Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Институт машиностроения и автомобильного транспорта
Кафедра «Технология машиностроения»

Конспект лекций

по дисциплине

«МЕХАНИКА»

(часть 1)

для студентов ВлГУ, обучающих по направлению
20.03.01 «Техносферная безопасность»

Составитель:
доцент кафедры ТМС Метлина Л.Ф.

Владимир 2016

Конспект лекций по дисциплине «Механика» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 20.03.01 «Техносферная безопасность».

Настоящий конспект лекций составлен в соответствии с требованиями ФГОС ВО и ОПОП направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность», рабочей программы дисциплины «Механика». В качестве рекомендаций для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих ВУЗов России.

Рекомендации предназначены для студентов очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании
НМС направления 20.03.01
Протокол № 14 от 04.05.2016 г.

Рукописный фонд кафедры ТМС ВлГУ

ВВЕДЕНИЕ.

Теоретическая механика является древнейшей наукой, обеспечивающей потребности практики. Она относится к разряду естественных наук, образуется научную основу современной техники и имеет общеобразовательное значение. Поэтому курс теоретической механики является значимым для формирования профессиональных и общекультурных компетенций у выпускников технических направлений подготовки, в том числе по направления 20.03.01 «Техносферная безопасность» законы, принципы и методы теоретической механики основа всех расчетов при проектировании, производстве и эксплуатации машин, комплексов и оборудования.

Целью изучения курса «Теоретическая механика» обучение студентов общим закономерностям механического движения материальных точек и механических систем, взаимодействия между ними, основным методам исследования равновесия и движения механических систем. Теоретическая механика логически связана с физикой и математикой, общетехническими и профессиональными дисциплинами. Эта связь позволяет решать задачи механики и техники широкого круга, на законах и методах теоретической механики базируются такие общетехнические дисциплины: «Сопротивление материалов», «Техническая механика», «Теория механизмов и машин», «Гидравлика» и др., а также профессиональные дисциплины «Механика жидкости и газа», «Динамика машин».

Успешное освоение курса теоретической механики студентами опирается на основные положения высшей математики, включая векторную алгебру, аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию дифференциальных уравнений; физики (основные физические понятия, законы и явления); информатики (численные методы решения литейных алгебраических и дифференциальных уравнений на ЭВМ).

Курс лекций содержит краткие теоретические доказательства некоторых теорем и принципов в силу малого количества часов лекционных часов, отведенных учебным планом на весь курс теоретической механики. Для углубленного изучения отдельных значимых тем и разделов рекомендуется определенная литература.

Изучение теоретического материала, а также практического его приложения в достаточном объеме невозможно без самостоятельной работы студентов. Самостоятельная работа дает возможность закрепить знания, полученные по рекомендованной литературе в процессе аудиторных занятий и хорошо подготовиться к рейтинг – контролю, устным опросам, к выполнению курсовых работ, а также к экзамену.

Настоящий курс лекций разработан на основе учебника «Учебное пособие по теоретической механике. Статика. Кинематика/ В.Н. Коровкин, А.П. Шевченко, В.Н.

Филимонов и др; Под ред. В.Н. Коровкина, В.Н. Филимонова, Владим. гос у-нт, Владимир, 2000».

Курс лекций

Тема: Введение. Предмет статики. Система сходящихся сил.

Лекция №1

***План лекции*.**

Введение. Механическое движение как одна из форм движения материи. Теоретическая механика и её место среди естественных и технически наук. Теоретическая механика как база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики.

Предмет статики Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентной системы сил, сила внешняя и внутренняя, основные аксиомы статики. Связи реакций и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость, поверхность и опора, гибкая нить, цилиндрический шарнир (подшипник), сферический шарнир (подпятник), невесомый стержень. Реакция этих связей.

Система сходящихся сил. Геометрический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия. Аналитический способ определение равнодействующей. Аналитическое условие уравнения равновесия системы сходящихся сил.

Основная часть лекции.

ВВЕДЕНИЕ

Механика - это наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел. Под *механическим движением* понимается изменение положения материальных тел в пространстве с течением времени. *Механическим взаимодействием* называется такое взаимодействие материальных тел, в результате которого происходит изменение их механического движения или формы (деформация). Мерой механического взаимодействия материальных тел является *сила.*

Механика относится к разряду естественных наук, т.е. наук о природе, зарождение которой в Древней Греции (V-IV вв. до н.э.) обусловлено потребностями практики. Наибольшее влияние на развитие механики вплоть до эпохи Возрождения (XIV-XVI вв.) оказали учения Аристотеля (384-322гг. до н.э.) и Архимеда (284-212гг. до н.э.). Яркими представителями эпохи Возрождения, с именами которых связано бурное и успешное развитие механики, являются: Леонардо да Винчи (1452-1519), Н. Коперник (1473-1543), И. Кеплер (1571-1630). К этому же периоду относятся работы Г. Галилея (1564-1642), сумевшего систематизировать отдельные разрозненные сведения по механике, накопленные человечеством на протяжении многих столетий, и впервые сформулировать важнейшие понятия механики: принцип относительности классической механики и принцип инерции вещества, законы падения тел, сложения движений и скоростей, понятие ускорения и т.д.

В 1687 г. вышло в свет знаменитое сочинение И. Ньютона (1642-1727) "Математические начала натуральной философии", в котором он, обобщая опыт и завершая работы своих предшественников, систематически изложил основные законы классической механики. С этого времени механика окончательно сформировалась как наука, которую часто называют механикой Галилея-Ньютона, или классической механикой.

Последующее развитие механики связано с разработкой аналитических методов в трудах Л. Эйлера (1707-1783), Ж. Даламбера (1717-1783), Ж. Лагранжа (1736-1813).

На развитие исследований по механике в России большое влияние оказали работы М. В. Остроградского (1801-1862), П.Л. Чебышева (1821-1894), А.М. Ляпунова (1857-1918), И.В. Мещерского (1859-1935), Н.Е. Жуковского (1847-1921), А.Н. Крылова (1863-1945), С.А. Чаплыгина (1869-1942) и других выдающихся ученых.

В *классической механике* рассматриваются материальные тела, размеры которых много больше межмолекулярных расстояний и которые движутся со скоростями, много меньшими скорости света.

Если объектами исследования механики являются любые реальные тела: деформируемые твердые тела, жидкие, газообразные и др., то в теоретической механике рассматриваются идеализированные материальные объекты такие, как материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело. Данные абстракции, которые, конечно, не существуют

в природе, позволяют выявить наиболее общие законы механического движения и механического взаимодействия, справедливые для любых материальных тел независимо от их конкретных физических свойств.

Наука об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел называется *теоретической механикой.* Таким образом, теоретическая механика - это раздел механики, составляющий основу общей механики, которая лежит в основе всех остальных технических дисциплин: сопротивления материалов, деталей машин, теории машин и механизмов, строительной механики, гидромеханики, газодинамики и т.д. Отсюда понятны роль и значение теоретической механики, позволяющей получить необходимые знания о природе посредством обобщенных методов построения математических моделей движений материальных объектов природы и техники.

В теоретической механике движение материальных тел рассматривается в *трехмерном евклидовом пространстве.* Для изучения движения вводят так называемую *систему отсчета,* понимая под ней совокупность тела отсчета (т.е. тела, по отношению к которому изучается движение других тел) и связанных с ним систем координатных осей и часов. Принимается, что время не зависит от движения тел и одинаково во всех точках пространства и системах отсчета (*абсолютное время*). Поэтому, говоря о системе отсчета в теоретической механике, как правило, ограничиваются указанием только тела отсчета и системы координатных осей, связанных с ним.

Тело находится в движении относительно выбранной системы отсчета, если с течением времени происходит изменение координат хотя бы одной его точки, в противном случае тело находится в *покое* по отношению к этой системе отсчета. Таким образом, движение и покои тела по сути дела понятия относительные, зависящие от выбора системы отсчета. Поэтому в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел. Под *равновесием* понимается состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам (телам отсчета). Если движением тела отсчета, по отношению к которому изучается равновесие, можно пренебречь, то равновесие условно называется *абсолютным.* Часто при инженерных расчетах систему отсчета, связанную с Землей, можно условно принять за неподвижную. Возникающие при таком допущении ошибки, как правило, практического значения не имеют. В задачах, в которых нельзя пренебречь вращением Земли, за неподвижную систему отсчета можно принять *гелиоцентрическую систему отсчета* с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на одни и те же далекие «неподвижные» звезды.

По характеру решаемых задач курс теоретической механики обычно делится натри части: статику, кинематику и динамику. В данной книге излагаются первые две части.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

Основные понятия, определения

Статика - раздел механики, в котором изучаются методы приведения систем сил к простейшему виду и выводятся условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Как во всякой естественной науке, в теоретической механике используются идеализированные понятия, которые служат моделью для построения приближенной теории движения и равновесия реальных физических объектов. К таким понятиям можно отнести материальную точку, абсолютно твердое тело, идеальную жидкость и т.п.

Материальная точка - тело, размеры которого в конкретных условиях можно не учитывать. Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами.

Механическая система - любая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных точек.

Абсолютно твердое тело - механическая система, расстояния между любыми точками которой остаются неизменными при механических воздействиях со стороны других тел. Допущение о неизменяемости формы тел упрощает изучение их равновесия и вместе с тем позволяет решать многие технические задачи с достаточной степенью точности, так как в большинстве случаев деформации тел пренебрежимо малы.

Свободное тело - материальное тело, перемещения которого из данного положения в любом направлении в пространстве не ограничены другими телами.

Одним из основных понятий статики является понятие силы.

Сила - векторная мера механического взаимодействия тел. Она может быть изображена вектором, т.е. направленным отрезком прямой (рис.1.1,а). Одна из точек, ограничивающих вектор, называется началом вектора (точка А), другая - концом. Направление вектора указывается стрелкой на его конце. Силу как величину векторную принято обозначать буквой со знаком вектора над ней, например, $\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}$. Длину вектора называют его *модулем* и обозначают одним из способов $|\vec{F}|, |\vec{P}|, |\vec{Q}|$ или F,P,Q. Таким образом, сила $\vec{F}$ характеризуется точкой приложения А, модулем F и направлением.

Прямая, по которой направлена сила, называется линией действия силы.

В международной системе единиц измерения СИ за единицу измерения силы принимается ньютон (Н).

Система сил - **любая** совокупность сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$), действующих на материальное тело.

Эквивалентные системы сил - такие, которые по отдельности оказывают одинаковое действие на одно и то же свободное твердое тело (материальную точку) при прочих равных условиях.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n').$$

Необходимо различать понятия эквивалентности и равенства сил. Силы векторно (или геометрически) равны, если они параллельны, направлены в одну сторону и имеют одинаковые модули (рис. 1.1, б): $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$, так как $\vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_2 \uparrow\uparrow \vec{F}_3$ и $F_1 = F_2 = F_3$.

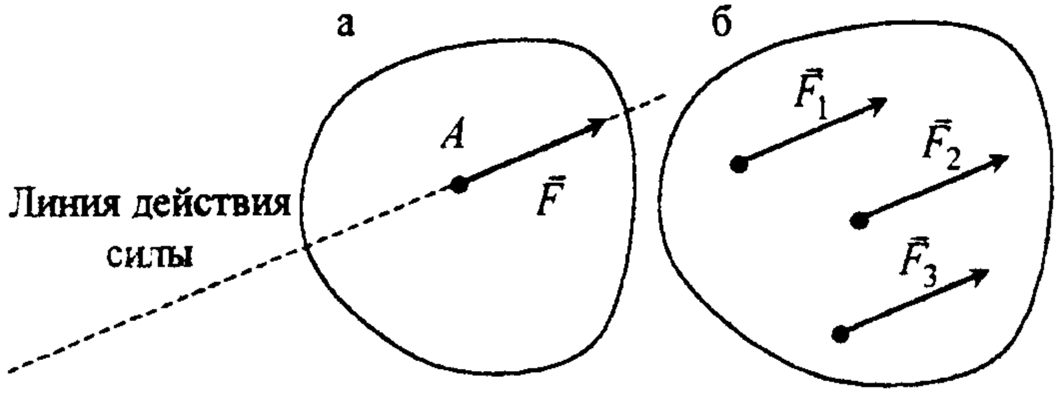


Рис. 1.1

Однако для эквивалентности сил этого недостаточно, т.е. нельзя утверждать, что, например, $\vec{F}_1 \sim \vec{F}_2$. Две силы эквивалентны, если они не только векторно равны, но еще и приложены в одной точке тела (по отдельности). Это отличает вектор силы от свободного вектора, понятие о котором в математике положено в основу векторного исчисления, занимающегося изучением операций над векторами.

Свободным вектором называется вектор, который характеризуется только модулем и направлением. Он не связан с какой-либо определенной прямой линией или точкой. Начало такого вектора может быть выбрано произвольно (свободно) в любой точке пространства. В механике, кроме свободных, часто рассматриваются векторы скользящие и связанные (или приложенные).

Скользящим вектором называется вектор, расположенный произвольно на своей линии действия. Этот вектор связан с прямой по которой он направлен.

Связанным вектором называется вектор, который характеризуется модулем, направлением и точкой приложения. Этот вектор связан с точкой своего приложения, поэтому называется также приложенным или неподвижным.

Равнодействующая R - сила, эквивалентная некоторой системе сил

$$(\vec{R}) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n).$$

Уравновешенная система сил (или система сил, эквивалентная нулю) - такая, под действием которой свободное твердое тело (материальная точка) находятся в равновесии

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim 0.$$

Уравновешивающая сила заданной системы сил - такая сила, добавление которой к заданной системе дает новую систему, эквивалентную нулю. Силы, действующие на механическую систему, делятся на силы внешние и внутренние.

Внешние силы - силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе.

Внутренние силы - силы взаимодействия между материальными точками (телами), входящими в состав данной системы.

Аксиомы статики

В основе изучения статики твердого тела лежат аксиомы, формулировка которых предполагает, что твердое тело или материальная точка в общем случае считаются свободными, имеющими возможность совершать в рассматриваемый момент времени любые перемещения в пространстве.

Аксиома инерции

Изолированная от внешних воздействий материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения.

Аксиома равновесия двух сил

Две силы уравновешиваются, если они приложены к одному твердому телу, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.2).

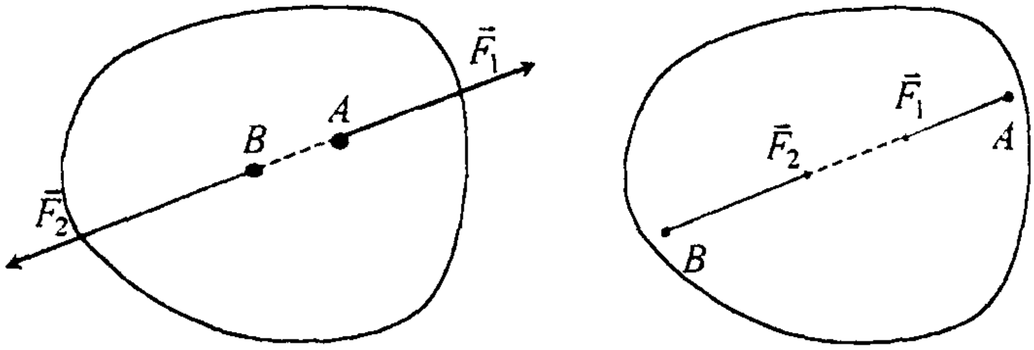


Рис. 1.2

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0; \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Аксиома о присоединении или исключении уравновешенной системы сил

Если к заданной системе сил присоединить или из нее исключить уравновешенную систему сил, то новая система сил будет эквивалентна заданной (рис. 1.3, 1.4). $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$- заданная система сил.

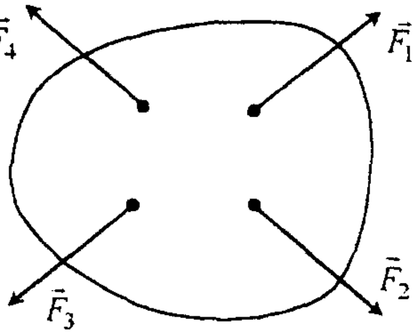


Рис.1.3

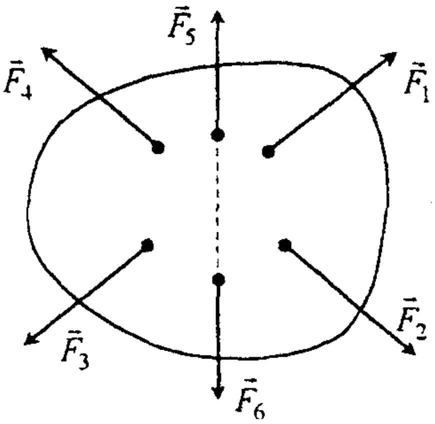


Рис. 1.4

$(\vec{F}_5, \vec{F}_6) \sim 0$ - присоединенная система сил.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6).$

Следствие. Не изменяя действия на твердое тело, силу можно переносить вдоль ей линии действия в любую другую точку тела

Пусть на твердое тело действует сила $\vec{F}$, приложенная в точке А (рис. 1.5). На линии действия этой силы возьмем произвольную точку В и приложим к ней две уравновешенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, при этом $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}$. От этого действие силы $\vec{F}$ на тело не изменится. Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ также образуют уравновешенную систему, которая может быть исключена. В результате на тело будет действовать сила $\vec{F}_1$, равная $\vec{F}$, но приложенная в

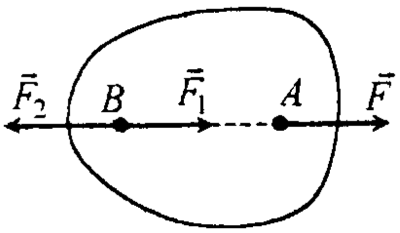


Рис. 1.5

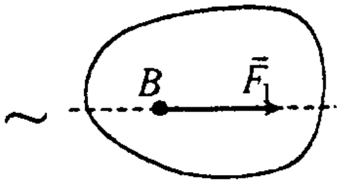


Рис.1.6

точке В на линии действия силы (рис. 1.6).

На основании этого следствия вектор силы $\vec{F}$ считается скользящим

Аксиома параллелограмма сил

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, приложена в той же точке, а по величине и направлению определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.7).

Замену двух сил одной равнодействующей называют *геометрическим (или векторным) сложением* этих сил, которое математически записывается так:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены по одной прямой в одну или противоположные стороны, то они складываются алгебраически.

Модуль равнодействующей определяют по формуле

$$\vec{R} = \sqrt{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + 2F_1F_2\cos(\vec{F}_1 \widehat{,} \vec{F}_2)}.$$

Необходимо отметить, что справедливо и обратное. Одну силу можно разложить последовательно на две, три и т.д. составляющие по заданным направлениям.

Аксиома о равенстве сил действия и противодействия

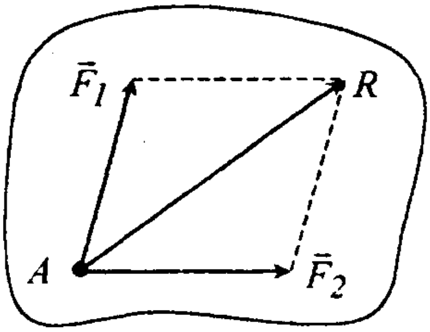


Рис. 1.7

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Эта аксиома утверждает, что силы взаимодействия между двумя телами (точками) равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.8).

Силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ не образуют уравновешенную систему, так как они приложены к разным телам. Отметим, что твердые тела или материальные точки, могут взаимодействовать путем соприкоснове-ния или посредством силовых полей, т.е. на расстоянии.

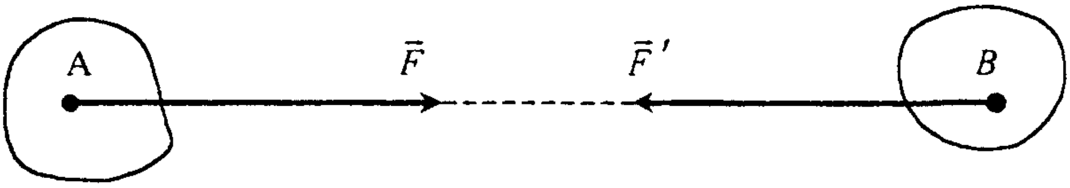


Рис. 1.8

Аксиома затвердевания

Равновесие сил, приложенных к деформируемому телу, не нарушится при его затвердевании.

Эта аксиома утверждает, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, должны выполняться и для сил, приложенных к деформируемому телу.

Например, равновесие гибкой нити, на которой подвешено тело, не нарушится, если эта нить затвердеет.

Однако для деформируемого тела условия равновесия сил необходимы, но недостаточны. Так, например, для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам, условия равновесия этих сил не являются достаточными, требуется еще, чтобы приложенные силы были растягивающими.

Связи. Реакции связей. Аксиома связей

Материальное тело, перемещения которого в пространстве ограничены другими телами, называется *несвободным.*

Связи - материальные объекты (тела), которые ограничивают перемещения данного твердого тела.

Реакция связи - сила, с которой связь действует на тело.

Активные - силы, которые не являются реакциями связей.

Упомянутые ранее внешние и внутренние силы могут быть активными и реакциями связей.

Аксиома *связей*

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связи условно отбросить и заменить их действие реакциями связей.

Реакции связей зависят от приложенных к телу активных сил и от вида связей. Поэтому очень важно уметь правильно заменять действие отброшенных связей их реакциями. При этом надо помнить, что реакция связи направлена в сторону, противоположную той, в которую связь препятствует перемещению тела. Если связь препятствует перемещению тела по нескольким направлениям, направление реакции связи неизвестно, ее обычно раскладывают по правилу параллелограмма на составляющие, направленные параллельно осям координат.

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

На материальные тела могут действовать различные системы сил - сходящихся, параллельных, произвольно расположенных на плоскости или в пространстве. Одной из наиболее простых является система сходящихся сил.

Системой сходящихся сил называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

> *Теорема.* Система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна геометрической сумме всех сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Доказательство. Пусть задана система сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу. Согласно следствию из аксиомы III перенесем силы по линиям их действия в точку пересечения этих линий (рис.2.1). Складывая силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, на основании аксиомы IV получим их равнодействующую: $\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, индекс равнодействующей соответствует номеру добавляемой силы. Затем, сложив $\vec{R}_2$ с $\vec{F}_3$, найдем равнодействующую трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Дойдя, таким образом, до последней силы $\vec{F}_n$, получим равнодействующую $\vec{R}$ всей системы n данных сил:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \qquad (2.1)$$

Построение равнодействующей может быть упрощено, если вместо параллелограммов построить силовой многоугольник (рис. 2.2). 0т конца вектора $\vec{F}_1$ отложим вектор $\vec{F}_2$, от его конца отложим вектор $\vec{F}_3$ и т.д. Получим, что вектор, идущий от начала первого $\vec{F}_1$ к концу последнего $\vec{F}_n$, является равнодействующей $\vec{R}$.

Пространственный многоугольник, который получен указанным способом, называется силовым многоугольником. Если для нахождения равнодействующей при помощи силового многоугольника используются правила геометрии, то такой способ нахождения равнодействующей называется геометрическим способом.

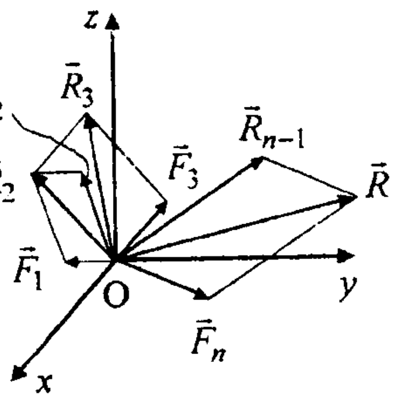


Рис. 2.1

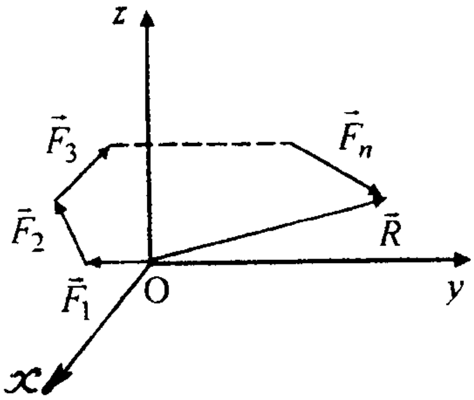


Рис. 2.2

Наиболее общим методом определения модуля и направления равнодействующей является аналитический метод.

Вспомним, что *проекция силы на ось* есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси. Если этот угол острый, - проекция положительная, если тупой, - отрицательная, а если сила перпендикулярна оси, - ее проекция на ось равна нулю. Так, для сил, изображенных на рис.2.3:

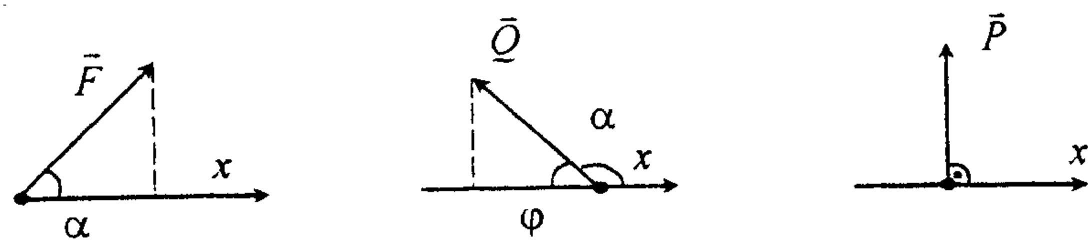


Рис. 2.3

$$F_x = F\cos\alpha;\quad Q_x = Q\cos\alpha = \text{-}Q\cos\varphi;\quad P_x = 0.$$

Проекцией силы $\vec{F}$ *на плоскость* Оxy называется вектор $\vec{F}_{xy}$, заключенный между проекциями начала и конца вектора силы $\vec{F}$ на эту плоскость (рис. 2.4).

Таким образом, в отличие от проекции силы на ось проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим модулем, но и направлением в плоскости Оxy. Модулю $F_x = F\cos\varphi$, где φ - угол между направлением силы $\vec{F}$ и её проекции $\vec{F}_{xy}$.

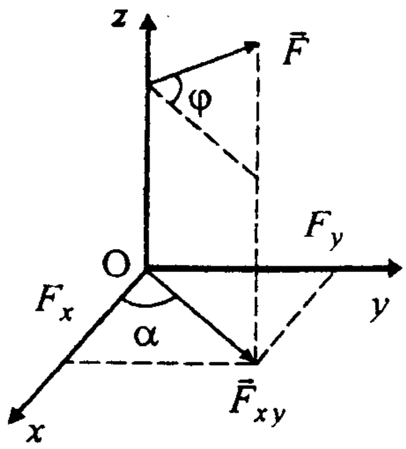


Рис. 2.4

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой расположена эта ось, а затем эту проекцию спроектировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 2.4:

$$F_x = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\varphi\cos\alpha,$$
$$F_x = F_{xy}\sin\alpha = F\cos\varphi\sin\alpha.$$

Из курса векторной алгебры известно, что проекция суммы векторов на произвольную ось равна сумме проекций на ту же ось слагаемых векторов. Поместим начало прямоугольной системы координат в точку пересечения линий действия сил (см. рис.2.1), проектируя соотношение (2.1) на оси xyz, получим:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}; \\ R_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}; \\ R_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекции силы $\vec{F}_k$ на указанные оси, а R_x, R_y, R_z - проекции равнодействующей на те же оси.

