Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Институт машиностроения и автомобильного транспорта
Кафедра «Технология машиностроения»

Методические указания

к самостоятельной работе студентов по дисциплине
«МЕХАНИКА»
(часть 1)

для студентов ВлГУ, обучающих по направлению
20.03.01 «Техносферная безопасность»

Составитель:
доцент кафедры ТМС Метлина Л.Ф.

Владимир 2016

Методические указания, содержащие рекомендации к самостоятельной работе студентов по дисциплине «Механика» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 20.03.01 «Техносферная безопасность».

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВО и ОПОП направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность», рабочей программы дисциплины «Механика». В качестве рекомендаций для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих ВУЗов России.

Рекомендации предназначены для студентов очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании
НМС направления 20.03.01
Протокол № 14 от 04.05.2016 г.

Рукописный фонд кафедры ТМС ВлГУ

Оглавление

Задание к самостоятельной работе:

I. Статика

Цель работы:

Изучение основных понятий и определений статики.

1. Определение силы.
2. Проекция силы на ось.
3. Реакции и связи.
4. Определение момента силы относительно точки.
5. Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.

По первому разделу сделать письменный отчет и защитить первую часть курсовой работы.

II. Кинематика

Цель работы:

Изучение способов задания движения точки.

Изучение видов движения твердого тела. Определение кинематических характеристик.

1. Способы задания движения точек.
2. Определение скоростей и ускорений точек.
3. Дать определение движений твердого тела.
4. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, при различных видах движения.

По второму разделу сделать письменный отчет и защитить вторую часть курсовой работы.

II. Динамика

Цель работы:

Изучение двух задач динамики. Решение задач с помощью дифференциальных уравнений движения.

Изучение механической системы. Знакомство с теоремами динамики и принципами механики.

1. Дать определение двух задач динамики.
2. Решение дифференциальных уравнений.
3. Дать определение общих теорем динамики.
4. Принцип возможных перемещений.
5. Общие уравнения динамики.

По третьему разделу сделать письменный отчет и защитить третью часть курсовой работы.

Теория по разделам.

Задание к самостоятельной работе по разделу 1. (Статика)

Плоская система сил. Связи и реакции

Если твердое тело соприкасается с другими телами, которые тем или иным образом ограничивают свободу его перемещения, то такие тела по отношению к рассматриваемому называются связями, а само рассматриваемое тело называется несвободным. Действие связей на несвободные тела характеризуется силами, которые называются реакциями связей. Основные их виды представлены на рис. 1.2.

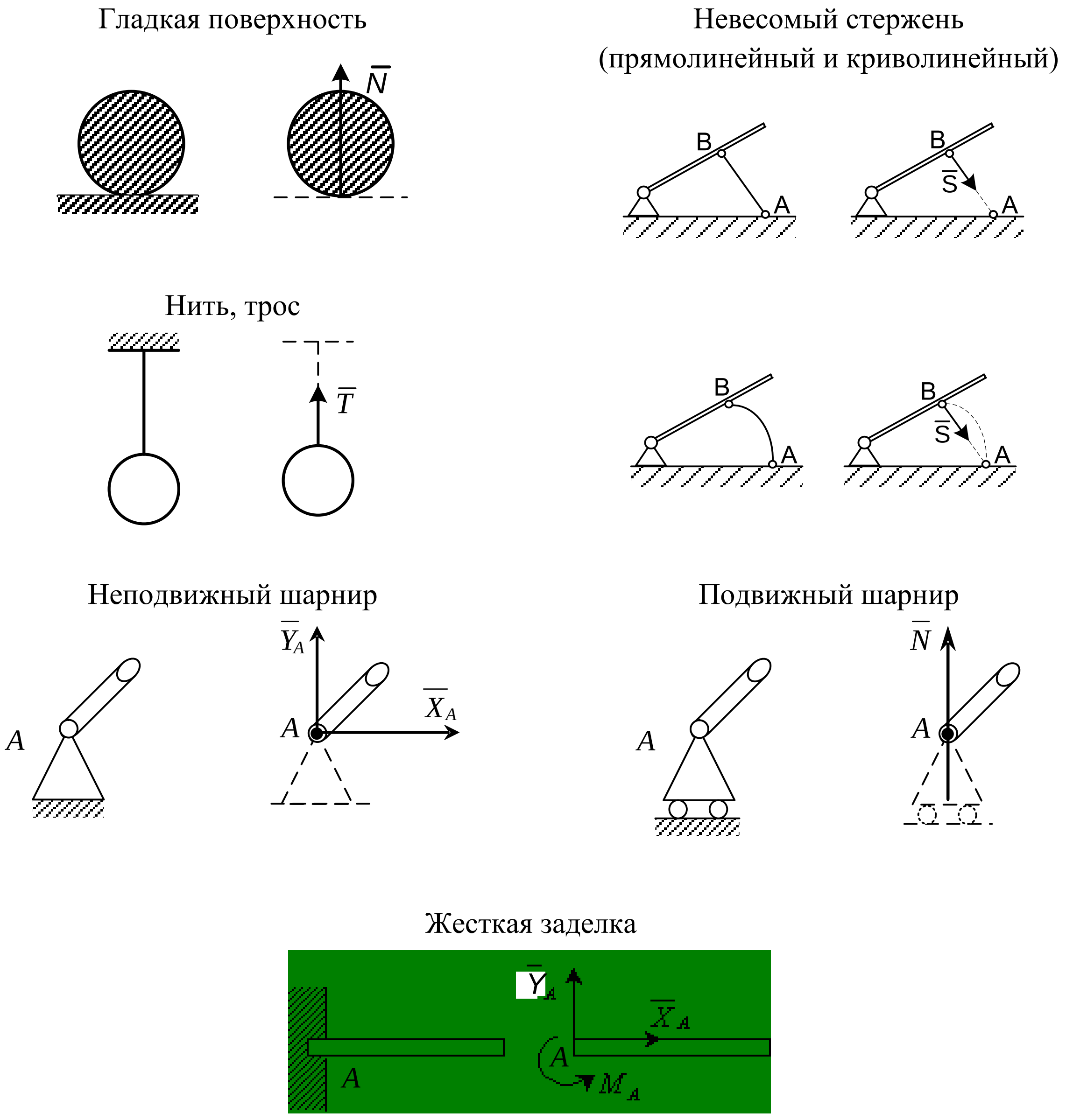


Рис. 1.2

2. Пространственная система сил

Пространственная система сходящихся сил приводится к равнодействующей $\overline{R}$, которая равна $\overline{R} = \sum \overline{F}_i$. Модуль равнодействующей $\overline{R}$ равен $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. Направляющие косинусы определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R};\ \cos\beta = \frac{R_y}{R};\ \cos\gamma = \frac{R_z}{R},$$

где α, β, γ – углы между направлением $\overline{R}$ и положительными направлениями осей *x, y, z*. Для равновесия твердого тела, к которому приложена пространственная система сходящихся сил, необходимо, чтобы равнодействующая равнялась нулю: $\overline{R} = 0$. При этом уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{i_x} = 0;\ \sum F_{i_y} = 0;\ \sum F_{i_z} = 0.$$

Проекции силы на плоскость и на ось
(метод двойного проектирования)

При определении проекции силы на координатную ось, когда неизвестен угол между осью и линией действия силы, используют метод двойного проектирования. Вначале находят проекцию $\overline{F}_{xy}$ силы $\overline{F}$ (рис. 1.8) на координатную плоскость *xy*, а затем вычисляют проекцию вектора $\overline{F}_{xy}$ на ось *x* или *y*:

$$F_x = F\cos\alpha\cos\beta;\ F_y = F\cos\alpha\sin\beta;\ F_z = F\sin\alpha.$$

Нужно помнить, что проекция силы на ось является алгебраической величиной, проекция силы на плоскость есть вектор.

