Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)
Институт инновационных технологий
Кафедра “Автотранспортная и техносферная безопасность”

Сабуров Павел Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Владимир - 2016.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании моделей.

Моделирование решает задачи изучения и исследования объектов и систем, предсказания их функционирования и поведения.

При управлении модели позволяют оценивать ненаблюдаемые переменные процесса функционирования системы, прогнозировать состояние процесса при имеющихся или выбираемых управлениях и синтезировать алгоритмы и стратегии управления.

При проектировании и эксплуатации систем возникают многочисленные задачи, требующие оценки количественных и качественных закономерностей процессов их функционирования, проведения структурного, алгоритмического и параметрического синтеза. Решение этих проблем невозможно без использования математического моделирования, что обусловлено особенностями больших систем, такими как сложность структур, стохастичность связей между элементами и внешней средой, неоднозначность алгоритмов поведения, большое количество параметров и переменных, неполнота и недетерминированность исходной информации. Математическое моделирование позволяет существенно уменьшить время проектирования, во многих случаях позволяет найти оптимальное решение, исключить метод натурных проб и ошибок, перейти к параллельному процессу проектирования.

Математическая модель представляет собой формализованное описание системы на некотором абстрактном языке, например, в виде совокупности математических соотношений или алгоритма. Именно математические модели рассматриваются как основной инструмент оценки эффективности альтернативных решений.

С развитием вычислительной техники наиболее эффективным и универсальным методом исследования систем стало компьютерное (машинное) моделирование, сущность которого состоит в проведении на ЭВМ экспериментов с моделью, представляющей собой программный комплекс, описывающий формально и алгоритмически поведение элементов системы в процессе её функционирования, т.е. их взаимодействие друг с другом и внешней средой.

Краткое изложение основ теории моделирования является основной задачей данного учебного пособия.

“Определите значения слов,
И вы избавите человечество
От половины его заблуждений”.
Р.Декарт

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ

1.1. Основные понятия и определения

Важными понятиями моделирования систем являются понятия *“система”*, *“внешняя среда”*, *“модель”* и *“моделирование”* [8].

Система – это целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы. Таким образом, любой объект можно рассматривать как систему.

Внешняя среда – это множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под её влиянием.

Функционирование системы – проявление функций системы во времени, означает переход системы из одного состояния в другое, т.е. движение в пространстве состояний.

Состояние системы – минимально-необходимый набор переменных величин, способных однозначно определять положение системы в любой момент времени.

Модель – изображение системы на основе принятых гипотез и аналогий. Другими словами, модель (лат. modulus – мера) – это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Гипотезы – предсказания, основанные на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок.

Аналогии – суждения о каком-либо частичном сходстве двух объектов.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам.

Процесс создания модели – это диалектический процесс, заключающийся в раскрытии неопределенностей системы и постоянном усложнении модели с ростом знаний об исследуемом объекте. Схематично процесс создания модели представлен на рис. 1.1, где модель, являющаяся изображением системы, представлена бесконечно большой ёмкостью, заполняемой информацией об изучаемом объекте. При этом одной системе может соответствовать несколько моделей.

В качестве модели может выступать словесное описание объекта, рисунок, музыкальное произведение и т.д. Перечисленные модели обладают тем недостатком, что они неоднозначно интерпретируются. Поэтому в технике для однозначного понимания при создании моделей используется язык математики. Математическая модель представляет собой совокупность математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения, существующие в некоторой области реального мира (предметной области).

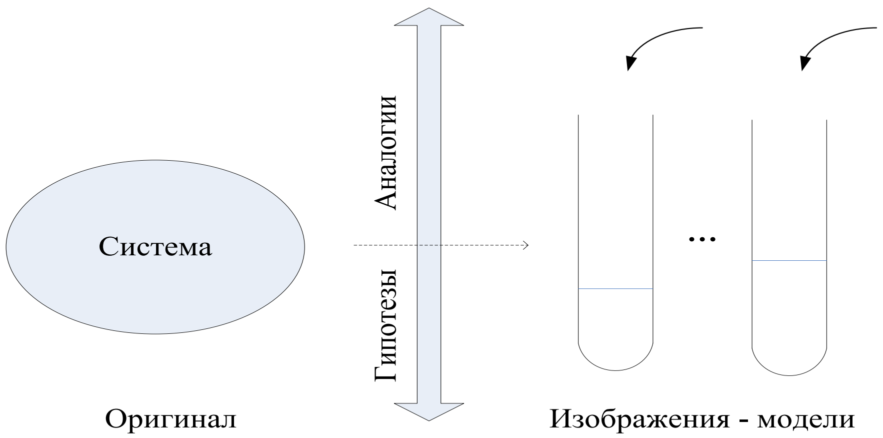


Рис. 1.1. Схема процесса создания модели

Моделирование – представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путём проведения экспериментов с его моделью.

Эффективность экспериментальных исследований сложных систем крайне низка, поскольку проведение натурных экспериментов с реальной системой

- требует больших материальных затрат;
- значительного времени;
- может нарушить установленный порядок работы;
- невозможно поддержание одних и тех же условий работы в течение всего времени проведения экспериментов;
- результаты неоднозначны при повторном проведении экспериментов, так как изменяются условия их проведения;
- часто эксперимент вообще повторить невозможно;

– исследования нештатных ситуаций невозможны без риска разрушения системы;
– невозможность рассмотрения множества альтернативных вариантов;
– если составной частью системы являются люди, они работают по иному, чувствуя, что за ними наблюдают (хауторнский эффект).

Эксперимент – это процедура организации и наблюдения каких-либо явлений, которые осуществляются в условиях, близких к естественным, либо имитируют их.

В основе моделирования лежат информационные процессы, поскольку создание модели базируется на информации о реальном объекте. В процессе реализации модели получается информация об исследуемом объекте, а в процессе эксперимента с моделью существенное место занимает обработка полученных результатов.

Обобщённо моделирование можно определить как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект-оригинал находится в некотором соответствии с другим объектом-моделью, причём модель способна в том или ином отношении замещать оригинал на некоторых стадиях познавательного процесса.

Математическое моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании математических моделей. Математическим моделированием занимался, в сущности, каждый, кто применял математику на практике.

Теория моделирования – это теория замещения объектов-оригиналов объектами-моделями и исследование свойств объектов на их моделях.

Требования, предъявляемые к модели. Такими требованиями прежде всего являются: адекватность, полнота-простота и эффективность.

Основное требование, которому должна удовлетворять модель, это адекватность объекту. Модель адекватна объекту, если результаты моделирования подтверждаются на практике и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах. Адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

Противоречивое требование полноты и простоты модели разрешается её целевым назначением. Для правильно построенной модели характерным является то, что она выявляет лишь те закономерности, которые нужны исследователю в соответствии с поставленной целью, и не рассматриваются несущественные для данного исследования свойства системы. Оригинал и модель должны быть одновременно сходны по одним признакам, существенным с точки зрения решаемой задачи, и различны по другим, что позволяет выделить наиболее важные изучаемые свойства. В этом смысле модель выступает как некоторый “заместитель” оригинала, обеспечивающий фиксацию и изучение лишь нужных свойств реального объекта. Для правильного выявления существенных свойств реального объекта пользуются ***законом Парето*** [15]: *в каждой группе или совокупности существует жизненно важное меньшинство и тривиальное большинство; ничего действительно важного не происходит, пока не затронут жизненно важное меньшинство.*

Эффективность модели оценивается рядом критериев, в том числе значимостью, точностью и достоверностью результатов моделирования, временем построения и работы с моделью, затратами машинных ресурсов (времени и памяти), стоимостью разработки и эксплуатации модели. Другими словами, эффективность определяется как некоторая разность между показателями ценности результатов, полученных в итоге эксплуатации модели, и теми затратами, которые были вложены в её разработку и создание.

Назначение модели. Моделирование решает задачи изучения и исследования объектов, прогнозирования, предсказания функционирования систем, синтеза структуры, параметров и алгоритмов управления систем. В повседневной жизни человека моделирование играет важную роль в правильном отображении окружающего мира, в принятии решений и выборе стратегии поведения, которая на основании выбранного критерия может быть пригодной, оптимальной или адаптивной.

Моделирование – эффективное средство познания природы. Процесс моделирования предполагает наличие: объекта исследования; исследователя, перед которым поставлена конкретная задача; модели, создаваемой для получения информации об объекте. Причём по отношению к модели исследователь является экспериментатором, только в данном случае эксперимент проводится не с реальным объектом, а с его моделью.

При управлении модели позволяют оценивать ненаблюдаемые переменные процесса, прогнозировать состояние процесса при имеющихся или выбираемых управлениях и синтезировать оптимальные законы управления.

При проектировании и эксплуатации систем возникают многочисленные задачи, требующие оценки количественных и качественных закономерностей процессов функционирования систем, проведения структурного, алгоритмического и параметрического синтеза. Решение этих проблем в настоящее время невозможно без использования различных видов моделирования, что обусловлено особенностями больших систем, такими как сложность структур, стохастичность связей между элементами и внешней средой, неоднозначность алгоритмов поведения, большое количество параметров и переменных, неполнота и недетерминированность исходной информации. Математическое моделирование позволяет существенно уменьшить время проектирования, во многих случаях позволяет найти оптимальное решение, исключить метод натурных проб и ошибок, перейти к параллельному процессу проектирования.

Принципы моделирования. Основными принципами моделирования являются [3].

Принцип информативной достаточности. Определяет уровень априорных сведений, при котором может быть создана адекватная модель.

Принцип осуществимости. Определяется вероятностью достижения цели моделирования за конечное время.

Принцип множественности моделей. Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы, которые влияют на выбранный показатель эффективности.

Принцип агрегирования. Модель объекта представляется агрегатами (подсистемами), которые пригодны для описания стандартными математическими схемами.

Принцип параметризации. Модель должна иметь в своем составе подсистемы, характеризующиеся параметрами.

Роль ЭВМ при моделировании. В настоящее время универсальным и эффективным техническим средством решения инженерных задач на базе моделирования является ЭВМ. Модель в этом случае представляет собой программный комплекс. Машинный эксперимент с моделью даёт возможность:

– исследовать процесс функционирования в любых условиях;
– сокращает материальные затраты и продолжительность испытаний по сравнению с натурным экспериментом;
– обладает гибкостью варьирования параметров, структуры, алгоритмов моделируемой системы;

– является единственным практически реализуемым методом исследования процесса функционирования систем на этапе их проектирования.

Машинный эксперимент требует серьёзной подготовки и наличия математического, программного, информационного, технического и других видов обеспечений.

Математическое обеспечение включает в себя совокупность математических соотношений, описывающих поведение реальной системы, алгоритмов функционирования исследуемой системы, алгоритмов, обеспечивающих как подготовку, так и работу с моделью.

Программное обеспечение по своему содержанию включает в себя совокупность программ для реализации модели, планирования и проведения эксперимента, а также обработки и интерпретации результатов.

Информационное обеспечение представляет собой средства и технологию организации проведения машинного эксперимента, формы документов, описывающих процесс моделирования и его результаты.

Техническое обеспечение включает в себя средства вычислительной техники и внешние устройства. К техническому обеспечению предъявляются серьёзные требования по надёжности функционирования, так как сбои и отказы технических средств увеличивают время исследований и могут привести к неверным конечным результатам.

В настоящее время разработано большое количество систем моделирования, например, Mathcad, Matlab, VisSim, GPSS [1, 2, 3, 4, 5, 16].

Использование средств вычислительной техники для целей моделирования часто создаёт иллюзию гарантии исследования системы любой сложности. При этом игнорируется тот факт, что в основу любой модели положено трудоёмкое по затратам времени и материальных ресурсов предварительное изучение явлений, имеющих место в объекте-оригинале. И от того, насколько детально изучены реальные явления, насколько правильно проведена их формализация и алгоритмизация, зависит в конечном итоге успех моделирования конкретной системы. Компьютер при этом выступает лишь как инструмент моделирования.

1.2. Принципы подхода в моделировании систем

В моделировании систем используются классический (индуктивный) и системный (дедуктивный) подходы [8].

Классический подход рассматривает исследуемую систему с точки зрения выполняемых функций (функциональный подход) и предполагает создание модели путём перехода от частного к общему слиянием её отдельных компонент, разрабатываемых отдельно.

Процесс синтеза модели на основе классического подхода схематично представлен на рис. 1.2 и включает следующие этапы:

1. Декомпозиция реальной системы, подлежащей моделированию, на отдельные подсистемы.
2. Выбор исходных данных для моделирования, включающих:
   - назначение;
   - условия работы;
   - внешнюю среду;
   - ограничения.
3. Постановка целей, отображающих отдельные стороны процесса моделирования системы.
4. Формирование на базе целей и исходных данных компонент будущей модели.
5. Совокупность компонент объединяется в модель.

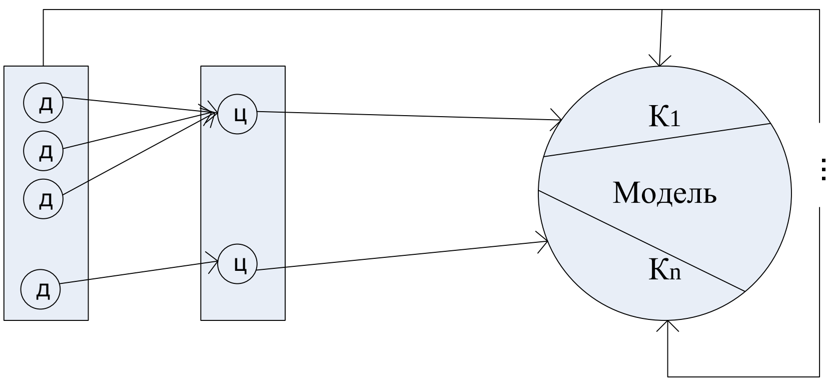


Рис. 1.2. Процесс синтеза модели на основе классического подхода:
Д – исходные данные; Ц – цели; К – компонента модели

Таким образом, разработка модели на основе классического подхода означает суммирование отдельных компонент в единую модель, причём каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели. Поэтому классический подход может быть использован для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта.

Системный подход рассматривает исследуемую систему в виде целенаправленного множества взаимосвязанных элементов (структурный подход) и предполагает создание модели путём перехода от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, при этом исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Процесс синтеза модели на основе системного подхода схематично представлен на рис. 1.3 и включает следующие этапы:

1. На основе цели функционирования системы, которая определяется вопросами, на которые исследователь хочет получить ответы с помощью модели, и исходных данных, включающих назначение модели, условия работы системы, внешнюю среду для системы и накладываемые ограничения, формируются требования к модели системы.
2. Определение подсистем модели на базе сформированных требований.
3. Подбор элементов подсистем модели на основе данных для их реализации.
4. Выбор составляющих элементов будущей модели на основе сформированных критериев выбора.
5. Получившаяся таким образом модель является интегрированным целым.