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.

Используя выражения (2.2), можно найти модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{kz})^2}.$$

а её направление в системе координат Oxy определим по направляющим косинусам вектора $\vec{R}$:

$$\cos(\vec{R} \hat{,} \vec{i}) = R_x / R; \quad \cos(\vec{R} \hat{,} \vec{j}) = R_y / R; \quad \cos(\vec{R} \hat{,} \vec{k}) = R_z / R.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил

Ранее было установлено, что система сходящихся сил эквивалентна одной равнодействующей силе $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim R$. Отсюда следует, что

для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодейст-вующая их равнялась нулю:

$$\vec{R} = 0. \qquad (2.3)$$

Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что *силовой многоугольник замкнут* (рис. 2.5).

Проектируя равенство (2.3) на оси x,y,z, получим скалярные равенства:

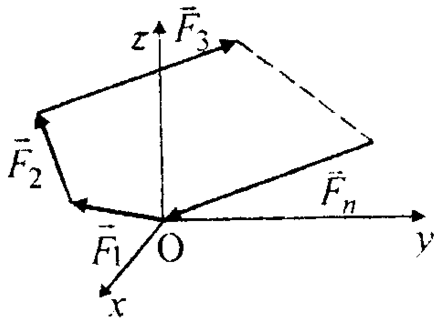


Рис.2.5

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0.$$

Принимая во внимание равенства (2.2), получаем аналитические условия равновесия системы сходящихся сил:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} &= F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0, \end{aligned}\right\}$$

(2.2)

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей.

Для частного случая плоской системы сходящихся сил, расположенных, например, в плоскости Оxy, третье уравнение (2.4) выполняется тождественно.

При решении задач часто пользуются *теоремой о трех параллельных си-лах.*

Теорема. Если под действием трех сил тело находится в равновесии и линии действия двух сил пересекаются, то все силы лежат в одной плоскости, и их линии действия пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть на тело действует система трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, причем линии действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ пересекаются в точке А (рис.2.6).

Согласно следствию из аксиомы III силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можно перенести в точку А, а по аксиоме IV их можно заменить одной силой $\vec{R}_1$, причем $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Таким образом, заданная система сил приведена к двум силам $\vec{R}_1$ и $\vec{F}_3$. По условию теоремы тело находится в равновесии, следовательно, силы $\vec{F}_3$ и $\vec{R}_1$ должны иметь общую линию действия, отсюда следует, что сила $\vec{F}_3$ расположена в той же плоскости, что и силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, и линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

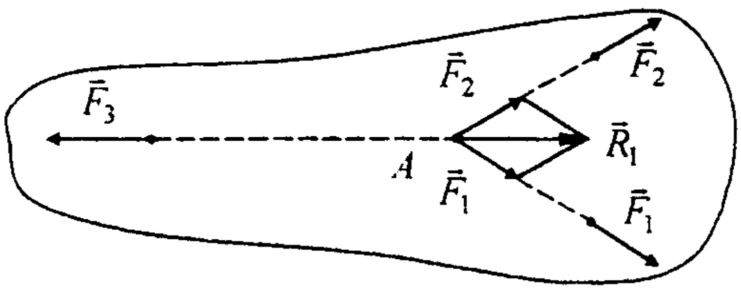


Рис.2.6

Лекция №2

Тема: Теория моментов. Система произвольно расположенных сил.

План лекции

Теория моментов. Момент силы относительно точки как вектор. Момент силы относительно оси. Зависимость между ними. Момент силы относительно точки как алгебраическая величина. Понятие о паре сил. Момент пара сил как вектор. Теорема об эквивалентности пар сил. Свойства пар сил. Сложение пар сил расположенных в пространстве и на плоскости. Условия равновесия системы пар сил.

Система произвольно расположенных сил. Приведение сил к центру. Метод Пуансо. Главный вектор и главный момент системы сил, их вычисление. Аналитические условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, произвольной плоской системы сил и системы параллельных сил.

Основная часть лекции

ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ

Для решения задачи приведения произвольной системы сил к простейшему виду и задачи о равновесии произвольной системы сил прежде необходимо познакомиться с такими важными понятиями статики, как момент силы относительно точки, момент силы относительно оси, момент пары сил.

Момент силы относительно точки

Рассмотрим твердое тело, в точке A которого приложена сила $\vec{F}$ (рис.3.1). Проведем из произвольной точки О в точку A радиус-вектор $\vec{r}$.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно точки* О называется вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, равный векторному произведению радиуса - вектора $\vec{r}$ точки приложения силы относительно точки О на вектор силы $\vec{F}$

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.1}$$

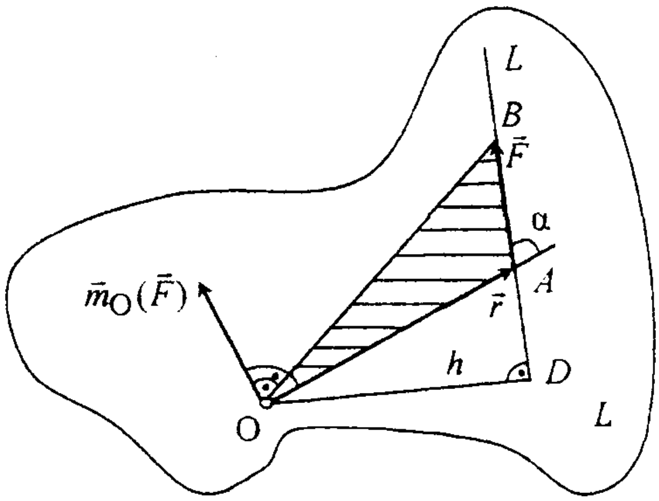


Рис. 3.1

Из определения векторного произведения следует, что

вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через выбранную точку О и линию действия силы $\vec{F}$, в ту сторону, откуда мы видим, что сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг точки О против часовой стрелки.

Модуль вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ равен модулю векторного произведения (3.1), т.е. произведению модулей $\vec{F}$ и $\vec{r}$ на синус угла между этими векторами

$$m_O(\vec{F}) = F\, r \sin(\vec{r} \,\hat{,}\, \vec{F}) \tag{3.2}$$

За угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{r}$, условно приложенными в одной точке, например *A* (см. рис. 3.1), принимается угол α, не превышающий π.

Проведем прямую *LL,* на которой лежит вектор силы $\vec{F}$ (линию дейст- вия силы), и опустим из точки О на эту прямую перпендикуляр О*D*.

Длина перпендикуляра, равная кратчайшему расстоянию от точки О до линии действия силы $\vec{F}$, называется *плечом силы $\vec{F}$ относительно точки* О:

$$h = OD = r \sin \alpha .$$

С учетом этого из формулы (3.2) следует, что

модуль момента силы относительно точки **равен произведению модуля силы на плечо силы относительно этой точки**

$$m_O(\vec{F}) = F\ h.$$

Если $F \neq 0$, то $m_O(F) = 0$ только при $h = 0$, т.е. когда линия действия силы проходит через центр момента O. Момент силы измеряется в Н·м.

Таким образом, по формуле (3.1) однозначно определяются модуль и направление вектора момента силы относительно точки, однако линия действия вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ не определена. Так как модуль момента силы относительно точки O зависит от положения точки O, то для одновременного определения величины момента силы относительно точки O и плоскости, в которой эта точка и сила $\vec{F}$ расположены, будем рассматривать вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ приложенным в точке O, называемой *центром момента.*

В случае, когда на тело действует система сил, расположенных в одной плоскости, векторы моментов сил относительно точки, расположенной в этой же плоскости, параллельны и могут быть направлены перпендикулярно плоскости в ту или иную сторону, что позволяет складывать их между собой алгебраически.

Алгебраический момент силы относительно точки определяется как скалярная величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятому со знаком плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг точки против часовой стрелки, и минус - если по часовой стрелке относительно этой точки

$$m_O(\vec{F}) = \pm F\ h. \qquad (3.3)$$

Для случая, изображенного на рис. 3.2

$$m_O(\vec{F}_1) = -F_1\, h_1;$$
$$m_O(\vec{F}_2) = F_2\, h_2;$$
$$m_O(\vec{F}_3) = 0.$$

Если совместить с точкой О (центром момента) начало прямоугольной системы координат Оxyz, осям которой соответствуют векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$ то вектор момента силы относительно точки О можно представить в виде суммы его составляющих по осям выбранной системы координат:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_{Ox}(\vec{F})\vec{i} + m_{Oy}(\vec{F})\vec{j} + m_{Oz}(\vec{F})\vec{k}, \qquad (3.4)$$

где $m_{Ox}(\vec{F}),\ m_{Oy}(\vec{F}),\ m_{Oz}(\vec{F}))$ - проекции вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ на оси координат.

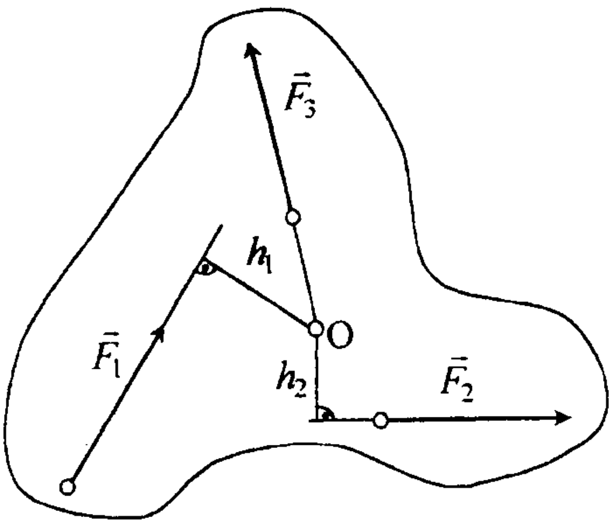


Рис.3.2

Пусть x, y, z - координаты точки приложения силы, равные проекциям радиуса' вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси, а F_x, F_y, F_z - проекции вектора силы на те же оси, тогда формулу (3.1) для| момента силы относительно точки О можно записать в виде определителя, раскрыв который по элементам первой строки получим

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \qquad (3.5)$$

Приравнивая правые части (3.4) и (3.5), заметим, что проекции вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ на оси координат с началом в точке О будут равны коэффициентам при единичных векторах в правой части равенства (3.5):

$$m_{Ox}(\vec{F}) = yF_x - zF_y; \quad m_{Ox}(\vec{F}) = zF_x - xF_z;$$
$$m_{Ox}(\vec{F}) = xF_y - yF_x \tag{3.6}$$

Момент силы относительно оси

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\vec{F}$. Выберем ось z и на ней произвольную точку О (рис. 3.3).

Проведем через точку О плоскость Оxy, перпендикулярную оси z, и спроектируем силу $\vec{F}$ на эту плоскость. Получим вектор силы $\vec{F}_{xy}$, начало A_1 и конец B_1 которого совпадают с проекциями начала A и конца B силы $\vec{F}$ на эту плоскость.

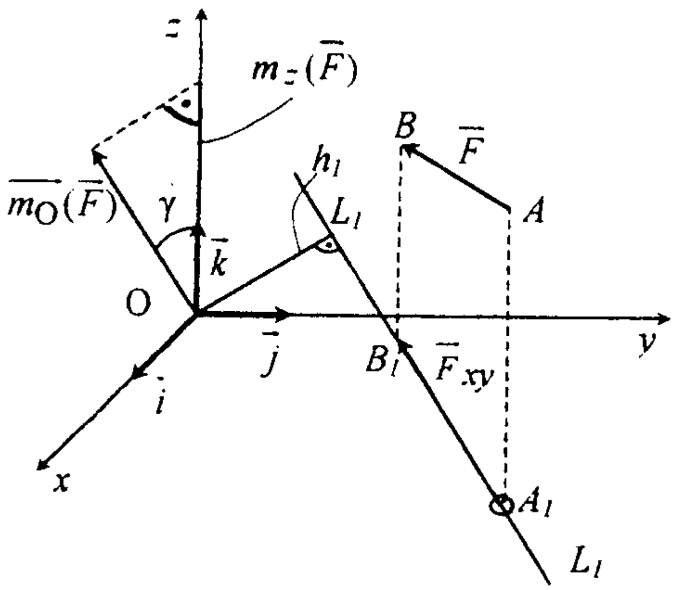


Рис. 3. 3

Моментом силы относительно оси называется момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с плоскостью. Он определяется как скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси на плечо проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Обозначим $m_z(\vec{F})$ - момент силы $\vec{F}$ относительно оси z, проходящей через точку О, тогда в соответствии с определением и формулой (3.3)

$$m_z(\vec{F}) = m_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h_1 \qquad (3.7)$$

где F_{xy} - модуль проекции силы $\vec{F}$ на плоскость О*xy,* перпендикулярную оси *z*; h_1 - плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О пересечения оси *z* с плоскостью О*xy*.

Условимся *знак плюс* присваивать в случае, когда, наблюдая с положительного направления оси, мы видим, что сила стремится вращать тело вокруг оси против часовой стрелки, и *знак минус* - если по часовой стрелке.

Очевидно, что при вычислении момента силы относительно оси плоскость, перпендикулярную оси *z*, можно проводить через любую точку на оси, так как величины, входящие в правую часть равенства (3.7), при этом| не изменяются.

Момент силы относительно оси удобно вычислять, придерживаясь следующей последовательности действий:

- выбрать на оси произвольную точку и провести через нее плос- кость, перпендикулярную оси;

- спроектировать силу на эту плоскость и вычислить модуль проек-ции силы;

- опустить перпендикуляр из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы и найти его длину;

- вычислить момент силы относительно оси по формуле (3.7) и определить его знак.

Из формулы (3.7) следует, что *момент сипы относительно оси равен нулю* либо в случае, когда сила параллельна оси (так как $F_{xy} = 0$), либо, ко-гда линия действия силы пересекает ось (так как $h_1 = 0$). Другими словами момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось находятся в одной плоскости.

Момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О можно вычислить и по фор- муле (3.5), положив в ней $z = 0$ и $F_z = 0$ (см. рис. 3.3). Так как координаты *x* и *y* точки A_1, в которой приложена сила $\vec{F}_{xy}$, равны соответствующим координатам точки A приложения силы $\vec{F}$, а проекции силы $\vec{F}_{xy}$ на оси x и y - проекциям F_x и F_y силы $\vec{F}$, то

$$\vec{m}_{\mathrm{O}x}(\vec{F}_{xy}) = (xF_y - yF_x)\,\vec{k}. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что вектор $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{xy})$ направлен так же, как вектор $\vec{k}$, т.е. по оси z. Следовательно, величина момента силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О равна проекции вектора $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{xy})$ на ось z, а согласно (3.6) равна проекции вектора момента силы $\vec{F}$ относительно точки О на ту же ось;

$$m_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{xy}) = m_{\mathrm{O}z}(\vec{F}_{xy}) = m_{\mathrm{O}z}(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

Отсюда с учетом выражения (3.7) следует еще одно определение момента силы относительно оси:

момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно любой точки на оси.

Таким образом, момент силы $\vec{F}$ относительно оси z, проведенной через точку О,

$$m_z(\vec{F}) = m_{\mathrm{O}}(\vec{F}_{xy}) = m_{\mathrm{O}z}(\vec{F}) = m_{\mathrm{O}z}(\vec{F})\cos\gamma,$$

где $m_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ - модуль вектора момента силы $\vec{F}$ относительно точки О; γ-угол между вектором $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ и положительным направлением оси (см. рис.3.3).

Аналогично для моментов силы $\vec{F}$ относительно осей x и y с началом в точке О запишем

$$m_z(\vec{F}) = m_{\mathrm{O}x}(\vec{F}), \quad m_y(\vec{F}) = m_{\mathrm{O}y}(\vec{F}).$$

Тогда, воспользовавшись формулами (3.6), можно записать моменты силы относительно осей координат в виде

$$
\begin{aligned}
&m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y;\\
&m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z;\\
&m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Модуль момента силы $\vec{F}$ относительно начала координат О

$$
m_{\text{O}}(\vec{F}) = \sqrt{m_x^2(\vec{F}) + m_y^2(\vec{F}) + m_z^2(\vec{F})}\,. \tag{3.10}
$$

Углы, составляемые вектором $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$ с положительными направлениями осей координат *x, y, z* (или единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ этих осей), определяются по направляющим косинусам вектора $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$:

$$
\cos[\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})\,\hat{,}\,\vec{i}\,] = \frac{m_x(\vec{F})}{m_{\text{O}}(\vec{F})};\quad \cos[\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})\,\hat{,}\,\vec{j}\,] = \frac{m_y(\vec{F})}{m_{\text{O}}(\vec{F})};
$$

$$
\cos[\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})\,\hat{,}\,\vec{k}\,] = \frac{m_z(\vec{F})}{m_{\text{O}}(\vec{F})}.
$$

Пример. В точке *A* прямоугольного параллелепипеда со сторонами *a, b, c* приложена сила $\vec{F}$, направленная по диагонали *AD* передней грани (рис.3.4). Определить модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки О.

Совместим с точкой О начало прямоугольной системы координат О*xyz* и вычислим сначала моменты силы $\vec{F}$ относительно осей координат. Для этого воспользуемся формулой (3.7) и рекомендованной последовательно- стью действий. Выбираем на оси *x* произвольную точку O_1 и проводим через нее плоскость $ABDO_1$, перпендикулярную оси *x*. Проектируем силу $\vec{F}$ на эту плоскость и вычисляем модуль проекции силы. В данном случае проекция силы $\vec{F}$ на плоскость $ABDO_1$ (или на любую параллельную плоскость, например О*yz*) равна самой силе $\vec{F}_{yz} = \vec{F}$, а ее модуль модулю, силы $F_{yz} = F$. Опускаем из точки O_1 пересечения оси *x* с плоскостью $ABDO_1$ перпендикуляр на линию действия проекции силы $\vec{F}$ на плоскость $ABDO_1$, которая в нашем случае совпадает с линией действия силы $\vec{F}$, и находим длину этого перпендикуляра $h_1 = c\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

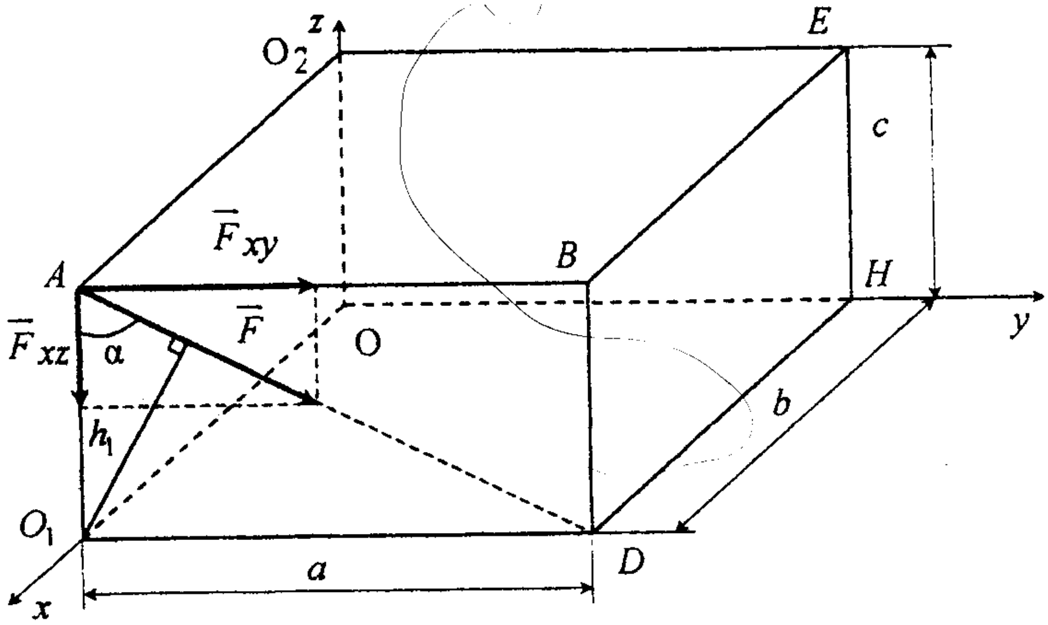


Рис. 3.4

Вычисляем момент силы $\vec{F}$ относительно оси x по формуле (3.7) и устанавливаем, что момент имеет знак минус, так как с положительного направления оси x мы увидим, как сила $\vec{F}$ стремится вращать параллелепипед вокруг оси x по часовой стрелке

$$m_x(\vec{F}) = -F\,h_1 = -F\,c\sin\alpha.$$

Аналогично вычисляем моменты силы $\vec{F}$ относительно осей y и z как взятые с соответствующим знаком моменты проекций силы на плоскости AO_1OO_2 ($\vec{F}_{xz}$) и $ABEO_2$ ($\vec{F}_{xy}$) соответственно перпендикулярные осям y и z относительно точек пересечения О и O_2 этих плоскостей с осями y и z

$$m_x(\vec{F}) = -F_{xz}\,b = F\,\cos\alpha\, b;$$
$$m_z(\vec{F}) = -F_{xy}\,b = F\,\sin\alpha\, b.$$

Тот же результат получим, используя формулы (3.9). Координаты точки A приложения силы $\vec{F}$

$$x = b;\quad y = 0;\quad z = c.$$

Проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси:

$$F_x = 0;\quad F_y = F\sin\alpha;\quad F_z = -F\cos\alpha.$$

После подстановки этих значений в формулы (3.9) находим

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y = -cF\sin\alpha;$$
$$m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z = bF\cos\alpha;$$
$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x = bF\sin\alpha.$$

По формуле (3.10) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки O равен

$$m_{\text{O}}(\vec{F}) = \sqrt{m_x^2(\vec{F}) + m_y^2(\vec{F}) + m_z^2(\vec{F})} =$$
$$= \sqrt{F^2c^2\sin^2\alpha + F^2b^2\cos^2\alpha + F^2b^2\sin^2\alpha} =$$
$$= F\sqrt{c^2\sin^2\alpha + b^2} = F\sqrt{\frac{a^2c^2}{a^2+c^2} + b^2}.$$

Сложение двух параллельных сил. Пара сил

Рассмотрим систему двух параллельных сил, приложенных в точках A и B твердого тела и направленных в одну сторону (рис.3.5).

Можно показать, что равнодействующая такой системы сил параллельна силам и направлена в ту же сторону, а ее модуль равен сумме модулей этих сил.

Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, т.е.

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

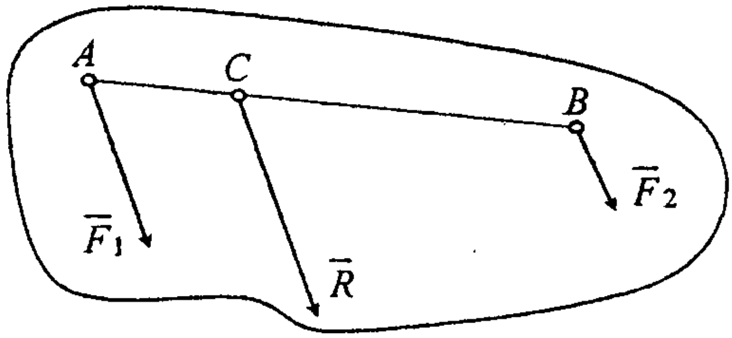


Рис.3.5

Если же к телу приложены две параллельные, противоположно направленные и не равные по модулю силы, например $F_1 > F_2$ (рис. 3.6), то их равнодействующая параллельна силам и направлена в сторону большей силы, а модуль равнодействующей равен разности модулей этих сил. Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, т.е.

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Учитывая, что $BC = AB + AC,$ из последней пропорции получим:

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \tag{3.11}$$

Предположим теперь, что модули параллельных и противоположно направленных сил равны: $F_1 = F_2$. Модуль равнодействующей этой системы сил $R = F_1 - F_2 = 0$, а линия действия равнодействующей согласно (3.11) бесконечно удалена от линий действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Очевидно, что такая система сил не может быть заменена одной силой и в то же время не является уравновешенной, так как силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не направлены по одной прямой. Поэтому ее рассматривают как самостоятельный силовой фактор и называют парой сил или просто парой, обозначая $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ (рис. 3.7).

Парой называется совокупность двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил , не лежащих на одной прямой. Наряду с силой пара является таким силовым фактором, упростить который нельзя. Плоскость, в которой расположены силы пары, называется *плоскостью* *действия пары,* а расстояние между линиями действия сил пары - *плечом d пары.*

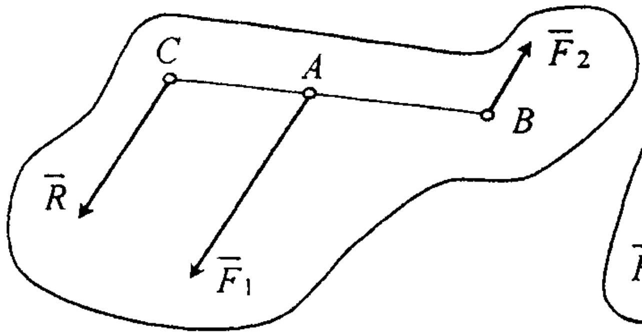


Рис. 3.6

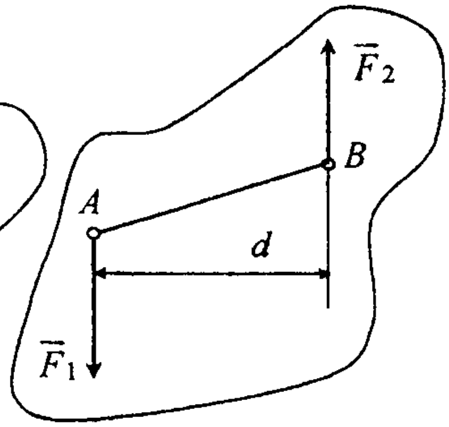


Рис. 3.7

Теорема о сумме моментов сил пары. Момент пары

Для того чтобы оценить интенсивность воздействия пары $(\vec{F}, \vec{F}')$ на твердое тело, вычислим сумму моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки О пространства (рис. 3.8).

Теорема. Сумма моментов сил, составляющих пару, относительно точки не зависит от выбора точки и равна моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

Доказательство. Проведем из точки О радиусы-векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ точек приложения сил пары, а из точки В радиус-вектор $\vec{r}$ точки А. В соответствии с определением момента силы относительно точки

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} \text{ и } \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r}_B \times \vec{F}'.$$

Тогда сумма моментов сил пары относительно точки О равна

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'.$$

Так как $\vec{F}' = -\vec{F}$, то $\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$.

Учитывая, что $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$, окончательно получим

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r} \times \vec{F}.$$

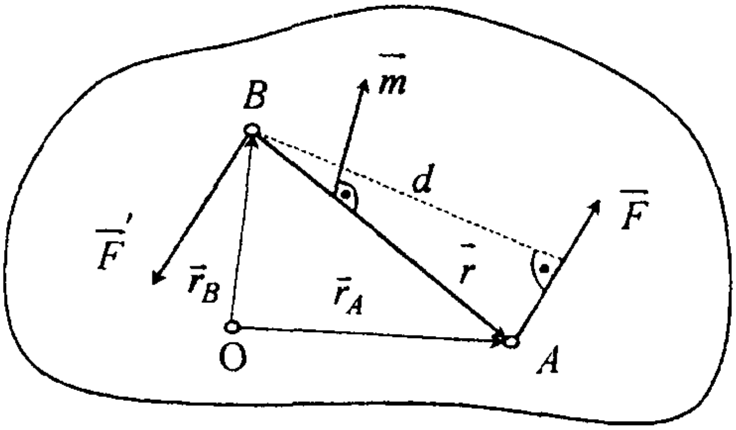


Рис. 3. 8

Моментом пары называется вектор $\vec{m}$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ точки приложения одной из сил пары относительно точки приложения другой на вектор силы:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{m} = \vec{r}' \times \vec{F}'$$

где $\vec{r}' = \overline{AB}$ на рис. 3.8 не показан.