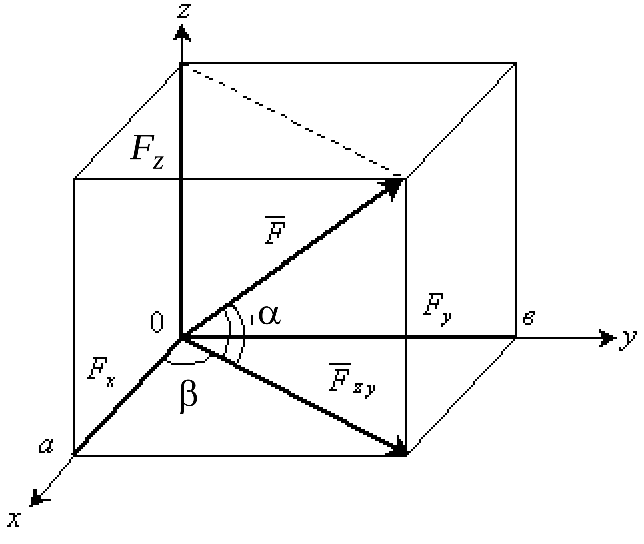


Рис. 1.8

Произвольная пространственная система сил

Произвольная пространственная система сил приводится к главному вектору $\overline{R}^{/}$ и главному моменту $\overline{\mathrm{M}}_0$. Модуль главного вектора определяется по формуле $R^{/} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$, где $R_x = \sum F_{ix}$; $R_y = \sum F_{iy}$; $R_z = \sum F_{iz}$.

Модуль главного момента $\mathrm{M}_0 = \sqrt{\mathrm{M}_x^2 + \mathrm{M}_y^2 + \mathrm{M}_z^2}$, где $\mathrm{M}_x = \sum m_x\left(\overline{F}_i\right)$; $\mathrm{M}_y = \sum m_y\left(\overline{F}_i\right)$; $\mathrm{M}_z = \sum m_z\left(\overline{F}_i\right)$.

Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси $\mathrm{M}_z\left(\overline{F}\right)$ (рис. 1.9) определяется как алгебраическая величина, равная произведению модуля проекции силы $\overline{F}_p$ на плоскость *P*, перпендикулярную к оси *z*, на кратчайшее расстояние h_p от точки 0 пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы на плоскость $\overline{F}_p$, то есть

$$\mathrm{M}_z\left(\overline{F}\right) = F_p h_p .$$

Если с конца оси *z* видно, что сила $\overline{F}_p$ стремится повернуть тело вокруг точки 0 против часовой стрелки, то момент положительный, если по часовой стрелке, то отрицательный, то есть $\mathrm{M}_z\left(\overline{F}\right) = \pm F_p h_p$.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или ее пересекает.

Рис. 1.9

Условия и уравнения равновесия произвольной пространственной *системы сил*

Условиями равновесия произвольной пространственной системы сил являются равенство нулю главного вектора и главного момента, $\overline{R}' = 0$, $\overline{M}_0 = 0$. Тогда получаем уравнения равновесия

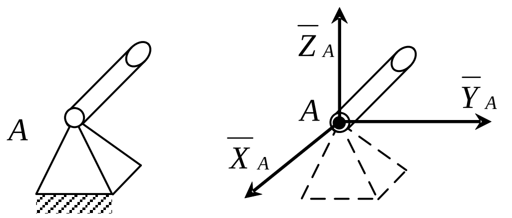
$$\sum F_{ix} = 0; \qquad \sum m_x\left(\overline{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad \sum m_y\left(\overline{F}_i\right) = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 0; \qquad \sum m_z\left(\overline{F}_i\right) = 0.$$

Связи и реакции в пространстве (рис. 1.10)

Шаровой (сферический) шарнир



Цилиндрический шарнир А и подпятник В

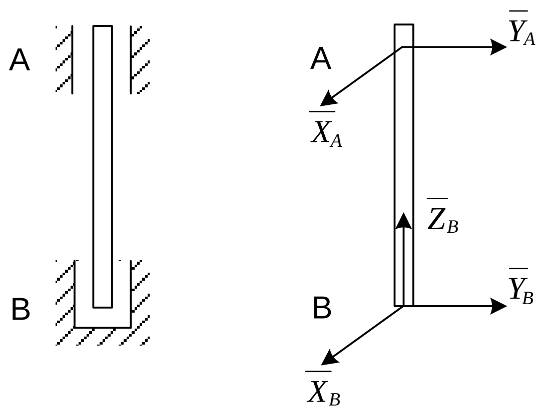


Рис. 1.10

Задача С3

Постановка задачи

Система состоит из шести стержней, соединенных своими концами между собой и с опорами шарнирно. Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах *H*, *K*, *L*, *M* прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным (табл. С 3). В узле, который в каждом столбце указан первым, приложена сила P = 100 Н; во втором узле приложена сила Q = 50 Н.

Сила $\overline{P}$ образует с положительными направлениями координатных осей *x*, *y*, *z* углы $\alpha_1 = 60°$; $\beta_1 = 60°$; $\gamma_1 = 45°$, а сила $\overline{Q}$ – $\alpha_2 = 45°$; $\beta_2 = 60°$; $\gamma_2 = 60°$. Направление осей *x*, *y*, *z* для всех рисунков показаны на рис. С 3.0. Грани параллелепипеда, параллельные плоскости *xy*, – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью *xy* угол φ = 60°, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол θ = 51°.

Требуется определить усилие в стержнях. Рис. С 3.10 показан в качестве примера. Варианты задачи даны на рис. С 3.0 – С 3.9 и в табл. С 3.

Пример выполнения задач С 3 и С 4

Задача С 3

Конструкция состоит из невесомых стержней 1, 2…6, соединенных друг с другом (в узлах *H* и *L*) и с неподвижными опорами *A*, *B*, *C*, *Д* шарнирами (прил. 3, рис. С 3). В узлах *H* и *L* приложены силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$.

Дано: $P = 200$ Н; $Q = 100$ Н; $\gamma_1 = 30°$; $\beta_1 = 60°$; $\alpha_2 = 45°$; $\gamma_2 = 45°$; $\psi = 45°$; δ=55º; $\varphi = 45°$.

Требуется определить усилия в стержнях 1 – 6.

Р е ш е н и е

Нарушив связи (стержни), получим два объекта равновесия: узлы *H* и *L*. Сначала рассмотрим равновесие узла *H*. Строим расчетные схемы (прил. 3, рис. С 3а). На узел *H* действуют активная сила $\overline{P}$ и реакции в стержнях 1, 2, 3 соответственно $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$, которые направлены вдоль стержней от узла. Получили сходящуюся систему сил в пространстве, для которой составим три уравнения равновесия $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $\sum F_{iz} = 0$.

$$\sum F_{ix} = 0;\ S_3 \cos 45^\circ + S_2 \cos 45^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ -S_1 - S_2 \cos 45^\circ + P \cos 60^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0;\ -S_3 \cos 45^\circ + P \cos 30^\circ = 0. \qquad (3)$$

Решив уравнения (1) – (3), получим: $S_1 = 273$ Н; $S_2 = -245$ Н; $S_3 = 245$ Н
.

Затем рассмотрим равновесие узла *L*. На узел действуют активная сила $\overline{Q}$ и реакции стержней $\overline{S}_2, \overline{S}_4, \overline{S}_5, \overline{S}_6$. При этом согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия реакцию $\overline{S}_2$ направляем в противоположную сторону. Составим уравнения равновесия

$$\sum F_{ix} = 0;\ \sum F_{iy} = 0;\ \sum F_{iz} = 0.$$

$$\sum F_{ix} = 0;\ Q \cos 45^\circ - S_4 - S_2 \cos 45^\circ - S_5 \cos 35^\circ \cos 45^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ S_2 \cos 45^\circ + S_5 \cos 35^\circ \cos 45^\circ = 0; \qquad (5)$$

$$\sum F_{iz} = 0;\ Q\cos 45^\circ - S_6 - S_5\cos 55^\circ = 0. \qquad (6)$$

Решив уравнения (4) – (6) и учитывая, что $S_2 = -245\,\text{Н}$, найдем $S_4 = 70{,}7\,\text{Н}$, $S_5 = 300{,}6\,\text{Н}$, $S_6 = -103\,\text{Н}$. Полученные знаки «минус» показывают, что стержни 2, 6 сжаты, а остальные стержни растянуты.