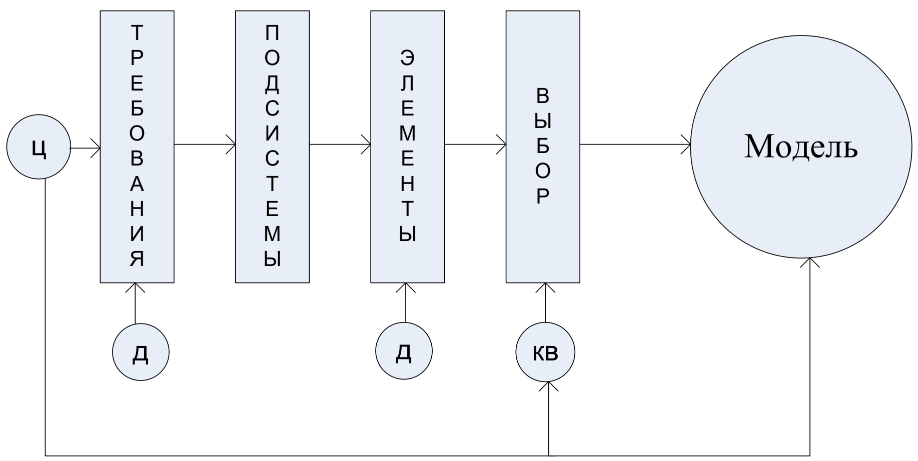


Рис. 1.3. Процесс синтеза модели на основе системного подхода:
Ц – цель моделирования; Д – исходные данные; КВ – критерии выбора

Системный подход позволяет решить проблему построения модели сложной системы с учетом всех факторов и взаимосвязей, пропорциональности их значимости на всех этапах исследования системы и построения модели. Системный подход означает, что каждая система является интегрированным целым даже тогда, когда она состоит из отдельных разобщённых подсистем.

Таким образом, в основе системного подхода лежит рассмотрение системы как интегрированного целого, причём это рассмотрение при разработке начинается с главного: формулировки цели функционирования.

В настоящее время при анализе и синтезе больших систем получил распространение системный подход, который позволяет учитывать сложные стохастические связи в системе и взаимодействие с внешней средой. Модель в этом случае создается под поставленную проблему, а моделирование заключается в решении проблемы цели, проблемы построения модели, проблемы работы с моделью. Для правильно выбранной модели характерным является то, что она выявляет лишь те закономерности, которые нужны исследователю, и не рассматривает свойства системы, не существенные для данного исследования.

1.3. Классификация видов моделирования систем

В основе классификации видов моделирования систем лежат различные признаки, такие как

- степень полноты модели;
- характер изучаемых процессов в системе;
- форма представления системы.

Классификация видов моделирования систем приведена на рис. 1.4 [8].

Основой моделирования является *теория подобия*, из которой следует, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим, точно таким же. При моделировании абсолютное подобие не имеет места, и стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования системы. Поэтому в качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели и разделить модели в соответствии с этим признаком на полные, неполные и приближенные.

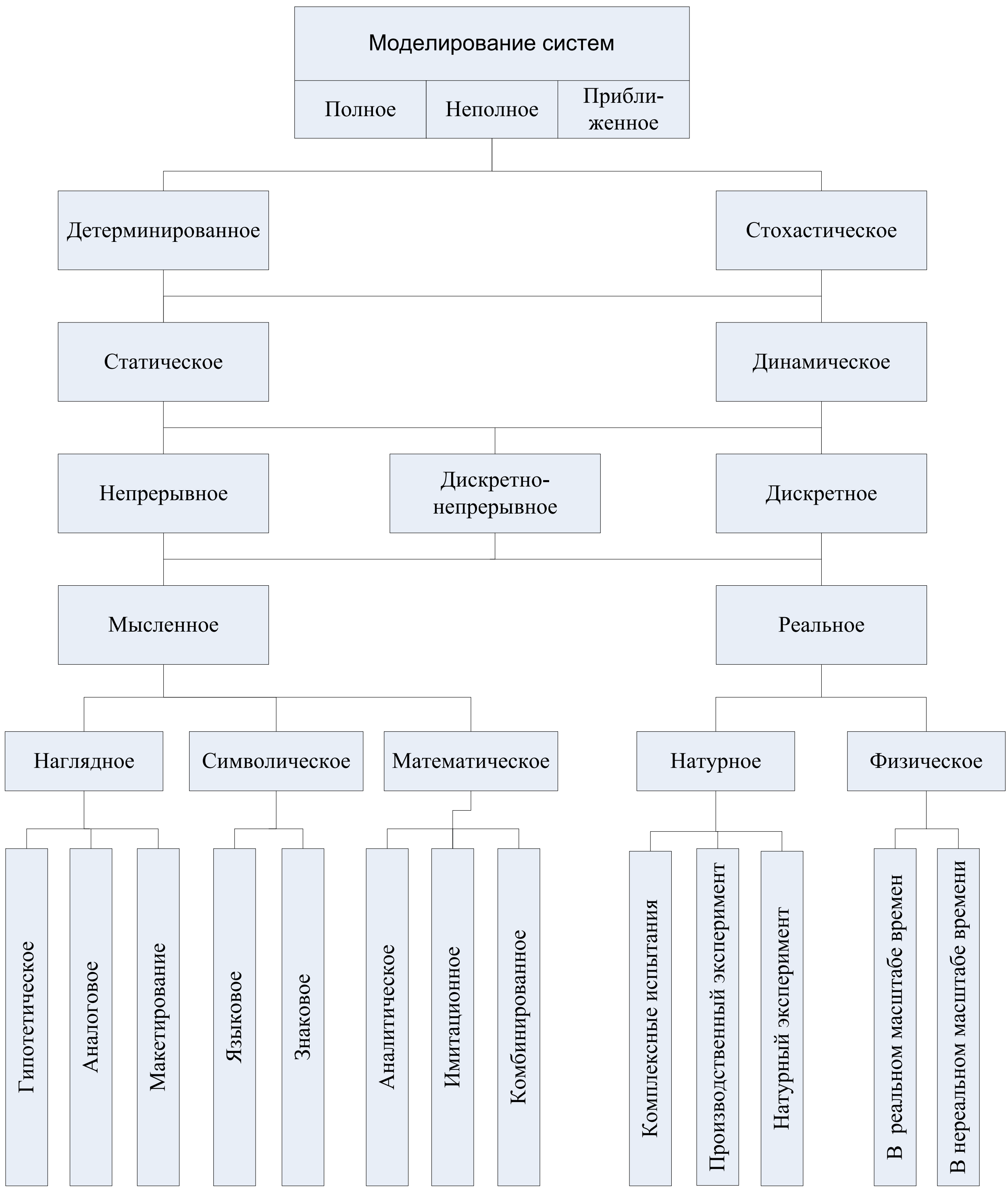


Рис. 1.4. Классификация видов моделирования систем

В основе *полного моделирования* лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для *неполного моделирования* характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. При *приближенном моделировании* лежит приближённое подобие, при котором некоторые стороны функционирования реальной системы не учитываются совсем.

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.

Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; *стохастическое моделирование* отображает вероятностные процессы и события.

Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а *динамическое моделирование* отражает поведение объекта во времени.

Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно *непрерывное моделирование* позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а *дискретно-непрерывное моделирование* используется для случаев, когда хотят выделять наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

В зависимости от формы представления объекта (системы) можно выделить мысленное и реальное моделирование.

Мысленное моделирование – это моделирование объектов без их практической реализации. *Реальное моделирование* заключается в проведении исследования на реальном объекте целиком или его части.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически не реализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий для их физического создания. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного, символического и математического.

Наглядное моделирование основывается на базе представлений человека о реальных объектах и подразделяется на гипотетическое, аналоговое и макетирование.

В основу *гипотетического моделирования* исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний об объекте. Гипотетическое моделирование используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней.

Макетирование основывается на создании мысленных макетов и используется в тех случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать проведению других видов моделирования.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов. Символическое моделирование подразделяется на языковое и знаковое.

Языковое моделирование основывается на фиксированном наборе понятий. В основе *языкового моделирования* лежит тезаурус – словарь, который очищен от неоднозначности, т.е. в нём каждому слову может соответствовать лишь единственное понятие.

При *знаковом моделировании* введены условные обозначения отдельных понятий, т.е. знаки, а также определённые операции между этими знаками. С помощью знаков можно составлять отдельные цепочки из слов и предложений, а использование операций позволяет получать описание реальных объектов.

Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы математическими методами должна быть проведена формализация этого процесса, т.е. построена математическая модель.

Важное место занимает *математическое моделирование*, представляющее собой процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики рассматриваемого реального объекта. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения. Математическое моделирование включает в себя аналитическое, имитационное и комбинированное.

Аналитическое моделирование основывается на косвенном описании реального объекта с помощью набора математических выражений, которые образуют аналитическую модель. Компьютер при аналитическом моделировании используется в качестве вычислителя.

Для аналитического моделирования характерно то, что процессы функционирования исследуемой системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегродифференциальных, конечно-разностных и т.п.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

- аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик;
- численным, когда, не умея решать уравнения в общем виде, стремятся получить численные результаты при конкретных начальных данных;
- качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, устойчивость).

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы. Однако такие зависимости удаётся получить только для сравнительно простых систем. При усложнении систем исследование их аналитическим методом наталкивается на значительные трудности.

Имитационное моделирование основано на прямом описании моделируемого объекта, используя структурное подобие объекта и модели, т.е. каждому существенному, с точки зрения решаемой задачи, элементу объекта ставится в соответствие элемент модели.

При имитационном моделировании в качестве имитационной модели выступает алгоритм, воспроизводящий процесс функционирования исследуемой системы, при этом имитируются элементарные явления составляющего процесса, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определённые моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Компьютер при имитационном моделировании служит имитатором исследуемой системы

Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Метод имитационного моделирования позволяет решать задачи анализа больших систем, включая задачи оценки: вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено также в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, когда требуется создать систему с заданными характеристиками при определённых ограничениях, которая является оптимальной по выбранным критериям оценки эффективности.

Комбинированное (аналитико-имитационное) *моделирование* при анализе и синтезе систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей проводится декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы, и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. Такой комбинированный подход позволяет охватить качественно новые классы систем, которые не могут быть исследованы с использованием только аналитического и имитационного моделирования в отдельности.

При *реальном моделировании* используется возможность исследования различных характеристик либо на реальным объекте целиком, либо на его части. Отличие эксперимента от реального протекания процесса заключается в том, что в нём могут появиться отдельные критические ситуации. В ходе эксперимента вводятся новые факторы и возмущающие воздействия в процессе функционирования объекта.

Реальное моделирование подразделяется на натурное и физическое.

Натурным моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия. При функционировании объекта в соответствии с поставленной целью удаётся выявить закономерности протекания реального процесса. Разновидности натурного моделирования, как *комплексные испытания*, *производственный эксперимент* и *натурный эксперимент*, обладают высокой степенью достоверности.

Физическое моделирование отличается от натурного тем, что исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием. В процессе физического моделирования задаются некоторые характеристики внешней среды и исследуется поведение либо реального объекта, либо его модели при заданных или создаваемых искусственно воздействиях внешней среды. Физическое моделирование может протекать в *реальном* и *нереальном* (псевдореальном) *масштабах времени*, а также может рассматриваться без учёта времени.

Реальное моделирование является наиболее адекватным, но при этом его возможности с учётом особенностей реальных объектов ограничены.

С точки зрения математического описания объекта и в зависимости от его характера модели можно разделить на модели аналоговые (непрерывные), цифровые (дискретные) и аналого-цифровые (комбинированные). Под *аналоговой* моделью понимается модель, которая описывается уравнениями, связывающими непрерывные величины. Под *цифровой* понимается модель, которая описывается уравнениями, связывающими дискретные величины, представленные в цифровом виде. Под *аналого-цифровой* понимается модель, которая может быть описана уравнениями, связывающими непрерывные и дискретные величины.

Особый вид моделирования – *кибернетическое моделирование*, в котором отсутствует непосредственное подобие между реальным объектом и моделью. В этом случае стремятся отобразить лишь некоторую функцию и рассматривают реальный объект как “чёрный ящик”, имеющий ряд входов и выходов, и моделируются некоторые связи между выходами и входами. Чаще всего при использовании кибернетических моделей проводят анализ поведенческой стороны объекта при различных воздействиях внешней среды. Таким образом, в основе кибернетических моделей лежит отношение некоторых информационных процессов управления, что позволяет оценить поведение реального объекта.

“Высшее назначение математики -
Находить порядок в хаосе,
Который нас окружает “.
Н.Винер

2. МАТЕМАТМЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

2.1. Понятие математической схемы

Для исследования характеристик процесса функционирования любой системы математическими методами должна быть проведена формализация этого процесса, т.е. построена математическая модель. Эта задача решается с помощью математических схем.

Математическая схема представляет собой звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учётом воздействия внешней среды, т.е. имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема – математическая модель» [8]. Схематично процесс формализации представлен на рис. 2.1.

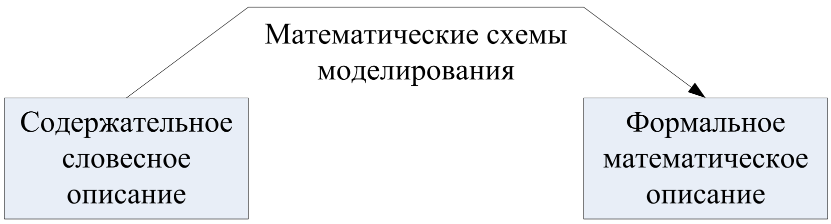


Рис. 2.1. Схема процесса формализации

Введение понятия математической схемы позволяет рассматривать математику не как метод расчёта, а как метод мышления, как средство формулирования понятий, что является важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса её функционирования в виде математической модели. Исходной информацией при построении математических моделей процессов функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы исследуемой системы, причем уровень абстрагирования зависит от круга тех вопросов, на которые исследователь системы хочет получить ответы с помощью модели.

В отличие от содержательного словесного описания, образующего описательную модель, формальное описание процесса функционирования системы, представляющее собой математическую модель, не допускает неоднозначной интерпретации, так как представляет собой правило, которое необходимо выполнить для получения результата.

При пользовании математической схемой в первую очередь решается вопрос об адекватности отображения в виде конкретных схем реальных процессов в исследуемой системе. Кроме того, при построении математической модели необходимо решить вопрос об её полноте. Полнота модели регулируется, в основном, выбором границы между системой и внешней средой. Также должна быть решена задача упрощения модели, которая помогает выделить основные свойства системы, отбросив второстепенные.

В практике моделирования используются математическая схема общего вида и типовые математические схемы.

Математическая схема общего вида позволяет формализовать широкий класс систем.

Типовые математические схемы, включающие ***D***–схемы, ***F***–схемы, ***P***–схемы, ***Q***–схемы и ***A***–схемы, не обладают общностью, но имеют преимущества простоты и наглядности.