Момент пары относительно любой точки равен моменту $\vec{m}$ этой пары. Из определения векторного произведения следует, что вектор $\vec{m}$ направлен перпендикулярно плоскости действия пары (см. рис. 3.8) в ту сторону, откуда мы видим, что пара стремится вращать тело против хода часовой стрелки, а его модуль равен произведению модуля одной из сил пары на плечо *d* пары

$$m = F\, r \sin(\vec{r} \,\widehat{,}\, \vec{F}) = F\, d.$$

Вектор момента пары ($\vec{m}$) полностью характеризует действие пары на твердое тело, так как направление вектора $\vec{m}$ определяет плоскость действия пары и направление, в котором пара стремится вращать тело, а модуль вектора $\vec{m}$ определяет интенсивность воздействия пары на тело.

Из определения момента пары следует, что вектор $\vec{m}$ может быть проведен перпендикулярно плоскости действия пары через любую точку этой плоскости, т.е. линия действия вектора момента пары не определена. Такие векторы называются свободными векторами. Таким образом,

вектор момента пары $\vec{m}$ свободный вектор.

С учетом этого, не доказывая другие известные теоремы о парах, сформулируем почти очевидные свойства пар.

Свойства пар

1. Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

2. Не изменяя действия пары на твердое тело, её можно переносить в плоскости действия пары и в параллельную ей плоскость в пределах этого тела. Это следует непосредственно из определения момента пары как свободного вектора, который параллельно самому себе можно переносить в любую точку тела.

3. Пары эквивалентны, если их моменты векторно равны

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1) \sim (\vec{F}_2, \vec{F}_2), \text{ если } \vec{m}_1 = \vec{m}_2.$$

Это очевидно, так как, не изменяя состояния свободного твердого тела, действующую на него пару $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$ можно заменить парой $(\vec{F}_2, \vec{F}_2)$, которая при условии $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$ имеет ту же (или параллельную ей) плоскость действия и стремится вращать тело в ту же сторону, с той же интенсивностью, как и пара $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что не изменяя действие пары на твердое тело, можно поворачивать пару в плоскости ее действия на произвольный угол, а также менять одновременно плечо и силы пары, оставляя неизменным момент пары.

4. Произвольная система пар эквивалентна одной паре с моментом, равным

векторной сумме моментов пар системы:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n.$$

Действительно, векторы моментов произвольной системы пар составляют произвольную систему свободных векторов ($\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$). Перенося каждый из этих векторов параллельно самому себе в произвольную точку тела (рис.3.9), получим эквивалентную систему сходящихся векторов. Складывая последовательно каждую пару векторов по правилу параллело-грамма, найдем результирующий вектор $\vec{m} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k$

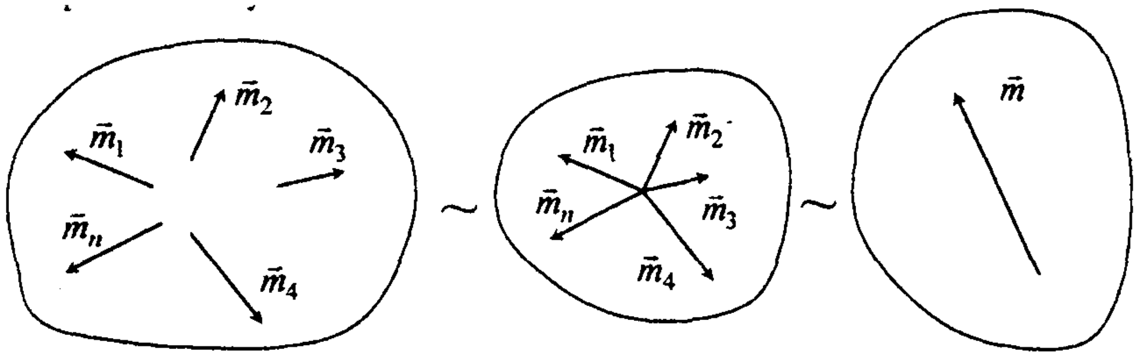


Рис. 3.9

5. Для равновесия твердого тела под действием произвольной системы пар необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма моментов пар системы равнялась нулю.

Это следует из предыдущего. Так как произвольная система пар эквивалентна одной паре с моментом $\vec{m}$, полностью определяющим действие результирующей пары на твердое тело, то условия, при которых эта пара эквивалентна нулю, сводятся к одному векторному равенству

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k = 0.$$

Проектируя последнее векторное равенство на оси прямоугольной системы координат, запишем условия равновесия произвольной системы пар в виде трех скалярных равенств

$$\sum_{k=1}^{n} m_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_{kz} = 0,$$

где m_{kx}, m_{ky}, m_{kz} - проекции вектора момента k - й пары соответственно на оси x, y, z.

Когда пары расположены в одной плоскости, векторы моментов пар, направленные перпендикулярно этой плоскости в ту или другую сторону, оказываются параллельными. В этом случае моменты пар можно складывать алгебраически.

Алгебраический момент пары вычисляется как произведение модуля одной из сил пары на плечо пары, взятое со знаком плюс, если мы видим, что пара стремится вращать тело против часовой стрелки, и минус, если по часовой стрелке $m = \pm Fd$.

Пару сил часто изображают дуговой стрелкой соответствующего направления, расположенной в плоскости пары (рис.3.10).

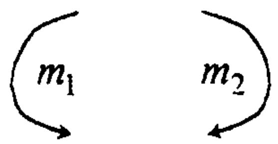


Рис. 3.10

Тогда из пп. 4 и 5, очевидно следуют пп. 6 и 7.

6. Система пар, расположенных в одной плоскости, эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов пар системы:

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

7. Для равновесия твердого тела под действием системы пар, расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю.

Лекция №3

Тема: Система произвольно расположенных сил. Введение в кинематику. Задачи кинематики.

План лекции

Система произвольно расположенных сил. Возможные случаи приведения произвольной системы сил к центру. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Сосредоточенные и распределенные силы. Равновесие сочлененной системы тел. Статически определимые и статически неопределимые системы.

Введение в кинематику. Задачи кинематики. Кинематика точки. Способы задания движения точки. Уравнения траектории точки. Определение скорости при векторном, координатном и естественном способах задания движения точки. Ускорение точки при векторном и координатном способах задания движения. Естественные оси координат Вектор кривизны, радиус кривизны траектории. Ускорение при естественном способе задания движения точки.

Основная часть лекции

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Способы задания движения точки

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются механические движения материальных точек и тел с чисто геометрической точки зрения вне зависимости от действующих на них сил.

В кинематике решаются *две основные задачи*:

1. Установление математических способов задания движения точек и тел.

2. Определение по заданному закону движение всех основных кинематических характеристик таких, как траектория движения, скорость и ускорение точки, угловые скорости и угловые ускорения тел.

При движении тела его точки в общем случае могут двигаться по различным траекториям, например, при качении колеса по прямому рельсу центр колеса движется по прямой линии, а точки обода по циклойдам. Поэтому изучение этого раздела начнем с изучения движения точки, т.е. с кинематики точки.

Задать движение точки означает найти способ определения ее положения в пространстве в любой момент времени. К основным способам задания движения относятся: естественный, координатный и векторный.

Естественный способ задания движения точки. Чтобы определить положение точки естественным способом, должны быть известны (рис.8.1):

а) траектория движения точки М (линия, которую описывает в пространстве точка при своем движении);

б) начало отсчета криволинейной координаты S - точка О;

в) направление положительного отсчета криволинейной координаты (указывается стрелкой или знаком “+”, “-”);

г) закон изменения криволинейной координаты в зависимости от времени S = S (t)

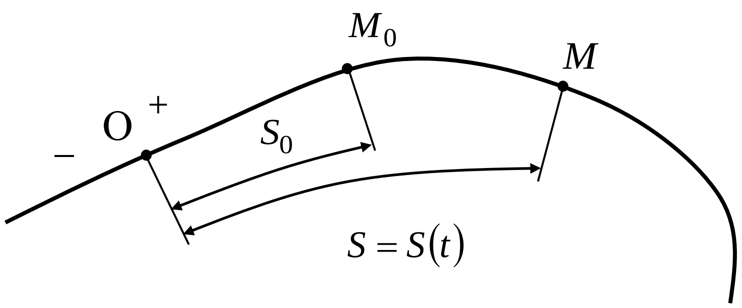


Рис. 8.1.

В начале движения при t =0 точка М может находиться не в начале отсчета О, а на некотором расстоянии S_0 от него. Это положение точки M_0 будем называть начальным положением точки.

Отсюда следует, что S не пройденное расстояние точкой за время t , а расстояние от точки М до начала отсчета О .

Пример. Точка движется по прямой линии по закону $S = 2t^2 - 3$(см). Определить положение точки через 2 с после начала движения.

Выбрав начало отсчета в точке О и положив в законе движения t =0, найдем расстояние $S_0 = -3$ см, определяющее начальное положение точки

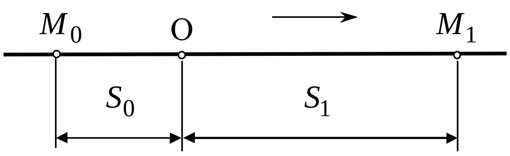


Рис.8.2

M_0 (рис. 8.2.). Через две секунды $S_1 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$ см и точка будет находиться в положении M_1.

Очевидно, что за 2 с точка пройдет расстояние в 8 см.

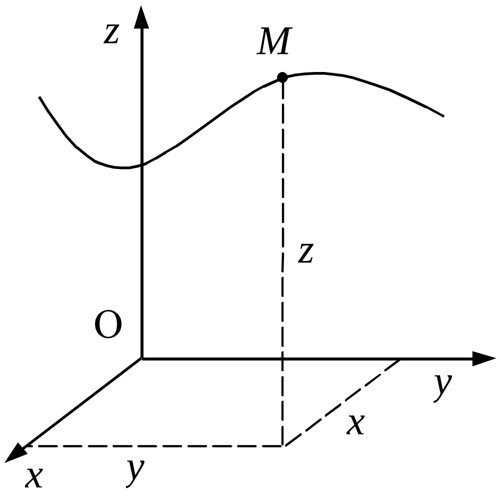


Рис. 8.3

Координатный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве можно определить с помощью декартовой системы координат О*xyz* (рис.8.3). При движении точки ее координаты будут меняться. Если известны за-коны изменения координат

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned} \qquad (8.1)$$

то можно в любой момент времени опре-делить положение точки.

Уравнения (8.1) называются уравне-ниями движения точки в декартовых ко-ординатах.

Если точка движется в плоскости или по прямой линии, то при соответствующем выборе координатной системы, ее движение может быть задано в первом случае двумя уравнениями, во втором - одним.

Уравнения (8.1) представляют собой одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме. Исключив из них параметр t (время), можно найти уравнение траектории в координатной форме.

Пример. Найти траекторию движения точки, если ее движение описывается уравнениями:

$$x = 3t^2 + 2;$$
$$y = 6t^2,$$

где x, y - выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Определим траекторию движения точки. Из второго уравнения находим $t^2 = \frac{y}{6}$. Подставив это значение в первое уравнение, получим

$$x = \frac{1}{2}y + 2 \qquad \text{или} \qquad 2x - y = 4.$$

Это уравнение прямой линии (рис.8.4).

При t =0 точка имеет координаты x_0=2, y_0=0. Из уравнения движения видно, что с течением времени координаты точки увеличиваются. Следовательно, точка движется вверх по прямой M_0M. Например, через две секунды точка будет иметь координаты x_2=14, y_2=24.

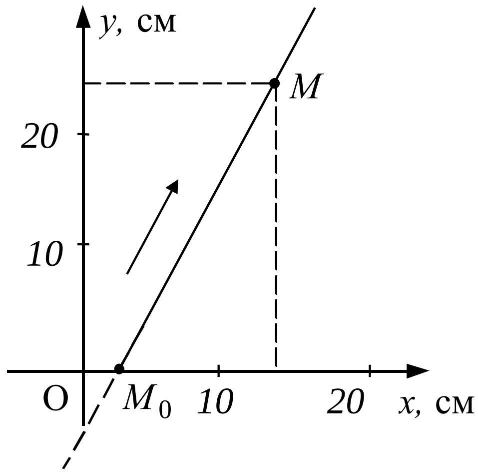


Рис. 8.4

Векторный способ задания движения точки. Если провести вектор из некоторой неподвижной точки О в точку М (рис.8.5), то данный вектор будет определять положение точки М.

Закон изменения этого вектора является векторным уравнением движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

При движении точки радиус-вектор будет менять свою величину (длину) и направление. Конец радиуса-вектора будет описывать некоторую кривую (траекторию точки М), которая называется годографом этого вектора.

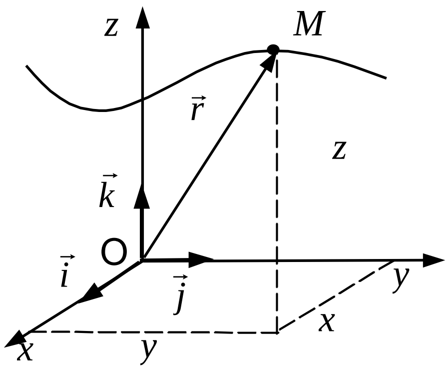


Рис. 8.5

Если начало декартовой системы координат Оxyz поместить в точку О, то радиус-вектор

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где x(t), y(t), z(t) координаты точки М.

Эта формула устанавливает связь между координатным и векторным способами задания движения.

Скорость точки

Определение скорости точки при векторном способе задания движения.

Пусть точка движется по закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис.8.6). В момент t она находится в положении М, определяемом радиусом-вектором $\vec{r}$. Через время Δt точка займет положение M_1 и будет иметь радиус-вектор $\vec{r}_1$.

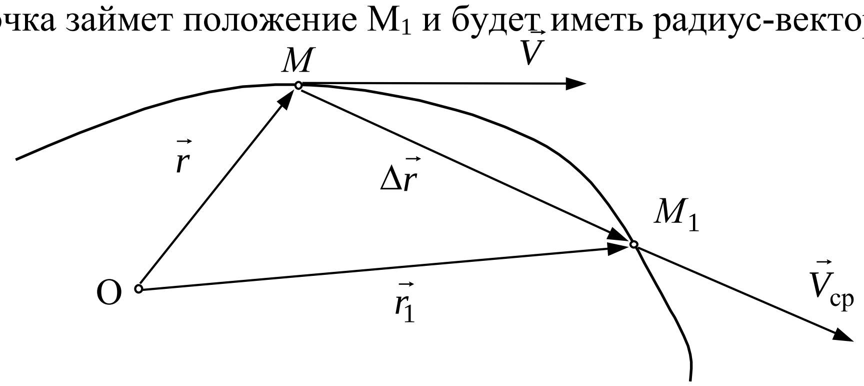


Рис. 8.6

Тогда средняя скорость точки М $\vec{V}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{r}$ - приращение радиуса-вектора за промежуток времени. Δt Вектор средней скорости направлен так же, как вектор $\Delta\vec{r}$ (см. рис. 8.6).

Если $\Delta t \to 0$, то средняя скорость $\vec{V}_{\text{ср}}$ будет стремиться к скорости точки в момент времени t . В пределе будем иметь

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Скорость точки в данный момент времени равна производной от радиуса-вектора этой точки по

времени.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так как предельным направлением вектора $\Delta\vec{r}$ является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Так как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \qquad (8.2)$$

Вектор скорости, как и всякий вектор, можно разложить на составляющие по осям координат

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}. \qquad (8.3)$$

Сравнивая (8.2) и (8.3), замечаем, что *проекции скорости точки на координатные оси.*

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Зная проекции скорости точки на оси, можно определить ее модуль и направление по формулам

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{V}; \quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{V}; \quad \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{V},$$

где α, β, γ - углы между вектором скорости и положительными направлениями осей соответственно *x*, *y*, *z*.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Пусть за время Δt радиус-вектор точки получил приращение $\Delta\vec{r}$, а криволинейная координата приращение ΔS. Тогда $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Умножив и разделив правую часть на ΔS, разобьем предел на два предела:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{r}}{dS}.$$

Модуль вектора $d\vec{r}/dS$ равен единице как предел отношения длины бесконечно малой хорды к длине стягиваемой ею дуги. Поскольку предельное положение хорды совпадает с направлением касательной к кривой в данной точке, то вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau}_0$ представляет собой единичный вектор касательный к кривой в данной точке, направленный в сторону положительного отсчета координаты S.

Следовательно, *вектор скорости точки*

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}_0 = \dot{S}\vec{\tau}_0 = V_\tau \vec{\tau}_0, \qquad (8.4)$$

где $\dot{S} = V_\tau$ - *проекция вектора скорости точки на касательную ось к ее траектории*.

Вектор скорости, как было установлено ранее, направляется по касательной к траектории движения. На ось τ он проектируется в натуральную величину, поэтому дальше индекс τ будем опускать, т. е. будет считать, что $V_\tau = V$.

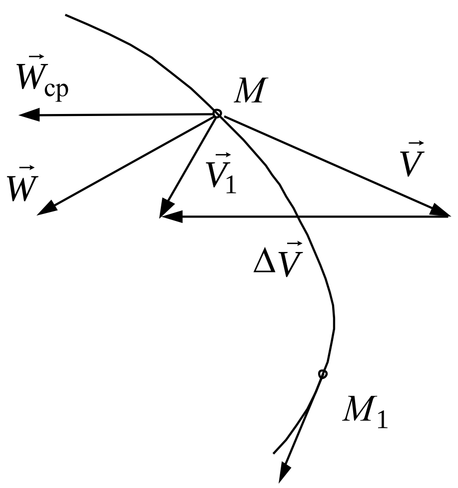


Рис. 8.7 $\vec{V}_1$

Ускорение точки

Определение ускорения точки при векторном способе задания движения

Пусть в момент t скорость точки равна $\vec{V}$, а при $t + \Delta t$ стала равной $\vec{V}_1$. Изменение скорости за время Δt будет $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Тогда среднее ускорение $\vec{W}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$. Как видно из этой формулы, вектор $\vec{W}_{\text{ср}}$ направляется так же, как вектор $\Delta\vec{V}$ (рис.8.7).

Ускорение точки в момент t находим как предельное значение $\vec{W}_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{W}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.5)$$

Ускорение точки есть первая производная по времени от вектора скорости или вторая производная от радиуса-вектора точки.

Определение ускорения точки при координатном способе задания движения

Так как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то

$$\vec{W} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{W} = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}.$$

Сравнивая последние два равенства, замечаем:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};\ W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y};\ W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z},$$

т. е. *проекции ускорения точки на оси координат* равны вторым производным по времени от соответствующих уравнений движения.

Если известны проекции вектора ускорения, можно найти его модуль:

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

и направление

$$\cos\alpha = \frac{\ddot{x}}{W};\ \ \cos\beta = \frac{\ddot{y}}{W};\ \ \cos\gamma = \frac{\ddot{z}}{W},$$

где α, β, γ - углы между вектором ускорения $\vec{W}$ и положительными направлениями осей *x*,*y*,*z* соответственно.

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 3t,\ y = -4t^2 + 10$, где *x*, *y* - выражены в сантиметрах, а t - в секундах. Определить ускорение точки. Исключив время t, получим уравнение траектории: $y = -\frac{4}{9}x^2 + 10$. Это уравнение параболы (рис.8.8).

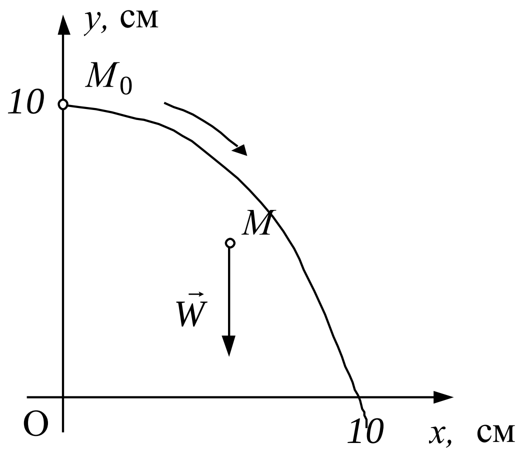


Рис. 8.8

Находим проекции вектора ускорения на оси

$$W_x = \ddot{x} = 0,\ W_y = \ddot{y} = -8 \text{ см/с}^2.$$

Тогда модуль ускорения W=8 см/с^2.

Так как проекция вектора ускорения на ось *x* равна нулю, а на ось *y* отрицательна, то $\vec{W}$ направлен вертикально вниз.

Определение ускорения точки при естественном способе задания движения.

Прежде чем приступить к определению ускорения, познакомимся с некоторыми понятиями из дифференциальной геометрии.

Естественная система координат

Пусть имеется некоторая пространственная кривая (рис.8.9).

Возьмем на этой кривой две близкие точки М и M_1. Проведем в этих точках касательные τ и τ_1. Через касательную τ проведем плоскость, параллельную касательной τ_1.

Если точку M_1 приближать к точке М, плоскость, оставаясь параллельной касательной τ_1, будет поворачиваться вокруг τ. И в момент, когда точка M_1

совпадает с точкой М, плоскость займет определенное положение I. Плоскость I называется *соприкасающейся плоскостью* кривой в точке М. Если кривая плоская, то вся кривая будет лежать в соприкасающейся плоскости.

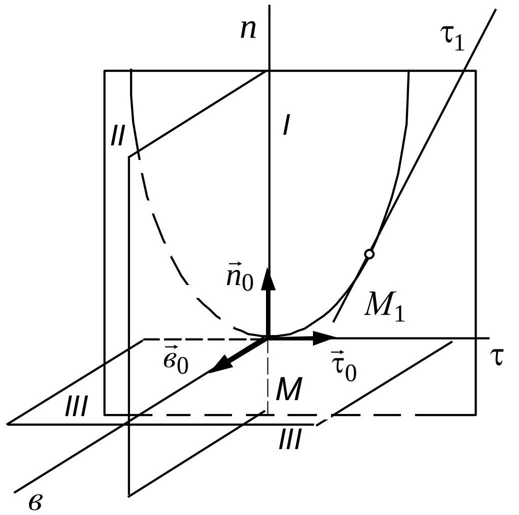


Рис. 8.9

Проведем, затем, плоскость II через точку М, перпендикулярную касательной τ. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью*. Линия пересечения соприкасающейся плоскости и нормальной плоскости называется *главной нормалью* кривой в точке М. Обозначим ее n. Нормаль, перпендикулярная главной нормали n и касательной τ, называется *бинормалью* b.

Плоскость III, проведенная через b и τ, является *касательной плоскостью* к кривой в точке М.

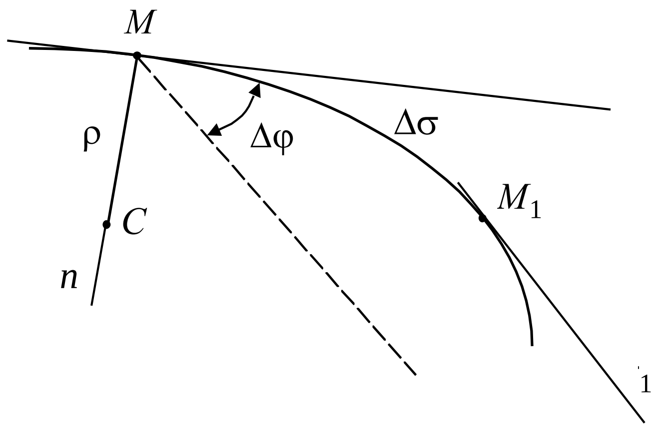
Таким образом, мы получим систему осей τ, n, b, которая называется естественной системой координат, где $\vec{\tau}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0$ ее орты.

Кривизна и радиус кривизны линии

Если точка М движется по кривой, то эти оси также будут двигаться вместе с точкой, меняя свое направление в пространстве.

Введем еще одно понятие - понятие о кривизне и радиусе кривизны линии. Возьмем на кривой две близкие точки М и M_1. (рис.8.10) и проведем в этих точках касательные τ и τ_1. Угол между этими касательными называется *углом смежности* $\Delta\varphi$.

Рис. 8.10



Отношение угла смежности к длине дуги $\Delta\sigma = MM_1$ называется средней кривизной линии $K_{ср}$ в точке M

$$K_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}.$$

Предел этого отношения при $\Delta\sigma \to 0$ называется *кривизной линии в точке* M:

$$K = \lim_{\Delta\sigma \to 0} K_{ср} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}.$$

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны линии в точке* M $\rho = \frac{1}{K}$.

Если отложить ρ из точки M по главной нормали в сторону вогнутости линии, получим точку C, которая называется *центром кривизны*.

Теперь можно приступить к определению ускорения точки. Пусть точка M движется по некоторой пространственной линии и имеет скорость $\vec{V}$ (рис.8.11).

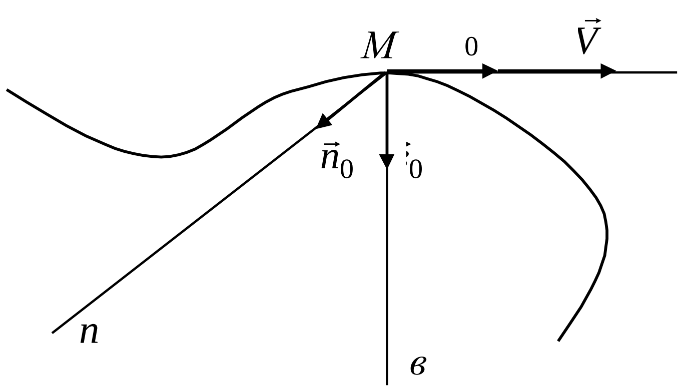


Рис. 8.11

Подставим выражение вектора скорости (8.4) в формулу (8.5):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{\tau}_0) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}_0 + V\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} \ .$$

Очевидно, ускорение состоит из двух составляющих. Первая составляющая направлена вдоль касательной τ в сторону возрастания координаты S при

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\dot{S}}{dt} = \ddot{S} > 0$$

и в противоположную сторону при $\ddot{S} < 0$. Чтобы определить модуль и направление второго слагаемого, рассмотрим производную $\frac{d\vec{\tau}_0}{dt}$. Поскольку $\vec{\tau}_0$ является вектором с постоянным модулем, то его производная по времени представляет собой вектор, перпендикулярный $\vec{\tau}_0$ и равный:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{n}_0 \, ,$$

где $\vec{n}_0$- единичный вектор главной нормали к траектории точки.

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{dS}{dt}K = \frac{\dot{S}}{\rho}, \text{ то } \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{\dot{S}}{\rho}\vec{n}_0 = \frac{V}{\rho}\vec{n}_0 \, .$$

Таким образом, ускорение точки

$$\vec{W} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}_0 + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}_0 \, .$$

Итак, ускорение точки состоит из двух составляющих. Одна составляющая направлена по касательной к траектории и называется *касательным ускорением*. Его проекция на ось τ

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Вторая составляющая направлена по главной нормали в сторону вогнутости траектории, называется *нормальным ускорением*, а его модуль

$$W_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

При естественном способе задания движения ускорение точки находим как векторную сумму двух взаимно перпендикулярных векторов касательного и нормального ускорений

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n.$$

Модуль ускорения $W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$.