Ответ: $S_1 = 273\,\text{Н}$; $S_2 = -245\,\text{Н}$; $S_3 = 245\,\text{Н}$;
$S_4 = 70{,}7\,\text{Н}$; $S_5 = 300{,}6\,\text{Н}$; $S_6 = -103\,\text{Н}$.

2. Задание к самостоятельной работе по разделу 2. (Кинематика).

II. КИНЕМАТИКА

1. Кинематика точки

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучаются механические движения материальных точек и тел с геометрической точки зрения вне зависимости от действующих на них сил.

При этом задаются математическим методом способы задания движения точек и тел и определяются по заданному закону движения все основные кинематические характеристики, такие как траектория точки, скорость и ускорение точки, угловые скорости и угловые ускорения тел.

При движении тела все его точки в общем случае совершают различное движение. Поэтому изучению движения тела предшествует изучение движения точки.

Непрерывную линию, которую описывает в пространстве точка при своем движении, называют траекторией точки. По виду траектории движение точки делится на прямолинейное и криволинейное.

Способы задания движения точки

1. Векторный способ

Положение точки M в любой момент времени определяется заданием радиус-вектора точки $\bar{r}$, начало которого помещается в некотором неподвижном центре, а конец совмещается с движущейся точкой. С течением времени вектор $\bar{r}$ изменяется и по модулю, и по направлению (рис. 2.1)

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

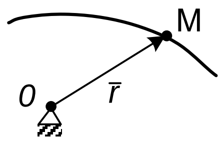


Рис. 2.1

2. Координатный способ

При рассмотрении движения в прямоугольной декартовой системе координат указанный способ заключается в задании координат x ,y, z точки как известной функции времени (рис. 2.2)

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t).$$

Связь между координатным и векторным способами задания движения осуществляется уравнением (см. рис. 2.2)

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ .$$

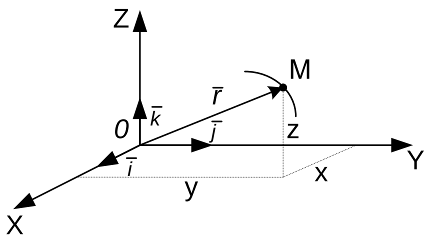


Рис. 2.2

Например, радиус-вектор задан уравнением

$$\bar{r} = 10t\bar{i} + 3t^2\bar{j} + 2\sin pt\,\bar{k}$$

Это означает, что точка движется относительно координатных осей согласно уравнениям

$$x = 10t,\ y = 3t^2,\ z = 2\sin pt.$$

Из примера видно, что если движение точки задано в координатной форме, то при необходимости всегда можно перейти к векторному способу задания движения.

3. Естественный способ

При естественном способе задания движения известна траектория точки, выбирается начало положительного и отрицательного отсчета криволинейной координаты и задается закон движения точки по траектории $S = S(t)$ (рис. 2.3).

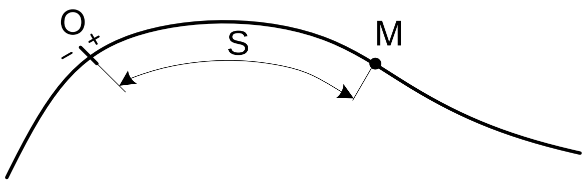


Рис. 2.3

Определение скорости и ускорения точки

1. Векторный способ

$\bar{V} = d\bar{r}/dt$ – вектор скорости точки в данный момент времени;

$\bar{W} = d^2\bar{r}/dt^2$ – вектор ускорения точки в данный момент времени.

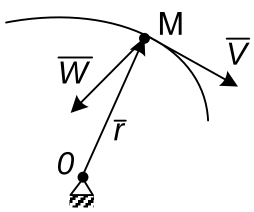


Рис. 2.4

Вектор скорости $\bar{V}$ направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения. Вектор ускорения $\bar{W}$ направлен в сторону вогнутости траектории (рис 2.4).

2. Координатный способ

а) $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ – скорость точки.

$V_x = dx/dt$, $V_y = dy/dt$, $V_z = dz/dt$,

где V_X ,V_Y ,V_Z – проекции скорости на оси координат.

Направление вектора определяется по направляющим косинусам

$$\cos\alpha = Vx/V\ ;\ \cos\beta = Vy/V\ ;\ \cos\gamma = Vz/V,$$

где α, β, γ – углы, которые составляет вектор скорости точки с положительными направлениями осей O_X,O_Y, O_Z соответственно.

б) $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$ – ускорение точки.

$Wx = d^2x/dt^2$; $Wy = d^2y/dt^2$; $Wz = d^2z/dt^2$,

где *Wx*; *Wy*; *Wz* – проекции ускорения точки на оси координат.

Направление определим по формулам

$\cos\alpha_1 = Wx/W$; $\cos\beta_1 = Wy/W$; $\cos\gamma_1 = Wz/W$,

где α_1, β_1, γ_1 – углы, которые составляет вектор ускорения с положительными направлениями осей O_X, O_Y, O_Z соответственно.

3. Естественный способ (рис. 2.5).

$V = ds / dt$ – скорость точки;

$\overline{W} = \overline{W}^n + \overline{W}^\tau$ – вектор ускорения точки;

$W^n = V^2/\rho$ – нормальное ускорение точки;

C – центр кривизны траектории;

$\rho = MC$ – радиус кривизны траектории;

$W^\tau = dV/dt$ – касательное ускорение точки;

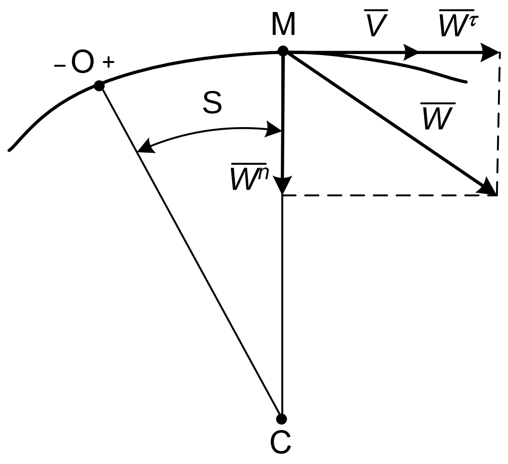


Рис. 2.5

$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2}$ – модуль ускорения точки.

2. Кинематика плоского движения твердого тела

При изучении этого раздела надо уметь определять линейную скорость и полное ускорение точек твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси (вращательное движение), с помощью угловых параметров вращения тела: угловой скорости ω и углового ускорения ε.

Угловая скорость ω изображается круглой стрелкой вокруг оси и показывает направление вращения тела. При ускоренном вращении круглые стрелки угловой скорости ω и углового ускорения ε совпадают по направлению, а при замедленном – направлены противоположно.

Траекторией движения точки является окружность, радиус которой (r) равен кратчайшему расстоянию от заданной точки до оси вращения тела (далее радиус вращения).

Модуль вектора линейной скорости определяется по формуле

$$V = \omega\, r.$$

Вектор $\bar{V}$ направлен по касательной к траектории или перпендикулярно радиусу вращения в направлении угловой скорости ω тела. Полное ускорение точки

$$\bar{W} = \bar{W}^n + \bar{W}^\tau,$$

где $\bar{W}^n$ – нормальное ускорение точки;

$\bar{W}^\tau$ – касательное ускорение точки.

Модуль нормального ускорения точки

$$W^n = \omega^2 r;$$

Вектор $\bar{W}^n$ направлен от заданной точки по нормали к центру кривизны траектории (в данном случае по радиусу вращения) к оси вращения.

Модуль касательного ускорения точки

$$W^\tau = \varepsilon\, r.$$

Вектор касательного ускорения точки $\bar{W}^\tau$ направлен перпендикулярно вектору нормального ускорения $\bar{W}^n$ в сторону круглой стрелки углового ускорения ε, т. е. вектор касательного ускорения $\bar{W}^\tau$ направлен по касательной к траектории или перпендикулярно радиусу вращения в ту же сторону, что и вектор скорости $\bar{V}$ точки при ускоренном вращении, а при замедленном – в противоположную.

Модуль полного ускорения точки

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,.$$

Плоскопараллельным движением (плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, называемой плоскостью движения. При таком движении все точки, лежащие на линиях, перпендикулярных к плоскостям их движения, перемещаются по одинаковым траекториям и имеют одинаковые скорости и ускорения, т. к. эти линии при движении тела остаются параллельными самим себе.