2.2. Математическая схема общего вида

При использовании математической схемы общего вида модель объекта моделирования, т.е. исследуемой системы, представляется в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих четыре непересекающихся подмножества (рис. 2.2):

– подмножество совокупности входных воздействий на систему

$$X = \{x_i\},\ i = \overline{1, n_X};$$

– подмножество совокупности воздействий внешней среды на систему

$$V = \{v_l\},\ l = \overline{1, n_V};$$

– подмножество совокупности внутренних (собственных) параметров системы

$$H = \{h_k\},\ k = \overline{1, n_H};$$

– подмножество совокупности выходных характеристик системы

$$Y = \{y_j\},\ j = \overline{1, n_Y}.$$

При моделировании системы входные воздействия X, воздействия внешней среды V и внутренние параметры системы H являются *независимыми (экзогенными) переменными*, а выходные характеристики Y – *зависимыми (эндогенными) переменными.*

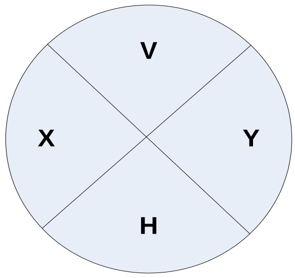


Рис. 2.2. Модель, построенная на основе математической схемы общего вида

Процесс функционирования системы описывается во времени оператором, который в общем случае преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношением вида [8]

$$Y(t) = F_S(X, V, H, t). \quad (2.1)$$

Зависимость (2.1) называется ***законом функционирования системы*** и обозначается F_S. В общем случае закон функционирования системы F_S может быть задан в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической и табличной формах или в виде словесного правила соответствия.

2.3. Типовые математические схемы

2.3.1. Непрерывно-детерминированные модели (*D*–схемы)

Использование ***D****–схем* позволяет формализовать процесс функционирования непрерывно-детерминированных систем и оценить их основные характеристики. Математические схемы данного вида отражают динамику изучаемой системы, т.е. её поведение во времени, поэтому называются ***D****–схемами* (англ. Dynamic System).

В качестве непрерывно-детерминированных моделей динамических систем используются дифференциальные уравнения, передаточные функции и описание в пространстве состояний [13].

Дифференциальные уравнения и передаточные функции образуют *математические модели вход-выход* (модели типа «ВВ»), описывающие связи входных и выходных сигналов динамической системы.

Чтобы получить математическое описание динамической системы, необходимо составить дифференциальные уравнения всех элементов, образующих систему. Таким образом, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую исследуемую систему. Полученная система дифференциальных уравнений путём исключения промежуточных переменных может быть разрешена относительно любой координаты системы. Обычно она решается относительно выходной величины *y(t).* В этом случае получается следующее дифференциальное уравнение

$$D(p)y(t) = R(p)g(t) + N(p)f(t), \tag{2.2}$$

где $p=\dfrac{d}{dt}$ – алгебраизированный символ дифференцирования;

y(t)) – выходная характеристика системы;

g(t)) – входное воздействие на систему;

f(t) – воздействие внешней среды на систему;

$D(p)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^{n-i}$; $R(p)=\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^{m-i}$; $N(p)=\sum\limits_{i=0}^{k} c_i p^{k-i}$ – полиномы степени n, m, k от символа дифференцирования p, причём $n \geq m,k$;

a_i, b_i, c_i – постоянные коэффициенты.

Уравнение, описывающие динамику системы, может быть представлено в другой форме. Для этого перепишем уравнение (2.2) в операторном виде, перейдя от функций времени к их изображениям по Лапласу.

В результате получим:

$$Y(s)=\Phi_g(s)G(s)+\Phi_f(s)F(s), \tag{2.3}$$

где s – оператор Лапласа;

$Y(s), G(s), F(s)$ – изображения по Лапласу выходной характеристики, входного воздействия и воздействия внешней среды на систему;

$\Phi_g(s)=\dfrac{R(s)}{D(s)}$; $\Phi_f(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ – передаточные функции системы по входному воздействию и воздействию внешней среды;

$D(s)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^{n-i}$; $R(s)=\sum\limits_{i=0}^{m} b_i s^{m-i}$; $N(s)=\sum\limits_{i=0}^{k} c_i s^{k-i}$ – полиномы степени n, m, k от оператор Лапласа s, причём $n \geq m,k$;

a_i, b_i, c_i – постоянные коэффициенты.

Таким образом, поведение системы может быть исследовано на основе выражений (2.2) и (2.3), которые представляют собой математические модели динамических систем типа вход-выход.

Описание в пространстве состояний образует *математические модели вход-состояние-выход* (модели типа «ВСВ»).

Описание в пространстве состояний представляет собой общий взгляд на любые системы и пригодно для исследования и проектирования сложных систем с многими входами и выходами, то есть многомерных и многосвязных систем. С математической точки зрения анализ систем в пространстве состояний означает использование методов матричного исчисления и векторного анализа.

В общем случае обыкновенных линейных систем, описываемых системой дифференциальных уравнений в нормальной форме, рассматриваемая система может быть определена следующей векторно-матричной формой

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}, \qquad (2.4)$$

где X – вектор состояния системы;

Y – вектор выходных управляемых величин;

U – вектор внешних воздействий (входных и возмущающих);

A, B, C, D – матрицы системы.

Система уравнений (2.4) является стандартным описанием динамических систем в пространстве состояний и представляет собой математическую модель вход-состояние-выход.

Уравнения (2.4) несут большой объём информации о динамических свойствах системы. Первое уравнение из (2.4) определяет динамические характеристики системы, а второе является уравнением выхода.

Матрица системы A, элементы которой определяются структурной схемой системы и значениями её параметров, характеризует динамические свойства системы, её свободное движение. Матрица управления B характеризует влияние внешних воздействий на переменные состояния системы, т.е. определяет чувствительность системы к внешним воздействиям (входным и возмущающим). Матрица наблюдения C характеризует связь выходной величины системы с вектором состояния. Обычно не все составляющие вектора состояния являются наблюдаемыми сигналами, т.е.

могут быть измерены с помощью каких-либо датчиков, в то время как выходной сигнал всегда наблюдаем. Матрица связи D устанавливает связь выходной величины системы с внешним воздействием.

Таким образом, четверка матриц A, B, C, D полностью определяет динамическую систему.

2.3.2. Дискретно-детерминированные модели (*F*–схемы)

Использование ***F**–схем* позволяет формализовать процесс функционирования дискретно-детерминированных систем, для которых характерно наличие дискретных состояний и дискретный характер работы во времени [8].

Дискретно-детерминированные модели широко используются в качестве математического аппарата теории автоматов. *Теория автоматов* – это раздел технической кибернетики, в котором изучаются математические модели – *автоматы*. На основе этой теории система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

Автомат можно представить как некоторое устройство (чёрный ящик), на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные и которое может иметь некоторое внутреннее состояние. *Конечным автоматом* называется автомат, у которого множества внутренних состояний, входных сигналов и выходных сигналов являются конечными множествами.

Абстрактный конечный автомат (англ. Finite Automata) математически задаётся ***F**–схемой*:

$$F = < X, Y, Z, \varphi, \psi, z_0 >, \tag{2.5}$$

где X – конечное множество входных воздействий (входной алфавит);

Y – конечное множество выходных величин (выходной алфавит);

Z – конечное множество внутренних состояний (алфавит состояний);

z_0 – начальное состояние, $z_0 \in Z$;

$\varphi(z, x)$ – функция переходов;

$\psi(z, x)$ – функция выходов.

Автомат, задаваемый ***F**–схемой*, функционирует в дискретном времени $t = nT$, где T – период дискретности (такт, т.е. равный интервал времени); $n = 0, 1, 2, 3\ldots$ – номер такта.

На каждом такте дискретного времени ***F***–автомат находится в определённом состоянии $z(n)$ из множества Z состояний автомата, причём в начальный момент времени $t = 0$ он всегда находится в начальном состоянии $z(0) = z_0$. В момент времени $t = nT$, будучи в состоянии $z(n)$, автомат способен воспринимать на входе сигнал $x(n) \in X$ и выдавать на выходе сигнал $y(n) = \psi[z(n), x(n)]$, переходя в состояние $z(n+1) = \varphi[z(n), x(n)]$, $z(n) \in Z$, $y(n) \in Y$.

Таким образом, работа конечного автомата происходит по следующей схеме: в каждый n-й такт на вход автомата, находящегося в состоянии $z(n)$, подаётся некоторый входной сигнал $x(n)$, на который он реагирует переходом в $(n+1)$-м такте в новое состояние $z(n+1)$ и выдачей некоторого выходного сигнала $y(n)$.

Классификация конечных автоматов. ***F***–автоматы разделяются по математическому описанию, по числу состояний и по характеру отсчёта дискретного времени.

По математическому описанию автоматы делятся на автоматы первого и второго рода.

F–автомат первого рода, называемый *автоматом Мили*, описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} z(n+1) = \varphi[z(n),\ \ x(n)] \\ y(n) = \psi[z(n),\ \ x(n)] \end{cases},\ n = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{2.6}$$

Для ***F***–автомата второго рода уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} z(n+1) = \varphi[z(n),\ \ x(n)] \\ y(n) = \psi[z(n),\ \ x(n-1)] \end{cases},\ n = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{2.7}$$

Автомат второго рода, для которого функция выходов не зависит от входной переменной $x(n)$, называется *автоматом Мура*:

$$\begin{cases} z(n+1) = \varphi[z(n),\ \ x(n)] \\ y(n) = \psi[z(n)] \end{cases},\ n = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{2.8}$$

По числу состояний различают конечные автоматы с памятью и без памяти. *Автоматы с памятью* имеют более одного состояния, а *автоматы без памяти* обладают лишь одним состоянием. Автоматы без памяти ставят в соответствие каждому входному сигналу $x(n)$ определённый выходной сигнал $y(n)$, реализуя функцию вида $y(n) = \psi[x(n)]$, $n = 0, 1, 2, 3\ldots$.

По характеру отсчёта дискретного времени конечные автоматы делятся на синхронные и асинхронные. В *синхронных **F**–автоматах* моменты времени, в которые автомат «считывает» входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующими сигналами. После очередного синхронизирующего сигнала с учётом считанного входного воздействия и в соответствии с уравнениями (2.6) – (2.8) происходит переход в новое состояние и выдача сигнала на выходе, после чего автомат может воспринимать следующее значение входного сигнала. Таким образом, реакция автомата на каждое значение входного сигнала заканчивается за один такт, длительность которого определяется интервалом времени между соседними синхронизирующими сигналами. *Асинхронный **F**–автомат* считывает входной сигнал непрерывно и поэтому, реагируя на достаточно длинный входной сигнал постоянной величины $x(n)$, он может, как следует из (2.6) – (2.8), несколько раз изменять состояние, выдавая соответствующее число выходных сигналов, пока не перейдёт в устойчивое состояние, которое уже не может быть изменено данным входным сигналом [8].

Способы задания работы автоматов. Чтобы задать конечный ***F***–автомат, требуется описать все элементы множества $F = <X, Y, Z, \varphi, \psi, z_0>$, т.е. входной, выходной алфавиты и алфавит состояний, а также функции переходов и выходов. Причём среди множества состояний необходимо выделить состояние z_0, в котором автомат находится в момент времени $t = 0$. Существует несколько способов задания работы ***F***–автоматов, но наиболее часто используются табличный, графический и матричный.

Табличный способ задания конечного автомата основан на использовании таблиц переходов и выходов, строки которых соответствуют входным сигналам автомата, а столбцы – его состояниям. При этом обычно первый слева столбец соответствует начальному состоянию z_0. На пересечении i-ой строки и k-го столбца таблицы переходов помещается соответствующее значение $\varphi(z_k, x_i)$ функции переходов, а в таблице выходов – соответствующее значение $\psi(z_k, x_i)$ функции выходов. Для ***F***–автомата Мура обе таблицы совмещаются в отмеченную таблицу переходов, в которой над каждым состоянием z_k автомата, обозначающим столбец таблицы, ставится соответствующее этому состоянию значение $\psi(z_k)$ выходного сигнала.

Описание работы ***F***–автоматов Мили иллюстрируется таблицей 2.1, а пример табличного способа задания ***F***–автомата Мили с тремя состояниями

(z_0, z_1, z_2), двумя входными (x_1, x_2) и двумя выходными (y_1, y_2) сигналами приведён в таблице 2.2.

Т а б л и ц а 2.1

Таблица переходов и входов автомата Мили

Входы x_i	Состояния z_k					
	z_0	z_1	…	…	…	z_k
	Переходы					
x_1	$\varphi(z_0, x_1)$	$\varphi(z_1, x_1)$	…	…	…	$\varphi(z_k,x_1)$
x_2	$\varphi(z_0, x_2)$	$\varphi(z_1, x_2)$	…	…	…	$\varphi(z_k,x_2)$
….	…..	….	….	….	….	….
	Выходы					
x_1	$\psi(z_0, x_1)$	$\psi(z_1, x_1)$	…	…	…	$\psi(z_k,x_1)$
x_2	$\psi(z_0, x_2)$	$\psi(z_1, x_2)$	…	…	…	$\psi(z_k,x_2)$
….	…..	….	….	….	….	….

Т а б л и ц а 2.2

Таблица переходов и входов автомата Мили с тремя состояниями (z_0, z_1, z_2), двумя входными (x_1, x_2) и двумя выходными (y_1, y_2) сигналами

Входы x_i	Состояния z_k		
	z_0	z_1	z_2
	Переходы		
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1
	Выходы		
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1

Описание работы ***F***–автоматов Мура иллюстрируется таблицей 2.3, а пример табличного способа задания ***F***–автомата Мура с пятью состояниями (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4), двумя входными (x_1, x_2) и тремя выходными (y_1, y_2, y_3) сигналами приведён в таблице 2.4.

Графический способ задания конечного автомата использует понятие направленного графа. Граф автомата представляет собой набор вершин, соответствующих различным состояниям автомата и соединяющих вершины дуг графа, соответствующих тем или иным переходам автомата. Если входной сигнал x_k вызывает переход из состояния z_i в состояние z_j, то на графе автомата дуга, соединяющая вершину z_i с вершиной z_j, обозначается x_k.

Для того чтобы задать функцию выходов, дуги графа необходимо отметить соответствующими выходными сигналами.

Т а б л и ц а 2.3

Отмеченная таблица переходов автомата Мура

Входы x_i	Состояния z_k			
	$\psi(z_0)$	$\psi(z_1)$	….	$\psi(z_k)$
	z_0	z_1	….	z_k
x_1	$\varphi(z_0, x_1)$	$\varphi(z_1, x_1)$	…	$\varphi(z_k, x_1)$
x_2	$\varphi(z_0, x_2)$	$\varphi(z_1, x_2)$	…	$\varphi(z_k, x_2)$
…	…	…	…	…

Т а б л и ц а 2.4

Отмеченная таблица переходов автомата Мура с пятью состояниями (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4), двумя входными (x_1, x_2) и тремя выходными (y_1, y_2, y_3) сигналами

Входы x_i	Состояния z_k				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	z_1	z_4	z_4	z_2	z_2
x_2	z_3	z_1	z_1	z_0	z_0

Для автоматов Мили эта разметка производится так: если входной сигнал x_k действует на состояние z_i, то, согласно сказанному, получается дуга, исходящая из z_i и помеченная x_k; эту дугу дополнительно отмечают выходным сигналом $y = \psi(z_i, x_k)$. На рис. 2.3 приведён заданный ранее таблицей 2.2 граф ***F***–автомата Мили.