Частные случаи:

- точка движется по прямой линии с переменной скоростью.

Ускорение точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} \neq 0; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0; \quad \vec{W} = \vec{W}_\tau;$$

- точка движется по кривой с постоянной по величине скоростью.

Ускорение точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = 0; \; \mathrm{W}_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0; \; \vec{W} = \vec{W}_n.$$

В первом случае скорость точки изменялась только по величине, и ее ускорение равно касательному ускорению. Во втором случае скорость точки менялась по направлению, и ускорение равно нормальному ускорению.

Поэтому касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине, а нормальное - по направлению.

Пример. $S = t^2 - 5t + 10$ м. Определить ускорение точки при t_1 =2с и t_2=3с (рис.8.12).

Скорость точки $V = \dfrac{dS}{dt} = 2t - 5$. При t_1 =2с V_1= -1м/с При t_2 =3с V_2=1м/с. Следовательно, при t_1 =2с скорость точки направлена по касательной в сторону отрицательных значений криволинейных координат, а при t_2=3с - в сторону положительных значений координат.

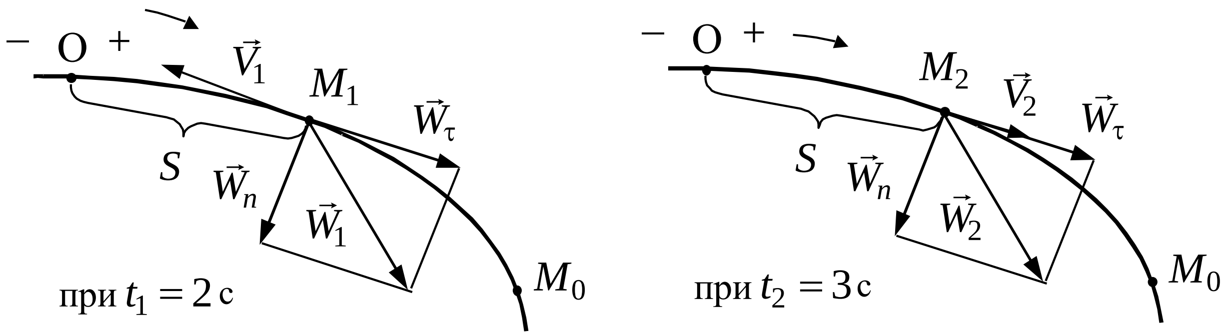


Рис. 8.12

Величина касательного ускорения точки $W_\tau = \dfrac{dV}{dt}$=2 м/с (постоянная, не зависит от времени). Так как $W_\tau > 0$, вектор $\vec{W}_\tau$ направлен по касательной в сторону положительного направления оси τ.

Нормальное ускорение:

$$\text{при } t_1\text{=2с } W_n = \frac{V_1^2}{R} = 0{,}2 \text{ м/с}^2; \text{ при } t_2\text{=3с } W_n = \frac{V_2^2}{R} = 0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Так как составляющие равны по модулю, то ускорения точки в заданные моменты времени будут равны

$$W_1 = W_2 = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} \cong 2 \text{ м/с}.$$

При t_1=2с направление касательного ускорения противоположно скорости, а при t_2=3с оба вектора имеют одинаковое направление. Следовательно, в момент t_1=2с движение точки замедленное, в момент t_2=3с – ускоренное.

Лекция №4

Тема: Простейшие виды движения твердого тела. Плоскопараллельное движение твердого тела.

План лекции

Простейшие виды движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Уравнения вращения. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной оси. Векторные выражения скорости, касательного и нормального ускорения точки вращающегося тела.

Плоскопараллельное движение твердого тела. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Уравнения движения плоской фигуры. Теоремы о скоростях точек фигуры. Свойства скоростей точек фигуры, лежащих на одной прямой.

Основная часть лекции

ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращательное.

Поступательное движение твердого тела

ПОСТУПАТЕЛЬНЫМ НАЗЫВАЕТСЯ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПРИ КОТОРОМ ЛЮБАЯ ПРЯМАЯ, ПРОВЕДЕННАЯ В ТЕЛЕ, ОСТАЕТСЯ ВО ВРЕМЯ ДВИЖЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СВОЕМУ НАЧАЛЬНОМУ ПОЛОЖЕНИЮ.

Пусть твердое тело движется поступательно относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$. Свяжем жестко с телом подвижную систему координат $Axyz$. Пусть $\vec{r}_A$ - радиус-вектор точки A, $\vec{r}_B$ - радиус-вектор точки

B, а $\vec{\rho}$ - радиус-вектор, определяющий положение точки B в подвижной системе координат (рис.9.1).

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и оно движется поступательно, то $\vec{\rho} = const$. Из рисунка следует

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho} \qquad (9.1)$$

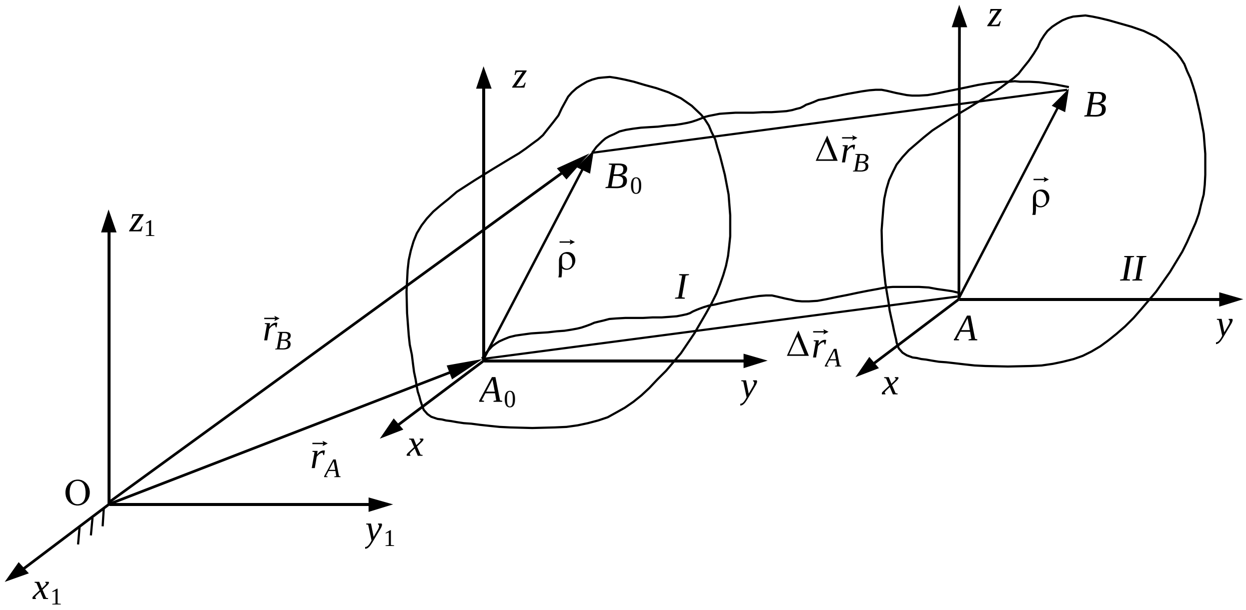
Пусть в момент времени t тело занимало положение I, а в момент $(t + \Delta t)$ - положение II. Тогда $\Delta \vec{r}_A$ будет вектором перемещения точки A, а $\Delta \vec{r}_B$ - вектором перемещения точки B за промежуток времени Δt.

Поскольку $\vec{\rho} = \overrightarrow{const}$, то отрезки A_0B_0 и AB равны и параллельны и, следовательно, фигура A_0B_0BA - параллелограмм. Таким образом, $\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B$.

Из равенства (9. 1.) и условия постоянства вектора $\vec{\rho}$ следует, что

траектории всех точек тела, движущегося поступательно, одинаковы.

Рис. 9.1



Заметим, что траекториями поступательно движущегося тела могут быть самые разнообразные кривые. Например, кузов автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямые линии. А спарник AB (рис. 9.2) при вращении OA и O_1B $\left(OA = O_1B\right)$ также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному положению). Точки же спарника движутся при этом по окружностям относительно неподвижной системы отсчета.

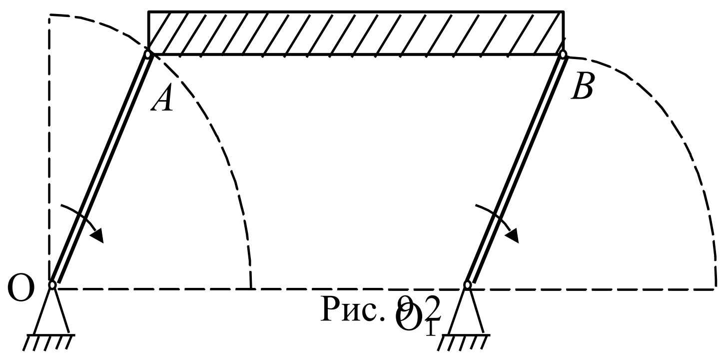


Рис. 9.2

Так как две произвольные точки тела за время Δt имеют геометрически равные перемещения, то

при поступательном движении все точки тела имеют в данный момент времени равные скорости и ускорения

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B, \quad \vec{W}_A = \vec{W}_B.$$

Поэтому для изучения поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение одной (любой) его точки (например центра тяжести C). В соответствии с этим уравнения

$$x_C = x_C(t);$$
$$y_C = y_C(t);$$
$$z_C = z_C(t)$$

будут характеризовать не только движение точки C, но и движение тела в целом.

Вращательное движение твердого тела

Вращательным называется движение твердого тела, при котором во все время движения остаются неподвижными все его точки, расположенные на некоторой прямой, называемой осью вращения. Каждая точка вращающегося тела, кроме точек, расположенных на оси вращения, движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения и имеющей центр на оси.

Положение вращающегося тела может быть определено взятым с соответствующим знаком углом φ между двумя полуплоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых I - неподвижна, другая II, жестко связана с телом (рис. 9.3). Для определения знака φ совмещают с осью вращения координатную ось A_z и считают, что $\varphi > 0$, если для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси A_z угол φ виден отложенным от неподвижной полуплоскости против часовой стрелки.

Движение, вращающегося вокруг неподвижной оси тела в любой момент времени t определяется уравнением

$$\varphi = \varphi(t),$$

которое называется уравнением вращения. Угол поворота измеряется в радианах: $1 рад = 57^\circ 17' 44''$.

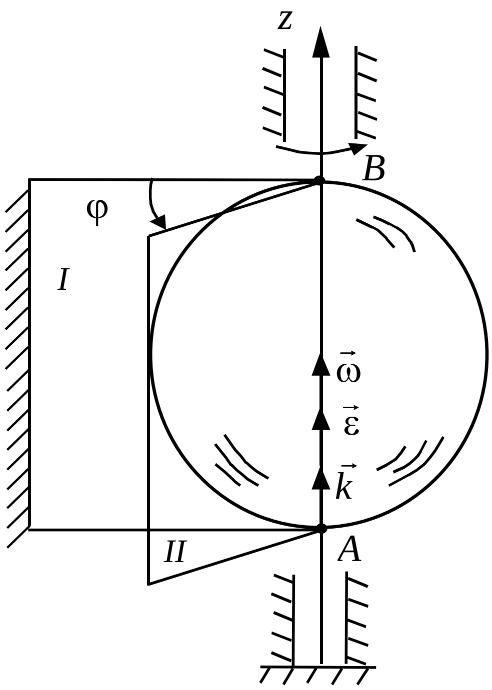


Рис. 9.3

Главными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость и угловое ускорение.

Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угол φ изменится на величину $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. *Средняя угловая скорость* тела за данный про-межуток времени $\omega_{ср} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Предел, к которому стремится $\omega_{ср}$ при Δt, стремящемся к нулю, называется угловой скоростью тела в данный момент времени t, или просто *угловой скоростью*.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Знак угловой скорости определяется знаком приращения $\Delta\varphi$, если $\Delta\varphi > 0$, то $\omega > 0$, и наоборот.

Поскольку угол φ измеряется в радианах, а время в секундах, то единица измерения угловой скорости радиан в секунду (рад/с).

В технических расчетах часто вместо угловой скорости пользуются понятием числа оборотов в минуту n. Зависимость между ω и n определяется формулой $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$.

Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Величина $\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется *средним угловым ускорением* за промежуток времени Δt. Предел, к которому стремится ε_{cp} при Δt, стремящемся к нулю, называется *угловым ус-*

корением в данный момент времени t, или просто угловым ускорением. $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$. Единица измерения углового ускорения радиан на секунду в квадрате. Если $\Delta\omega > 0$, то $\varepsilon > 0$, если $\Delta\omega < 0$, то $\varepsilon < 0$. В том случае, когда знаки угловой скорости ω и углового ускорения ε совпадают ($\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} > 0$), вращательное движение является ускоренным, а когда противоположны ($\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} < 0$) - замедленным.

Вектором угловой скорости твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, будем называть вектор, равный производной угла поворота тела по времени и направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k} = \omega\,\vec{k}.$$

Вектором углового ускорения будем называть вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k} = \varepsilon\ \vec{k}.$$

Из формулы видно, что вектор $\vec{\varepsilon}$ расположен как и вектор $\vec{\omega}$ на оси вращения. Величины ω и ε представляют проекции векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ на ось Oz.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Как уже раньше отмечалось, траекторией любой точки M вращающегося тела (кроме точек, расположенных на оси вращения) является дуга окружности, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Радиус этой окружности равен расстоянию точки до оси вращения $O_1M = R$ (рис. 9.4)

Если отсчитывать дуговую координату S точки M от ее начального положения M_0 в направлении возрастания угла φ, то закон движения точки M по дуге окружности радиуса R будет иметь вид

$$S(t) = R \cdot \varphi(t).$$

В этом случае проекция вектора скорости на касательную определяется по формуле $V = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R\varphi) = R\dfrac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi};\;\; \vec{V} = R\dot{\varphi}\,\vec{\tau}.$ Величина скорости точки V определяется по формуле $V = \omega R.$

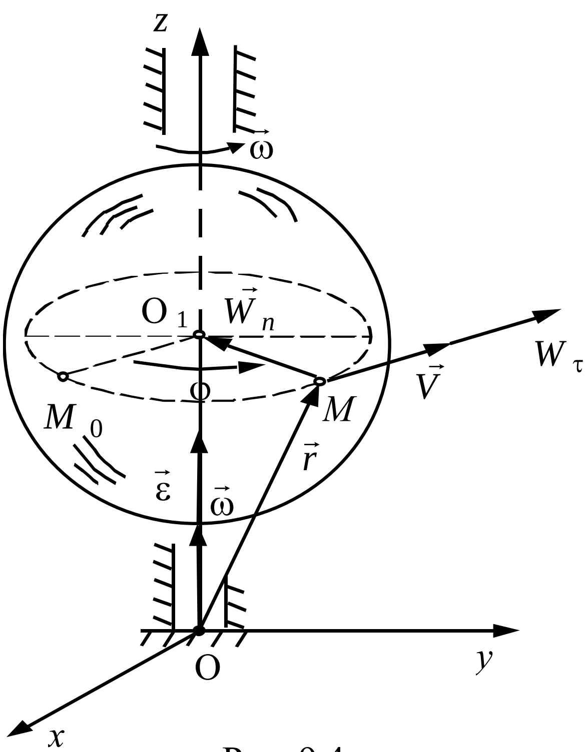


Рис. 9.4

Найдем касательное, нормальное и абсолютное ускорения точки M. Как известно из кинематики, точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\ddot{\varphi} = \varepsilon R; \quad \vec{W}_\tau = R\ddot{\varphi}\vec{\tau};$$

$$W_n = \frac{V^2}{R} = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2; \quad \vec{W}_n = \dot{\varphi}^2 R\vec{n};$$

$$\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau .$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории в сторону вектора скорости $\vec{V}$, если движение ускоренное, и в противоположную, если замедленное. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения.

Модуль абсолютного ускорения точки M будет равен

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R + \varepsilon^2 R^2};$$

$$W = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Векторные выражения скорости и ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной оси

Докажем, что скорость $\vec{V}$ любой точки M (рис.9.5) можно представить как векторное произведение

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (9.2)$$

Модуль векторного произведения равен $V = \omega r \sin\alpha$, а $r\sin\alpha = R$ и $V = \omega R$. Направление скорости $\vec{V}$ совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$ (см. рис.9.5).

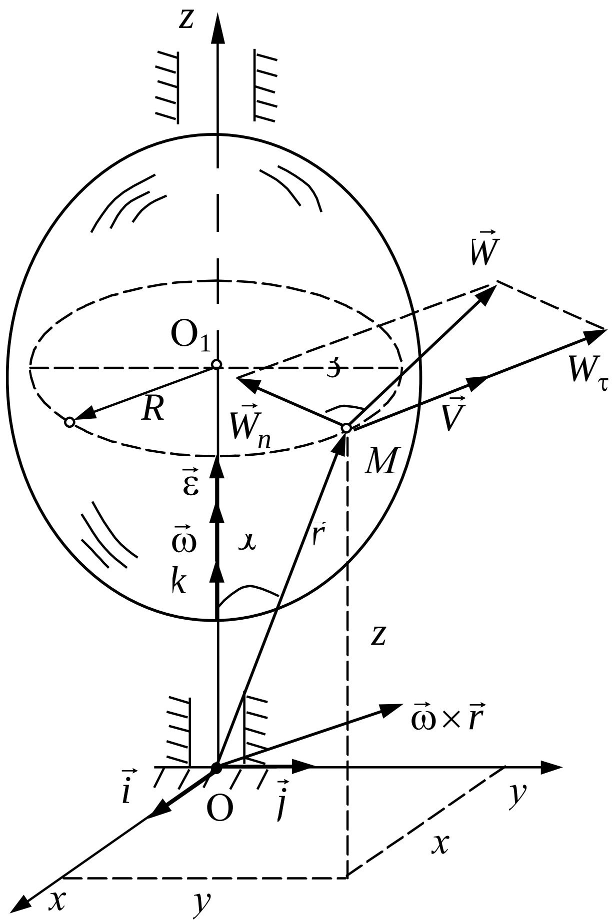


Рис. 9.5

Так как $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ и вектор $\vec{r}$ изменяется со временем только по направлению, то $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Пусть ось O*z* в системе O*xyz* совпадает с осью вращения, тогда имеем

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\text{или} \quad V_x = -\omega_z y, \quad V_y = \omega_z x, \quad V_z = 0.$$

Последние равенства дают проекции вектора скорости точки $M(x, y, z)$ вращающегося твердого тела на выбранные оси координат.

Выражение для абсолютного ускорения $\vec{W}$ можно получить, дифференцируя равенство (9.2):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так, как

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V};$$

то

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки и будет совпадать по направлению с вектором скорости, если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ сонаправлены, и противоположен $\vec{V}$, если $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ направлены в противоположные стороны. Эта составляющая ускорения называется вектором касательного ускорения, т.е. $\vec{W}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$. Величина этого ускорения равна

$$W_\tau = \varepsilon R.$$

Векторное произведение $\vec{\omega}\times\vec{V}$ представляет собой вектор, расположенный в плоскости, перпендикулярной оси вращения и направленный по радиусу R от точки M к точке O_1, т.е. по нормали к траектории. Величина этого ускорения равна $W_n = \omega V \sin 90^o = \omega V = \omega^2 R$. Вектор $\vec{W}_n = \vec{\omega}\times\vec{V}$ как по величине, так и по направлению выражает собой нормальное ускорение. Учитывая, что $\vec{W}_n \perp \vec{W}_\tau$, модуль абсолютного ускорения точки M будет

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,.$$

Направление $\vec{W}$ определяется углом β

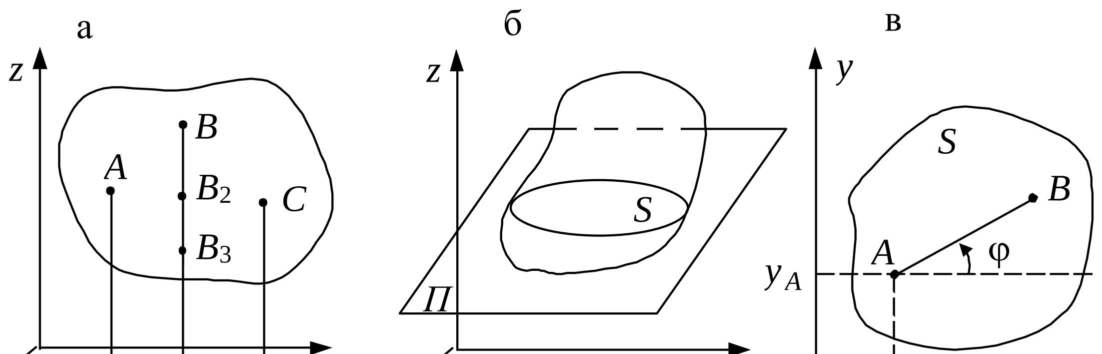
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{W_\tau}{W_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\,.$$

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Уравнения плоскопараллельного движения

Среди разнообразных движений твердого тела одним из самым распространенным в технике является движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной (реальной или воображаемой) плоскости. Такой вид движения в механике называется *плоскопараллельным*, или *плоским*. Простейшим примером является перемещение книги по поверхности стола: все точки тела (книги) движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости (крышке стола).

Проанализируем произвольное плоскопараллельное движение твердого тела, определим его особенности и установим основные расчетные формулы. Пусть все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости О*xy* (рис. 10.1,а).



Тогда, согласно определению, расстояния от произвольных точек тела A, B, C до плоскости Oxy остаются во все время движения неизменными: $AA_1 = \mathrm{const}, BB_1 = \mathrm{const}, CC_1 = \mathrm{const}$. Это говорит о том, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 движутся поступательно, и точки тела, расположенные на одном перпендикуляре к плоскости Oxy (точки B_1, B_2, B_3), будут описывать одинаковые траектории, иметь одинаковые скорости и ускорения. Следовательно, задачу изучения движения тела в трехмерном пространстве можно заменить задачей исследования движения плоской фигуры S, полученной в результате сечения тела плоскостью $\Pi \parallel \mathrm{O}xy$, в ее плоскости Π (рис. 10.1,б). По известному движению этой фигуры можно будет судить о движении твердого тела в целом. Далее положение плоской фигуры в ее плоскости определяется положением двух любых ее точек или прямой, принадлежащей этой фигуре. Поэтому положение плоской фигуры относительно опорной системы координат Oxy однозначно определяется заданием трех величин координат x_A, y_A точки A и угла φ (рис. 10.1,в). Следовательно, функциональные зависимости

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t)$$

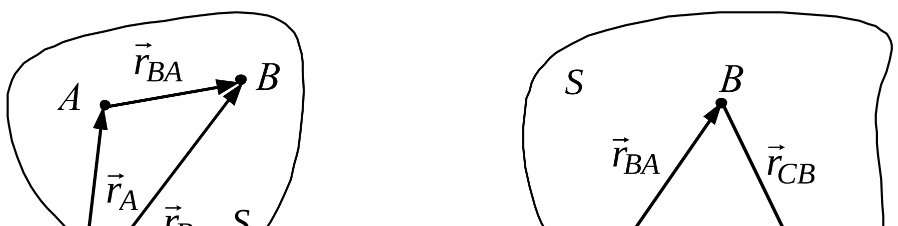
являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела. Так как число уравнений три, то в общем случае тело имеет три степени свободы. В частных случаях тело, участвующее в плоскопараллельном движении, может иметь две или одну степени свободы.

Распределение скоростей при плоскопараллельном движении

Пусть $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ радиусы-векторы произвольных точек плоской фигуры A и B, проведенные из некоторого центра O. Из рис. 10.2, а следует, что $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$. Продифференцировав это равенство во времени, запишем $d\vec{r}_B / dt = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$. Здесь $\dot{\vec{r}}_B = \vec{V}_B$ - скорость точки B, $\dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A$ - скорость точки A и $\dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{V}_{BA}$. Поскольку $\left|\vec{r}_{BA}\right| = \text{const}$, то $\dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{BA}$.

Вектор $\vec{V}_{BA}$ называется вращательной скоростью точки B вокруг точки A, которую будем считать полюсом, а $\vec{\omega}_A$ - угловая скорость этого вращательного движения. В силу определения плоскопараллельного движения векторы $\vec{V}_B, \vec{V}_A$ и $\vec{V}_{BA}$ лежат в плоскости движущейся плоской фигуры, а $\vec{\omega}_A$ перпендикулярен этой плоскости. Выберем три произвольные точки плоской фигуры A, B и C (рис. 10.2,б). В силу полученного выше векторного равенства имеем $\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{CA}$. Аналогично, приняв за полюс точку B, пишем $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{CB}$ или $\vec{V}_c = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{CB}$. Учитывая, что $\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{CB}$ и вычитая из предпоследнего равенства последнее, имеем $\left(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B\right) \times \vec{r}_{CB} = 0$. Очевидно, что уравнению удовлетворяет только условие $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$. Последовательно присоединяя к трем рассматриваемым точкам другие, получим, что это условие распространяется на любые точки плоской фигуры $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}_C = \ldots = \vec{\omega}$. Следовательно, $\vec{\omega}$ является угловой скоростью плоской фигуры.

а б



Итак, *формула распределения скоростей* точек твердого тела для точек плоской фигуры A и B имеет вид

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB}$$

(10.1)

Вращательная скорость точки B вокруг полюса перпендикулярна $\overrightarrow{AB}$ и ее модуль равен $V_{BA} = \omega AB$. На рис. 10.2, в, г показано как, зная скорость точки A и угловую скорость ω, можно найти скорость точки B.

> Скорость любой точки плоской фигуры равна векторной сумме скорости полюса и скорости исследуемой точки при вращении фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через полюс.

Таким образом, плоскопараллельное движение можно рассматривать как наложение двух движений: поступательного, зависящего от выбора полюса, и вращательного, в котором угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.

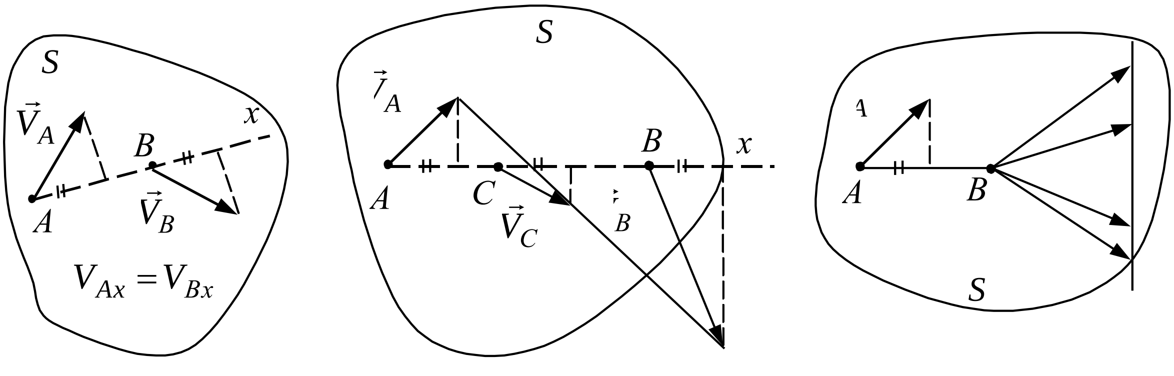
Из формулы (10.1) можно сделать следующие выводы:

- проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой (рис. 10.3,а);

- концы векторов скоростей прямолинейного отрезка расположены на одной прямой (рис. 10.3,б);

- если известна скорость одной точки плоской фигуры, то можно построить годограф возможных скоростей другой точки (рис.10,в), которые полезны для изучения плоскопараллельного движения.