Поэтому задача изучения плоскопараллельного движения сводится к изучению плоского сечения (плоской фигуры), параллельного некоторой неподвижной плоскости.

Движение плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент времени можно рассматривать состоящим из двух движений: поступательного движения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, принятой за полюс, и вращательного вокруг полюса.

3. Задание к самостоятельной работе по разделу 3. (Динамика).

3. Сложное движение точки

1. Если движение точки изучается по отношению к двум системам координат, одна из которых неподвижна, а другая по отношению к первой движется определенным образом, то такое движение точки называется сложным, или составным.

Пусть точка *M* движется по некоторой кривой (рис. 2.14). Рассмотрим её движение по отношению к двум системам координат, неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ и подвижной $Oxyz$, которая движется по отношению к неподвижной.

При сложном движении точки различают абсолютное, относительное и переносное движение.

Движение точки *M* относительно неподвижной системы называется абсолютным движением.

Движение точки *M* относительно подвижной системы называется относительным движением.

Движение точки *M* вместе с подвижной системой относительно неподвижной называется переносным движением.

На рис. 2.14 покажем радиусы-векторы:

$\bar{\rho}_0$ – радиус-вектор, определяющий положение начала координат O подвижной системы по отношению к неподвижной системе,

$\bar{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки *M* относительно подвижной системы,

$\bar{\rho}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки *M* относительно неподвижной системы координат.

В процессе движения точки сохраняется следующая зависимость (см. рис. 2.14).

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r} = \bar{\rho}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\,. \tag{2.1}$$

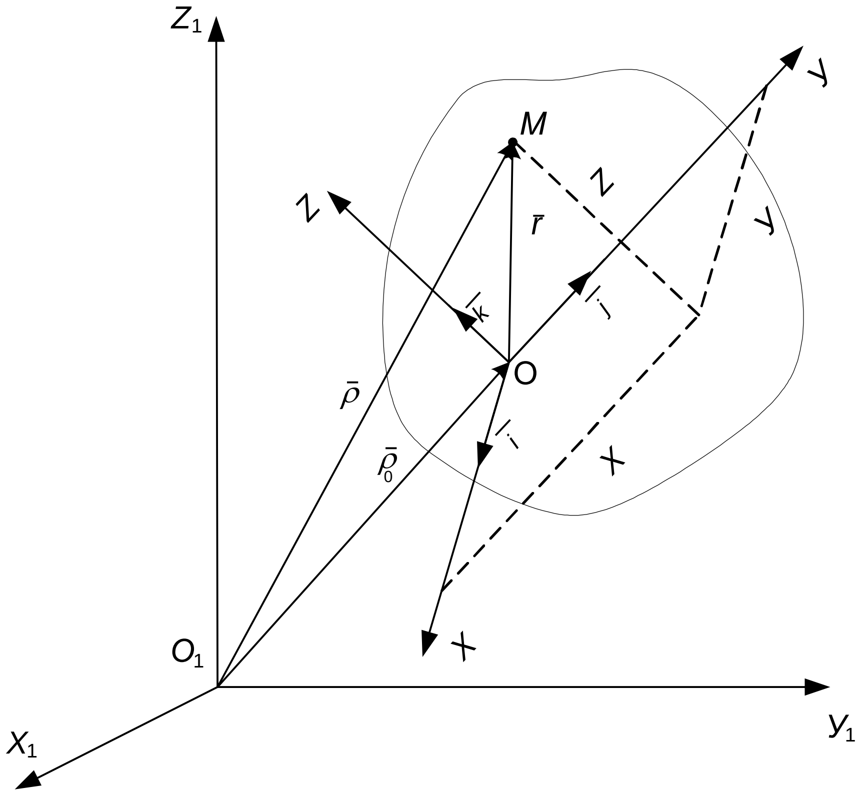


Рис. 2.14

2. Определение скорости при сложном движении точки

Определяя относительную скорость $\overline{V}_r$, мысленно останавливаем переносное движение. При этом векторы $\overline{\rho}_0$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ будут величинами постоянными. Тогда, дифференцируя по времени равенство (2.1), получим:

$$\overline{V}_r = \frac{dx}{dt}\,\bar{i} + \frac{dy}{dt}\,\bar{j} + \frac{dz}{dt}\,\bar{k}\,. \tag{2.2}$$

При определении переносной скорости $\overline{V}_e$ останавливается относительное движение. Это означает, что координаты относительного положения точки *x*, *y*, *z* – величины постоянные. Продифференцируем по времени равенство (2.1),

$$\overline{V}_e = \frac{d\overline{\rho}_0}{dt} + \mathrm{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \mathrm{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \mathrm{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\,. \tag{2.3}$$

Если считать, что точка участвует одновременно в двух движениях, то, дифференцируя по времени равенство (2.1), найдем:

$$\overline{V}_a = \frac{d\overline{\rho}_0}{dt} + \mathrm{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \mathrm{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \mathrm{z}\frac{d\bar{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\,\bar{i} + \frac{dy}{dt}\,\bar{j} + \frac{dz}{dt}\,\bar{k}\,. \tag{2.4}$$

Сопоставляя равенства (2.2), (2.3) и (2.4), получаем:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r\,. \tag{2.5}$$

Равенство (2.5) называется формулой сложения скоростей при сложном движении точки.

3. Определение ускорения при сложном движении точки

Абсолютное ускорение точки определяется по формуле

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_к, \qquad (2.6)$$

где $\overline{W}_e$ – переносное ускорение;

$\overline{W}_r$ – относительное ускорение;

$\overline{W}_к$ – ускорение Кориолиса.

Равенство (2.6) выражает теорему Кориолиса. Вывод этой теоремы можно найти в учебниках по теоретической механике.

Вектор ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$\overline{W}_к = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r), \qquad (2.7)$$

где $\overline{\omega}_e$ – вектор переносной угловой скорости точки;

$\overline{V}_r$ – вектор относительной скорости точки.

Модуль ускорения Кориолиса определяется уравнением

$$W_К = 2\omega_e \cdot V_r \sin(\overline{\omega}_e \wedge \overline{V}_r). \qquad (2.8)$$

Направление вектора $\overline{W}_к$ можно определить по правилу векторного произведения или по правилу Н. Е. Жуковского, согласно которому относительную скорость $\overline{V}_r$ надо спроектировать на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в сторону переносного вращения на 90° (рис. 2.15). В случае поступательного переносного движения $\overline{W}_к = 0$, так как $\overline{\omega}_e = 0$. Тогда формула (2.6) запишется

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r. \qquad (2.9)$$

Рис. 2.15

III. ДИНАМИКА

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек и тел в зависимости от действующих на них сил и их инерционности.

Основные законы динамики

1. Закон инерции

Если на материальную точку не действуют никакие силы, то она находится в покое или совершает прямолинейное равномерное движение.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения (основной закон)

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление

$$m\overline{W} = \overline{F}\ .$$

Если на точку действует несколько сил, то основной закон примет вид

$$m\overline{W} = \sum \overline{F}_i\ .$$

3. Закон равенства действия и противодействия

Две точки или два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны.

4. Закон независимости действия сил

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Системы отсчета, в которых выполняются первый и второй законы, называются **инерциальными**, в противном случае их называют **неинерциальными**.

Третий закон динамики выполняется при рассмотрении движения тел в любых системах отсчета.

2. Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс механической системы

Под **механической системой** понимается совокупность материальных точек, положение и движение которых взаимосвязаны. Например, движение коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания зависит от движения его поршней; движение планет солнечной системы обусловлено силами их взаимного притяжения и т. д.

При изучении движения механических систем силы разделяют на внешние F^e и внутренние F^i.

Внешними называются силы, с которыми действуют на точки и тела рассматриваемой системы точки и тела, не входящие в состав этой системы. **Внутренними** называются силы, с которыми точки и тела рассматриваемой системы действуют друг на друга.

Положение центра масс системы, точки *C*, определяется равенством

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M}, \tag{3.4}$$

где m_i – масса отдельной точки системы;

$\bar{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение этой точки системы;

$\bar{r}_c$ – радиус-вектор, определяющий положение центра масс системы;

$M = \sum m_i$ – масса системы.