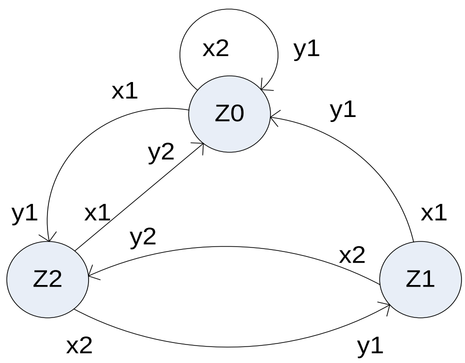


Рис. 2.3. Граф автомата Мили

Для автоматов Мура аналогичная разметка графа такова: если входной сигнал x_k, действуя на некоторое состояние z_i автомата, вызывает переход в состояние z_j, то дугу, направленную в z_j и помеченную x_k, дополнительно отмечают выходным сигналом $y = \psi(z_j, x_k)$. На рис. 2.4 приведён заданный ранее таблицей 2.4 граф ***F***–автомата Мура.

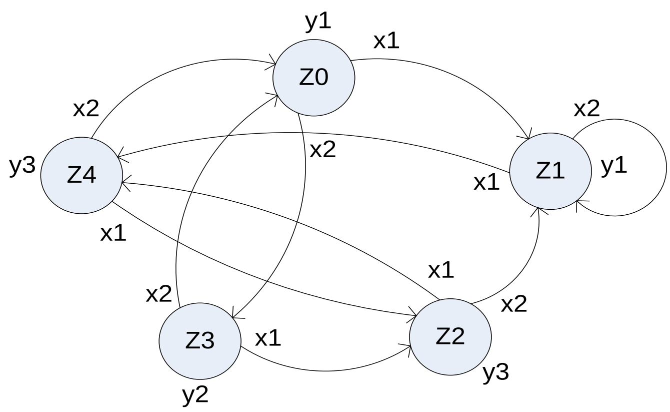


Рис. 2.4. Граф автомата Мура

Матричный способ задания конечного автомата часто является более удобной формой. При этом матрица соединений автомата есть квадратная матрица С = [c_{ij}], строки которой соответствуют исходным состояниям, а столбцы – состояниям перехода.

В случае ***F***–автомата Мили элемент $c_{ij} = x_k/y_s$, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, соответствует входному сигналу x_k, вызвавшему переход из состояния z_i в состояние z_j, и выходному сигналу y_s, выдаваемому при этом переходе. Для автомата Мили, рассмотренного выше, матрица соединений имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} x_2/y_1 & - & x_1/y_1 \\ x_1/y_1 & - & x_2/y_2 \\ x_1/y_2 & x_2/y_1 & - \end{bmatrix}. \qquad (2.9)$$

Если переход из состояния z_i в состояние z_j происходит под действием нескольких сигналов, элемент матрицы c_{ij} представляет собой множество пар «вход-выход» для этого перехода, соединённых знаком дизъюнкции.

Для ***F***–автомата Мура элемент $c_{ij} = x_k/y_s$ равен множеству входных сигналов на переходе (z_i, z_j), а выход описывается вектором выходов, i-я компонента которого – выходной сигнал, отмечающий состояние z_i. Для автомата Мура, рассмотренного выше, матрица соединений и вектор выходов имеют вид

$$C = \begin{bmatrix} - & x_1 & - & x_2 & - \\ - & x_2 & - & - & x_1 \\ - & x_2 & - & - & x_1 \\ x_2 & - & x_1 & - & - \\ x_2 & - & x_1 & - & - \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \qquad (2.10)$$

Для детерминированных автоматов выполняется условие однозначности переходов: автомат, находящийся в некотором состоянии, под действием любого входного сигнала не может перейти более чем в одно состояние. Это означает, что в графе автомата из любой вершины не могут выходить две и более дуг, отмеченных одним и тем же входным сигналом, а в матрице соединений в каждой строке входной сигнал не должен встречаться более одного раза.

Рассмотрим таблицу переходов и граф асинхронного конечного автомата. Для ***F***–автомата состояние z_k называется *устойчивым*, если для любого входа $x_i \in X$, для которого $\varphi(z_k, x_i) = z_k$ имеет место $\psi(z_k, x_i) = y_k$. Таким образом, ***F***–автомат называется асинхронным, если каждое его состояние $z_k \in Z$ устойчиво.

Ниже приведён пример асинхронного автомата Мура, заданного таблично (табл.2.5) и графически (рис.2.5).

Т а б л и ц а 2.5

Отмеченная таблица переходов асинхронного автомата Мура с тремя состояниями (z_0, z_1, z_2), тремя входными (x_1, x_2, x_3) и тремя выходными ($_1y, y_2, y_3$) сигналами

x_i	y_k		
	y_1	y_3	y_2
	z_0	z_1	z_2
x_1	z_2	z_2	z_2
x_2	z_1	z_1	z_2
x_3	z_0	z_1	z_0

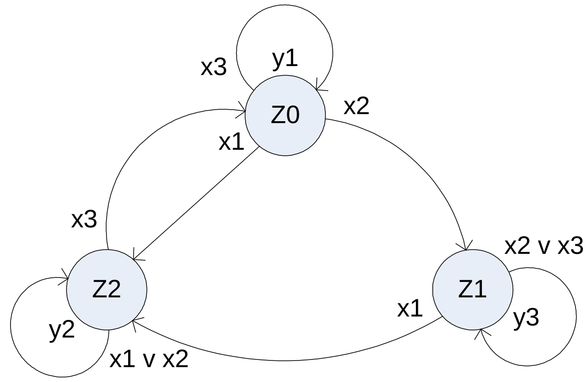


Рис. 2.5. Граф асинхронного автомата Мура

В таблице переходов асинхронного автомата некоторое состояние z_k стоит на пересечении строки x_i и столбца z_s ($s \neq k$), и это состояние z_k обязательно должно встретиться в этой же строке в столбце z_k. В графе асинхронного автомата, если в некоторое состояние имеются переходы из других состояний под действием каких-то сигналов, то в вершине z_k должна быть петля, отмеченная символами тех же входных сигналов.

Понятие ***F***–автомата является математической абстракцией, удобной для описания широкого класса процессов функционирования реальных объектов, для которых характерно наличие дискретных состояний и дискретный характер работы во времени. Но широта применения не означает универсальности ***F***–схем. Этот подход не пригоден для описания процессов в динамических системах с наличием переходных процессов, для формализации которых используются решётчатые функции и разностные уравнения, ***Z***–преобразование и описание в пространстве состояний [14].

2.3.3. Дискретно-стохастические модели (*P*–схемы)

Использование ***P****–схем* позволяет формализовать процесс функционирования дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение.

Вероятностный автомат (англ. Probabilistic Automata) определяется как дискретный потактовый преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нём и может быть описано статистически [8].

Применение схем вероятностных автоматов (***P****–схем*) имеет важное значение для разработки методов проектирования дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение, для выяснения алгоритмических возможностей таких систем и обоснования границ целесообразности их использования, а также для решения задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Введём математическое понятие ***P**–автомата*, используя понятия, введённые для ***F**–автомата*. Рассмотрим множество G, элементами которого являются всевозможные пары (x_i, z_s), где x_i и z_s – элементы входного множества X и множества состояний Z соответственно. Если существуют две такие функции φ и ψ, что с их помощью осуществляются отображения $G \to Z$ и $G \to Y$, то говорят, что $F = < X, Y, Z, \varphi, \psi, z_0 >$ определяет автомат детерминированного типа.

Введём в рассмотрение более общую математическую схему. Пусть Φ – множество всевозможных пар вида (z_k, y_j), где y_j – элементы выходного множества Y. Потребуем, чтобы любой элемент множества G индуцировал на множестве Φ некоторый закон распределения следующего вида:

Элементы из Ф	…	(z_1, y_1)	(z_1, y_2)	…	(z_K, y_{J-1})	(z_K, y_J)
(x_i, z_s)	…	b_{11}	b_{12}	…	$b_{K(J-1)}$	b_{KJ}

При этом $\sum\limits_{k=1}^{K}\sum\limits_{j=1}^{J} b_{kj} = 1$, где b_{kj} – вероятность перехода автомата в состояние z_k и появления на выходе сигнала y_j, если он был в состоянии z_s, и на его вход в этот момент времени поступил сигнал x_i. Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества G. Обозначим множество этих таблиц через B. Тогда четвёрка элементов $P = < X, Y, Z, B >$ называется вероятностным автоматом (***P**–автоматом*).

Пусть элементы множества G индуцируют некоторые законы распределения на множествах Y и Z, что можно представить соответственно в виде:

Элементы из Y	…	y_1	y_2	…	y_{J-1}	y_J
(x_i, z_s)	…	q_1	q_2	…	q_{J-1}	q_J
Элементы из Z	…	z_1	z_2	…	z_{K-1}	z_K
(x_i, z_s)	…	z_1	z_2	…	z_{K-1}	z_K

При этом $\sum\limits_{k=1}^{K} z_k = 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{J} q_k = 1$, где z_k и q_k – вероятности перехода **P**–автомата в состояние z_k и появление выходного сигнала y_k при условии, что **P**–автомат находился в состоянии z_s и на его вход поступил входной сигнал x_i.

Если для всех k и j имеет место соотношение $q_k z_j = b_{kj}$, то такой ***P**–автомат* называется ***вероятностным автоматом Мили***. Это требование означает выполнение условия независимости распределений для нового состояния **P**–автомата и его выходного сигнала.

Пусть теперь определение выходного сигнала **P**–автомата зависит лишь от того состояния, в котором находился автомат в данном такте работы. Другими словами, пусть каждый элемент выходного множества Y индуцирует распределения вероятностей выходов, имеющих следующий вид:

Элементы из Y	…	y_1	y_2	…	y_{K-1}	y_K
z_k	…	s_1	s_2	…	s_{I-1}	s_I

Здесь $\sum_{i=1}^{I} s_i = 1$, где s_i – вероятность появления выходного сигнала y_i при условии, что **P**–автомат находился в состоянии z_k.

Если для всех k и i имеет место соотношение $z_k s_i = b_{ki}$, то такой **P**–автомат называется ***вероятностным автоматом Мура***. Понятие **P**–автоматов Мили и Мура введено по аналогии с детерминированным **F**–автоматом.

Частным случаем **P**–автомата, задаваемого как $P = < X, Y, Z, B >$, являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминированно. Если выходной сигнал **P**–автомата определяется детерминированно, то такой автомат называется ***Y**–детерминированным вероятностным автоматом*. Аналогично, ***Z**–детерминированным вероятностным автоматом* называется **P**–автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

Способы задания работы **P**–автоматов такие же, как и для **F**– автоматов.

В качестве примера рассмотрим **Y**–детерминированный вероятностный автомат, заданный таблицей переходов (табл. 2.6) и таблицей выходов (табл.2.7). До начала работы **P**–автомат всегда находится в начальном состоянии z_0 и в нулевой такт времени начинает изменять своё состояние в соответствии с заданным распределением.

Т а б л и ц а 2.6

Таблица переходов *Y*–детерминированного вероятностного автомата

z_i \ z_j	z_j				
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_0	0	0.5	0	0	0.5
z_1	0	0	0	1	0
z_2	0	0	0.75	0	0.25
z_3	0	0	0.4	0	0.6
z_4	0	1	0	0	0

Т а б л и ц а 2.7

Таблица выходов *Y*–детерминированного вероятностного автомата

Z	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
Y	0	0	1	1	0

Для рассматриваемого ***P***–автомата матрица соединений и вектор выходов имеют вид

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.11)$$

В матрице соединений *Y*–детерминированного вероятностного автомата элемент $c_{ij} = p_{ij}$ определяется вероятностью перехода ***P***–автомата в состояние z_j из состояния z_i при поступлении входного сигнала, а выход описывается вектором выходов, *i*-я компонента которого – выходной сигнал, отмечающий состояние z_i.

Описанный *Y*–детерминированный ***P***–автомат можно задать в виде ориентированного графа (рис. 2.6), вершины которого сопоставляются состояниям автомата, а дуги – возможным переходам из одного состояния в другое. Дуги имеют веса, соответствующие вероятностям перехода p_{ij}, а около вершин графа пишутся значения выходных сигналов, индуцируемых этими состояниями.

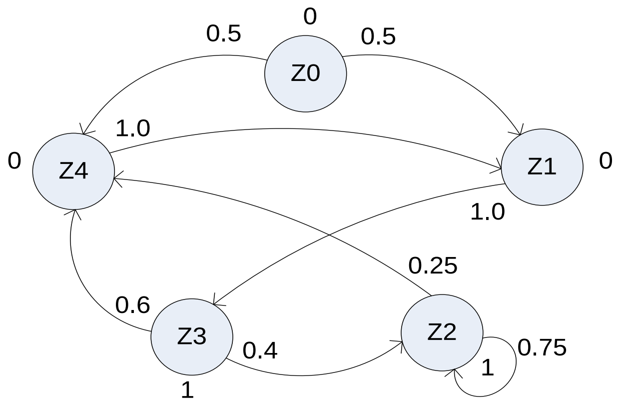


Рис. 2.6. Граф ***Y***–детерминированного вероятностного автомата

Оценим суммарную финальную вероятность пребывания этого ***P***–автомата в состояниях z_2 и z_3. При этом начальное состояние z_0 можно не учитывать, так как начальное распределение не оказывает влияния на значения финальных вероятностей. Тогда матрица вероятностей перехода автомата будет иметь вид

$$P_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда получаем систему уравнений, определяющих вероятности финального пребывания автомата в состояниях p_j ($j = \overline{1,4}$)

$$\begin{cases} p_1 = p_4 \\ p_2 = 0{,}75 \times p_2 + 0{,}4 \times p_3 \\ p_3 = p_1 \\ p_4 = 0{,}25 \times p_2 + 0{,}6 \times p_3 \end{cases}.$$

Добавим к этим уравнениям условие нормировки $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

Тогда, решая систему уравнений, получим $p_1 = p_3 = p_4 = 5/23$, $p_2 = 8/23$. Таким образом, $p_2 + p_3 = 13/23 = 0{,}5652$. Другими словами, при бесконечной работе заданного в этом примере ***Y***–детерминированного вероятностного автомата на его выходе формируется двоичная последовательность с вероятностью появления единицы, равной 0,5652.

Для оценки различных характеристик исследуемых систем, представленных в виде ***P***–*схем*, кроме рассмотренного случая аналитических моделей, можно применять и имитационные модели, реализуемые, например, методом статистического моделирования.