а б в



Мгновенный центр скоростей

Значительного упрощения в понимании картины распределения скоростей при плоскопараллельном движении твердого тела можно получить, если в качестве полюса выбрать точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется движущаяся точка, проходящая в каждый момент времени через точку тела (плоской фигуры), скорость которой в этот момент равна нулю.

Теорема. Во всяком непоступательном движении плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент существует точка, скорость которой в этот момент обращается в нуль и эта точка будет единственной.

Доказательство. Пусть в некоторый момент времени $\vec{\omega}$ - угловая скорость плоской фигуры, а $\vec{V}_A$ - скорость ее точки, которую считаем известной (рис. 10.4, а).

Выполним геометрическое построение: из точки A проведем прямую AL в направление вектора $\vec{V}_A$ и повернем ее на угол $\pi/2$ в сторону вращения плоской фигуры. На полученном луче отложим отрезок $AC_V = V_A/\omega$. Для точки C_V будем иметь $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + \vec{V}_{C_V A}$ Вектор $\vec{V}_{C_V A}$ направлен противоположно $\vec{V}_A$. Его модуль равен $V_{C_V A} = \omega \cdot AC_V$. Следовательно, $\vec{V}_{C_V A} = -\vec{V}_A$ и $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A - \vec{V}_A = 0$, т.е. точка C_V является МЦС. Совершенно очевидно, что эта точка единственная. Действительно, если, например, точка C также мгновенный центр скоростей, то приняв ее за полюс, получим скорость точки C_V $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CC_V} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CC_V} \neq 0$, что противоречит доказанному выше.

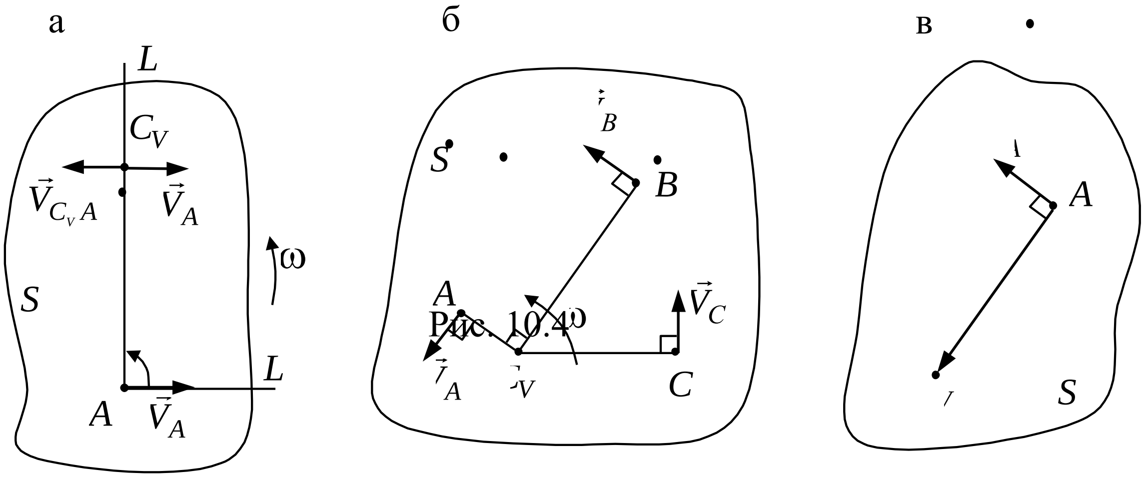
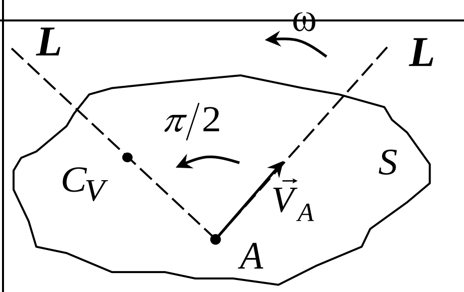
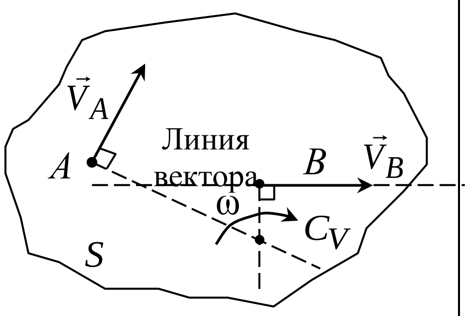


Рис. 10.4

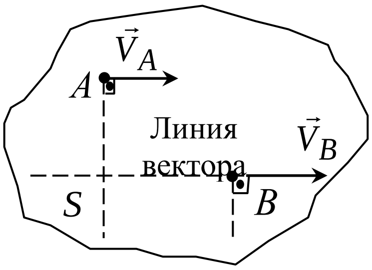
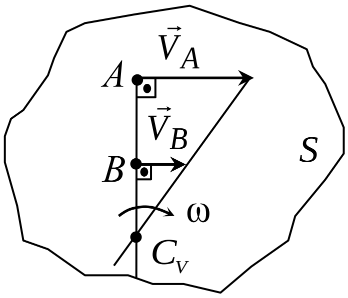
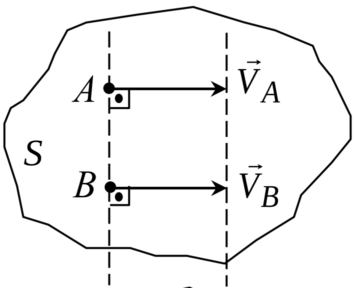
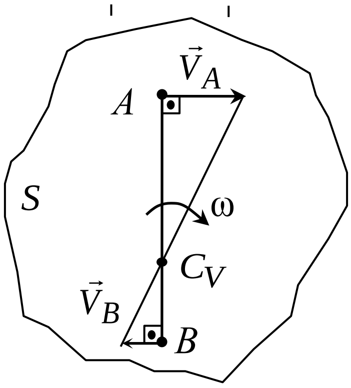
Теперь, принимая за полюс МЦС, будем иметь для любых точек плоской фигуры $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Отсюда следует, что распределение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении в каждый момент точно такое же, как и при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет прямая, проходящая через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения, которая называется *мгновенной осью вращения тела* (рис. 10.4, б). Другими словами, в каждый момент времени движение представляет собой вращение вокруг мгновенной оси. Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему эту точку с МЦС, и направлена в сторону вращения фигуры. Можно показать, что радиус-вектор точки C_V, проведенный из полюса A, определяется по формуле $\vec{r}_{AC_V} = \vec{\omega} \times \vec{V}_A / \omega^2$ (рис. 10.4,в).

Различные способы определения положения мгновенного центра скоростей показаны в табл. 1.

Таблица 1

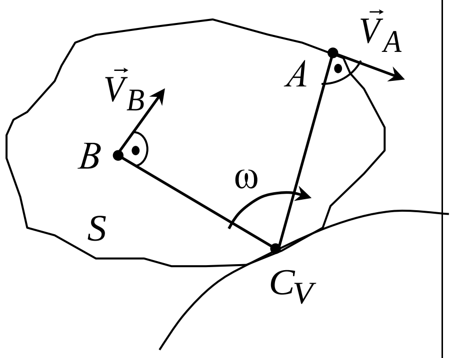
Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
Величина, и направление скоростей какой – либо точки плоской фигуры и угловая скорость		$AC_V = \dfrac{V_A}{\omega}$
Величина и направление скорости одной точки и линии вектора скорости другой точки плоской фигуры || – $\vec{V}_A$ $\vec{V}_B$		$\dfrac{V_A}{AC_V} = \dfrac{V_B}{BC_V} = \omega$

Продолжение табл. 1

Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
– $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$		$V_A = V_B, \ \omega = 0$
Величины и направления скоростей двух точек плоской фигуры, точки расположены на прямой, перпендикулярной скоростям скорости направлены в одну сторону и неравны скорости направлены в одну сторону и равны		$\dfrac{V_A}{AC_V} = \dfrac{V_B}{BC_V} = \omega$ $\omega = \dfrac{V_A - V_B}{AB}$ $\omega = 0$

скорости направлены в разные сторо-ны		$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$$ $$\omega = \frac{V_A + V_B}{AB}$$

Окончание табл. 1

Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
Плоская фигура катит-ся без проскальзывания по неподвижной поверхности		$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$$

Геометрическое место последовательных положений МЦС относительно неподвижной системы координат называется *неподвижной центроидой*, а относительно системы координат, жестко связанной с телом, - *подвижной центроидой*. Можно показать, что при движении тела подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения.

Лекция №5

Тема: Плоскопараллельное движение твердого тела. Сложное движение точки.

План лекции

Плоскопараллельное движение твердого тела. Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определение ускорений точек плоской фигуры. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений. Способы определения мгновенного центра ускорений. Определение ускорения точек с помощью мгновенного центра ускорений.

Сложное движение точки. Относительное, переносное и абсолютное движение точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Ускорение Кориолиса, причина его появления. Модуль и направление ускорения Кориолиса. Частный случай поступательного переносного движения.

Основная часть лекции.

Распределение ускорений при плоскопараллельном движении

Для определения ускорения произвольной точки плоской фигуры воспользуемся полученным выше выражением скорости точки B $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ и найдем ускорение точки B как производную по времени от скорости $\vec{V}_B$

$$\vec{W}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{\mathrm{dt}} \times \vec{r}_{BA}.$$

Вводя обозначения, последнее равенство можно переписать так:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{Bp} + \vec{W}_{BA}^{oc},$$

где $\vec{W}_A = d\vec{V}_A / dt$ - ускорение полюса,

$\vec{W}_{BA}^{Bp} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}$ - вращательное ускорение точки B,

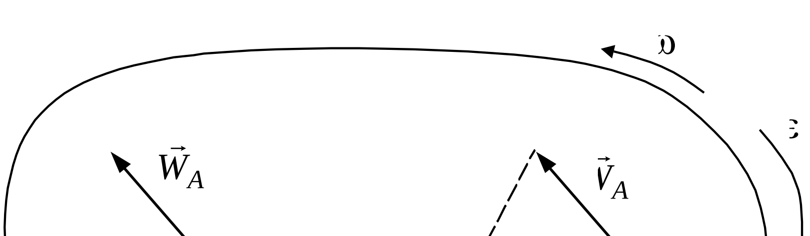
$\vec{W}_{BA}^{oc} = \vec{\omega} \times \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}\right)$ - осестремительное (или центростремительное) ускорение точки B.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно векторной сумме трех ускорений: ускорения полюса, осестремительного и вращательного ускорений исследуемой точки при вращении плоской фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через полюс.

В силу определения плоскопараллельного движения $\vec{\omega} \perp \vec{r}_{BA}$ и $\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}_{BA}$. Поэтому все векторы $\vec{W}_B, \vec{W}_A, \vec{W}_{BA}^{Bp}$ и $\vec{W}_{BA}^{oc}$ лежат в плоскости движущейся фигуры. На рис.10.5 показано геометрическое построение вектора $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}$, где $\vec{W}_{BA} = \vec{W}_{BA}^{Bp} + \vec{W}_{BA}^{oc}$.

Вращательное ускорение $\vec{W}_{BA}^{Bp} \perp \overrightarrow{AB}$, его величина $W_{BA}^{Bp} = \varepsilon\, AB$. Осестремительное ускорение $\vec{W}_{BA}^{oc}$ направлено по AB от точки B к точке A, его модуль $W_{BA}^{oc} = \omega^2 AB$. Очевидно, что

$$W_{BA} = \sqrt{\left(W_{BA}^{Bp}\right)^2 + \left(W_{BA}^{oc}\right)^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$



.Мгновенный центр ускорений

Введем в рассмотрение угол α, образованный $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{W}_{BA}$ и откладываемый от вектора $\vec{W}_{BA}$ в направлении углового ускорения. Из рис. 10.5 видно, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{W_{BA}^{Bp}}{W_{BA}^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad 0 \le \alpha \le \pi/2$$

угол не зависит от выбора полюса и в каждый момент времени он одинаков для всех точек фигуры. Далее введем понятие мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений (МЦУ) называется движущаяся точка, проходящая в каждый момент времени через точку тела (плоской фигуры), ускорение которой в этот момент равно нулю.

Теорема. При плоскопараллельном движении тела в случае, когда $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не равны одновременно нулю, в каждый момент времени можно найти точку плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю и эта точка будет единственной.

Доказательство. Пусть $\vec{W}_A$ - ускорение одной из точек плоской фигуры (рис. 10.6, а).

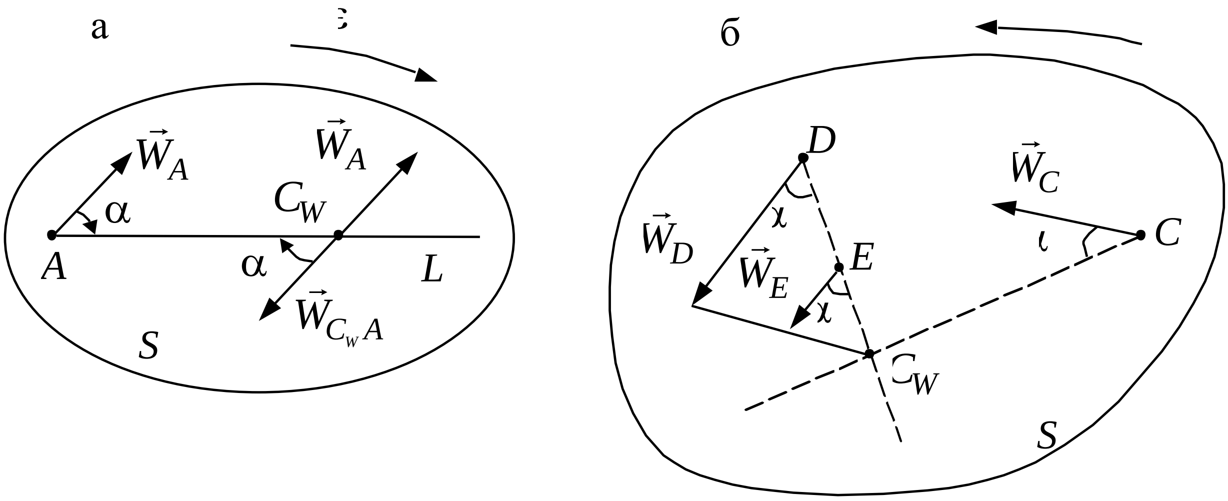


Рис. 10.6

Проведем через точку A полупрямую AL под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\,\varepsilon/\omega^2$, отсчитываемым от $\vec{W}_A$ в направлении углового ускорения. Далее отложим на

AL отрезок $AC_W = W_A \big/ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Найдем ускорение точки C_W. Выбрав за полюс точку A, запишем $\vec{W}_{C_W} = \vec{W}_A + \vec{W}_{C_W A}$.

Поскольку $W_{C_W A} = C_W A \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_A$, а векторы $\vec{W}_A, \vec{W}_{C_W A}$ составляют с AL одинаковый угол, равный α, то $\vec{W}_{C_W A} = -\vec{W}_A$ и, следовательно, $\vec{W}_{C_W} = 0$.

Вычислим теперь ускорение произвольной точки, приняв $\vec{W}_{C_W}$ за полюс. Так как, $\vec{W}_{C_W} = 0$ то

$$\vec{W}_C = \vec{W}_{CC_W}; \quad W_C = C_W C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$
$$\vec{W}_D = \vec{W}_{DC_W}; \quad W_D = C_W D \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$
$$\vec{W}_E = \vec{W}_{EC_W}; \quad W_E = C_W E \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

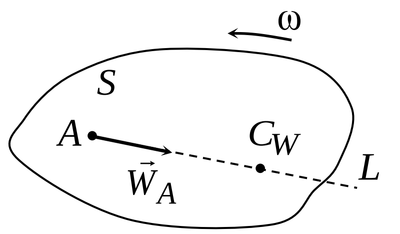
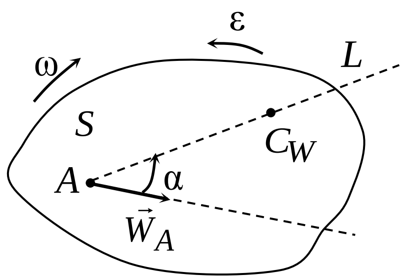
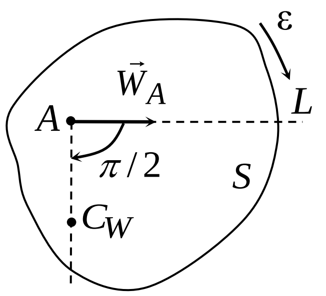
а направления ускорений определяются углом $\alpha = \operatorname{arctg} \varepsilon \big/ \omega^2$ (рис. 10.6, б). Таким образом, если в качестве полюса принять мгновенный центр скоростей, то ускорение любой точки тела найдется по тому же правилу, что и ускорение точки при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет прямая, перпендикулярная плоскости движения и проходящая через МЦУ. Следовательно, зная положение МЦУ и ускорение какой-нибудь одной точки плоской фигуры, можно построить векторы ускорений всех ее точек.Основные способы определения положения МЦУ показаны в табл. 2.

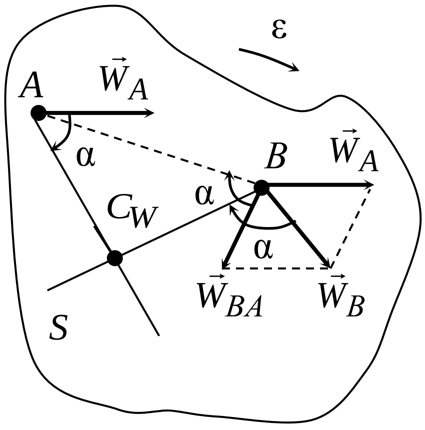
Некоторые кинематические свойства мгновенных центров скоростей и ускорений

Не следует смешивать понятия мгновенных центров скоростей и ускорений - это, вообще говоря, разные точки. Также надо различать скорость $\vec{V}^*_{C_V}$ и ускорение $\vec{W}^*_{C_W}$ движение МЦС и скорость $\vec{V}_{C_V}$ и ускорение

$\vec{W}_{C_W}$ точки плоской фигуры (как известно $V_{C_V} = 0$), с которой в данный момент времени совпадает мгновенный центр. Аналогичные рассуждения имеют место и для МЦУ. Найдем скорость, с которой МЦС движется относительно опорной системы координат.

Таблица 2

Известные параметры	Способы нахождения МЦУ	Расчетная формула
Величина, и направление ускорения какой либо точки плоской фигуры и ее угловая скорость и угловое ускорение		
– $\varepsilon \neq 0, \quad \omega \neq 0$	 	$AC_W = \dfrac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ $\alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$
– $\varepsilon \neq 0, \quad \omega = 0$		$AC_W = \dfrac{W_A}{\varepsilon}$
– $\varepsilon = 0, \quad \omega \neq 0$		$AC_W = \dfrac{W_A}{\omega^2}$

Величины и направления ускорений двух точек плоской фигуры		$\dfrac{W_A}{AC_W} = \dfrac{W_B}{BC_W}$

Для этого продифференцируем по времени векторное равенство $\vec{r}_{C_V} = \vec{r}_A + \vec{r}_{C_V A} = \vec{r}_A + \dfrac{\vec{\omega}\times\vec{V}_A}{\omega^2}$ (рис. 10.7). В результате получим

$$\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + \frac{\vec{\omega}\times\vec{W}_A - \vec{\varepsilon}\times\vec{V}_A}{\omega^2} . \tag{10.2}$$

Пользуясь произволом в выборе точки A, предположим, что в некоторый момент времени точка A плоской фигуры совпадает с МЦС. Тогда

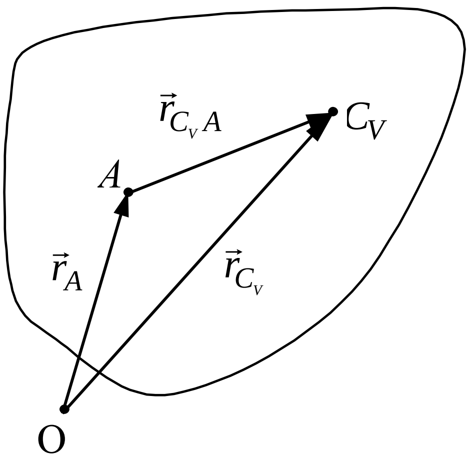


Рис. 10.7

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{C_V} = 0,\ \vec{W}_A = \vec{W}_{C_V}$$ и

$$\vec{V}^{\,*}_{C_V} = \vec{\omega}\times\vec{W}_{C_V} \Big/ \omega^2$$ или

$\vec{W}_{C_V} = \vec{V}^{\,*}_{C_V} \times \vec{\omega}$. Последняя формула определяет величину и направление ускорения точки плоской фигуры, которая в данный момент времени является МЦС. Интересно отметить, что $\vec{W}_{C_V}$ не зависит от углового ускорения плоской фигуры. Вновь вернемся к формуле (10.2) и положим, что точка A совпадает с МЦУ. В силу $\vec{V}_A = \vec{V}_{C_W}$, $\vec{W}_A = \vec{W}_{C_W} = 0$ пишем $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_{C_W} - \vec{\varepsilon}\times\vec{V}_{C_W} \Big/ \omega^2$ или

$$\vec{V}_{C_W} = \frac{\omega^2\left[\omega^2\vec{V}^*_{C_V} + \vec{\varepsilon}\times\vec{V}^*_{C_V}\right]}{\varepsilon^2+\omega^4}.$$

Если $\varepsilon = 0\,(\omega \neq 0)$ то $\vec{V}_{C_W} = \vec{V}^*_{C_V}$. Следовательно, при равномерном вращении скорость той точки плоской фигуры, которая в данный момент времени совпадает с МЦУ, векторно равна скорости движения МЦС.

Сложное движение точки

1. Абсолютное, относительное и переносное движения точки

Довольно часто встречается движение точки, состоящее из нескольких движений. Вот два наглядных примера.

Первый. Наблюдатель, стоящий на высоком берегу реки, смотрит на прямолинейно движущийся теплоход, на верхней палубе которого по окружности ходит пассажир (рис. 10.1). Наблюдатель же видит довольно сложную «загогулину» (пунктирная линия) как результат сложения прямолинейного движения и движения по окружности.

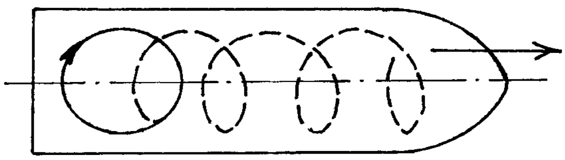


Рис. 10.1

Второй пример. Стержень вращается в плоскости вокруг оси *O*, а по нему движется колечко *M* (рис. 10.2). Неподвижный наблюдатель увидит движение колечка по спирали.

Эти движения имеют соответствующие названия: абсолютное, относительное и переносное.

Абсолютным движением называется движение точки, которое видит неподвижный наблюдатель («загогулина» и спираль в наших примерах).

Относительным движением – движение точки, которое увидел бы наблюдатель,

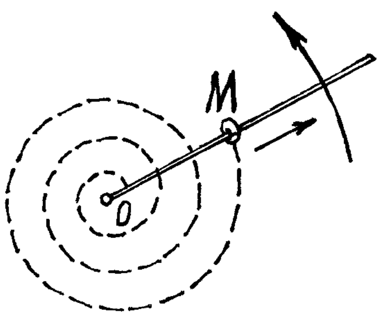


Рис. 10.2

двигаясь вместе со средой (с теплоходом и со стержнем). В наших примерах – это движение пассажира по окружности на палубе теплохода и прямолинейное скольжение колечка по стержню.

Переносное движение – это движение среды, по которой движется точка (прямолинейное движение теплохода и вращение стержня).

При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того чтобы неподвижный наблюдатель увидел относительное движение точки, надо остановить переносное движение. Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае при определении переносного движения точки обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того, в какой момент будет остановлено относительное движение, от того, где точка находится на среде в этот момент. Так как, вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять *переносное движение точки как абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.*

Так, переносное движение пассажира – это движение той точки палубы, на которой находится пассажир. И в примере с колечком – это движение той точки стержня, где находится колечко в данный момент (движение по окружности радиусом *OM*).

Ещё несколько определений.

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки ($\vec{v}, \vec{W}$) будем называть скорость и ускорение при абсолютном движении.

Относительной скоростью и относительным ускорением ($\vec{v}_r, \vec{W}_r$) – скорость и ускорение точки в относительном движении.

Переносная скорость и переносное ускорение точки ($\vec{v}_e, \vec{W}_e$) – это абсолютная скорость и абсолютное ускорение той точки среды, с которой совпадает движущаяся точка в данный момент времени.

Рис.10.3

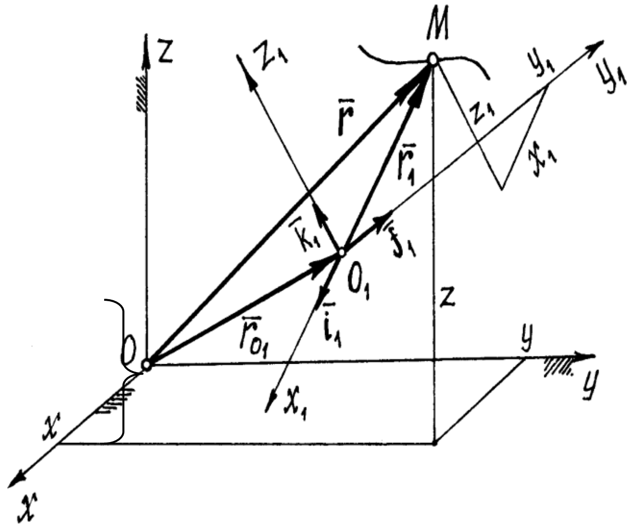
Все эти движения можно попробовать определить с помощью координат и векторным способом.

На рис.10.3 показаны неподвижные оси x, y, z и движущиеся оси $x_1; y_1; z_1$.

Конечно, абсолютное движение точки M определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\}$$

(10.1)



Относительное движение – в движущихся осях уравнениями

$$x_1 = x_1(t),$$
$$y_1 = y_1(t),$$
$$z_1 = z_1(t).$$

(10.2)

Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще. Так как, по определению, переносное движение точки M – это движение относительно неподвижных осей той точки системы $O_1x_1y_1z_1$, с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки подвижной системы движутся по-разному.

Абсолютное движение точки *M* определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а относительное движение радиусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$. Радиус-вектор $\vec{r}_{O_1}$ определяет движение начала подвижных осей O_1 (но не переносное движение точки *M*!).

2. Определение абсолютной скорости точки

Абсолютная скорость точки $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Но $\vec{r} = \vec{r}_{O_1} + \vec{r}_1$ (см. рис. 10.3),

где $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$, а $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – орты подвижных осей. Поэтому

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) =$$

$$= \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt} \qquad (10.3)$$

(орты $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – переменные, так как направление их меняется, функции времени *t*).