Для *i*-й точки запишем основной закон динамики

$$m_i \overline{W_i} = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i \qquad \text{или} \qquad m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i, \tag{3.5}$$

где нижний индекс $i = 1, 2, \ldots n$;

$\bar{F}_i^e$ – равнодействующая приложенных к точке внешних сил;

$\bar{F}_i^i$ – равнодействующая приложенных к точке внутренних сил.

Суммируя уравнения (3.5), получим:

$$\sum m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^i. \tag{3.6}$$

Продифференцируем дважды по времени уравнение (3.4).

$$M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2}.$$

Тогда, учитывая полученное выражение и то, что $\sum \bar{F}_i^i = 0$ (свойство внутренних сил), уравнение (3.6) запишется:

$$M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_i^e = \bar{R}^e.$$

Зная, что $\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \overline{W_c}$, получаем:

$$M \overline{W_c} = \sum \bar{F}_i^e. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) выражает теорему о движении центра масс механической системы.

Центр масс механической системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, под действием только внешних сил.

Проектируя (3.8) на оси координат получим дифференциальные уравнения движения центра масс

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^e ;$$
$$M\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^e ; \qquad (3.8)$$
$$M\ddot{z}_C = \sum F_{iz}^e .$$

Следствия из теоремы:

1) если $\sum \overline{F}_i^e = 0$, то $\overline{W}_C = 0$ и $\overline{\mathrm{v}}_C = \mathrm{const}$;

2) если $\sum F_{ix}^e = 0$, $\ddot{x}_C = 0$ и $\dot{x}_C = \mathrm{const}$ и если $\dot{x}_C = 0$, то $\dot{x}_C = dx_C/dt = 0$, откуда $x_C = \mathrm{const}$.

Следствия из теоремы о движении центра масс выражают закон сохранения движения центра масс системы.

3. Принцип Даламбера

Для рассмотрения движения систем Даламбер предложил специальный принцип, получивший название принципа Даламбера.

Принцип Даламбера для материальной точки эквивалентен основному закону динамики. Уравнение движения материальной точки массой m относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и реакций связей имеет вид

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{R}, \qquad (3.40)$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая активных сил;

$\overline{R}$ – равнодействующая реакций связей;

$\overline{W}$ – ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета.

Представим (3.40) в виде $\overline{F} + \overline{R} - m\overline{W} = 0$, введем обозначение $\overline{F}^{\text{ин}} = -m\overline{W}$ – сила инерции материальной точки, тогда получим

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{F}^{\text{ин}} = 0. \qquad (3.41)$$

Таким образом, *при движении материальной точки активные силы, реакции связей вместе с силой инерции точки образуют уравновешенную систему сил*.

Уравнение (3.41) выражает принцип Даламбера для точки.

Рассмотрим систему *n* материальных точек. К каждой точке системы приложены равнодействующая активных сил и равнодействующая реакций связей. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получим:

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i^{i} + \overline{F}_i^{\text{ин}} = 0, \qquad (3.42)$$

где нижний индекс $i = 1,2,...,n$;

$\overline{F}_{\text{i}}^{\text{ин}} = -m_i \overline{W}_i$ – сила инерции i-й точки.

Условие (3.42) можно представить в эквивалентной форме

$$\left\{\overline{F}_i, \overline{R}_i, \overline{F}_i^{\text{ин}}\right\} \quad 0; \; i = 1,2,...,n. \qquad (3.43)$$

n векторных условий (3.42) или (3.43) выражают принцип Даламбера для системы: *при движении механической системы активные силы и реакция связей вместе с силами инерции составляют уравновешенную систему сил.*

На основании принципа Даламбера для системы в форме (3.43) можно получить шесть уравнений равновесия для сил, действующих на точки системы, включая силы инерции, имеющие пространственное расположение.

Если просуммировать левые части уравнений (3.42) по всем точкам системы, то

$$\sum \overline{F}_i + \sum \overline{R}_i + \sum \overline{F}_i^{\text{ин}} = 0, \qquad (3.44)$$

где $\sum \overline{F}_i$ – главный вектор активных сил;

$\sum \overline{R}_i$ – главный вектор реакций связей;

$\sum \overline{F}_i^{\text{ин}}$ – главный вектор сил инерции.

Умножая векторно каждое из соотношений (3.42) слева на радиус-вектор точки $\bar{r}_i$ и суммируя по точкам системы, получаем:

$$\sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{F}_i^{e}\right) + \sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{R}_i\right) + \sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{F}_i^{\text{ин}}\right) = 0. \qquad (3.45)$$

Условия (3.44) и (3.45), если выразить их через проекции на координатные оси, дадут шесть условий равновесия, аналогичных условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, в статике.

Здесь $\sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_i\right)$ – сумма моментов активных сил относительно точки *O*. (главный момент активных сил);

$\sum \overline{M}_0\left(\overline{R}_i\right)$ – сумма моментов реакций связей относительно точки *O* (главный момент реакций связей);

$\sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_i^{\,ин}\right)$ – сумма моментов сил инерции относительно точки *O* (главный момент сил инерции).

Приведение сил инерции твердого тела

В общем случае движения твердого тела силы инерции точек его образуют произвольную пространственную систему сил инерции, которую в результате приведения к некоторому центру О можно заменить одной силой $\overline{R}_{ин}^{/}$, называемой главным вектором сил инерции, приложенной в центре О и парой сил с моментом $\overline{M}_0^{ин}$, который является главным моментом сил инерции.

Главный вектор сил инерции не зависит от центра приведения и для любого движения твердого тела равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению

$$\overline{R}'_{ин} = -M\overline{W}_c,$$

где *M* – масса тела,

$\overline{W}_c$ – вектор ускорения центра масс.

Для определения главного момента сил инерции рассмотрим несколько частных случаев движения твердого тела.

1) Поступательное движение

Если твердое тело движется поступательно, то ускорения его точек геометрически равны. Силы инерции этих точек составляют систему параллельных сил, равных по величине, направленных в одну сторону. Такая система сил приводится к равнодействующей $\overline{R}_{ин}$, которая геометрически равна главному вектору сил инерции

$$\overline{R}_{ин} = \overline{R}'_{ин} = -M\overline{W}_c,$$

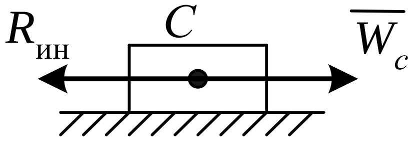


Рис. 3.6

Равнодействующая $\overline{R}_{ин}$ приложена к центру масс и направлена в противоположную сторону вектора ускорения $\overline{W}_c$ (рис. 3.6).

2) Вращение тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к этой плоскости (рис. 3.7 *а*).

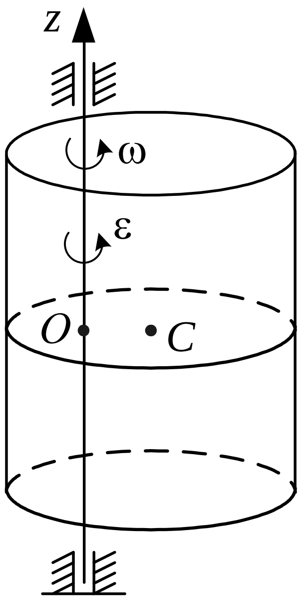
Если ось вращения не проходит через центр масс, то вследствие симметрии приведенные силы – главный вектор сил инерции и пара сил с моментом, равным главному моменту сил инерции, будут лежать в плоскости симметрии.

Если выбрать за центр приведения точку O плоскости симметрии, лежащую на оси вращения, то главный вектор сил инерции будет приложен к этой точке и направлен противоположно ускорению центра масс тела (рис. 3.7 *б*), который определяется по известной формуле

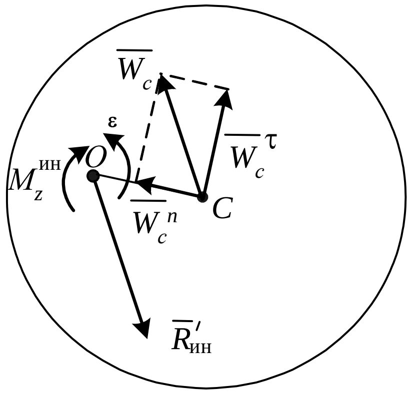
$$\overline{R}'_{\text{ин}} = -\text{M}\overline{W}_c .$$

Модуль главного вектора определяется зависимостью

$$R'_{\text{ин}} = \text{M}W_c .$$



а)



б)

Рис. 3.7

Главный момент сил инерции определим относительно оси z

$$\text{M}_z^{\text{ин}} = -J_z\varepsilon,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ε – угловое ускорение тела.