2.3.4. Непрерывно-стохастические модели (*Q*–схемы)

Использование ***Q**–схем* позволяет формализовать процессы функционирования систем, которые, по своей сути, являются процессами обслуживания.

Q–схемы применяются в качестве типовых математических схем *систем массового обслуживания* (англ. Queueing System) [8].

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например: потоки поставок продукции предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удалённых терминалов и т.д. Характерным для работы подобных объектов является стохастический характер процесса их функционирования, проявляющийся:

– в случайном появлении заявок (требований) на обслуживание;
– в завершении обслуживания в случайные моменты времени.

Рассмотрим основные понятия систем массового обслуживания (СМО), необходимые для использования ***Q***–схем, как при аналитическом, так и при имитационном подходе.

Элементы СМО. В СМО фигурируют:

1. Средства обслуживания – обслуживающие аппараты (ОА) или каналы обслуживания (К). Средства обслуживания являются статическими элементами ***Q***–схем.

2. Обслуживаемые заявки – транзакты. Являются динамическими элементами ***Q***–схем.

3. Очереди.

Состояние СМО характеризуется:

1. Состояниями всех обслуживающих аппаратов, каждый из которых может находиться в состоянии “занят” или “свободен”.

2. Состояниями всех транзактов, каждый из которых может находиться в состоянии “обслуживание” или “ожидание”.

3. Состояниями всех очередей к обслуживающим аппаратам, определяемыми количеством находящихся в них транзактов.

Переменные СМО. Переменные величины разделяются на независимые и системные.

Независимые величины СМО характеризуются двумя случайными переменными:

а) *интервал прибытия* – интервал времени между последовательными моментами прибытия заявок в систему;

б) *время обслуживания* – время, требуемое обслуживающему аппарату для выполнения обслуживания.

Системные величины СМО являются предметом исследования системы и назначаются исследователем, например:

а) число заявок, прибывших на обслуживание за заданный промежуток времени;

б) число заявок, которые попали на обслуживание сразу же по прибытии;

в) среднее время пребывания заявок в очереди;

г) средние длины очередей;

д) максимальная длина очереди;

е) нагрузка обслуживающего аппарата, являющаяся функцией времени, которое потрачено ОА на обслуживание в течение заданного промежутка времени и т.д.

На рис. 2.7 приведён пример системы обслуживания одним обслуживающим аппаратом и очередью. Система функционирует следующим образом. Заявка из источника заявок приходит на обслуживание. Если обслуживающий аппарат свободен, то заявка занимает его, и начинается процесс обслуживания. Если обслуживающий аппарат занят, то заявка поступает в очередь, где ожидает окончания обслуживания предыдущей заявки. Обслуженная заявка освобождает обслуживающий аппарат и покидает систему. Заявки, приходящие на обслуживание, образуют поток заявок; заявки, поступающие на обслуживание, образуют поток обслуживания; а заявки, покидающие систему по окончании обслуживания, образуют выходной поток. Эти потоки характеризуются интенсивностью λ прихода заявок на обслуживание, интенсивностью μ обслуживания и интенсивностью η ухода заявок из системы.

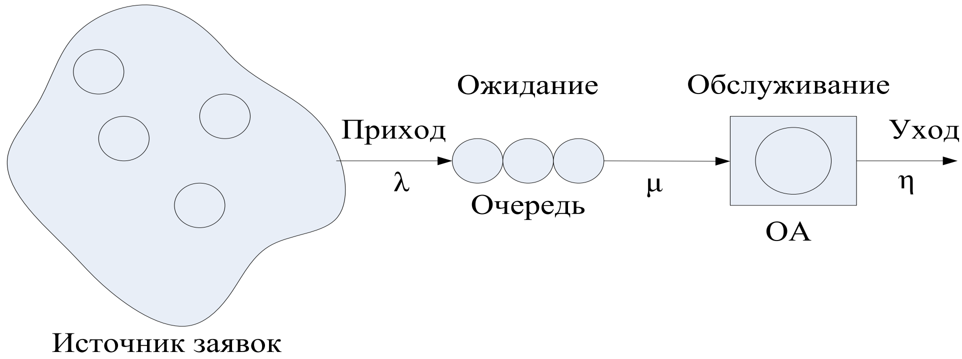
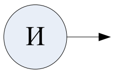
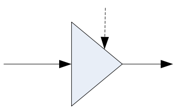
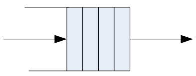
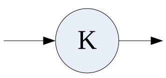
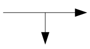


Рис. 2.7. Система обслуживания одним обслуживающим аппаратом и очередью

Для графического изображения СМО введена символика ***Q***–схем. Для начертания ***Q***–схем используются следующие основные элементы.

1. 

Источник заявок;
2. Материальные потоки (движение транзактов);
3. Информационные потоки (управляющие сигналы);
4.  Клапан;
5.  Накопитель;
6. 

Канал обслуживания;
7.  Узел − правило, в соответствии с которым направляются транзакты.

В качестве примера графического изображения ***Q***–схемы на рис. 2.8 приведена система обслуживания со страховым заделом.

Движение заявок через ***Q***–схему представляет собой материальные потоки. А для управления системы обслуживания используются информационные потоки.

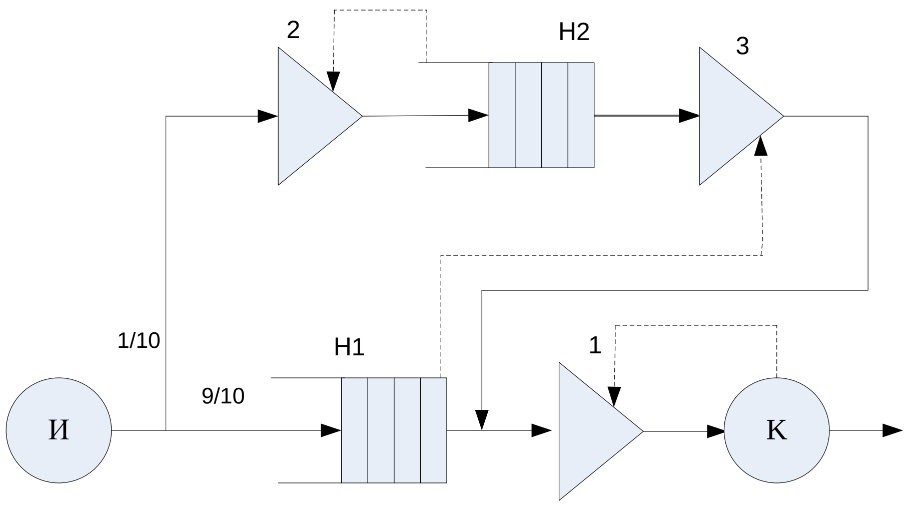


Рис. 2.8. Система обслуживания со страховым заделом:
И – источник заявок; Н1 и Н2 – накопители; К – канал обслуживания;
1, 2, 3 – клапаны

Все изменения, происходящие в системе, характеризуются событиями, которые образуют потоки событий.

Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Различают следующие потоки событий [8].

Поток однородных событий – это поток, который характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задаётся последовательностью $\{t_n\} = \{0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le \ldots\}$, где – момент наступления n–го события – неотрицательное вещественное число. Однородный поток событий также может быть задан в виде последовательности промежутков времени между n–м и $(n–1)$–м событиями $\{\tau_n\}$, которая однозначно связана с последовательностью вызывающих моментов $\{t_n\}$, где интервал прибытия $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n \ge 1$, $t_0 = 0$, т.е. $\tau_1 = t_1$.

Поток неоднородных событий – это последовательность $\{t_n, f_n\}$, где t_n – вызывающие моменты; f_n – набор признаков события. Например, применительно к процессу обслуживания для неоднородного потока заявок может быть задана принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала и т.п.

Поток с ограниченным последействием – это поток, в котором интервалы прибытия τ_1, τ_2, … являются случайными величинами, независимыми между собой.

Ординарный поток событий – это поток, для которого вероятность того, что на малый интервал времени Δt, примыкающий к моменту времени t, попадает больше одного события $P_{>1}(t, \Delta t)$, пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью того, что на этот же интервал времени Δt попадает ровно одно событие $P_1(t, \Delta t)$, т.е. $P_1(t, \Delta t) >> P_{>1}(t, \Delta t)$.

Стационарный поток событий – поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени τ зависит лишь от длины этого интервала и не зависит от того, где на оси времени взят этот интервал. Для стационарного потока его интенсивность не зависит от времени и представляет собой постоянное значение, равное среднему числу событий, поступающих в единицу времени $\lambda(t) = \lambda = const$.

Q*–схема*, описывающая процесс функционирования системы массового обслуживания любой сложности, однозначно математически задаётся в виде

$$Q = < W, U, Y, H, Z, R, A >, \tag{2.12}$$

где W – поток заявок;

U – поток обслуживания;

Y – выходной поток;

H – собственные параметры;

Z – внутреннее состояние;

R – оператор сопряжения;

A – оператор алгоритмов поведения заявок.

Поток заявок $w_i \in W$, т.е. интервалы времени между моментами появления заявок (вызывающие моменты) на входе системы, образует множество неуправляемых переменных.

Поток обслуживания $u_i \in U$, т.е. интервалы времени между началом и окончанием обслуживания заявок обслуживающими аппаратами системы, образует множество управляемых переменных.

Выходной поток $y_i \in Y$, т.е. интервалы времени между моментами выхода заявок из системы, образует множество выходных переменных. Выходной поток составляют обслуженные заявки и заявки, покинувшие систему по различным причинам необслуженными (например, из-за переполнения накопителей).

Внутреннее состояние $z_i \in Z$ определяется множеством состояний всех элементов, образующих систему. Процесс функционирования системы обслуживания можно представить как процесс изменения состояний его элементов во времени $z_i(t)$. Переход в новое состояние для элемента системы означает изменение количества заявок, которые в нём находятся (в канале K_i и в накопителе H_i). Таким образом, состояние для элемента системы имеет вид $z_i = (z_i^H,\ z_i^K)$, где z_i^H – состояние накопителя H_i ($z_i^H = 0$ – накопитель пуст, $z_i^H = 1$ – в накопителе имеется одна заявка, …, $z_i^H = L_i^H$ – накопитель полностью заполнен); L_i^H – ёмкость накопителя H_i, измеряемая числом заявок, которые в нём могут поместиться; z_i^K – состояние канала K_i ($z_i^K = 0$ – канал свободен, $z_i^K = 1$ – канал занят и т.д.).

Оператор сопряжения R отражает взаимосвязь элементов структуры системы (каналов и накопителей) между собой. ***Q***–схемы образуются композицией многих обслуживающих аппаратов. Если каналы обслуживания соединены параллельно (рис. 2.9), то имеет место многоканальное обслуживание (*многоканальная **Q**–схема*).

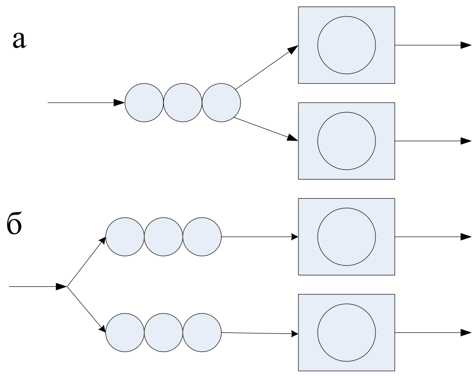


Рис. 2.9. Схема параллельного соединения каналов обслуживания:
а – с общей очередью; б – с раздельными очередями

Если каналы обслуживания соединены последовательно (рис. 2.10), то имеет место многофазное обслуживание (*многофазная **Q**–схема*).

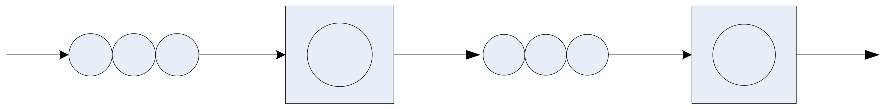


Рис. 2.10. Схема последовательного соединения каналов обслуживания

Связи между элементами ***Q***–схемы изображают в виде стрелок (линий потока, отражающих направление движения заявок). Различают разомкнутые и замкнутые $\boldsymbol{Q}$–схемы. В *разомкнутой* $\boldsymbol{Q}$*–схеме* выходной поток обслуженных заявок не может снова поступить на какой-либо элемент, т.е. обратная связь отсутствует, а в *замкнутых* $\boldsymbol{Q}$*–схемах* имеются обратные связи, по которым заявки двигаются в направлении, обратном движению вход-выход.

Собственные (внутренние) параметры H $\boldsymbol{Q}$–схемы включают:

– количество фаз $L_Ф$;
– количество каналов в каждой фазе L_{Kj} ($j=\overline{1,L_Ф}$);
– количество накопителей каждой фазы L_{Hk} ($k=\overline{1,L_Ф}$);
– ёмкость i-го накопителя L_i^H.

Следует отметить, что в теории массового обслуживания в зависимости от ёмкости накопителя применяют следующую терминологию для системы массового обслуживания:

– система с потерями (L_i^H = 0, т.е. накопитель у обслуживающего аппарата отсутствует, а имеется только канал обслуживания K_i);
– система с ожиданием ($L_i^H \to \infty$, т.е. накопитель H_i имеет бесконечную ёмкость и очередь заявок не ограничивается);
– система смешанного типа (с ограниченной ёмкостью накопителя H_i).

Вся совокупность собственных параметров $\boldsymbol{Q}$–схемы образует множество H.

Оператор алгоритмов (дисциплин) поведения заявок A определяет набор правил поведения заявок в системе в различных неоднозначных ситуациях. В зависимости от места возникновения таких ситуаций различают алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе H_i и обслуживания заявок каналом K_i каждого обслуживающего аппарата $\boldsymbol{Q}$–схемы. Неоднородность заявок, отражающая процесс в той или иной реальной системе, учитывается с помощью введения классов приоритетов.

Алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе определяются приоритетами. В зависимости от динамики приоритетов в $\boldsymbol{Q}$–схемах различают статические и динамические приоритеты. *Статические приоритеты* назначаются заранее и не зависят от состояния $\boldsymbol{Q}$–схемы, т.е. они являются фиксированными в пределах решения конкретной задачи моделирования. *Динамические приоритеты* возникают при моделировании в зависимости от возникающих ситуаций. Исходя из правил выбора заявок из накопителя H_i на обслуживание каналом K_i, можно выделить относительные и абсолютные приоритеты. *Относительный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H_i, ожидает окончания обслуживания предшествующей заявки каналом K_i и только после этого занимает канал. *Абсолютный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H_i, прерывает обслуживание каналом K_i заявки с более низким приоритетом и сама занимает канал (при этом вытесненная из K_i заявка может либо покинуть систему, либо может быть снова записана на какое-то место в H_i).