Используя метод остановки, с помощью выражения (10.3) можно определить относительную скорость точки и переносную. Действительно, остановив переносное движение, движение осей x_1, y_1, z_1, то есть, положив $\vec{r}_{O_1} = \text{const}$, $\vec{i}_1 = \text{const}$, $\vec{j}_1 = \text{const}$, $\vec{k}_1 = \text{const}$, из уравнения (10.3) получим

$$\vec{v}_r = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1. \qquad (10.4)$$

А остановив относительное движение точки *M* ($x_1 = \text{const}$, $y_1 = \text{const}$, $z_1 = \text{const}$), получим её переносную скорость

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}.$$

Поэтому из формулы (10.3) следует, что абсолютная скорость точки есть векторная сумма двух скоростей – переносной и относительной

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \qquad (10.5)$$

<u>Пример 10.1.</u> Колечко M движется по вращающемуся стержню так, что $OM = s = 3t^2$ (см) и $\varphi = 2t$ (рад) (рис. 10.4).

Ранее было установлено, что траектория относительного движения – прямая линия, совпадающая со стержнем, и движение это определяется уравнением $s = s(t)$. Траектория точки M при переносном движении в момент времени t – окружность радиусом $OM = s$. Поэтому относительная скорость $v_r = \dot{s} = 6t$ см $\cdot$ с$^{-1}$ и направлена по касательной к траектории вдоль стержня (см. рис. 10.4). Переносная скорость колечка, как при вращении вокруг оси, $v_e = OM \cdot \omega = s\dot{\varphi} = 3t^2 \cdot 2 = 6t^2$ ñì $\cdot$ ñ$^{-1}$. Направлен век[illegible]ой скорости по касательной к траектории точки при переносном движении, перпендикулярно стержню. Абсолютная скорость колечка $\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Модуль ее, так как $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$,

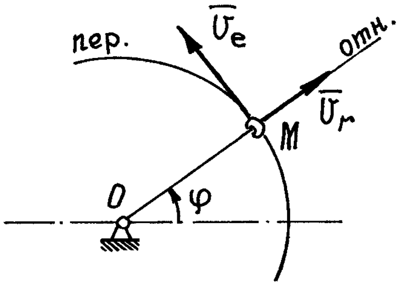


Рис. 10.4

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 6t\sqrt{1+t^2}\ \text{ñì} \cdot \text{ñ}^{-1}.$$

3. Определение абсолютного ускорения точки. Ускорение Кориолиса

Ускорение точки – первая производная по времени от вектора скорости. Поэтому абсолютное ускорение, используя формулу (10.3):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{O_1}}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right) +$$

$$+ x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}. \qquad (10.6)$$

Воспользовавшись правилом остановки, можем найти относительное и переносное ускорения точки.

Положив в (10.6) $\vec{r}_{O_1} = \text{const},\ \vec{i}_1 = \text{const},\ \vec{j}_1 = \text{const},\ \vec{k}_1 = \text{const}$, получим относительное ускорение

$$\vec{W}_r = \frac{d^2 x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2 y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2 z_1}{dt^2}\vec{k}_1. \qquad (10.7)$$

При $x_1 = \text{const},\ y_1 = \text{const},\ z_1 = \text{const}$ получим переносное ускорение

$$\vec{W}_e = \frac{d^2\vec{r}_{O_1}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}.$$

Поэтому из формулы (10.6) следует, что абсолютное ускорение состоит не из двух, а из трех ускорений:

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c. \qquad (10.8)$$

Дополнительное ускорение $\vec{W}_c$ называется ускорением Кориолиса (по имени ученого, впервые обнаружившего это ускорение), оно равно

$$\vec{W}_{\tilde{n}} = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right). \qquad (10.9)$$

Это дополнительное ускорение появилось из-за того, что переносная скорость зависит от относительного движения, от положения точки на среде, а относительная скорость изменяется за счет переносного движения.

Проще всего определить ускорение Кориолиса в двух частных случаях.

1. Переносное движение – поступательное движение (система подвижных осей $O_1x_1y_1z_1$ перемещается поступательно).

Так как подвижные оси при таком движении не поворачиваются, то орты $\vec{i}_1 = \text{const},\ \vec{j}_1 = \text{const},\ \vec{k}_1 = \text{const}$. И тогда по (10.9) ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 0$, а абсолютное ускорение станет суммой лишь двух ускорений

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r.$$

Это понятно, так как переносная скорость точки не будет зависеть от относительного движения, а переносное движение не изменяет направление вектора относительной скорости.

2. Переносное движение – вращение вокруг неподвижной оси.

Пусть подвижная система осей $O_1x_1y_1z_1$ вращается вокруг неподвижной оси ξ с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$. (рис. 10.5).

Представим орты осей как радиусы-векторы точек, расположенных на их концах. Тогда производные от орт по времени можно рассматривать как скорости этих точек.

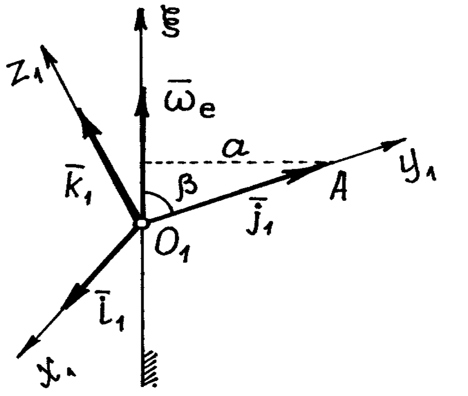


Рис. 10.5

Например, скорость точки *A* на конце вектора $\vec{j}_1$ $\vec{v}_A = \dfrac{d\vec{j}_1}{dt}$. Но так как модуль ее $v_A = \omega_e a = \omega_e \cdot j_1 \sin\beta$, а вектор скорости $\vec{v}_A$ направлен перпендикулярно $\vec{\omega}_e$ и $\vec{j}_1$ в сторону вращения, то $\vec{v}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$ (см.9.1).

Поэтому $\dfrac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$, аналогично:

$\dfrac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1$, и $\dfrac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1$. (10.10)

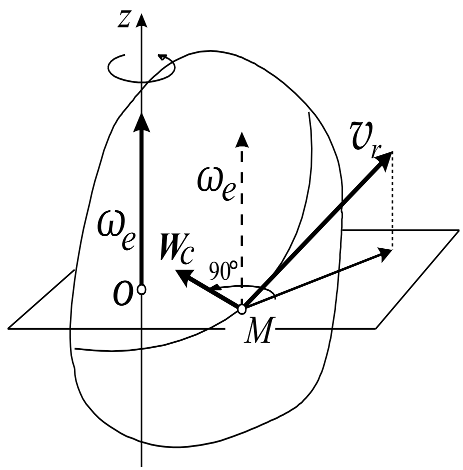
По (10.9) ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \left(\dfrac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \dfrac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \dfrac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 \right)$.

И, учитывая (10.4), получим

$$\vec{W}_{\tilde{n}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

(10.11)

Ускорение Кориолиса есть удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного движения на вектор относительной скорости точки.



Величина его

$W_c = 2\omega_e v_r \sin\alpha$, (10.12) где α – острый угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$.

<u>Замечание.</u> Можно доказать, что этот результат верен при любом переносном движении, не только при вращении вокруг неподвижной оси.

<u>Пример 10.2.</u> Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси *z*. По поверхности его движется точка *M* (рис. 10.6). Конечно, скорость этого

Рис. 10.6

движения точки – относительная скорость $\vec{v}_r$, а скорость вращения тела – угловая скорость переносного движения $\vec{\omega}_e$.

Ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ направлено перпендикулярно этим двум векторам по правилу направления вектора векторного произведения так, как показано на рис. 10.6.

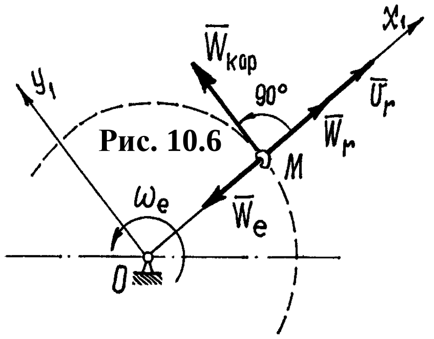


Рис. 10.6

Нетрудно сформулировать более удобное правило определения направления вектора $\vec{W}_c$: *нужно спроектировать вектор относительной скорости* $\vec{v}_r$ *на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения и затем повернуть эту проекцию на 90 градусов в плоскости по направлению переносного вращения. Конечное положение проекции вектора* $\vec{v}_r$ *укажет направление кориолисова ускорения.* Это правило было предложено Н.Е. Жуковским.

<u>Пример 10.3.</u> Вернемся к примеру 10.1. Найдем абсолютное ускорение колечка *M*

$$\vec{W}_M = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_{ñ}. \qquad (10.13)$$

Переносное ускорение при движении колечка по окружности радиусом $OM = s$: $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n + \vec{W}_e^\tau$, где $W_e^n = s \cdot \omega_e^2 = 12t^2\ ñì \cdot ñ^{-2}$, а

$W_e^\tau = s\varepsilon_e = s \cdot \ddot{\varphi} = 0$.

Значит $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n$ (рис.10.7). Относительное ускорение $W_r = \ddot{s} = 6$ см $\cdot$ с$^{-2}$.

Ускорение Кориолиса $W_{ñ} = 2\omega_e v_r \sin 90° = 2 \cdot 2 \cdot 6t =$ $24t$ см $\cdot$ с$^{-2}$.

Вектор $\vec{W}_c$ направлен перпендикулярно стержню в сторону вращения (по правилу Жуковского).

Величину абсолютного ускорения колечка *M* найдем с помощью проекций на подвижные оси x_1 и y_1. Проектируя равенство (10.13) на оси, получим: $W_{x_1} = W_r - W_e = 6 - 12t^{-2} = 6(1 - 2t^{-2}), \quad W_{y1} = W_c = 24t.$

Тогда $W_M = \sqrt{(W_{x_1})^2 + (W_{y_1})^2} = 6\sqrt{(1 - 2t^2)^2 + 16t^2}$ ñì $\cdot$ ñ$^{-2}$.

Лекция №6

Тема: Введение в динамику. Предмет динамики. Введение в динамику механической системы.

План лекции

Введение в динамику. Предмет динамики. Динамика точки. Основные понятия и определения. Законы механики. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах. Естественные уравнения движения. Две основные задачи динамики. Решение первой задачи. Вторая задача динамики. Интегрирование дифференциальных уравнений движения в простейших случаях.

Введение в динамику механической системы. Основные понятия, определения. Центр масс системы. Радиус-вектор и координаты центра масс системы. Классификация сил. Геометрия масс. Радиус инерции. Теорема Штейнера-Гюйгенса. Момент инерции тела относительно оси любого направления. Главные и главные центральные оси инерции. Примеры вычисления моментов инерции однородных тел.

Основная часть лекции

Аксиомы динамики

В кинематике исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом, и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В динамике решается более сложная и важная задача. Определяется движение тел под действием сил, приложенных к ним, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на их движение.

В основе динамики лежат несколько аксиом. Это известные законы Ньютона. Чтобы их сформулировать, введем несколько понятий.

Первое – *материальная точка.* Материальной точкой будем называть тело, обладающее массой, размеры которого можно не учитывать при определении его движения. Так что материальная точка на самом деле может оказаться довольно солидных размеров. Все зависит от масштабов пространства, в котором тело движется, и от других обстоятельств.

Второе. Точку будем называть *изолированной*, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

Теперь можно сформулировать первую аксиому.

Первая аксиома

В основе этой аксиомы лежит первый закон Ньютона. Запишем ее так:

Изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, либо находится в покое, в равновесии.

Правда, при этом возникает вопрос: а относительно чего совершается такое движение? Конечно, наблюдение за таким движением должно вестись из системы отсчета, которая сама движется равномерно и прямолинейно.

Такая система, относительно которой изолированные материальные точки движутся равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной системой отсчета.*

Если материальная точка в такой инерциальной системе не находится в равновесии, то эта точка не будет изолированной. Значит, на нее оказывается действие со стороны других тел, которые выводят ее из состояния равновесия, то есть на нее действуют силы.

Вторая аксиома. Основное уравнение динамики

Из второго закона Ньютона следует, что сила, действующая на точку, изменяет ее движение. Это изменение, как известно из кинематики, характеризуется ускорением. Поэтому вторую аксиому сформулируем так:

При действии на материальную точку силы у точки появляется ускорение, пропорциональное силе и имеющее ее направление.

Эту зависимость можно записать в виде формулы $\vec{F} = m\vec{W}$. Коэффициент пропорциональности m называется массой точки.

Если на точку действует несколько сил, то их можно заменить одной силой, равнодействующей $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, и предыдущее равенство записать так:

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_i \,. \qquad (12.1)$$

Это векторное равенство называется *основным уравнением динамики.*

При свободном падении тела на него действует сила P, сила тяжести, которую вблизи поверхности Земли будем называть весом тела. Если не учитывать другие силы, например сопротивление воздуха, то это будет единственная сила, приложенная к телу. Тогда по (12.1) получим $mW = P$. Но при этом движении $W = g$, равно ускорению свободного падения. Поэтому массу тела будем определять так: $m = \dfrac{P}{g}$.

Третья аксиома. Сила инерции

При действии одного тела на другое возникают две силы, равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к этим телам.

Конечно, нельзя сказать, что эти две силы уравновешиваются, так как они приложены к разным телам.

Проведем небольшой эксперимент. Попробуем перемещать тяжелое тело по некоторой криволинейной траектории. Сразу обнаружим, что тело сопротивляется изменению направления движения, изменению скорости.

Возникает сила со стороны тела, противодействующая силе $\vec{F}$, той, которую мы прикладываем к нему.

Эту силу, с которой материальная точка сопротивляется изменению своего движения, будем называть *силой инерции* этой точки, $\vec{F}^{\text{ин}}$. По третьей аксиоме она равна и противоположна действующей на точку силе $\vec{F}$, $\vec{F}^{\text{ин}} = -\vec{F}$. Но на основании второй аксиомы $\vec{F} = m\vec{W}$. Поэтому $\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W}$.

Итак, сила инерции материальной точки по величине равна произведению ее массы на ускорение

$$F^{\text{ин}} = mW \qquad (12.2)$$

И НАПРАВЛЕНА В СТОРОНУ, ПРОТИВОПОЛОЖНУЮ ВЕКТОРУ УСКОРЕНИЯ.

Например, при движении точки по кривой линии ускорение $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau$. Поэтому сила инерции

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W} = -m\vec{W}_n - m\vec{W}_\tau = \vec{F}_n^{\text{ин}} + \vec{F}_\tau^{\text{ин}}.$$

То есть ее можно находить как сумму двух сил: нормальной силы инерции и касательной силы инерции (см. рисунок). Причем

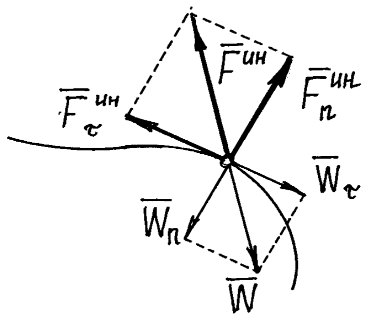


Рис.12.1

$$F_n^{\text{èí}} = m\frac{v^2}{\rho}, \qquad F_\tau^{\text{èí}} = m\frac{dv}{dt}.$$

Необходимо заметить, что сила инерции материальной точки, как сила противодействия, приложена не к точке, а к тому телу, которое изменяет ее движение. Это очень важно помнить.

Динамика материальной точки

Исследование движения тел начнем с анализа движения материальной точки. При этом приходится решать две задачи. Первая задача – известно, как точка движется, нужно определить силы, вызывающие это движение; вторая, обратная задача – известны силы, действующие на точку, определить, как она будет двигаться.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1. Определение движения точки координатным способом.

Пусть точка М движется под действием нескольких сил (рис. 13.2). Составим основное уравнение динамики $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$ и спроектируем это векторное равенство на оси x, y, z:

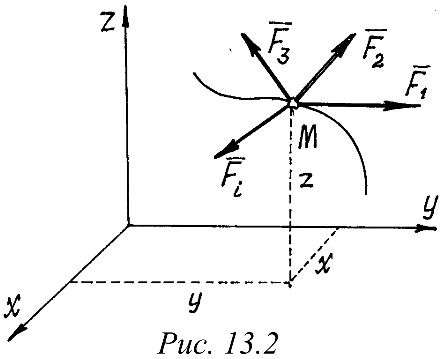


Рис. 13.2

$$\left.\begin{aligned} mW_x &= \sum X_i, \\ mW_y &= \sum Y_i, \\ mW_z &= \sum Z_i. \end{aligned}\right\}$$

Но проекции ускорения на оси есть вторые производные от координат точки по времени. Поэтому получим

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i, \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i, \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(13.1)}$$

Эти уравнения и являются дифференциальными уравнениями движения материальной точки. Решив их, с учетом начальных условий получим уравнения движения точки: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

2. Определение движения точки естественным способом

Координатным способом обычно определяют движение точки, не ограниченное какими-либо условиями, связями. Если на движение точки наложены ограничения на скорость или координаты, то определить такое движение координатным способом совсем непросто. Удобнее использовать естественный способ задания движения.

Определим, например, движение точки по заданной неподвижной линии, по заданной траектории (рис. 13.4).

На точку M, кроме заданных активных сил $\vec{F}_i$, действует реакция линии. Показываем составляющие реакции $\vec{R}$ по естественным осям $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{B}$.

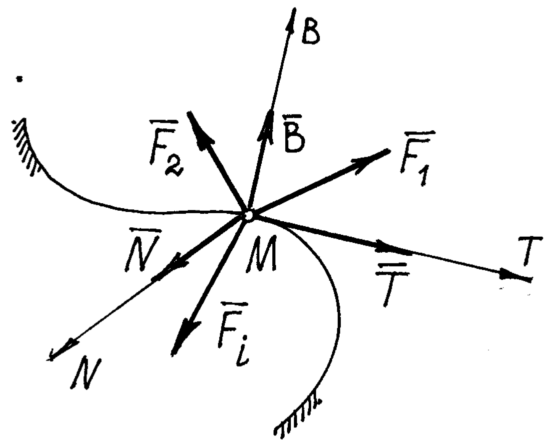


Рис. 13.4

Составим основное уравнение динамики $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$ и спроектируем его на естественные оси

$$\left.\begin{aligned} mW_n &= \sum F_{in} + N, \\ mW_\tau &= \sum F_{i\tau} + T, \\ mW_B &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned}\right\}$$

Так как $W_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, $W_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \ddot{s}$, $W_b = 0$, то получим

дифференциальные уравнения движения, такие

$$\left.\begin{aligned} m\frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{in} + N, \\ m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(13.2)}$$

Здесь сила $\vec{T}$ равна силе трения. Если линия, по которой движется точка, гладкая, то сила Т = 0 и тогда второе уравнение будет содержать только одну неизвестную – координату s:

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}\,.$$

Решив это уравнение, получим закон движения точки s = s(t), а значит, при необходимости и скорость, и ускорение. Первое и третье уравнения (13.2) позволят найти реакции $\vec{N}$ и $\vec{B}$.

Материальная система

Основные определения и характеристики

Материальной системой будем называть совокупность материальных точек, связанных между собой определенным образом (стержнями, нитями, винтами, пружинами и т.п., в том числе и силами взаимодействия).

Абсолютно твердое тело также является материальной системой, у которой точек бесконечное множество и связаны они между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

Центром масс материальной системы называется геометрическая точка С, положение которой определяется радиусом-вектором $\vec{r}_C$ таким, что

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \qquad (14.1)$$

где $\vec{r}_i$ – радиусы-векторы отдельных точек с массами m_i; $M = \sum m_i$ – масса всей системы.

Координаты центра масс

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}. \qquad (14.2)$$

Умножив числитель и знаменатель в (14.1) и (14.2) на g (ускорение свободного падения) убедимся, что вблизи поверхности Земли (g = const) центр масс совпадает с центром тяжести материальной системы, так как $m_i g = P_i$ – вес точек системы, сила тяжести их.

При исследовании движения материальной системы силы, действующие на ее точки, иногда приходится делить на классы: или на внешние и внутренние, или на активные (задаваемые) и реакции связей.

Внешними силами (обозначать будем $\vec{F}^{(e)}$) являются силы, действующие на точки системы со стороны точек, принадлежащих другим системам.

Внутренние силы ($\vec{F}^{(i)}$) – силы взаимодействия между точками системы. Эти силы попарно равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Поэтому их главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю, то есть:

$$\vec{R}' = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{(i)} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{M}_O = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_j^{(i)}\right) = 0.$$

Конечно, при этом внутренние силы не всегда уравновешиваются: под действием этих сил отдельные точки системы могут перемещаться относительно друг друга.

Реакции связей или просто – реакции, это силы, которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы, заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

Активными или задаваемыми силами называются все остальные силы, все кроме реакций.

Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

Моменты инерции тел

Инерционные свойства твердого тела характеризуются не только его массой М, определяющей инерционность при поступательном движении, но и моментом инерции, определяющим инерционность вращательного движения тела.

Моментом инерции тела относительно оси называется сумма произведений массы каждой точки на квадрат расстояния от точки до оси

$$J_z = \sum m_i r_i^2 .$$

(14.3)

Заметим сразу, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения (рис.14.1).

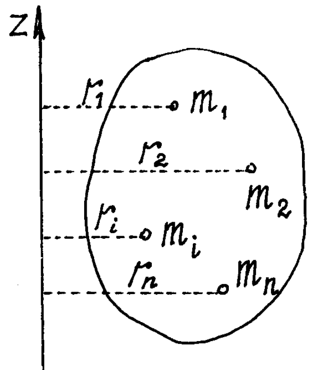


Рис. 14.1

Для однородных тел простой симметричной формы момент инерции можно найти в справочниках. А моменты инерции некоторых тел, которые чаще всего встречаются при исследовании движения материальных систем, даны на рис. 14.2.

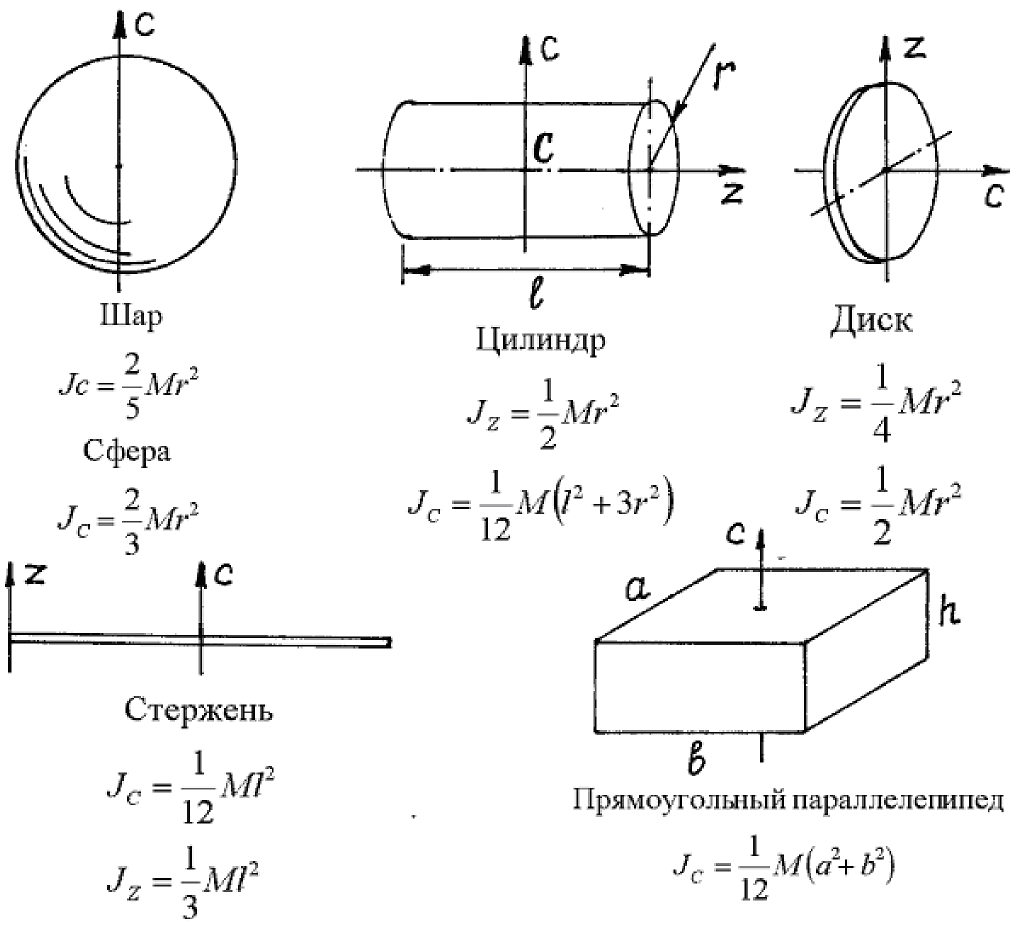


Рис. 14.2

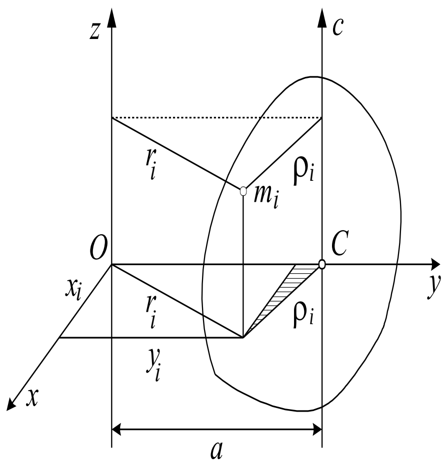
На рисунке даны моменты инерции тел относительно осей симметрии. Но нередко при исследовании движения реальных механизмов приходится
определять моменты инерции относительно осей, не совпадающих с осями симметрии. Этому помогают следующие теоремы.

Теорема Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции тела относительно параллельных осей

Найдем зависимость между моментами инерции тела относительно параллельных осей z и C (рис. 14.3). Ось C, проходящая через центр масс тела, называется центральной осью. Расстояние между осями – а.

По определению (14.3) $J_z = \sum m_i r_i^2$,

причём $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Но из заштрихованного прямоугольного треугольника (рис. 14.3) следует, что



$\rho_i^2 = x_i^2 + \left(a - y_i\right)^2 = x_i^2 + y_i^2 + a^2 - 2ay_i =$
$= r_i^2 + a^2 - 2ay_i$. Значит $r_i^2 = \rho_i^2 - a^2 + 2ay_i$

и момент инерции относительно оси z

$$J_z = \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i a^2 + \sum m_i 2ay_i =$$

$$= J_c - Ma^2 + 2a \sum m_i y_i .$$

Но по формуле (14.2) сумма $\sum m_i y_i = My_c = Ma$.

Поэтому $\pounds_z = \pounds_c - Ma^2 + 2Ma^2 = \pounds_c + Ma^2$.

Рис.14.3

Следовательно, момент инерции тела относительно оси z равен сумме момента инерции тела относительно центральной оси С, параллельной оси z, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$J_z = J_c + Ma^2 . \qquad (14.4)$$

Так, например, момент инерции стержня относительно оси z (см. рис.14.2) $J_z = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$. А момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно оси z, проведенной по какому-нибудь вертикальному ребру $J_z = \frac{1}{12}M\left(a^2 + b^2\right) + M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) =$

$$= \frac{1}{3}M\left(a^2 + b^2\right).$$

Лекция №7

Тема: Принцип Даламбера. Работа силы.

План лекции

Принцип Даламбера. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру. Главный вектор и главный момент сил инерции. Приведение сил инерции при поступательном движении тела, вращении вокруг неподвижной оси и плоскопараллельном движении.

