^2}{x - 1};$

**157.**  $y = \frac{x^4}{5} - 2x^2 + 5;$

**158.**  $y = e^{\frac{x^2}{2}}.$

**159.**  $y = x\ln x;$

**160.**  $y = \frac{x}{\sqrt{x - 4}}.$

**161-180.**

**По условию задачи составить функцию одной независимой переменной и найти ее экстремум. Показать, что этот экстремум и будет наименьшим (наибольшим) значением функции.**

- 161.** Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. Пример (р) фигуры задан. Каковы должны быть размеры прямоугольника, для того, чтобы окно пропускало наибольшее количество света то есть имело наибольшую площадь?
- 162.** На железной дороге, ведущей с юга на север, стоит город В. Завод А расположен на  $a$  км южнее города В и на  $b$  км восточнее железной дороги. Под каким углом  $\alpha$  к железной дороге надо провести шоссе с завода А, чтобы доставка грузов из А в В была самой дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в  $k$  раз дороже, чем по железной дороге?
- 163.** Во сколько раз объем шара больше объема наибольшего цилиндра, вписанного в этот шар?
- 164.** Требуется построить палатку в виде правильной четырехугольной пирамиды. Найти отношение высоты палатки к стороне основания при условии, что при данной площади боковой поверхности  $S$  объем палатки будет наибольшим.
- 165.** Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, заверченный сверху полушаром. При каких значениях радиуса основания и

- высоты цилиндра это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен  $v$  ?
166. Имеется 200м железной сетки, которой надо огородить с трех сторон прямоугольную площадку, примыкающую четвертой стороной к длинной каменной стене. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы ее площадь была наибольшей?
  167. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около данного шара радиуса  $r$ .
  168. Кровельщику надо сделать открытый желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобокой трапеции. Дно и бока желоба имеют ширину 10см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?
  169. Консервная банка цилиндрической формы с дном и крышкой должна вмещать  $v$  см<sup>3</sup>. Каковы должны быть размеры банки, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала.
  170. В окружность радиуса  $r$  вписан прямоугольник. Каковы должны быть размеры прямоугольника чтобы площадь его была наибольшей?
  171. Каковы должны быть высота и радиус основания конуса с данной образующей  $\ell$ , чтобы объем конуса был наибольшим?
  172. Найти размеры прямоугольника с наибольшей площадью, вписанного в прямоугольный треугольник, катеты которого  $a = 4$ см и  $b = 8$ см, а один из углов прямоугольника совпадает с прямым углом треугольника?
  173. Бак без крышки с квадратным основанием должен вмещать  $v$  литров воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала?
  174. Гипотенуза прямоугольного треугольника  $c = 9\sqrt{2}$ . Каковы должны быть катеты  $a$  и  $b$ , чтобы периметр треугольника был наибольшим?
  175. Требуется изготовить ведро цилиндрической формы без крышки, вместимостью 8 куб.ед. Найти высоту и диаметр дна ведра, при которых на его изготовление потребуется наименьшее количество материала.
  176. В область, ограниченную параболой  $y^2 = 4x$  и прямой  $x = 3$  вписан прямоугольник, две стороны которого параллельны оси параболы. Найти стороны прямоугольника, при которых его площадь является наибольшей.
  177. В шар радиуса 9 вписан прямой круговой цилиндр. Найти высоту цилиндра, при которой его объем является наибольшим.
  178. В шар радиуса  $R = 6$  вписан прямой круговой конус. Найти высоту конуса, при которой его объем является наибольшим.

179. Площадь прямоугольника равна 9 кв.ед. Найти размеры сторон прямоугольника, при которых его периметр является наименьшим.
180. Прямой круговой конус описан около прямого кругового цилиндра так, что плоскости и центры их оснований совпадают. Радиус основания цилиндра равен 4см, а высота равна 6. Найти радиус основания и высоту конуса, при которых его объем является наименьшим.