Алгоритмы (дисциплины) обслуживания заявок представляют собой набор правил, по которым заявки покидают накопитель H_i и канал K_i: для накопителя H_i – либо правила переполнения, по которым заявки в зависимости от заполнения H_i покидают систему, либо правила ухода, связанные с истечением времени ожидания заявки в H_i, для канала K_i – правила выбора маршрутов или направлений ухода. Кроме того, для заявок необходимо задать правила, по которым они остаются в канале K_i или не допускаются до обслуживания каналом K_i, т.е. правила блокировок каналов. При этом различают блокировки канала K_i по выходу и по входу. Такие блокировки отражают наличие управляющих связей в ***Q***–схеме, регулирующих поток заявок в зависимости от состояний ***Q***–схемы. Весь набор возможных алгоритмов поведения заявок в ***Q***–схеме представляется в виде оператора поведения заявок A.

Аналитическое решение ***Q***–схемы, заданной $Q = < W, U, Y, H, Z, R, A >$, возможно только при следующих упрощениях:

- входные потоки W и потоки обслуживания U – стационарные, ординарные, ограниченного последействия;
- оператор сопряжения элементов структуры R – однофазное одноканальное обслуживание в разомкнутой системе;
- множество собственных параметров H – обслуживание с бесконечной ёмкостью накопителя;
- оператор алгоритмов обслуживания заявок A – бесприоритетное обслуживание без прерываний и блокировок.

Таким образом, возможности оценки характеристик с использование аналитических моделей теории массового обслуживания являются весьма ограниченными по сравнению с требованиями практики исследования и проектирования систем, формируемых в виде ***Q***–схем. Несравненно большими возможностями обладают имитационные модели, позволяющие исследовать ***Q***–схему, заданную $Q = < W, U, Y, H, Z, R, A >$ без ограничений. На работу с **Q**–схемами при машинной реализации моделей ориентированы языки имитационного моделирования, например: *SIMULA, SIMSCRIPT, GPSS* и др.

2.3.5. Обобщённые модели (*A*–схемы)

Наиболее известным общим подходом к формальному описанию процессов функционирования систем является подход, предложенный Н.П.Бусленко. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем, т.е. по сравнению с рассмотренными является обобщённым (универсальным) и базируется на понятии *агрегатной системы* (англ. Aggregate System), представляющей собой формальную схему общего вида, которая называется ***A****–схемой* [8].

A–схема должна являться адекватным математическим описанием объекта моделирования, служить основой для построения алгоритмов и программ при компьютерной реализации модели, позволять в упрощенном варианте проводить аналитические исследования.

При агрегатном описании сложный объект (система) разбивается на конечное число N_A частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивающие их взаимодействие. Если некоторые из полученных подсистем оказываются, в свою очередь, ещё достаточно сложными, то процесс их разбиения продолжается до тех пор, пока не образуются подсистемы, которые в условиях рассматриваемой задачи моделирования могут считаться удобными для математического описания. В результате такой декомпозиции сложная система представляется в виде многоуровневой конструкции из взаимосвязанных элементов, объединённых в подсистемы различных уровней [8].

В качестве элемента ***A***–схемы выступает *агрегат A*, а связь между агрегатами (внутри системы и с внешней средой) осуществляется с помощью *оператора сопряжения R* элементов в ***A***–схему.

Совокупность N_A агрегатов $A_n,\ n = \overline{1, N_A}$ представляет агрегатную систему или ***A***–схему. Для описания реальной системы в виде ***A***–схемы необходимо получить по рассмотренным ранее методикам описание отдельных агрегатов A_n и связей между ними, задаваемых оператором сопряжения R. Взаимодействие ***A***–схемы с внешней средой рассматривается как обмен сигналами между внешней средой и элементами ***A***–схемы. В соответствии с этим внешняя среда представляется в виде фиктивного элемента системы A_0.

Для установления связей между агрегатами каждый A_n, $n=\overline{0,N_A}$ как элемент ***A***–схемы снабжается множеством входных $\{X_i^{(n)}\}$ ($i=\overline{1,I_n}$, I_n – число входов n–ого агрегата; $n=\overline{0,N_A}$, N_A – число агрегата в ***A***–схеме) и множеством выходных $\{Y_j^{(n)}\}$ ($j=\overline{1,J_n}$, J_n – число выходов n–ого агрегата) контактов, через которые осуществляется обмен сигналами между элементами ***A***–схемы и внешней средой.

Введённая пара множеств $\{X_i^{(n)}\}$, $\{Y_j^{(n)}\}$ является математической моделью элемента A_n, используемого для формального описания сопряжения его с элементами ***A***–схемы и внешней средой.

Оператор сопряжения R сопоставляет входному контакту $X_i^{(n)}$ n-ого агрегата выходной контакт $Y_l^{(k)}$ k-ого агрегата, т.е. $Y_l^{(k)} = R(X_i^{(n)})$.

Таким образом, совокупность множеств $\{X_i^{(n)}\}$, $\{Y_l^{(k)}\}$ и оператор сопряжения R образуют схему сопряжения элементов в систему.

Графически ***A***–схема изображается в виде структурной схемы.

A–схемы отображают наши представления о взаимодействии реальных объектов в рамах механизма обмена сигналами.

Ниже приведён пример ***A***–схемы, структура которой представлена на рис. 2.11, а оператор сопряжения R задан таблично (табл. 2.8).

При табличном способе задания оператора сопряжения R ***A***–схемы используется таблица, в которой на пересечении строк с номерами агрегатов n и столбцов с номерами входных контактов i располагаются пары чисел k,l, указывающие номер агрегата k и номер контакта l, с которым соединен контакт $X_i^{(n)}$.

Таким образом, рассмотренные примеры использования типовых математических схем (***D***–, ***F***–, ***P***–, ***Q***– и ***A***–*схем*) позволяют формализовать достаточно широкий класс больших систем, с которыми приходится иметь дело в практике исследования и проектирования реальных объектов.

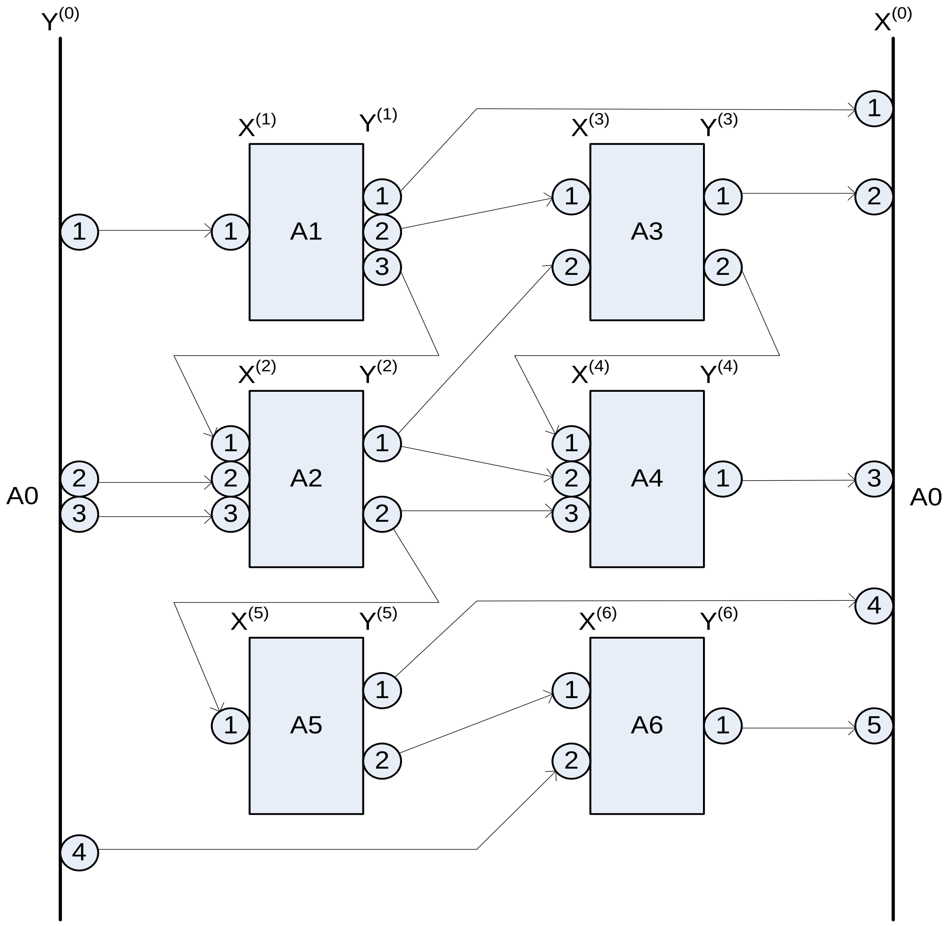


Рис. 2.11. Структура агрегатной системы

Т а б л и ц а 2.8

Оператор сопряжения *R*

n	***i***				
	1	2	3	4	5
0	1,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1	0,1				
2	1,3	0,2	0,3		
3	1,2	2,1			
4	3,2	2,1	2,2		
5	2,2				
6	5,2	0,4			

“Всегда стройте все снизу вверх”.
Ф.Рузвельт

3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ

3.1. Последовательность разработки и машинной реализации моделей

В настоящее время наиболее эффективным методом исследования систем является машинное моделирование, без которого невозможно решение многих задач.

Моделирование с использованием компьютера позволяет исследовать механизм явлений, протекающих в реальном объекте с большими или малыми скоростями, когда в натурных экспериментах с объектом трудно (или невозможно) проследить за изменениями, протекающими в течение короткого времени, или когда получение достоверных результатов сопряжено с длительным экспериментом.

Сущность машинного моделирования системы состоит в проведении на компьютере эксперимента с моделью, которая представляет собой некоторый программный комплекс, описывающий формально и (или) алгоритмически поведение элементов системы в процессе её функционирования, т.е. в их взаимодействии друг с другом и внешней средой.

Основные требования, предъявляемые к модели процесса функционирования системы.

1. Полнота модели должна предоставлять исследователю возможность получения необходимого набора оценок характеристик системы с требуемой точностью и достоверностью.

2. Гибкость модели должна давать возможность воспроизведения различных ситуаций при варьировании структуры, алгоритмов и параметров системы.

3. Длительность разработки и реализации модели системы должна быть по возможности минимальной при учёте ограничений на имеющиеся ресурсы.

4. Структура модели должна быть блочной, т.е. допускать возможность замены, добавления и исключения некоторых частей без переделки всей модели.

5. Информационное обеспечение должно предоставлять возможность эффективной работы модели с базой данных систем определённого класса.

6. Программные и технические средства должны обеспечивать эффективную (по быстродействию и памяти) машинную реализацию модели и удобное общение с ней пользователя.

7. Должно быть реализовано проведение целенаправленных (планируемых) машинных экспериментов с моделью системы с использованием аналитико-имитационного подхода при наличии ограничений.

При машинном моделировании системы характеристики процесса её функционирования определяются на основе модели, построенной исходя из имеющейся исходной информации об объекте моделирования. При получении новой информации об объекте его модель пересматривается и уточняется, т.е. процесс моделирования является итерационным. Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена модель, которую можно считать адекватной в рамках решения поставленной задачи исследования и проектирования системы.

Моделирование систем на ЭВМ целесообразно использовать в следующих случаях:

а) для исследования системы до того, как она спроектирована, с целью оценки эффективности будущей системы, а также определения чувствительности характеристик системы к изменениям структуры, алгоритмов и параметров объекта моделирования и внешней среды;

б) на этапе проектирования системы для анализа и синтеза различных вариантов системы и выбора среди конкурирующих такого варианта, который удовлетворял бы заданному критерию оценки эффективности системы при принятых ограничениях;

в) после завершения проектирования и внедрения системы, т.е. при её эксплуатации, для получения информации, дополняющей результаты натурных испытаний реальной системы, и для получения прогнозов эволюции системы во времени.

Основными этапами моделирования систем являются [8]:

– построение концептуальной модели системы и её формализация;
– алгоритмизация модели системы и её машинная реализация;
– получение и интерпретация результатов моделирования системы.

Взаимосвязь перечисленных этапов моделирования систем и их составляющих (подэтапов) представлена в виде сетевого графика (рис. 3.1).

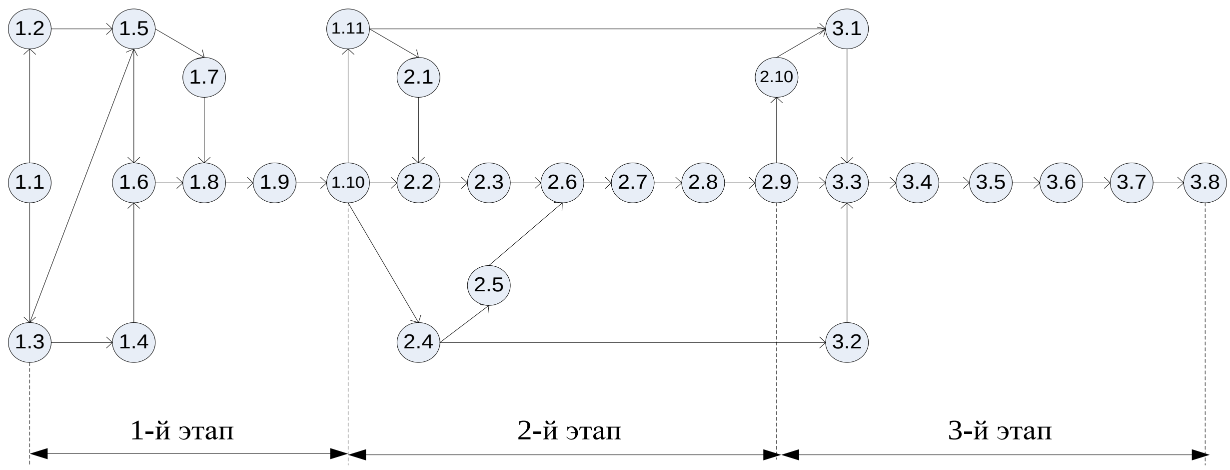


Рис. 3.1. Взаимосвязь этапов моделирования систем

К подэтапам относятся: 1.1 – постановка задачи машинного моделирования системы; 1.2 – анализ задачи моделирования системы; 1.3 – определение требований к исходной информации об объекте моделирования и организация её сбора; 1.4 – выдвижение гипотез и принятие предложений; 1.5 – определение параметров и переменных модели; 1.6 – установление основного содержания модели; 1.7 – обоснование критериев оценки эффективности системы; 1.8 – определение процедур аппроксимации; 1.9 – описание концептуальной модели системы; 1.10 – проверка достоверности концептуальной модели; 1.11 – составление технической документации по первому этапу; 2.1 – построение логической схемы модели; 2.2 – получение математических соотношений; 2.3 – проверка достоверности модели системы; 2.4 – выбор вычислительных средств для моделирования; 2.5 – составление плана выполнения работ по программированию; 2.6 – построение схемы программы; 2.7 – проверка достоверности схемы программы; 2.8 – проведение программирования модели; 2.9 – проверка достоверности программы; 2.10 – составление технической документации по второму этапу; 3.1 – планирование машинного эксперимента с моделью системы; 3.2 – определение требований к вычислительным средствам; 3.3 – проведение рабочих расчётов; 3.4 – анализ результатов моделирования системы; 3.5 – представление результатов моделирования; 3.6 – интерпретация результатов моделирования; 3.7 – подведение итогов моделирования и выдача рекомендаций; 3.8 – составление технической документации по третьему этапу.