Работа силы. Работа постоянной силы. Элементарная работа силы и ее аналитическое выражение. Работа сил тяжести и силы упругости. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу.

Основная часть лекции.

Принцип Даламбера

Применив принцип Даламбера для материальное точки к механической системе, можно сказать, что если к точкам системы приложить их силы инерции, то система будет находиться в равновесии, а главный вектор всех сил (внешних, внутренних и сил инерции точек) и главный момент их будут равны нулю:

$$\vec{R}\,' = \sum \vec{F}_j^{(e)} + \sum \vec{F}_j^{(i)} + \sum \vec{F}_j^{\text{ин}} = 0,$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{\text{ин}}) = 0$$

Сразу заметим, что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю (XIV,§1). Поэтому внутренние силы исключаются при исследовании движения материальной системы этим методом.

Из сказанного выше следует метод решения задач динамики, который называют принципом Даламбера. Он заключается в том, что *задачу динамики, исследования движения материальной системы, можно решать* *методами статики, составлением известных уравнений равновесия, учтя силы инерции точек системы.*

Но этот удобный метод усложняется определением сил инерции твердых тел. Поэтому следует научиться складывать силы инерции точек тела, находить их главный вектор $\vec{R}'_{\text{ин}}$ и главный момент $\vec{M}_O^{\text{ин}}$ или равнодействующую $\vec{R}_{\text{ин}}$.

Силы инерции твердого тела

Главный вектор сил инерции точек тела $\vec{R}'_{\text{ин}} = \sum \vec{F}_i^{\text{ин}} = -\sum m_i \vec{W}_i$. Но из определения радиуса-вектора центра масс $\vec{r}_C = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ следует $M\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$. Взяв вторую производную по времени, получим $M\dfrac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ или $\sum m_i \vec{W}_i = M\vec{W}_C$. Поэтому *главный вектор сил инерции точек тела при любом его движении*

$$\vec{R}'_{\text{ин}} = -M\vec{W}_C .$$

То есть модуль главного вектора равен произведению массы тела на ускорение центра масс его $R'_{\text{ин}} = MW_C$ и направлен вектор $\vec{R}'_{\text{ин}}$ в сторону, противоположную вектору ускорения центра масс.

Прикладывается главный вектор к точке приведения, которую можно назначить в любом месте, то есть он не зависит от выбора этой точки.

С определением главного момента сил инерции возникает немало сложностей. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Твердое тело движется поступательно.*

При таком движении главный момент сил инерции можно не определять, а находить сразу равнодействующую этих сил. Как известно, она равна главному вектору $\vec{R}_{\text{ин}} = \vec{R}'_{\text{ин}} = -M\vec{W}_C$, но имеет *определенную* точку приложения.

Поскольку при поступательном движении все точки тела имеют равные и параллельные векторы ускорений $\vec{W}_i = \vec{W}_C$, то силы инерции их также будут параллельными и направленными в одну сторону. Но равнодействующая таких параллельных сил приложена к точке, радиус-вектор которой $\vec{r} = \dfrac{\sum F_i^{\text{èí}}\,\vec{r}_i}{\sum F_i^{\text{èí}}} = \dfrac{\sum m_i W_i \vec{r}_i}{\sum m_i W_i} = \dfrac{\sum m_i W_C \vec{r}_i}{\sum m_i W_C} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_C$, равен радиусу-вектору центра масс.

Следовательно, равнодействующая сил инерции точек тела при поступательном движении приложена к центру масс тела, как к центру параллельных сил.

2.Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z (рис. 16.1).

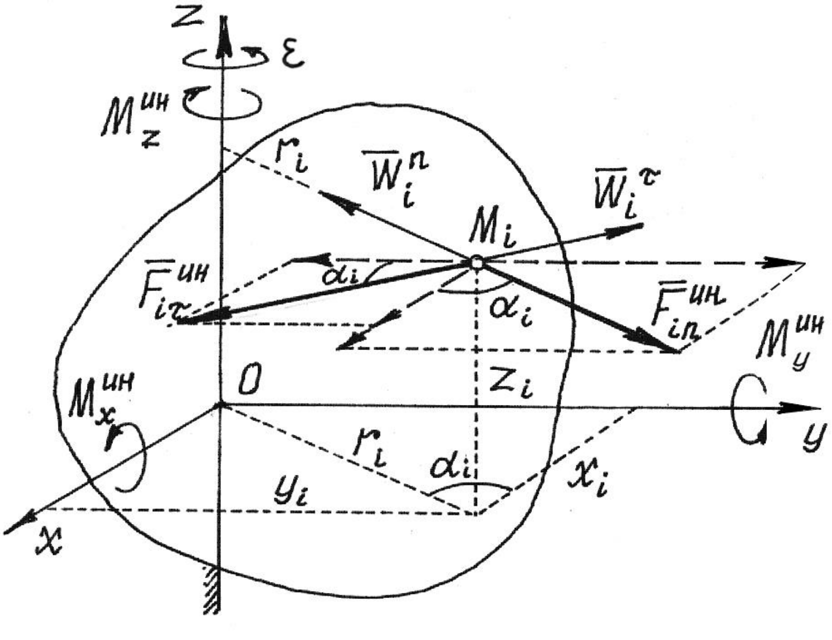


Рис.16.1

Проведем в теле, в какой-нибудь точке O на оси z, еще две оси x и y, перпендикулярные друг другу и оси z, которые вращаются вместе с телом.

Определим касательное и нормальное ускорения некоторой точки M_i: $W_i^{\tau} = r_i \varepsilon$, $W_i^n = r_i \omega^2$ и соответствующие им силы инерции $F_{i\tau}^{\text{ин}} = m_i W_i^{\tau}$, $F_{in}^{\text{ин}} = m_i W_i^n$, направленные противоположно ускорениям. Тогда главный момент сил инерции всех точек тела относительно оси z

$$M_z^{\text{ин}} = \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) + \sum M_z(\vec{F}_{in}^{\text{ин}}) = \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) = -\sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \cdot r_i =$$
$$= -\sum m_i W_i^{\tau} r_i = -\sum m_i r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_z .$$

Итак, главный момент сил инерции точек тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_z^{\text{ин}} = J_z \cdot \varepsilon.$$

Направляется он в сторону, противоположную угловому ускорению.

Тело совершает плоскопараллельное движение

При плоскопараллельном движении ускорение точки тела есть сумма трех ускорений: ускорения полюса, нормального ускорения и касательного ускорения точки при вращении вокруг полюса. Если полюс – центр масс C, то ускорение i-й то $\vec{W}_i = \vec{W}_C + \vec{W}_{ic}^n + \vec{W}_{ic}^{\tau}$. Соответственно у точки будут три составляющие силы инерции: $\vec{F}_{ie}^{\text{ин}}$, $\vec{F}_{in}^{\text{ин}}$, $\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}$ (рис. 16.3).

Тогда главный момент сил инерции точек тела относительно оси C, проходящей через центр масс перпендикулярно

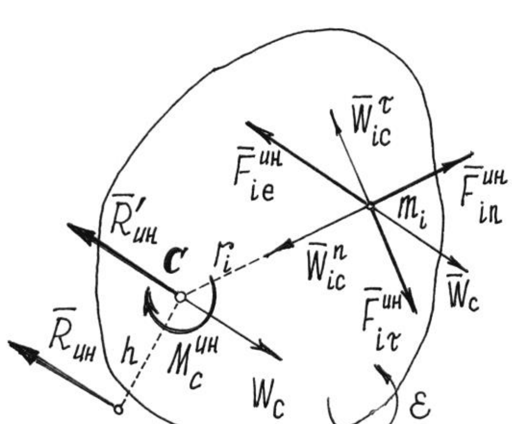


Рис. 16.3

плоскости движения, $M_C^{\text{ин}} = \sum M_C(\overrightarrow{F}_{ie}^{\text{ин}}) + \ + \sum M_c(\overrightarrow{F}_{in}^{\text{èí}}) + \sum M_c(\overrightarrow{F}_{i\tau}^{\text{èí}})$.

Но первая сумма равна нулю, так как по теореме Вариньона она равна моменту равнодействующей сил , которая приложена к центру масс, потому что переносное движение тела при плоско-параллельном движении – поступательное.

Вторая сумма также равна нулю, так как линии действия этих сил $\overrightarrow{F}_{in}^{\text{ин}}$ пересекают ось *C*. Поэтому

$$M_C^{\text{ин}} = \sum M_C(\overrightarrow{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) = -\sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \cdot r_i = -\sum m_i W_{iC}^{\tau} \cdot r_i =$$

$$= -\sum m_i \cdot r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_C .$$

Итак, главный момент сил инерции точек тела при плоскопараллельном движении относительно центральной оси *C*, перпендикулярной плоскости движения, равен произведению момента инерции относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_C^{\text{ин}} = J_C \varepsilon .$$

Направляется этот момент в сторону, противоположную направлению углового ускорения ε.

При желании можно найти равнодействующую сил инерции. Она будет равна главному вектору $\vec{R}_{\text{ин}} = \vec{R}'_{\text{ин}} = -M\overrightarrow{W}_C$, параллельна ему, а линия действия ее будет находиться на расстоянии $h = \dfrac{M_c^{\text{ин}}}{R'_{\text{ин}}}$ от центра масс, отложенном перпендикулярно $\vec{R}'_{\text{ин}}$ в сторону, определяемую направлением момента $M_c^{\text{ин}}$.

Принцип Даламбера удобно использовать при решении задач, в которых требуется определить неизвестные силы и иногда ускорение.

Работа силы

Если точка приложения силы движется по прямолинейной траектории, то работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на перемещении точки равном *s* (рис. 15.1), называется выражение

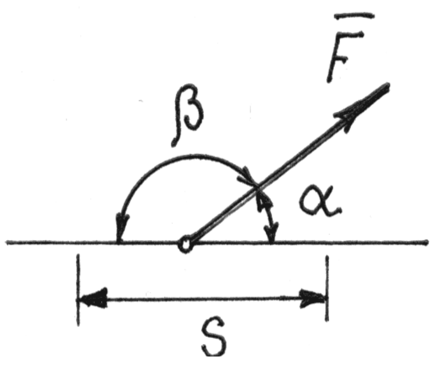


Рис. 15.1

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha \,. \qquad (15.1)$$

Поскольку от выбора угла α или β зависит знак работы, то договоримся брать всегда *острый* угол α между вектором силы и траекторией. И будем считать работу положительной, если направление силы совпадает с направлением перемещения точки приложения силы из начального положения в конечное.

Из (15.1) следует, что если вектор силы перпендикулярен траектории, работа силы равна нулю.

Если вектор силы изменяется и точка приложения ее движется по кривой линии, то формула (15.1) неприменима. В этом случае надо сначала вычислить *элементарную работу* силы на перемещении ds (рис. 15.2)

$$dA = Fds \cdot \cos\alpha \,, \qquad (15.2)$$

где α – угол между касательной осью *T* и вектором силы $\vec{F}$. А затем, предполагая силу *F* и угол α функциями *s*, найти криволинейный интеграл на перемещении по дуге из положения M_1 в положение M_2:

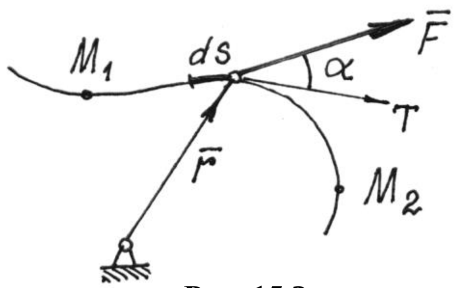


Рис. 15.2

$$A = \int\limits_{(s)} Fds \cos\alpha \,.$$

Выражение элементарной работы *dA* можно преобразовать, полагая $ds = vdt$ и $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$:

$$dA = F \cdot v\,dt \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} \,. \qquad (15.3)$$

Определим далее радиус-вектор точки M с помощью ее координат: $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ и $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, а вектор силы – с помощью проекций на оси: $\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$. Тогда скалярное произведение двух векторов $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, то есть элементарная работа силы,

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz. \qquad (15.4)$$

Конечно, чтобы проинтегрировать это выражение, надо проекции силы определять как функции координат точки приложения силы.

Работа веса тела (силы тяжести).

Пусть тело перемещается вблизи поверхности Земли из одного положения в другое так, что центр тяжести его движется по кривой линии (рис.15.3). Элементарная работа силы $\vec{P}$, постоянной и направленной вертикально вниз, по выражению (15.4), $dA = -Pdz$. Поэтому

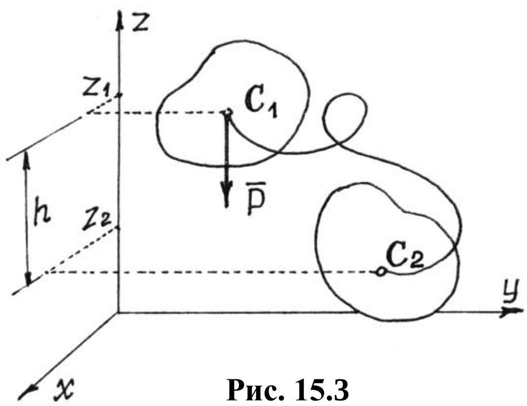


Рис. 15.3

$$A = -\int_{z_1}^{z_2} Pdz = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2)$$ или $A = Ph.$ (15.5)

Следовательно, работа веса тела (постоянной силы тяжести) не зависит от траектории движения центра тяжести. Определяется лишь высотой, на которую опустится или поднимется центр тяжести.

Работа силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

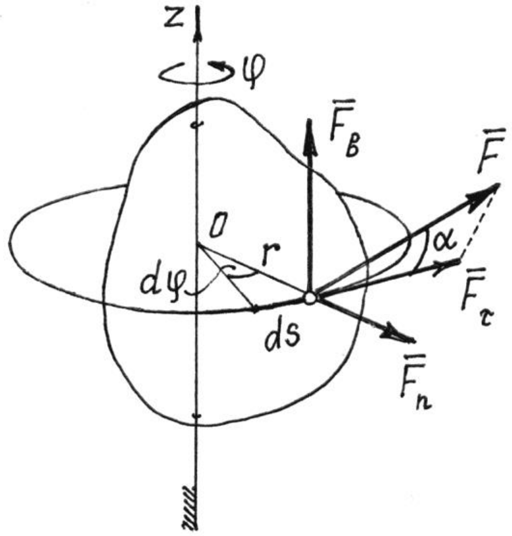


Рис. 15.4

В этом случае (рис.15.4) точка приложения силы $\vec{F}$ движется по дуге окружности радиусом r. Элементарная работа, по формуле (15.2), $dA = Fds \cdot \cos\alpha$, где $ds = r \cdot d\varphi$. Поэтому $dA = Fr\,d\varphi \cdot \cos\alpha$.

Но $F \cdot r \cdot \cos\alpha = F_\tau \cdot r = M_z(\vec{F})$.

Это нетрудно установить, разложив силу на три составляющие (см. рис. 15.4). (Моменты сил $\vec{F}_b$ и $\vec{F}_n$ относительно оси z равны нулю). Значит,

$$dA = M_z(\vec{F}) \cdot d\varphi. \qquad (15.6)$$

В частности, если момент силы относительно оси $M_z(\vec{F}) = \text{const}$, работа силы при повороте тела на угол φ равна

$$A = \pm M_z(\vec{F}) \cdot \varphi. \qquad (15.7)$$

ЗНАК РАБОТЫ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ЗНАКАМИ МОМЕНТА СИЛЫ И УГЛА ПОВОРОТА. ЕСЛИ ОНИ ОДИНАКОВЫ, РАБОТА ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ.

Из формулы (15.7) следует и правило определения работы пары сил. Если пара с моментом m расположена в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела, то ее работа при повороте тела на угол φ

$$A = \pm m\varphi. \qquad (15.8)$$

Если же пара сил действует в плоскости, не перпендикулярной оси вращения, то ее надо заменить двумя парами. Первую расположить в плоскости, перпендикулярной оси, другую – в плоскости параллельной оси. Моменты их определяются разложением вектора момента $\vec{m}$ по соответствующим направлениям $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$. Конечно, работу будет совершать только первая пара с моментом $m_1 = m \cdot \cos\gamma$, где γ – угол между вектором $\vec{m}$ и осью вращения z,

$$A = \pm\, m\varphi \cdot \cos\gamma. \qquad (15.9)$$

Работа силы упругости.

Такая сила (рис. 15.5) возникает при деформации упругого тела. Если сила подчиняется закону Гука, то ее величина будет пропорциональна деформации. Так, при удлинении, например, пружины на величину x сила равна $F = cx$.

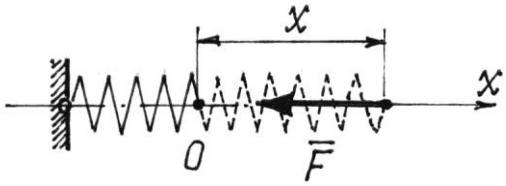


*Рис. 15.***5**

(Постоянная, коэффициент c, называется жесткостью пружины). Сила эта переменная. Поэтому по (15.4) $dA = -F \cdot dx = -cx \cdot dx$. И, если начало координат O находится на конце недеформированной пружины, то полная работа при перемещении конца пружины от положения x_1 до x_2 ($x_2 > x_1$)

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} cx \cdot dx = -\frac{1}{2} c(x_2^2 - x_1^2)\,. \qquad (15.10)$$

Конечно, при увеличении деформации (сжатия или растяжения) работа силы – отрицательная; при уменьшении – положительная.

Этот результат верен для любого упругого тела. И деформацией может быть не только линейное перемещение, но и угол поворота, и объем тела и др. Соответственно изменится и размерность коэффициента жесткости.

Лекция №8

Тема: Принцип возможных перемещений. Кинетическая энергия системы. Потенциальная энергия.

План лекции

Принцип возможных перемещений. Возможные перемещения. Классификация связей. Уравнение связей. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Кинетическая энергия системы. Теорема Кёнига. Вычисление кинетической энергии твердого тела при различных случаях его движения. Элементы теории поля. Потенциальное силовое поле. Силовая функция. Работа силы потенциального силового поля на конечном перемещении точки.

Потенциальная энергия. Эквипотенциальные поверхности.

Основная часть лекции.

Возможные перемещения. Классификация связей

Рассмотрим возможные перемещения точки *M* на стержне, прикрепленном к неподвижной поверхности шарниром *O* (рис.17.1,а). Конечно, стержень позволяет точке двигаться по сферической поверхности в любом направлении и на любое расстояние. Все эти перемещения возможны. Возможно, кстати, перемещение и вниз. Но такое перемещение не стоит называть возможным, потому что нарушается связь, стержень.

Кроме того, возможным перемещением будем называть только малое перемещение, настолько малую часть траектории, что ее можно заменить прямой, отрезком касательной.

Теперь можно сформулировать определение возможного перемещения.

Возможным перемещением δs *точки материальной системы будем называть ее бесконечно малое перемещение, допускаемое связями этой системы и без нарушения этих связей.*

К этому определению следует добавить несколько замечаний.

Первое. Само название таких перемещений показывает, что они только возможны, но не обязательны; что этих перемещений из данного положения системы может быть много; что среди них только одно есть действительное*; что эти перемещения происходят не под действием сил, приложенных к системе, а, так сказать, по нашему желанию.

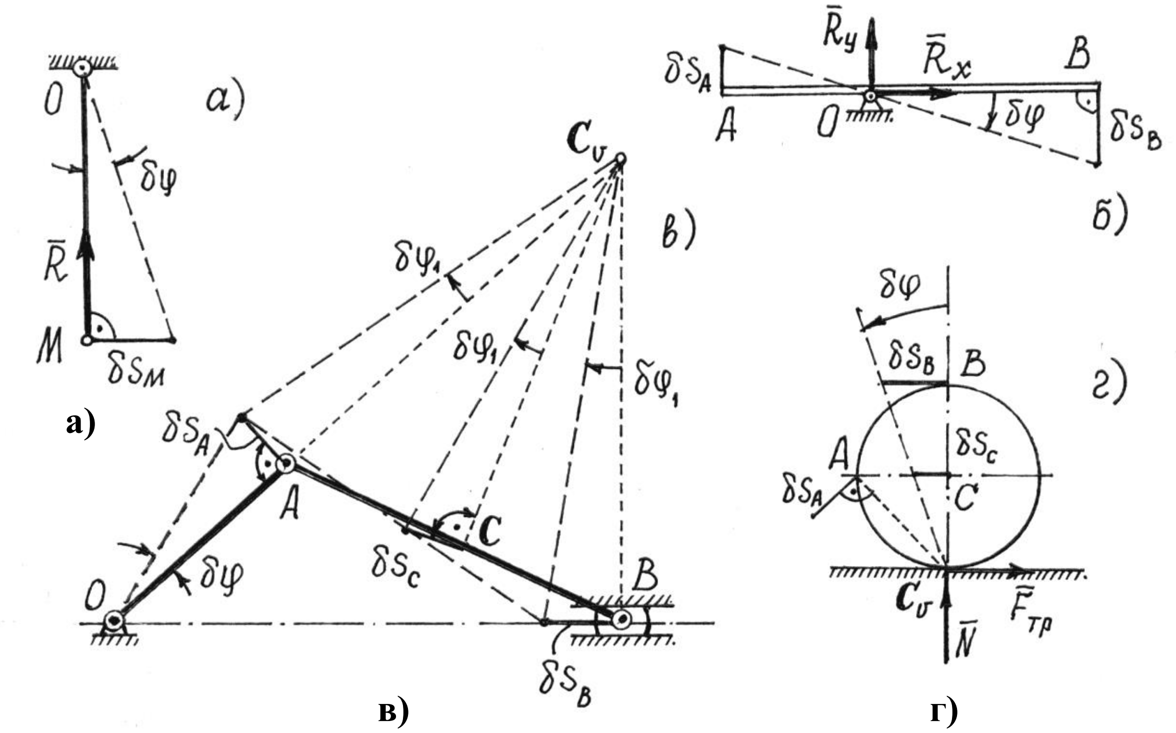
Второе. За счет малости таких перемещений направляются они по касательной к траектории и имеют, таким образом, направление, совпадающее с вектором скорости. Эту скорость в данном случае также называют *возможной скоростью*, а не действительной.

Третье. При наличии связей между точками материальной системы возможные перемещения этих точек связаны между собой определенными зависимостями, уравнениями связей.

На рис. 17.1 дано несколько примеров возможных перемещений точек не которых материальных систем. Из этих примеров следует, что возможным перемещением всего тела, вращающегося вокруг оси, является малый угол поворота $\delta\varphi$. И возможные перемещения точек его можно определить с помощью этого угла. Так, например, $\delta s_M = OM \cdot \delta\varphi$; $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$; $\delta s_B = OB \cdot \delta\varphi$ (рис. 17.1,а и 17.1,б).

Так как направления возможных перемещений имеют направления скоростей, то перемещения точек звена *AB* (рис.17.1, в) определяются с помощью мгновенного центра скоростей C_v этого звена. А возможное перемещение всего тела при плоскопараллельном движении есть поворот на малый угол $\delta\varphi_1$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Этот угол м о определить.

б)



в) **г)**

Рис. 17.1

Так как $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$, то $\delta\varphi_1 = \dfrac{\delta s_A}{AC_v} = \dfrac{OA}{AC_v}\delta\varphi$, а перемещение ползуна B $\delta s_B = BC_v \cdot \delta\varphi_1 = BC_v \dfrac{OA}{AC_v}\delta\varphi$ и точки C $\delta s_C = CC_v\delta\varphi_1 =$ $= CC_v \dfrac{OA}{AC_v}\delta\varphi$. То есть перемещения всех точек этого механизма можно выразить через одно возможное перемещение, перемещение звена OA, через угол $\delta\varphi$.

Аналогично поворотом на малый угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра скоростей C_v, определяются возможные перемещения точек колеса, которое может катиться без скольжения по неподвижной прямой (рис.17.2, г).

Работу сил, приложенных к материальной системе, на возможном перемещении будем называть *возможной работой*.

Если рассмотреть различные типы материальных систем, можно обнаружить, что элементарная работа реакций многих связей на возможном перемещении окажется равной нулю. Такие связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются *идеальными связями.* К таким связям относятся, например, все связи без трения. Кстати, об этом сказано было еще в XV, §4.

Связи, которые не изменяются со временем, называются *стационарными.*

Есть связи, которые называют или *удерживающими*, или *односторонними* в зависимости от того, препятствуют они перемещению точки во взаимно противоположных направлениях или только в одном.

У некоторых материальных систем встречаются и довольно сложные связи, ограничивающие или только положение системы, координаты ее точек, или еще и скорость их, производные от координат по времени. Первые называют *голономными*, геометрическими, связями; вторые – *неголономными,* кинематическими, неинтегрируемыми. Мы в дальнейшем будем рассматривать системы только с голономными связями.

Принцип возможных перемещений

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравновешиваются. Если $\vec{F_i}$ – равнодейству-ющая всех активных сил, приложенных к i-й точке, а $\vec{R}_i$ – реакция связей этой точки, то (рис.17.2) $\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$.

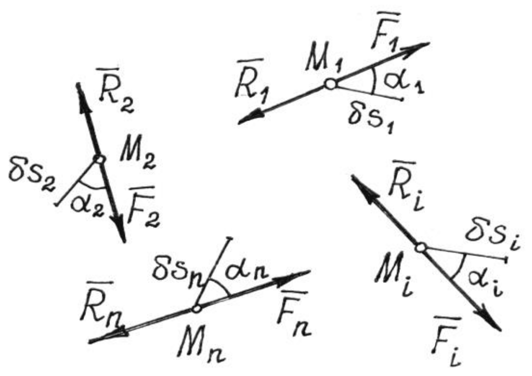


Рис. 17.2

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения δs_1, δs_2, $\delta s_3, \ldots, s_n$.

Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях.

Так как силы, приложенные к каждой точке, уравновешиваются и $\vec{F}_i = -\vec{R}_i$, то сумма работ этих сил на перемещении δs_i будет равна нулю.

Значит, и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} R_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0\,.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0. \qquad (17.1)$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики.*

При равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых сил на всяком возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Конечно, если у системы есть неидеальные связи, например с трением, или упругие, вроде пружины, то в уравнение работ надо добавить возможную работу реакций этих связей.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей $\delta s_i = v_i \delta t$, где время δt – произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (17.1) запишется так: $\sum F_i v_i \delta t \cos\alpha_i = 0$, а, поделив его на δt, получим

$$\sum F_i v_i \cos\alpha_i = 0, \qquad (17.2)$$

где α_i – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Равенство (17.2) можно назвать *принципом возможных скоростей*, уравнением мощностей. Оно иногда бывает более удобным, так как используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Этот принцип, общее уравнение статики, позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности находить и неизвестные реакции связей. Естественно, при этом возникает вопрос: как же так, ведь реакции идеальных связей не входят в уравнение работ? Выход прост – надо сделать тело свободным, реакции отнести к разряду активных сил и затем назначать такие возможные перемещения, чтобы эти неизвестные силы совершали работу.

Общее уравнение статики – довольно эффективный метод и применять его, конечно, надо для исследования равновесия сложных систем; хотя и при решении обычных задач статики он оказывается тоже выгодным.

Общее уравнение динамики

По принципу Даламбера материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать находящейся в равновесии, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Значит, можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (17.1) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях

$$\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos\beta_i = 0. \qquad (17.3)$$

Или по принципу возможных скоростей (17.2)

$$\sum F_i v_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{èí}} v_i \cos\beta_i = 0.$$

Эти уравнения называют *общим уравнением динамики*. Оно позволяет решать большой класс задач на исследование движения довольно сложных материальных систем.