Главный момент сил инерции $\text{M}_z{}^{\text{ин}}$ направлен противоположно угловому ускорению.

Если ось вращения проходит через центр масс, то $\overline{R}'_{\text{ин}} = 0$, т. к. $\overline{W}_c = 0$

3) Плоскопараллельное движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии (рис. 3.8).

Выберем за центр приведения сил инерции центр масс. Тогда вследствие симметрии получим расположенные в плоскости симметрии главный вектор сил инерции, приложенный в центре масс, и пару сил с моментом, равным главному моменту сил инерции. Главный вектор сил инерции найдем по уже известной формуле

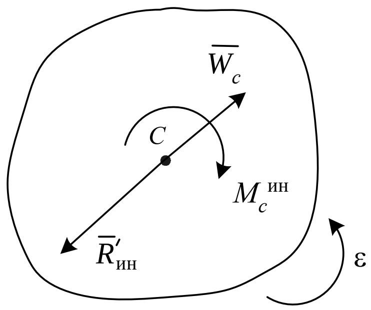


Рис. 3.8

$$\overline{R}'_{\text{ин}} = -\mathrm{M}\overline{W}_c.$$

Главный момент сил инерции определим относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости движения тела, по формуле:

$$\mathrm{M}_c^{\text{ин}} = -J_c \varepsilon,$$

где J_c – момент инерции тела относительно названной оси.

Главный момент сил инерции направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

4. Аналитическая механика

В аналитической механике изучается равновесие и движение механических систем.

1. Классификация связей

Рассмотренные ниже методы решения задач механики применимы не при любых связях, наложенных на систему. Некоторые сведения о связях мы уже имеем (из статики), но их недостаточно.

Рассмотрим вопрос о связях, об их классификации несколько подробнее.

Связями называются любого вида ограничения, которые налагаются на положение и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие силы на систему действуют.

Эти ограничения могут быть записаны аналитически с помощью уравнений связей. Например, если известно, что при движении точки выполняется условие $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, то это означает, что точка движется по сферической поверхности радиусом $R = 5$. В общем случае уравнение связи может быть представлено в виде функции

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \qquad (3.46)$$

По виду уравнения (3.46) связи классифицируются:

1) на стационарные и нестационарные.

Стационарными связями называются такие связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде.

Нестационарные – связи, уравнения которых содержат время в явном виде.

В приведенном выше примере связь стационарная. Для тела, лежащего на полу движущегося лифта, пол является нестационарной связью.

2) На голономные (геометрические) и неголономные (кинематические).

Голономными связями называются такие связи, уравнения которых записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени. Такие связи налагают ограничения только на координаты точек системы

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Неголономные – такие связи, которые накладывают ограничение на скорости перемещения точек системы. Уравнения неголономных связей неинтегрируемы и называются неголономными, или неинтегрируемыми.

Пример. Для колеса, катящегося по поверхности без проскальзывания, выполняется условие, заданное в табл. 3.2 (п. 3).

$$V_c = \omega \cdot CC_{\mathrm{v}} = \omega \cdot R \text{ или } \dot{x}_c = \dot{\varphi} \cdot R.$$

Это уравнение содержит скорости, но его можно проинтегрировать и получить уравнение, содержащее только координаты в виде

$$x_c = \varphi \cdot R$$

или уравнение

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0.$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

и после интегрирования имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = C.$$

Эти примеры иллюстрируют голономные связи.

Следующий пример уравнения связи

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C.$$

Это уравнение означает, что точка движется с постоянной скоростью, его проинтегрировать нельзя, поэтому рассматриваемая связь неголономная.

3) На удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние).

Удерживающие – связи, препятствующие перемещению тела (точек) в двух противоположенных направлениях. Уравнения удерживающих связей записываются в виде равенств.

Неудерживающие – связи, препятствующие перемещению тела (точек) в некотором направлении и допускающие перемещение в противоположенном направлении. Уравнения неудерживающих связей записываются в виде неравенств.

Пример: $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ – точка может двигаться внутри сферы.

4) На идеальные и неидеальные (табл. 3.2, 3.3).

Идеальными называются связи, если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Условия идеальности связей записываются так:

$$\sum R_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0,$$

где Ri – модуль реакции соответствующей связи;

δs_i – возможное перемещение;

α_i – угол между направлением реакции связи и возможным перемещением точки приложения реакции.

Понятие возможных перемещений будет дано ниже.

Таблица 3.2

Примеры идеальных связей

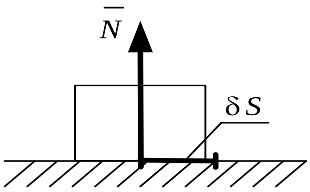
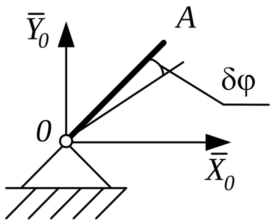
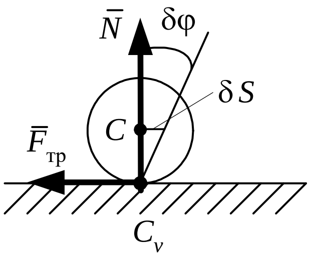
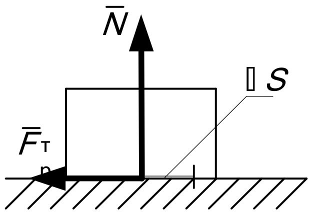
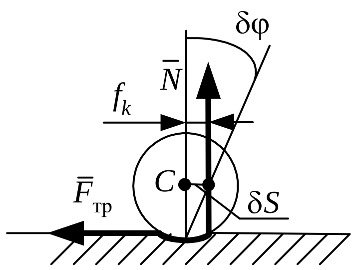
1. Идеально гладкая поверхность		$\delta A(\bar{N}) = 0 \ (\alpha = 90°)$
2. Цилиндрический шарнир без трения		$\delta A(\bar{X}_0) = \delta A(\bar{Y}_0) = 0$, т. к. точка приложения сил – точка O – не перемещается
3. Колесо катится без проскальзывания по твердой поверхности		$\delta A(\bar{N}) = \delta A(\bar{F}_{тр}) = 0$, т. к. силы приложены к мгновенному центру скоростей

Таблица 3.3

Примеры неидеальных связей

1. Тело перемещается по негладкой поверхности		$\delta A(\bar{F}_{тр}) = -F_{тр}\delta S \neq 0$
2. Колесо катится без проскальзывания не по твердой поверхности		$\delta A(\bar{N}) = -Nf_k\delta\varphi \neq 0$

Итак, каждой связи можно дать четыре характеристики, относя её к голономной или неголономной, стационарной или нестационарной, удерживающей или неудерживающей, идеальной или неидеальной.

2. Возможные перемещения

Понятие возможных перемещений лучше всего проиллюстрировать на примере стационарной голономной связи, которая наложена на одну материальную точку.

Пусть материальная точка лежит на поверхности. Такая связь позволяет точке перемещаться вдоль этой поверхности. Любое из этих бесконечно малых перемещений называется возможным перемещением.

Возможным перемещением системы называется любое бесконечно малое её перемещение, которое допускает связи, наложенные на систему, без их нарушения или разрушения.