Таким образом, процесс моделирования системы сводится к выполнению перечисленных подэтапов, сгруппированных в виде трёх этапов. На этапе построения концептуальной модели M_K и её формализации проводится исследование моделируемого объекта с точки зрения выделения основных составляющих процесса его функционирования, определяются необходимые аппроксимации и получается обобщённая схема модели системы, которая преобразуется в машинную модель M_M на втором этапе моделирования путём последовательной алгоритмизации и программирования модели. Последний этап моделирования системы сводится к проведению согласно разработанному плану рабочих расчётов на ЭВМ с использованием выбранных программно-технических средств, получению и интерпретации результатов моделирования системы. Очевидно, что при построении модели и её машинной реализации при получении новой информации возможен пересмотр ранее принятых решений.

3.2. Построение концептуальной модели системы и её формализация

На первом этапе машинного моделирования – построения *концептуальной модели* M_K системы и её формализации – формулируется модель и строится её формальная схема, т.е. основным назначением этого этапа является переход от содержательного описания объекта к его математической модели, другими словами, процессу формализации.

Моделирование систем на ЭВМ в настоящее время – наиболее универсальный и эффективный метод оценки характеристик систем. Наиболее ответственным и наименее формализованными моментами в этой работе являются проведение границы между системой и внешней средой, упрощение описания системы и построение сначала концептуальной, а затем формальной модели системы. Модель должна быть адекватной, иначе невозможно получить положительные результаты моделирования, т.е. исследование процесса функционирования системы на неадекватной модели вообще теряет смысл. Под адекватной моделью понимается модель, которая с определённой степенью приближения на уровне понимания моделируемой системы разработчиком модели отражает процесс её функционирования во внешней среде.

Наиболее рационально строить модель функционирования системы по блочному принципу. При этом могут быть выделены три автономные группы блоков модели. Блоки первой группы представляют собой имитатор воздействий внешней среды на систему; блоки второй группы являются собственно моделью процесса функционирования исследуемой системы;

блоки третьей группы – вспомогательные, служат для машинной реализации блоков двух первых групп, а также для фиксации и обработки результатов моделирования.

Механизм перехода от описания процесса функционирования некоторой гипотетической системы к модели этого процесса включает следующие этапы [8].

1. Для наглядности вводится представление об описании свойств процесса функционирования системы, т.е. об её концептуальной модели M_K как совокупности некоторых элементов, условно изображённых квадратами так, как показано на рис. 3.2. Эти квадраты представляют собой описание некоторых подпроцессов исследуемого процесса функционирования системы, воздействия внешней среды и т.д.

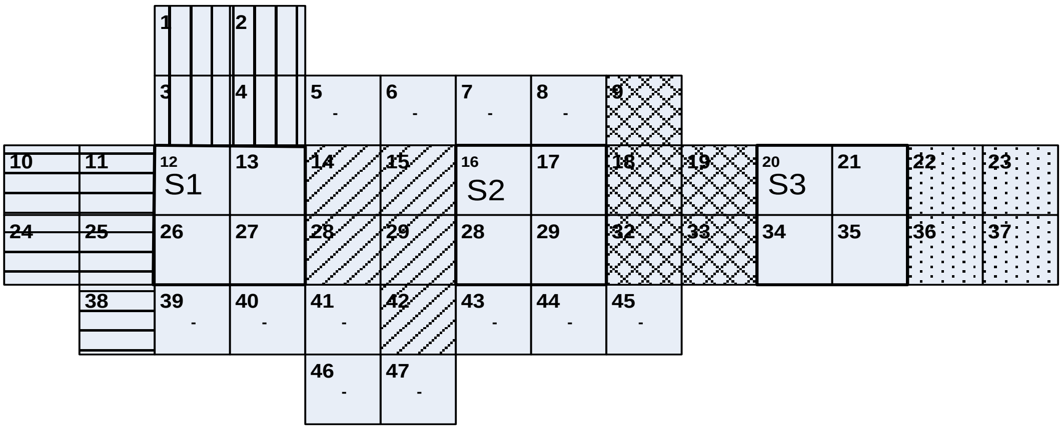


Рис. 3.2. Концептуальная модель системы

2. Переход от описания системы к её модели в этой интерпретации сводится к исключению из рассмотрения некоторых второстепенных элементов описания (элементы 5–8, 39–41, 43–47). Предполагается, что они не оказывают существенного влияния на ход процессов, исследуемых с помощью модели.

3. Часть элементов (14, 15, 28, 29, 42) заменяется связями h_1, отражающими внутренние свойства системы.

4. Часть элементов (10, 11, 24, 25, 38) образует входное воздействие x.

5. Выделяют элементы (1–4), характеризующие воздействие внешней среды v_1.

6. Возможны комбинированные замены: элементы (9, 18, 19, 32, 33) заменены внутренней связью h_2 и воздействием внешней среды v_2.

7. Группируют элементы (22, 23, 36, 37), отражающие воздействие системы на внешнюю среду *y*.

8. Оставшиеся элементы системы группируют в блоки S_1, S_2, S_3, отражающие процесс функционирования исследуемой системы. Каждый из этих блоков достаточно автономен, что выражается в минимальном количестве связей между ними. Поведение этих блоков должно быть хорошо изучено, и для каждого из них построена математическая модель, которая, в свою очередь, может содержать ряд подблоков.

9, Построенная таким образом *блочная модель* (рис. 3.3) процесса функционирования исследуемой системы предназначена для анализа характеристики этого процесса, который может быть проведён при машинной реализации полученной модели.

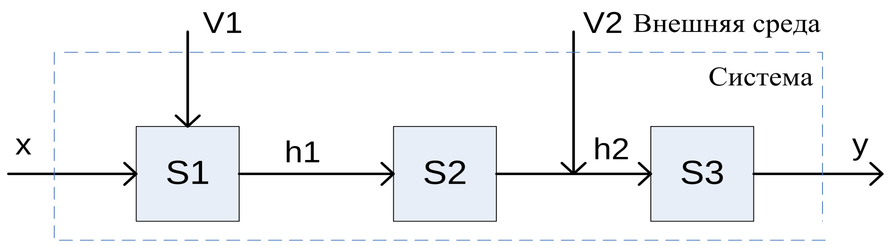


Рис. 3.3. Блочная модель системы

После перехода от описания моделируемой системы к её модели M_K, построенной по блочному принципу, необходимо построить математические модели процессов, происходящих в различных блоках. Математическая модель представляет собой совокупность соотношений (например, уравнений, логических условий, операторов), определяющих характеристики процесса функционирования системы в зависимости от структуры системы, алгоритмов поведения, параметров системы, воздействий внешней среды, начальных условий и времени. Математическая модель является результатом формализации процесса функционирования исследуемой системы, т.е. построения формального (математического) описания процесса с необходимой в рамках проводимого исследования степенью приближения к действительности.

Таким образом, формализации процесса функционирования любой системы должно предшествовать изучение составляющих его явлений. В результате появляется содержательное описание процесса, которое представляет собой первую попытку чётко изложить закономерности, характерные для исследуемого процесса, и постановку прикладной задачи.

Содержательное описание является исходным материалом для последующих этапов формализации: построения формализованной схемы процесса функционирования системы и математической модели этого процесса. Для моделирования процесса функционирования системы на ЭВМ необходимо преобразовать математическую модель процесса в соответствующий моделирующий алгоритм и машинную программу.

Основные подэтапы построения концептуальной модели системы и её формализации представлены на рис. 3.1 [8]:

1.1. *Постановка задачи машинного моделирования системы*. Даётся чёткая формулировка задачи исследования конкретной системы, и основное внимание уделяется таким вопросам, как: а) признание существования задачи и необходимости машинного моделирования; б) выбор методики решения задачи с учётом имеющихся ресурсов; в) определение масштаба задачи и возможности разбиения её на подзадачи. Необходимо также ответить на вопрос о приоритетности решения различных подзадач, оценить эффективность возможных математических методов и программно-технических средств их решения.

1.2. *Анализ задачи моделирования системы*. Основная работа на этом подэтапе сводится к проведению анализа, включая: а) выбор критериев оценки эффективности процесса функционирования системы; б) определение экзогенных и эндогенных переменных модели; в) выбор возможных методов идентификации; г) выполнение предварительного анализа содержания второго этапа алгоритмизации модели системы и её машинной реализации; д) выполнение предварительного анализа содержания третьего этапа получения и интерпретации результатов моделирования системы.

1.3. *Определение требований к исходной информации об объекте моделирования и организация её сбора*. После постановки задачи моделирования системы определяются требования к информации, из которой получают качественные и количественные исходные данные, необходимые для решения этой задачи. На этом подэтапе производится: а) выбор необходимой информации о системе и внешней среде; б) подготовка априорных данных; в) анализ имеющихся экспериментальных данных; г) выбор методов и средств предварительной обработки информации о системе.

При этом необходимо помнить, что именно от качества исходной информации об объекте моделирования существенно зависят как адекватность модели, так и достоверность результатов моделирования.

1.4. *Выдвижение гипотез и принятие предложений*. Гипотезы при построении модели системы служат для заполнения «пробелов» в понимании задачи моделирования. При выдвижении гипотез и принятии предложений учитываются следующие факторы: а) объём имеющейся информации для решения задач; б) подзадачи, для которых информация недостаточна; в) ограничения на ресурсы времени для решения задачи; г) ожидаемые результаты моделирования. В процессе работы с моделью системы возможно многократное возвращение к этому подэтапу в зависимости от полученных результатов моделирования и новой информации об объекте.

1.5. *Определение параметров и переменных модели*. Прежде чем перейти к описанию математической модели, необходимо определить параметры исследуемой системы $H=\{h_k\},\ k=\overline{1,n_H}$; входные величины $X=\{x_i\},\ i=\overline{1,n_X}$; воздействия внешней среды $V=\{v_l\},\ l=\overline{1,n_V}$; выходные величины $Y=\{y_j\},\ j=\overline{1,n_Y}$. Описание каждого параметра и переменной должно даваться в следующей форме: а) определение и краткая характеристика; б) символ обозначения и единица измерения; в) диапазон изменения; г) место применения в модели.

1.6. *Установление основного содержания модели*. На этом подэтапе определяется основное содержание модели и выбирается метод построения модели системы, который разрабатывается на основе принятых гипотез и предложений. При этом учитываются следующие особенности: а) формулировка задачи моделирования системы; б) структура системы и алгоритмы её поведения, воздействия внешней среды; в) возможные методы и средства решения задачи моделирования.

1.7. *Обоснование критериев оценки эффективности системы*. Для оценки качества процесса функционирования моделируемой системы необходимо выбрать некоторую совокупность критериев оценки эффективности, т.е. в математической постановке задача сводится к получению соотношения для оценки эффективности как функции параметров и переменных системы. Эффективность системы можно оценить с помощью интегральных или частотных критериев, выбор которых зависит от рассматриваемой задачи.

1.8. *Определение процедур аппроксимации*. Для аппроксимации реальных процессов, протекающих в системе, обычно используются три вида процедур: а) детерминированная; б) вероятностная; в) статистическая.

1.9. *Описание концептуальной модели системы*. На этом подэтапе построения модели системы: а) описывается концептуальная модель M_K в абстрактных терминах и понятиях; б) даётся описание модели с использованием типовых математических схем; в) принимаются окончательные гипотезы и предложения; г) обосновывается выбор процедуры аппроксимации реальных процессов при построении модели. Таким образом, на этом подэтапе проводится подробный анализ задачи, рассматриваются возможные методы её решения и даётся детальное описание концептуальной модели M_K, которая затем используется на втором этапе моделирования.

1.10. *Проверка достоверности концептуальной модели*. После того как концептуальная модель M_K описана, необходимо проверить достоверность некоторых концепций модели, перед тем как перейти к следующему этапу моделирования системы. Проверять достоверность концептуальной модели достаточно сложно, так как процесс её построения является эвристическим, и такая модель описывается в абстрактных терминах и понятиях. Один из методов проверки концептуальной модели M_K – применение операций обратного перехода, позволяющий проанализировать модель, вернуться к принятым аппроксимациям и, наконец, рассмотреть снова реальные процессы, протекающие в моделируемой системе. Проверка достоверности концептуальной модели M_K должна включать: а) проверку замысла модели; б) оценку достоверности исходной информации; в) рассмотрение постановки задачи моделирования; г) анализ принятых аппроксимаций; д) исследование гипотез и предложений. Только после тщательной проверки концептуальной модели M_K следует переходить к этапу машинной реализации модели, так как ошибка не позволит получить достоверные результаты моделирования.

1.11. *Составление технической документации по первому этапу*. В конце этапа построения концептуальной модели M_K и её формализации составляется технический отчёт по этапу, который включает в себя: а) подробную постановку задачи моделирования системы; б) анализ задачи моделирования системы; в) критерии оценки эффективности системы; г) параметры и переменные модели системы; д) гипотезы и предложения, принятые при построении модели; е) описание модели в абстрактных терминах и понятиях; ж) описание ожидаемых результатов моделирования системы.

Составление технической документации – обязательное условие успешного проведения моделирования системы, так как в процессе разработки модели и её машинной реализации принимают участие специалисты разных профилей, и документация является средством обеспечения их эффективного взаимодействия при решении поставленной задачи методом моделирования.

3.3. Алгоритмизация модели и её машинная реализация

На втором этапе моделирования – этапе алгоритмизации модели и её машинной реализации – математическая модель, сформированная на первом этапе, воплощается в конкретную машинную модель. Этот этап представляет собой этап практической деятельности, направленный на реализацию идей и математических схем в виде машинной модели M_M процесса функционирования системы.

Требования, предъявляемые к «хорошей» машинной модели процесса функционирования системы. «Хорошая» модель должна быть [15]:

– простой и понятной пользователю;
– целенаправленной;
– надёжной в смысле гарантии от абсурдных ответов;
– удобной в управлении и обращении, т.е. общение с ней должно быть лёгким;
– полной с точки зрения возможностей решения главных задач;
– адаптивной, позволяющей легко переходить к другим модификациям или обновлять данные;
– допускать постепенные изменения в том смысле, что, будучи вначале простой, она может во взаимодействии с пользователем становиться всё более сложной.

Процесс функционирования системы можно рассматривать как последовательную смену её состояний $Z=Z(z_1(t),\ z_2(t),\ \ldots,\ z_n(t))$ в n–мерном пространстве [8]. Очевидно, что задачей моделирования процесса функционирования исследуемой системы является построение функций Z, на основе которых можно провести вычисление интересующих характеристик процесса функционирования системы. Для этого должны иметься соотношения, связывающие функции Z с переменными, параметрами и временем, а также начальные условия $Z^0=Z(z_1(t_0),\ z_2(t_0),\ \dots,\ z_n(t_0))$ в момент времени $t = t_0$.