**181-200.** Найти частные производные и полный дифференциал функции  $z = f(x, y)$ :

- |  |  |
|--|--|
| 181. $z = 3^{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}}$ . | 182. $z = e^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$ .                   |
| 183. $z = 2\sqrt{3x^4 - 6xy^3}$ .              | 184. $z = \sqrt[3]{\cos(3x - 9y)}$ .                         |
| 185. $z = x \operatorname{tg}(2x - 5y)$ .      | 186. $z = x e^{10y - x}$ .                                   |
| 187. $z = 3 \sin^2(6x + 5y)$ .                 | 188. $z = \sqrt{1 - 4x^2 + 4y^3}$ .                          |
| 189. $z = \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ .  | 190. $z = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{5x}{2y}$ . |
| 191. $z = 2 \operatorname{tg}(4x - 2y)$ .      | 192. $z = 4 \ln\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right)$ .     |
| 193. $z = x^3 - 4x^2 y + 2xy^2 - y^3$ .        | 194. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ .                      |
| 195. $z = \operatorname{lm}(2x^2 + 4y^2)$ .    | 196. $z = \arccos \sqrt{x - y}$ .                            |
| 197. $z = \cos^2(3x + 6y)$ .                   | 198. $z = x^2 y - \frac{y}{x^2}$ .                           |
| 199. $z = \sqrt{x^2 - 2x}$ .                   | 200. $z = xy + e^{2x} - e^{2y}$ .                            |

**201-220.** Найти точки экстремума функции двух независимых переменных  $z = f(x, y)$ :

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 201. $z = 2x^2 + y^2 + x - 3y + 2xy$ | 202. $z = x^2 - 4xy + y^2 - x$           |
| 203. $z = x^2 - y^2 + 5 + 4y - xy$   | 204. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy + y^2 - y$ |
| 205. $z = xy + 4x - 3y + x^2 - y^2$  | 206. $z = x^2 - xy + 3y^2 - x - y$       |
| 207. $z = 3y^2 - 9xy + y + x^2$      | 208. $z = x^2 - 2y^2 - 4xy + 3x$         |
| 209. $z = x^2 + 3xy - y^2 - 4x$      | 210. $z = x^2 - xy + 3y^2 - 2y$          |

$$211. z = xy + 2x^2 - y^2 + 3y$$

$$212. z = x^2 + y^2 - 4xy + x + y$$

$$213. z = 2x^2 + 3xy + y^2 - 4x$$

$$214. z = x^2 - xy - 2y^2 + x$$

$$215. z = 2y^2 + 9xy + y + x^2$$

$$216. z = y^2 - 3xy - y^2 - x$$

$$217. z = xy + 2y^2 - 2x$$

$$218. z = 3x^2 - 8xy - 12x + 4y^2$$

$$219. z = 2x^2 + y^2 + x - 3y + 2xy$$

$$220. z = 4x^2 + y^2 - 2y + xy$$

### 3. Таблица распределения задач по вариантам.

Номер варианта	Номера задач										
	Контрольная работа № 1										
1	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201
2	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182	202
3	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183	203
4	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184	204
5	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185	205
6	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186	206
7	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187	207
8	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188	208
9	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189	209
10	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210
11	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	211
12	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192	212
13	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	213
14	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194	214
15	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215
16	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196	216
17	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197	217
18	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198	218
19	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220

### 4. Правила выполнения и оформления контрольных работ.

*При выполнении контрольных работ надо придерживаться указанных ниже правил.*

- ВЫБОР ВАРИАНТА.** Каждому студенту при поступлении присваивается учебный шифр. Он указан в зачетной книжке и студенческом билете. Студенты, учебные шифры которых равны числам от 1 до 20 выбирают соответствующие варианты заданной от 1 до 20. Если номер шифра больше 20, то вариант определяется по

целому остатку от деления номера шифра на 20. Например, если шифр 60, то остаток от деления на 20 равен 0, следовательно, номер варианта 20. Если шифр 173, то остаток равен 13, следовательно, номер варианта 13, если шифр 1350, то остаток равен 10 и вариант 10-й и т.д. Номера задач, входящих в тот или иной вариант, указаны в специальной таблице.

2. Контрольную работу надо выполнить в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента. В конце работы оставьте 3 – 4 чистых страницы, которые, возможно, понадобятся для исправления решений.
3. В заголовке работы должны быть разборчиво написана фамилия, имя и отчество, группа, вариант, название дисциплины. Заголовок надо поместить на обложке тетради.
4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номер задач своего варианта.
5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, заменив, где надо, общие данные контрольными из своего варианта.
6. Решения задач излагайте аккуратно, объясняя основные действия, выписывая нужные формулы, делая необходимые чертежи.
7. После получения прорецензированной работы исправьте все ошибки и недочеты, отмеченные рецензентом, вписав исправления на оставленных чистых страницах.