Примеры

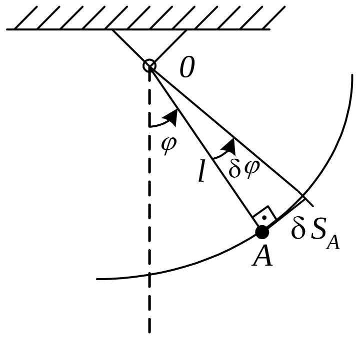


Рис. 3.9

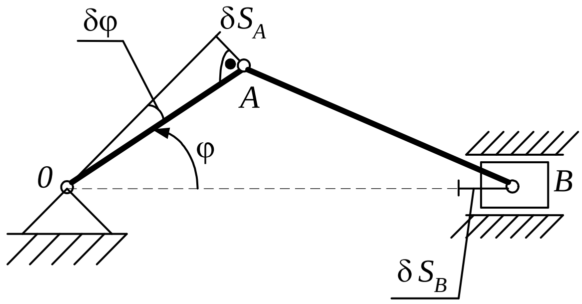


Рис. 3.10

Ввиду малости возможные перемещения точек отсчитываются не по дуге траектории, а по отрезку прямой, направленной по касательной к ней из данного положения, так же как и вектор скорости (перемещение точки A δS_A на рис. 3.9, 3.10).

Любой системе можно сообщить бесконечное множество перемещений. Однако для любой из них можно указать некоторое конечное число независимых между собой возможных перемещений, с помощью которых получаются все другие возможные перемещения.

Пример. Для точки, лежащей на плоскости, любое возможное перемещение можно получить через dx и dy.

Число независимых возможных перемещений механической системы с голономными связями равно числу степеней свободы этой системы. На рис. 3.10 показаны разные возможные перемещения $\delta\varphi$, δS_A , δS_B, но они взаимозависимы, т. к. система имеет только одну степень свободы.

3. Элементарная работа силы на возможном перемещении

Работа сил на возможном перемещении определяется точно так же, как и работа сил на действительном перемещении. Отличаются они только обозначением. Элементарная работа силы на действительном перемещении обозначается символом dA, а элементарная работа силы на возможном перемещении $-\delta A$.

$$\delta A_i = F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i,$$

где δS_i – возможное перемещение точки приложения силы $\overline{F}_i$;

α_i – угол между направлением силы $\overline{F}_i$ и перемещением δS_i.

Принцип возможных перемещений. Пусть механическая система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую её точку, уравновешиваются

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0,$$

где $\overline{F}_i$ – равнодействующая активных сил; $\overline{R}_i$ – равнодействующая реакций связей. Дадим системе любое возможное перемещение и вычислим работу всех сил на этом перемещении. Так как силы, приложенные к каждой точке, уравновешиваются, то сумма работ этих сил на перемещении δS_i будет равна нулю, учитывая, что $\overline{F}_i = -\overline{R}_i$, получим:

$$\sum_1^n F_i \delta S_i \cos\alpha_i - \sum_1^n R_i \delta S_i \cos\alpha_i = 0.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю

$$\sum_1^n R_i \delta S_i \cos\alpha_i = 0. \qquad (3.47)$$

Уравнение работ (3.47) называют общим уравнением статики, оно выражает принцип возможных перемещений.

При равновесии механической системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных (задаваемых) сил на любом возможном перемещении системы равна нулю.

4. Общее уравнение динамики

По принципу Даламбера механическую систему, движущуюся под действием сил, можно рассматривать как неподвижную, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Затем можно воспользоваться принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (3.46) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях. При этом получим

$$\sum_1^n F_i \delta S_i \cos\alpha_i + \sum_1^n F_i^{\text{ин}} \delta S_i \cos\beta_i = 0, \qquad (3.48)$$

где β_i – угол между направлением силы $\overline{F}_i^{\text{ин}}$ и перемещением δS_i.

Уравнение (3.48) называют общим уравнением динамики.

Обозначив $\sum_1^n F_i \delta S_i \cos\alpha_i = \sum \delta A_i$, $\sum_1^n F_i^{\text{ин}} \delta S_i \cos\beta_i = \sum \delta A_i^{\text{ин}}$, получим уравнение (3.48) в виде:

$$\sum_{1}^{n} \delta A_i + \sum_{1}^{n} \delta A_i^{\text{ин}} = 0. \qquad (3.49)$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Кинетическая энергия механической системы определяется как сумма кинетических энергий всех входящих в эту систему материальных точек

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}. \qquad (3.22)$$

Кинетическая энергия твердого тела

Формулы, определяющие кинетическую энергию тела при различных видах движения.

1) Поступательное движение

$$T = \frac{1}{2} M V^2, \qquad (3.23)$$

где M – масса тела; V –скорость тела.

2) Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \qquad (3.24)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

3) Плоскопараллельное движение

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \qquad (3.25)$$

где V_c – скорость центра масс тела;

J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В общем случае движения твердого тела кинетическая энергия определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_p \omega^2. \qquad (3.26)$$

где V_c – скорость его центра масс;

M – масса тела;

J_p – момент инерции тела относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс;

ω – угловая скорость вращения тела относительно мгновенной оси.

Кинетическая энергия в общем случае движения твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс (теорема С. Кенига).

Вывод теоремы об изменении кинетической энергии механической системы проводят, используя уравнение этой теоремы для точки, т. к. она справедлива для любой из точек системы. Тогда для каждой точки системы массой m_i, движущейся со скоростью V_i, можно записать:

$$d\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = dA_i^e + dA_i^i .$$

Интегрируя это равенство, получаем:

$$\frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{m_i V_{0i}^2}{2} = A_i^e + A_i^i , \tag{3.27}$$

где нижний индекс $i = 1, 2..., n$;

$\frac{m_i V_{0i}^2}{2}$ – кинетическая энергия точки в начальном положении системы;

$\frac{m_i V_i^2}{2}$ – кинетическая энергия точки в конечном положении системы;

A_i^e – алгебраическая сумма работ внешних сил, действующих на точку на заданном перемещении;

A_i^i – алгебраическая сумма работ внутренних сил на том же перемещении.

Просуммируем левые и правые части уравнений (3.27)

$$\sum \frac{m_i V_i^2}{2} - \sum \frac{m_i V_{0i}^2}{2} = \sum A_i^e + \sum A_i^i , \tag{3.28}$$

где $\sum \frac{m_i V_{0i}^2}{2} = T_0$ – кинетическая энергия системы в начальном положении;

$\sum \frac{m_i V_i^2}{2} = T$ – кинетическая энергия системы в конечном положении.

Тогда равенство (3.28) будет иметь вид

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^i . \tag{3.29}$$

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении.

Если $\sum A^i = 0$, то такая система называется неизменяемой. Тогда уравнение (3.25) примет вид

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e .$$

<u>Работа сил</u>

1) Работа постоянной силы

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S} = FS\cos\alpha, \qquad (3.30)$$

где $\overline{F}$ – постоянная сила;

$\overline{S}$ – вектор перемещения точки приложения силы;

$\alpha = \text{const}$ – угол между векторами $\overline{F}$ и $\overline{S}$.

Работа силы есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на перемещение точки приложения силы и на косинус угла между векторами $\overline{F}$ и $\overline{S}$ (рис. 3.3).

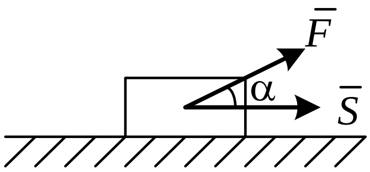


Рис. 3.3

2) Если сила переменная, то сначала определяется элементарная работа

$$dA = \overline{F}d\overline{S} = FdS\cos\alpha, \qquad (3.31)$$

а затем работа силы на конечном перемещении определяется по формуле

$$A = \int_S dA = \int_S \overline{F}d\overline{S} = \int_S FdS\cos\alpha. \qquad (3.32)$$

3) Элементарная работа силы через проекции векторов $\overline{F}$ и $d\overline{S}$ на координатные оси может быть записана в виде

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \qquad (3.33)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора силы $\overline{F}$ на координатные оси;

dx, dy, dz – проекции вектора $d\overline{S}$ на те же оси.

При определении работы силы на конечном перемещении с помощью формулы (3.33) получим

$$A = \int\limits_{M_1}^{M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) . \tag{3.34}$$

4) Работа силы, приложенной к вращающемуся телу:

$$A = \int\limits_0^{\varphi} M_z(\bar{F}) d\varphi. \tag{3.35}$$

Если $M_z\left(\bar{F}\right) = \text{const}$, то $A = M_z(F)\varphi$, где M_z – момент силы относительно оси; φ – угол поворота тела. Работа положительная, если направление момента совпадает с направлением углового перемещения тела, и отрицательная в противном случае.