Силы инерции точек и твердых тел, составляющих систему, определять уже умеем.

Стоит подчеркнуть еще одно важное достоинство этого метода, общего уравнения динамики, – реакции связей (идеальных) исключаются при исследовании движения системы.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки – это половина произведения ее массы на квадрат скорости $\frac{1}{2}mv^2$. Кинетическая энергия материальной системы – сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (15.15)$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина, так как $(\vec{v}_i)^2 = v_i^2$. Для твердого тела формула (15.15) принимает более конкретный вид.

1. *Кинетическая энергия тела при поступательном движении.*

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости $\vec{v}_i = \vec{v}$, то его кинетическая энергия

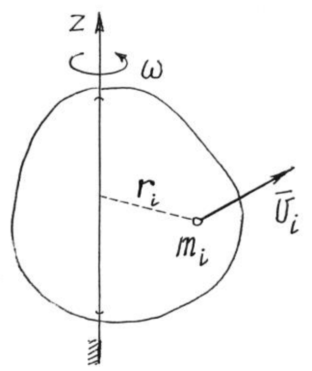


Рис. 15.**9**

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i v^2}{2} = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} v^2 M \quad \text{или}$$

$$T = \frac{1}{2} M v^2, \qquad (15.16)$$

где M – масса тела, v – скорость любой его точки.

2. *Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.*

При вращении тела вокруг неподвижной оси скорости его точек $v_i = r_i \omega$ (рис.15.9). Поэтому кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z \quad \text{или}$$

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \qquad (15.17)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z.

3. *Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении.*

С помощью мгновенного центра скоростей C_v скорость точки тела определяется как произведение расстояния a_i от точки до C_v на угловую скорость: $v_i = a_i\omega$ (рис.15.10). Поэтому кинетическая энергия

$$T = \sum\frac{m_i v_i^2}{2} = \sum\frac{m_i a_i^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i a_i^2 = \frac{1}{2}J_{Cv}\omega^2,$$

где J_{Cv} – момент инерции тела относительно оси C_v, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения.

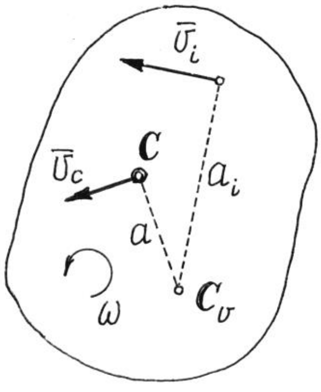


Рис. 15.**10**

Так как положение C_v на теле меняется, то полученный результат не очень удобен. С помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера (14.4) можно получить более удобное выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}J_{Cv}\omega^2 = \frac{1}{2}(J_c + Ma^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}J_c\omega^2 + \frac{1}{2}M(a\omega)^2$$

или, так как $a\omega = v_C$ (см. рис.15.10),

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2, \qquad (15.18)$$

где $v_{\tilde{N}}$ – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно центральной оси, оси C, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

4. *Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.*

При таком движении скорости точек тела определяются как при вращении вокруг мгновенной оси P: $v_i = h_i\omega$ (рис. 15.11).

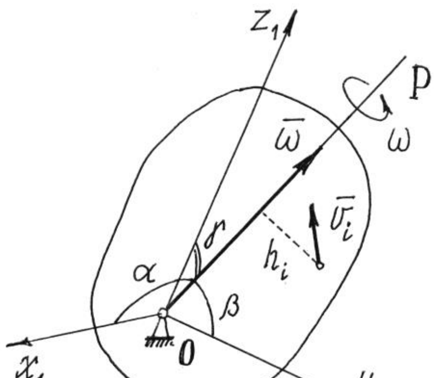


Рис. 15.**11**

Поэтому кинетическая энергия тела

$$T = \sum\frac{m_i v_i^2}{2} = \sum\frac{m_i h_i^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i h_i^2$$

или $$T = \frac{1}{2} J_P \omega^2, \qquad (15.19)$$

где J_P – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения P.

Конечно, полученный результат не очень удобен, так как ось P все время меняет свое положение в теле.

Если у тела в точке O можно отыскать главные оси инерции, то по формуле (14.6) получим $J_P = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma$. Тогда кинетическая энергия по (15.19) получится такой:

$$T = \frac{1}{2}[\,J_x(\omega\cos\alpha)^2 + J_y(\omega\cos\beta)^2 + J_z(\omega\cos\gamma)^2\,]$$

или, окончательно, $$T = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2), \qquad (15.20)$$

где J_x, J_y, J_z – моменты инерции тела относительно главных осей инерции x_1, y_1, z_1 в неподвижной точке O; ω_x, ω_y, ω_z – проекции вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ на эти оси.

Для самого общего случая движения материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить *теорема Кенига.*

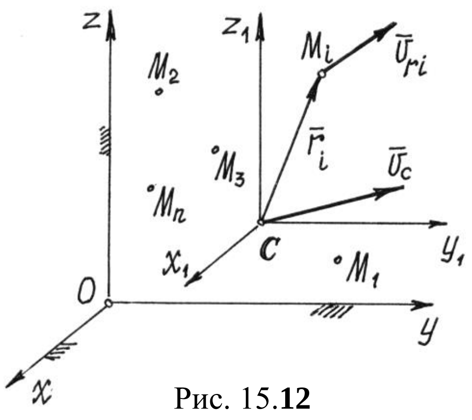


Рис. 15.**12**

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис. 15.12). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс C и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей x_1, y_1, z_1. Тогда скорость точек $\vec{v}_i = \vec{v}_{ei} + \vec{v}_{ri}$. Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек равны, равны $\vec{v}_C$. Значит, $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ri}$ и кинетическая энергия

$$T=\sum\frac{m_i v_i^2}{2}=\frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v}_C+\vec{v}_{ri})^2=\frac{1}{2}\sum m_i(v_C^2+2\vec{v}_C\cdot\vec{v}_{ri}+v_{ri}^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum m_i v_C^2+\sum m_i\vec{v}_C\cdot\vec{v}_{ri}+\frac{1}{2}\sum m_i v_{ri}^2=\frac{1}{2}Mv_C^2+\vec{v}_C\cdot\sum m_i\vec{v}_{ri}+T_r.$$

По определению центра масс (14.1) его радиус-вектор в подвижной системе $\vec{r}_C=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}=0$ (центр масс находится в начале координат), значит, и $\sum m_i\vec{r}_i=0$. Производная по времени от этой суммы также равна нулю $\frac{d}{dt}\sum m_i\vec{r}_i=\sum m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\sum m_i\vec{v}_{ri}=0$.

Поэтому окончательно кинетическая энергия системы

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+T_r. \qquad (15.21)$$

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

Так, при плоскопараллельном движении, по доказанной теореме Кенига, формула (15.18) получается сразу, так как относительное движение есть вращение вокруг центральной оси *C*.

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс *C* и относительного – вращения вокруг точки *C*), по теореме Кенига (15.21) получим

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_P\,\omega^2 \quad \text{или} \quad T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2),$$

где J_x, J_y, J_z – главные центральные оси инерции тела.

Потенциальная энергия

Часть пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от места положения точки, называется *силовым полем.*

Причем, эта сила определяется с помощью силовой функции $u = u(x, y, z)$. Если эта функция не зависит от времени, то такое поле называется *стационарным.* Если во всех точках она одинакова, то поле – *однородное.*

Если же проекции силы на декартовы оси есть частные производные от силовой функции по соответствующим координатам

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{15.11}$$

то такое поле называется *потенциальным.*

Вычислим работу силы потенциального поля при перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 (рис. 15.6).

Элементарная работа по выражению (15.4),

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = du .$$

Это есть полный дифференциал силовой функции.

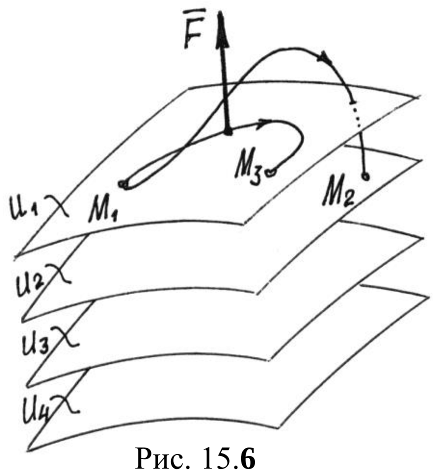


Рис. 15.**6**

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1, \tag{15.12}$$

овой функции в точках M_2 и M_1.

Следовательно, работа силы потенциального поля не зависит от траектории движения точки, а определяется лишь значениями силовой функции в начальном и конечном положениях точки.

Естественно, если точка вернется в начальное положение, работа силы $\vec{F}$ будет равна нулю. Работа окажется равной нулю и при переходе в другую точку M_3, если там значение силовой функции будет такое же, как и в начальном положении.

Нетрудно догадаться, что точки с одинаковыми значениями силовой функции будут образовывать целую поверхность. И что силовое поле – это «слоёное пространство», состоящее из таких поверхностей (рис.15.6). Эти поверхности называются *поверхностями уровня* или *эквипотенциальными поверхностями.* Уравнения их: $u(x, y, z) = C$ (C – постоянная, равная значению u в точках этой поверхности). А силовую функцию называют соответственно *потенциалом* поля.

Конечно, эквипотенциальные поверхности не пересекаются. Иначе существовали бы точки поля с неопределенным потенциалом.

Поскольку при перемещении точки по эквипотенциальной поверхности работа силы $\vec{F}$ равна нулю, то вектор силы перпендикулярен поверхности.

Выберем среди этих поверхностей какую-нибудь одну и назовем ее нулевой поверхностью (положим у нее $u = u_0$).

Работа, которую совершит сила $\vec{F}$ *при переходе материальной точки из определенного места M на нулевую поверхность, называют потенциальной энергией* Π *точки в этом определенном месте M.*

Следовательно $$\Pi = A = u_0 - u. \qquad (15.13)$$

Заметим, что потенциальная энергия в одной и той же точке поля зависит от выбора нулевой поверхности.

По формуле (15.13) силовая функция $u = u_0 - \Pi$. Поэтому проекции силы на декартовы оси, по (15.11), так как $u_0 = \text{const}$,

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \qquad (15.14)$$

и вектор силы $\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\cdot\vec{k}\right) = -\operatorname{grad}\Pi.$

Рассмотрим несколько потенциальных полей.

1. *Поле силы тяжести.*

Вблизи поверхности Земли сила тяжести во всех точках одинакова $\vec{F} = \vec{P}$, равна весу тела. Значит, это силовое поле однородное. Так как при перемещении точки в горизонтальной плоскости работа силы равна нулю, то эквипотенциальными поверхностями будут горизонтальные плоскости (рис. 15.7), а уравнения их: $u = z = C$.

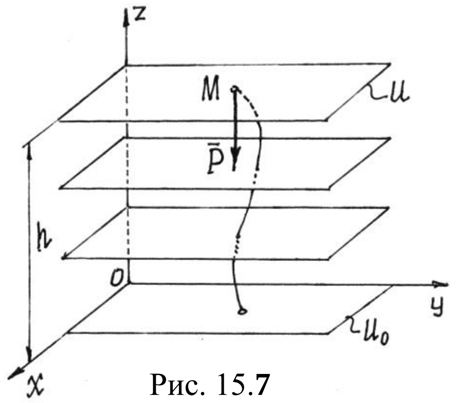


Рис. 15.7

Если нулевой поверхностью назначить плоскость *xOy,* то потенциальная энергия точки в положении *M* будет равна работе силы тяжести (15.5):

$$\Pi = A = Ph.$$

2. *Поле упругой силы.*

При деформации упругого тела, например пружины, появляется сила (см. пример 15.3). То есть около этого тела возникает силовое поле, силы которого пропорциональны деформации тела и направлены в сторону недеформированного состояния. У пружины – в точку M_O, где находится конец недеформированной пружины (рис. 15.8).

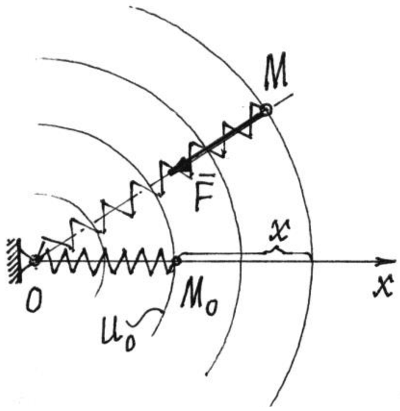


Рис. 15.8

Если перемещать конец пружины так, чтобы длина ее не изменялась, то работа упругой силы $\vec{F}$ будет равна нулю. Значит, эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности с центром в точке *O*.

Назначим нулевой поверхностью сферу, проходящую через точку M_O, через конец недеформированной пружины. Тогда потенциальная энергия пружины в положении её конца *M* $\Pi = A = \frac{1}{2}cx^2$ по формуле (15.10).

При таком выборе нулевой поверхности потенциальная энергия всегда будет положительной ($\Pi > 0$) и в растянутом, и в сжатом состояниях.

Лекция №9

Тема: Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода.

План лекции

Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода. Обобщенные силы и способы их вычисления. Уравнения равновесия механической системы в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа для консервативных систем. Кинетический потенциал системы.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Основная часть лекции

Обобщенные координаты

Обобщенными координатами мы будем называть параметры, которые определяют положение материальной системы.

Это могут быть обычные декартовы координаты точек, углы поворота, расстояния, площади, объемы и т.д. Так, на рис.18.1 положение балочки AB и всех ее точек вполне определяется углом φ.

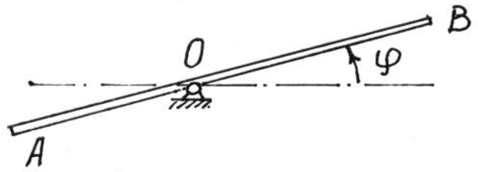


Рис. 18.1

Положение точек кривошипно-шатунного механизма (рис. 18.2) можно задать углом поворота φ кривошипа или расстоянием s, определяющим положение ползуна B (при $0<\varphi<\pi$).

Положение сферического маятника (рис. 18.3) определяется заданием двух параметров, углов φ_1 и φ_2.

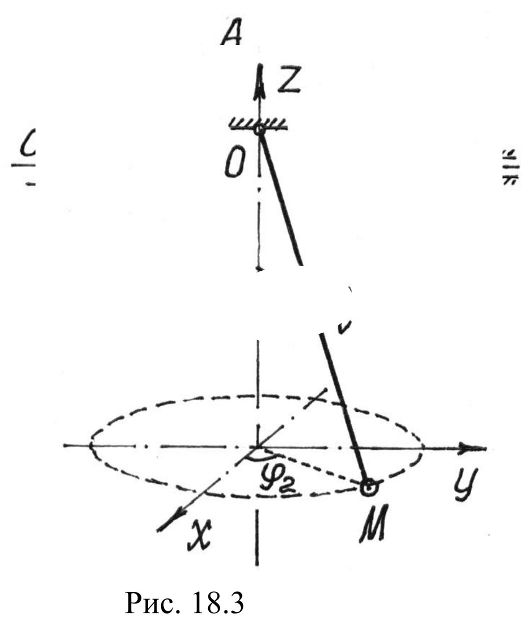
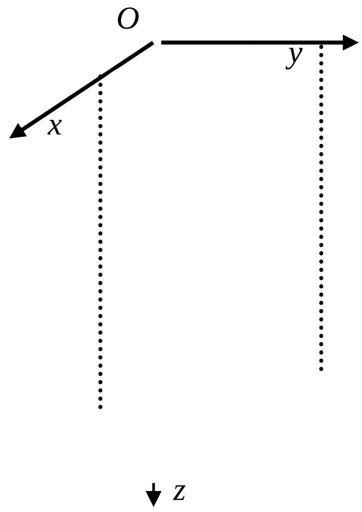


Рис. 18.3

Минимальное количество независимых друг от друга обобщенных координат, которых достаточно, чтобы полностью и однозначно определить положение всех точек системы, называют *числом степеней свободы* этой системы.



Вообще для любой материальной системы можно назначить несколько обобщенных координат. Например, у кривошипно-шатунного механизма (см. рис. 18.2) указаны две обобщенные координаты φ и s. Но это не значит, что у механизма две степени свободы, так как одну координату можно определить через другую: $s = a \cdot \cos\varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}$.

А вот у маятника (рис. 18.3) две степени свободы, так как определяется его положение двумя независимыми обобщенными координатами. Кстати, если длина маятника изменяется, то для определения положения точки M потребуется еще один параметр – обобщенная координата l, длина нити. И у маятника станут три степени свободы.

Обобщенные координаты в общем случае будем обозначать буквой q. Пусть материальная система имеет s степеней свободы. Положение ее определяется обобщенными координатами: $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k, \ldots, q_s$.

Нетрудно убедиться, что декартовы координаты n точек системы можно определить как функции обобщенных координат и времени

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t), \quad (i = 1,2,3,\ldots,n). \end{aligned} \tag{18.1}$$

Так, у маятника (см. рис.18.3) координаты точки M

$$\begin{aligned} x_M &= l \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ y_M &= l \sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \\ z_M &= l \cos\varphi_1 \end{aligned}$$

есть функции координат l, φ_1, φ_2 и времени t, если $l = l(t)$.

Соответственно и радиус-вектор точек системы можно определить как функцию обобщенных координат и времени

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1,\, q_2,\, q_3, \ldots,\, q_s, t\right),\ \ (i = 1,2,3,\ldots,n). \qquad (18.2)$$

Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате q_k можно вычислить соответствующую ей обобщенную силу Q_k. Вычисление производится по такому правилу.

Чтобы определить обобщенную силу Q_k, соответствующую обобщенной координате q_k, надо дать этой координате приращение δq_k (увеличить координату на эту величину), оставив все другие координаты неизменными, вычислить сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих перемещениях точек и поделить ее на приращение координаты δq_k:

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k}\sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i \cos\alpha_i, \qquad (18.3)$$

где δs_i – перемещение i-й точки системы, полученное за счет изменения k-й обобщенной координаты.

Обобщенная сила определяется с помощью элементарных работ. Поэтому эту силу можно вычислить иначе (см. выражения (15.3) и (15.4)):

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q_k}.$$

И так как $\delta\vec{r}_i$ есть приращение радиуса-вектора $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,\, q_2,\, q_3, \ldots,\, q_s, t)$ за счет приращения координаты q_k при остальных неизменных координатах и времени t, отношение $\frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q_k}$ можно определять как частную производную $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$.

Тогда

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right), \qquad (18.4)$$

где координаты точек – функции обобщенных координат (18.1).

Если система консервативная, то есть движение происходит под действием сил потенциального поля (15.14), проекции которых $X_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i}$, $Y_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_i}$, $Z_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial z_i}$, где $\Pi = \Pi(x_i, y_i, z_i)$, а координаты точек – функции обобщенных координат, то

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \qquad (18.5)$$

Обобщенная сила консервативной системы есть частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате со знаком минус.

Конечно, при вычислении этой обобщенной силы потенциальную энергию следует определять как функцию обобщенных координат

$\Pi = \Pi(q_1, q_2, q_3,\dots,q_s)$.

Замечания.

Первое. При вычислении обобщенных сил реакции идеальных связей не учитываются.

Второе. Еденица измерения обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Так, если $[q]$ = метр, то единица измерения $[Q] = \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}}$ = ньютон; если $[q]$ = радиан, то $[Q]$ = Н·м; если $[q]$ = м^2, то $[Q] = \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$ и т.п.

Уравнения равновесия Лагранжа

По определению (18.3) обобщенные силы $Q_k = \dfrac{1}{\delta q_k}\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i$, при $k = 1,2,3,\dots, s$, где s – число степеней свободы.

Если система находится в равновесии, то по принципу возможных премещений (17.1) $\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0$. Здесь δs_i – перемещения, допускаемые связями, возможные перемещения. Поэтому при равновесии материальной системы все её обобщенные силы равны нулю

$$Q_k = 0, \quad (k=1,2,3,\dots, s). \tag{18.6}$$

Эти уравнения, *уравнения равновесия в обобщенных координатах* или *уравнения равновесия Лагранжа,* позволяют решать задачи статики еще одним методом.

Если система консервативная, то $Q_k = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k}$. Значит, в положении равновесия $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0$. То есть в положении равновесия такой материальной системы ее потенциальная энергия либо максимальна, либо минимальна, то есть функция $\Pi\,(q)$ имеет экстремум.

Это очевидно из анализа простейшего примера (рис. 18.5). Потенциальная энергия шарика в положении M_1 имеет минимум, в положении M_2 – максимум. Можно заметить, что в положении M_1 равновесие будет устойчивым; в положении M_2 – неустойчивым.

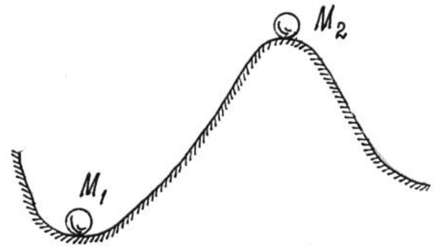


Рис. 18.5

Равновесие считается устойчивым, если телу в этом положении сообщить малую скорость или сместить на малое расстояние, то эти отклонения в дальнейшем не увеличатся.

Можно доказать (теорема Лагранжа-Дирихле), что если в положении равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии, а значит и устойчивости положения равновесия, определяется второй производной, ее значением в положении равновесия,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0\,. \tag{18.7}$$

Обобщенные силы инерции

По той же методике (18.4), по которой вычислялись обобщенные силы Q_k, соответствующие активным, задаваемым, силам, определяются и обобщенные силы $Q_k^{\text{èí}}$, соответствующие силам инерции точек системы:

$$Q_k^{\text{èí}} = \frac{1}{\delta q_k}\sum F_i^{\text{èí}}\,\delta s_i \cos\beta_i = \frac{1}{\delta q_k}\sum \overrightarrow{F_i}^{\text{èí}}\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}^{\text{èí}}\cdot\frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q_k} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}^{\text{èí}}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}. \tag{18.8а}$$

И так как $\overrightarrow{F_i}^{\text{èí}} = -m_i\overrightarrow{W}_i = -m_i\dfrac{d\vec{v}_i}{dt}$, то $Q_k^{\text{èí}} = -\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\dfrac{d\vec{v}_i}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}.$ (18.8б)

Немного математических преобразований.

Очевидно, $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \dfrac{d\vec{v}_i}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} + \vec{v}_i\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}.$ Отсюда

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \vec{v}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}. \tag{18.9}$$

Так как $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t)$, а $q_k = q_k(t)$, $(k = 1,2,3,\ldots, s)$, то

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \ldots + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t},\ \text{где}\ \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Значит, частная производная скорости $\vec{v}_i$ по $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\,. \tag{18.10}$$

Кроме того, в последнем члене (18.9) можно поменять порядок дифференцирования $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \dfrac{\partial}{\partial q_k}\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \dfrac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_k}$.

(18.11)

Подставляя (18.10) и (18.11) в (18.9), а потом (18.9) в (18.8б), получим:

$$Q_k^{\text{èí}} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] = -\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_k} \right].$$

Разделив последнюю сумму на две и, имея в виду, что сумма производных равна производной от суммы, получим:

$$Q_k^{\text{èí}} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \qquad (18.12)$$

где $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$ – кинетическая энергия системы, $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ – обобщенная скорость.

Дифференциальные уравнения Лагранжа II рода

По определению (18.3) и (18.8а) обобщенные силы

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i; \quad Q_k^{\text{èí}} = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{èí}} \delta s_i \cos\beta_i .$$

Сумма их $Q_k + Q_k^{\text{èí}} = \frac{1}{\delta q_k} (\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{èí}} \delta s_i \cos\beta_i)$ или

$$(Q_k + Q_k^{\text{èí}}) \delta q_k = \sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{èí}} \delta s_i \cos\beta_i .$$

Но на основании общего уравнения динамики (17.3) правая часть равенства равна нулю. И так как все δq_k (k = 1,2,3,…,s) отличны от нуля, то $Q_k + Q_k^{\text{èí}} = 0$. Подставив значение обобщенной силы инерции (18.12), получим уравнение:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1,2,3,\ldots,s). \qquad (18.13)$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах, уравнениями Лагранжа второго рода* или просто – *уравнениями Лагранжа.* Количество этих уравнений равно числу степеней свободы материальной системы.

Если система консервативная и движется под действием сил потенциального поля, когда обобщенные силы $Q_k = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, уравнения Лагранжа можно составить по форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \tag{18.14}$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad (k = 1,2,3,\ldots,s), \tag{18.15}$$

где $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа* (предполагается, что потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей).

Нередко при исследовании движения материальных систем оказывается, что некоторые обобщенные координаты q_j не входят явно в функцию Лагранжа (или в T и Π). Такие координаты называют *циклическими*. Уравнения Лагранжа, соответствующие этим координатам, получаются проще. Так как $\dfrac{\partial T}{\partial q_j} = 0$ и $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$, то $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0$, ($j = 1,2,3,\ldots k$).

Первые интегралы последних уравнений находятся сразу. Они называются циклическими интегралами

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const}. \tag{18.16}$$

Дальнейшие исследования и преобразования уравнений Лагранжа составляют предмет специального раздела теоретической механики – «Аналитическая механика».

Уравнения Лагранжа обладают целым рядом достоинств в сравнении с другими способами исследования движения систем. Основные достоинства: методика составления уравнений одинакова во всех задачах, реакции идеальных связей не учитываются при решении задач.

И еще одно – эти уравнения можно использовать для исследования не только механических, но и других физических систем (электрических, электромагнитных, оптических и др.).

Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Так как ускорение *i*-тых точек материальной системы $\vec{W}_i = \dfrac{d\vec{v}_i}{dt}$, то основные уравнения динамики для этих точек будут $m_i \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$, где $\vec{F}_i$ – равнодействующая сил, приложенных к *i*-й точке. Умножим скалярно левую и правую части этого равенства на $\vec{v}_i$: $\vec{v}_i \cdot m_i \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ и введем слева вектор $\vec{v}_i$ под знак дифференциала, а справа учтем, что $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$. Получим $m_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}v_i^2\right) = \vec{F}_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$. Или окончательно $d\left(\dfrac{1}{2}m_i v_i^2\right) = dA_i$.

Сложив такие равенства, составленные для всех точек системы, получим: $d\sum \dfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum dA_i$ или $dT = \sum dA_i$. Проинтегрируем затем на переходе системы из одного положения в другое: $\int\limits_{T_1}^{T_2} dT = \sum \int\limits_{S_i} dA_i$. Получим T_2 $-T_1 = \quad = \sum A_i$. Запишем результат в виде

$$T_2 - T_1 = A. \tag{15.22}$$

Это значит, *изменение кинетической энергии движущейся материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно сумме работ сил, приложенных к системе, на этом переходе.*

Замечания к теореме.

1. Нетрудно убедиться, что реакции связей без трения работу не совершают. Поэтому при использовании теоремы в этом случае учитываются только активные, задаваемые, силы.

2. Внутренние силы, вообще говоря, учитывать надо, несмотря на то, что сумма их равна нулю. Простой пример: две точки, соединенные пружиной.

При изменении расстояния между точками упругие силы, приложенные к точкам, будут совершать работу. Но если система состоит из абсолютно твердых тел и связи между ними неизменяемые, неупругие, идеальные, то работа внутренних сил будет равна нулю и их можно не учитывать и вообще не показывать на расчетной схеме.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.