Основными принципами построения моделирующих алгоритмов являются «принцип Δt» и «принцип δz».

Принцип Δt («принцип приращения времени») – это наиболее универсальный принцип, позволяющий определить последовательные состояния процесса функционирования системы через заданные интервалы времени Δt. Но с точки зрения затрат машинного времени он иногда оказывается неэкономичным.

При рассмотрении процессов функционирования некоторых систем можно обнаружить, что для них характерны два типа состояний: 1) особые, присущие процессу функционирования системы только в некоторые моменты времени (моменты поступления входных или управляющих воздействий, возмущений внешней среды и т.п.); 2) неособые, в которых процесс находится всё остальное время. Особые состояния характерны тем обстоятельством, что функции состояний $z_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ в эти моменты времени изменяются скачком, а между особыми состояниями изменение координат $z_i(t)$ происходит плавно и непрерывно или не происходит совсем. Таким образом, следя при моделировании системы только за её особыми состояниями в те моменты времени, когда эти состояния имеют место, можно получить информацию, необходимую для построения функций $z_i(t)$. Очевидно, что для описанного типа систем могут быть построены моделирующие алгоритмы по «принципу особых состояний». Обозначим скачкообразные (релейные) изменения состояния z как δz, а «принцип особых состояний» – как «принцип δz».

Принцип δz даёт возможность для ряда систем существенно уменьшить затраты машинного времени на реализацию моделирующих алгоритмов по сравнению с «принципом Δt». Логика построения моделирующего алгоритма, реализующего «принцип δz», включает в себя процедуру определения момента времени t_δ, соответствующего следующему особому состоянию системы.

Для исследования процесса функционирования больших систем рационально использование комбинированного принципа построения моделирующих алгоритмов, сочетающего в себе преимущества каждого из рассмотренных принципов.

Удобной формой представления логической структуры моделей процессов функционирования систем и машинных программ является схема. На различных этапах моделирования составляются обобщённые и детальные логические схемы моделирующих алгоритмов, а также схемы программ.

Обобщённая (укрупнённая) схема моделирующего алгоритма задаёт общий порядок действий при моделировании систем без каких-либо уточняющих деталей. Обобщённая схема показывает, что необходимо выполнить на очередном шаге моделирования.

Детальная схема моделирующего алгоритма содержит уточнения, отсутствующие в обобщённой схеме. Детальная схема показывает не только, что следует выполнить на очередном шаге моделирования системы, но и как это выполнить.

Логическая схема моделирующего алгоритма представляет собой логическую структуру модели процесса функционирования системы. Логическая схема указывает упорядоченную во времени последовательность логических операций, связанных с решением задачи моделирования.

Схема программы отображает порядок программной реализации с использованием конкретного математического обеспечения. Схема программы представляет собой интерпретацию логической схемы моделирующего алгоритма разработчиком программы на базе конкретного языка. Различие между этими схемами заключается в том, что логическая схема отражает логическую структуру модели процесса функционирования системы, а схема программы – логику машинной реализации модели с использованием конкретных программно-технических средств моделирования.

Для начертания перечисленных схем используется набор символов, определяемых ГОСТ «Единая система программной документации. Схемы алгоритмов и программ. Обозначения условные графические».

Обычно схема является наиболее удобной формой представления структуры моделирующих алгоритмов. Однако используются и другие формы, например, граф-схемы, операторные схемы.

Подэтапы, выполняемые при алгоритмизации модели системы и её машинной реализации, представлены на рис. 3.1 [8]:

2.1 *Построение логической схемы модели*. Рекомендуется строить модель по блочному принципу, т.е. в виде некоторой совокупности стандартных блоков. Построение модели системы из таких блоков обеспечивает необходимую гибкость в процессе её эксплуатации, особенно на стадии машинной отладки. При построении блочной модели проводится разбиение процесса функционирования системы на отдельные достаточно автономные подпроцессы. Блоки разделяются на основные и вспомогательные. Каждый основной блок соответствует некоторому реальному подпроцессу, имеющему место в моделируемой системе, а вспомогательные блоки не отражают функции моделируемой системы и необходимы лишь для машинной реализации, фиксации и обработки результатов моделирования.

2.2. *Получение математических соотношений*. Одновременно с выполнением подэтапа построения логической схемы модели необходимо получить, если это возможно, математические соотношения в виде явных функций. Этот подэтап соответствует неявному заданию возможных математических соотношений на этапе построения концептуальной модели. При выполнении первого этапа ещё не может иметься информация о конкретном виде таких математических соотношений, а на втором этапе уже необходимо получить эти соотношения. Схема машинной модели M_M должна представлять собой полное отражение заложенной в модели концепции и иметь: а) описание всех блоков модели с их наименованиями; б) единую систему обозначений и нумерацию блоков; в) отражение логики модели процесса функционирования системы; г) задание математических соотношений в явном виде. Таким образом, в общем случае построенная машинная модель M_M системы будет иметь комбинированный характер, т.е. отражать аналитико-имитационный подход, когда часть процесса в системе описана аналитически, а другая часть имитируется соответствующими алгоритмами.

2.3. *Проверка достоверности модели системы*. Определение достоверности модели считается наиболее важной проблемой при моделировании систем. От решения этой проблемы зависит степень доверия к результатам, полученным методом моделирования. Проверка модели на рассматриваемом этапе должна дать ответ на вопрос, насколько логическая схема модели системы и используемые математические соотношения отражают замысел модели, сформированный на первом этапе. При этом проверяются: а) возможность решения поставленной задачи; б) точность отражения замысла в логической схеме; в) полнота логической схемы модели; г) правильность используемых математических соотношений. Только после того, как разработчик убеждается путём соответствующей проверки в правильности всех этих положений, можно считать, что имеется логическая схема модели системы, пригодная для дальнейшей работы по реализации модели на ЭВМ.

2.4. *Выбор вычислительных средств для моделирования*. На этом подэтапе необходимо окончательно решить вопрос о том, какие вычислительные средства целесообразно использовать для реализации модели системы. Вопрос о выборе сводится к обеспечению следующих требований: а) наличие необходимых программных и технических средств; б) доступность выбранного компьютера для разработчика модели; в) обеспечение всех этапов реализации модели; г) возможность своевременного получения результатов.

2.5. *Составление плана выполнения работ по программированию*. Такой план должен помочь при программировании модели, учитывая оценки объёма программы и трудозатраты на её составление. План должен включать: а) выбор языка (системы) программирования модели; б) указание типа ЭВМ и необходимых для моделирования устройств; в) оценку примерного объёма необходимой памяти; г) ориентировочные затраты машинного времени на моделирование; д) предполагаемые затраты времени на программирование и отладку программы.

2.6. *Построение схемы программы*. Это одна из основных задач на этапе машинной реализации модели. При этом особое внимание должно быть уделено особенностям выбранного для реализации модели языка. Наличие логической схемы модели позволяет построить схему программы, которая должна отражать: а) разбиение модели на блоки; б) особенности программирования модели; в) проведение необходимых изменений; г) возможность тестирования программы; д) оценку затрат машинного времени; е) форму представления входных и выходных данных.

2.7. *Проверка достоверности схемы программы*. Эта проверка является второй на этапе машинной реализации модели системы. Очевидно, нет смысла продолжать работу по реализации модели, если нет уверенности в том, что в схеме программы, по которой будет вестись дальнейшее программирование, допущены ошибки, которые делают её неадекватной логической схеме модели, а, следовательно, и неадекватной самому объекту моделирования. При этом проводится проверка соответствия каждой операции, представленной в схеме программы, аналогичной ей операции в логической схеме модели.

2.8. *Проведение программирования модели*. При достаточно подробной схеме программы, которая отражает все операции логической схемы модели, можно приступить к программированию модели. Если имеется адекватная схема программы, то программирование представляет собой работу только для программиста, без участия и помощи со стороны разработчика модели. При использовании пакетов прикладных программ моделирования проводится непосредственная генерация рабочих программ для моделирования конкретного объекта.

2.9. *Проверка достоверности программы*. Это последняя проверка на этапе машинной реализации модели, которую необходимо проверить: а) обратным переводом программы в исходную схему; б) проверкой отдельных частей программы при решении различных тестовых задач; в) объединением всех частей программы и проверкой её в целом на контрольном примере моделирования варианта системы. На этом подэтапе необходимо также проверить оценки затрат машинного времени на моделирование. Полезно также получить достаточно простую аналитическую аппроксимацию зависимости затрат машинного времени от количества реализаций, что позволит разработчику модели правильно сформулировать требования к точности и достоверности результатов моделирования.

2.10. *Составление технической документации по второму этапу*. Для завершения этапа машинной реализации модели M_M необходимо составить техническую документацию, содержащую: а) логическую схему модели и её описание; б) адекватную схему программы и принятые обозначения; в) полный текст программы; г) перечень входных и выходных величин с пояснениями; д) инструкцию по работе с программой; е) оценку затрат машинного времени на моделирование с указанием требуемых ресурсов ЭВМ.

Таким образом, на этом этапе разрабатывается схема модели системы, проводится её алгоритмизация и программирование с использованием конкретных программно-технических средств вычислительной техники, т.е. строится машинная модель M_M, которой предстоит работать для получения необходимых результатов моделирования по оценке характеристик процесса функционирования системы (задача анализа) или для поиска оптимальных структур, алгоритмов и параметров системы (задача синтеза).

3.4. Получение и интерпретация результатов моделирования

На третьем этапе моделирования – этапе получения и интерпретации результатов моделирования – компьютер используется для проведения рабочих расчётов по составленной и отлаженной программе. Результаты этих расчётов позволяют проанализировать и сформулировать выводы о характеристиках процесса функционирования моделируемой системы [8].

При реализации моделирующих алгоритмов на компьютере вырабатывается информация о состояниях процесса функционирования исследуемых систем $z(t) \in Z$. Эта информация является исходным материалом для определения оценок искомых характеристик, получаемых в результате машинного эксперимента, т.е. критериев оценки. Под *критерием оценки* понимается любой количественный показатель, по которому можно судить о результатах моделирования системы. Критериями оценки могут служить показатели, получаемые на основе процессов, действительно протекающих в системе или получаемых на основе специально сформулированных функций этих процессов.

Прежде чем приступить к последнему этапу моделирования системы, необходимо для его успешного проведения иметь план действий, сводящийся к выполнению следующих подэтапов, представленных на рис. 3.1 [8]:

3.1. *Планирование машинного эксперимента с моделью системы*. Перед выполнением рабочих расчётов на компьютере должен быть составлен план проведения эксперимента с указанием комбинации переменных и параметров, для которых должно проводиться моделирование системы. Планирование машинного эксперимента призвано дать в итоге максимальный объём необходимой информации при минимальных затратах машинных ресурсов. При этом различают стратегическое и тактическое планирование машинного эксперимента. При стратегическом планировании эксперимента ставится задача построения оптимального плана эксперимента для достижения цели, поставленной перед моделированием. Тактическое планирование машинного эксперимента преследует частные цели оптимальной реализации каждого конкретного эксперимента из множества необходимых, заданных при стратегическом планировании.

3.2. *Определение требований к вычислительным средствам*. Необходимо сформулировать требования ко времени использования вычислительных средств, а также указать необходимые внешние устройства.

3.3. *Проведение рабочих расчётов*. После составления программы модели и плана проведения машинного эксперимента с моделью системы можно приступить к рабочим расчётам на компьютере, которые включают в себя: а) подготовку набора исходных данных; б) подготовку исходных данных для ввода в ЭВМ: в) проверку исходных данных, подготовленных для ввода; г) проведение расчётов на ЭВМ; д) получение выходных данных, т.е. результатов моделирования. Проведение машинного моделирования рационально выполнять в два этапа: контрольные, а затем рабочие расчёты. Контрольные расчёты выполняются для проверки машинной модели M_M и определения чувствительности результатов к изменению исходных данных.

3.4. *Анализ результатов моделирования системы*. Чтобы эффективно проанализировать выходные данные, полученные в результате расчётов на ЭВМ, необходимо знать, что делать с результатами рабочих расчётов и как их интерпретировать. Эти задачи могут быть решены на основании предварительного анализа на двух первых этапах моделирования системы.

3.5. *Представление результатов моделирования*. Целесообразно в каждом конкретном случае выбрать наиболее подходящую форму представления окончательных результатов моделирования в виде таблиц, графиков, диаграмм, схем и т.п., так как форма представления результатов существенно влияет на эффективность их дальнейшего использования.

3.6. *Интерпретация результатов моделирования*. Получив и проанализировав результаты моделирования, их нужно интерпретировать по отношению к моделируемому объекту. Основное содержание этого подэтапа – переход от информации, полученной в результате машинного эксперимента с моделью, к информации применительно к объекту моделирования, на основании которой делаются выводы относительно характеристик процесса функционирования исследуемой системы.

3.7. *Подведение итогов моделирования и выдача рекомендаций*. При подведении итогов моделирования должны быть отмечены главные особенности результатов, полученных в соответствии с планом эксперимента над моделью, проведена проверка гипотез и предположений и сделаны выводы на основании этих результатов. Всё это позволяет сформулировать рекомендации по практическому использованию результатов моделирования системы.

3.8. *Составление технической документации по третьему этапу*. Эта документация должна включать в себя: а) план проведения машинного эксперимента; б) наборы исходных данных для моделирования;

в) результаты моделирования системы; г) анализ и оценку результатов моделирования; д) выводы по полученным результатам моделирования; указание путей дальнейшего совершенствования машинной модели и возможных областей её приложения.

Полный комплект документации по моделированию конкретной системы должен содержать техническую документацию по каждому из трёх рассмотренных этапов.

Таким образом, процесс моделирования системы сводится к выполнению перечисленных этапов моделирования. На этапе построения концептуальной модели M_K проводится исследование моделируемого объекта, определяются необходимые аппроксимации и строится обобщённая схема модели, которая преобразуется в машинную модель M_M на втором этапе моделирования путём последовательного построения логической схемы модели и схемы программы. На последнем этапе моделирования проводят рабочие расчёты на ЭВМ и интерпретируют результаты моделирования системы. Рассмотренная последовательность этапов и подэтапов отражает общий подход к построению и реализации модели системы.

Подводя итог, перечислим некоторые полезные советы, которые можно назвать «заповедями» математического моделирования.

Заповеди математического моделирования оформлены в виде следующих принципов [1].

Принцип простоты. Не решай сложную задачу, не решив простую.

Принцип А.А.Андронова. Без ошибки нет модели, а потому негрубые модели – плохие.

Принцип Э.Хемингуэя. Можно пренебрегать чем угодно, нужно только знать, как это повлияет на результат.

Принцип надежности. Чем проще модель, тем реже она обманет.

Принцип А.Н.Крылова. Точность результатов не может быть выше точности исходных данных; точности промежуточных вычислений должны быть согласованы.

Принцип Р.Хемминга. Цель расчетов – не числа, а понимание. Прежде чем решать задачу, подумай, что делать с её решением.

Принцип Питера. ЭВМ многократно увеличивает некомпетентность вычислителя.