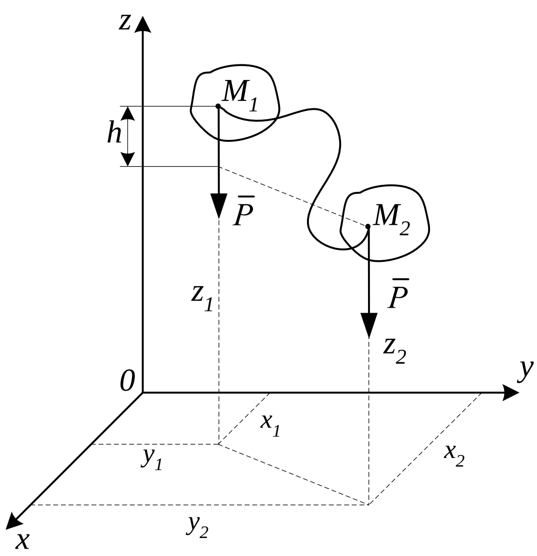


Рис. 3.4

5) Работа силы тяжести (рис. 3.4)

При перемещении точки M на неё действует сила тяжести $\bar{P}$. Вычислим работу этой силы на перемещении M_1M_2 по формуле (3.3)

$$A = \int\limits_{M1}^{M2} P_x dx + P_y dy + P_z dz . \tag{3.36}$$

Проекции силы $\bar{P}$ на оси координат будут $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_y = -P$, тогда уравнение (3.3) примет вид

$$A = -\int\limits_{z_1}^{z_2} P dz = P(z_1 - z_2);\; z_1 - z_2 = h;\; A_{1,2} = Ph, \tag{3.37}$$

где h – вертикальное перемещение точки приложения силы.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка, а зависит лишь от высоты, на которую опускается или поднимается точка приложения силы тяжести. Работа положительная, если конечное положение точки ниже начального, и работа отрицательная, если конечное положение точки выше начального.

6) Работа силы упругости

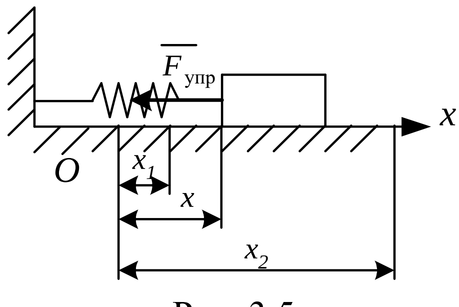


Рис. 3.5

На рис. 3.5 показан в промежуточном положении груз, прикрепленный к пружине. Начало оси x совмещено с положением статического равновесия, поэтому в промежуточном положении пружина растянута на величину $\lambda = x$. Тогда $F_{\text{упр}} = cx$, где c – жесткость пружины, x – ее деформация.

Проекции $\overline{F}_{\text{упр}}$ на оси равны: $F_{\text{упр.x}} = -cx;$ $F_{\text{упр.y}} = F_{\text{упр.z}} = 0$

Подставив эти значения в формулу (3.34), получим:

$$A = -c\int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{c}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) \text{ или } A = -\frac{c}{2}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right), \qquad (3.38)$$

где $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$ – деформация пружины в начальном и конечном положениях тела (системы).

Если в начальном положении деформация пружины равна нулю, т. е. $\lambda_1 = 0$, то формула (3.36) принимает вид

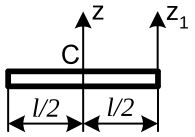
$$A = -\frac{c}{2}\lambda_2^2 = -\frac{c}{2}\lambda^2. \qquad (3.39)$$

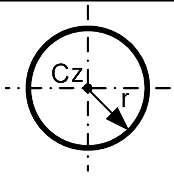
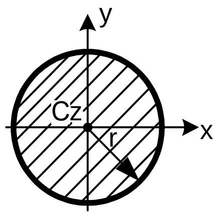
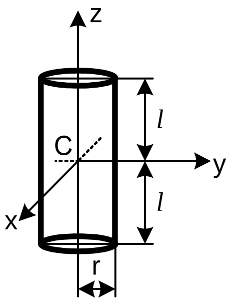
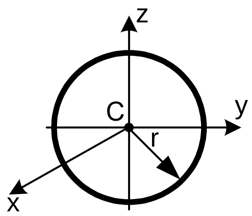
В общем случае работа упругой силы может быть положительной и отрицательной. Работа положительная, если деформация пружины уменьшается при перемещении тела, и отрицательная, если деформация пружины увеличивается.

7) Для твердого тела сумма работ внутренних сил равна нулю при любом его перемещении $\sum A_i^i = 0$.

Для решения определенного рода задач надо знать моменты инерции твердого тела. Моменты инерции некоторых однородных твердых тел приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ п/п	Тела	Схема тела	Момент инерции
1	Тонкий прямолинейный стержень		$J_z = \frac{Ml^2}{12}$ $J_{z_1} = \frac{Ml^2}{3}$

2	Кольцо, полый цилиндр		$J_z = Mr^2$
3	Тонкий диск		$J_x = J_y = \dfrac{Mr^2}{4}$ $J_z = \dfrac{Mr^2}{2}$
4	Цилиндр		$J_x = J_y = M\left(\dfrac{r^2}{4} + \dfrac{l^2}{3}\right)$ $J_z = \dfrac{Mr^2}{2}$
5	Шар		$J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{5}Mr^2$

Если задан радиус инерции твердого тела, то момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, определяется по формуле $J_c = M\rho^2$, где M – масса тела, ρ – радиус инерции.

Список литературы

а) основная литература:

1. Бутенин А.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Т1,2 – М.: Наука, 2004.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш.шк., 2009.

4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Т1,2. – М.: Высш. шк., 2001.

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 2005.

6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. А.А. Яблонский, С.С. Норейко и др. Санкт-Петербург: Лань, 2006.

7. Бать М.Н., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Т1,2 – Санкт-Петербург: Лань, 2009.

б) дополнительная литература:

1. Учебное пособие по теоретической механике. Статика. Кинематика/ В.Н. Коровкин, А.П. Шевченко, В.Н. Филимонов и др; Под ред. В.Н. Коровкина, В.Н. Филимонова, Владим. гос у-нт, Владимир, 2000.

2. Методические указания к курсовым работам по теоретической механике. Кинематика точки. Сост.: Л.Ф. Метлина, А.В. Крылов /Владим. гос. ун-т; Владимир, 2001.

3. Статика: Методические указания к курсовым работам по теоретической механике. Сост.: Л.Ф. Метлина, А.В. Крылов, О.В. Федотов /Владим. гос. ун-т; Владимир, 2002.

4. Новожилов А.И. Краткий курс теоретической механики: Учеб.пособие/Под ред. В.Н.Филимонов;Владим.гос.ун-т. – Владимир, 2006.

5. Кинематика плоского движения: Метод.указания к курсовой работе по теоретической механике. Сост. А.П.Шевченко, Е.А.Архипова. Владим.гос.ун-т – Владимир, 2003.

6. Динамика: метод. указания к курсовым работам по теоретической механике/сост.:А.В. Крылов, Л.Ф. Метлина, О.В. Федотов; Владим.гос.ун-т.- Владимир, 2005.

7. Практикум по дисциплине «Теоретическая механика» / А.П. Шевченко, А.В. Крылов, Л.Ф. Метлина, А.О. Веселов. Владим.гос.ун-т. – Владимир, 2007.

8. Курсовые работы по теоретической механике: методика их выполнения. Сост.: А.И. Новожилов: Владим. гос.ун-т. – Владимир, 2008.

9. Новожилов А.И. Задачи по теоретической механике. Методика их решения. Учеб.пособие: Влад.гос.ун-т. – Владимир, 2009.

10. Теоретическая механика: метод. указания к лаб.работам, сост. А.П. Шевченко, Л.Ф. Метлина. Владим.гос.ун-т. – Владимир, 2010.

в) программное и коммуникационное обеспечение:

Операционные системы Windows, стандартные офисные программы, интернет-ресурсы, система проектирования Компас.