Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Методические указания к практическим занятиям

по дисциплине

«Физика»

Владимир, 2016

ЗАДАЧИ

1. *МЕХАНИКА*

Кинематика

Примеры решения задач

1. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону $\vec{r} = t^3\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y$ (м), где, $\vec{e}_x$ $\vec{e}_y$ орты осей x и y. Определить для момента времени t = 1 с:

а) модуль скорости;

б) модуль ускорения.

Дано:	Решение
$\vec{r} = t^3\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y$ t = 1 с.	Вектор скорости определяем как первую производную радиус-вектора по времени. $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{d\vec{t}} = 3t^2\,\vec{e}_x + 6t\,\vec{e}_y$.
υ = ? $\vec{W}$ = ?	

В то же время вектор скорости, как и любой вектор можно представить через его компоненты $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{e}_x + \upsilon_y\vec{e}_y + \upsilon_z\vec{e}_x$.

Сравнивая это выражение с предыдущим, получим: $\upsilon_x = 3t^2$; $\upsilon_y = 6t$; $\upsilon_z = 0$.

Модуль скорости определяется через компоненты:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2} = \sqrt{\left(3t^2\right)^2 + \left(6t\right)^2} = \sqrt{\left(3\cdot 1^2\right)^2 + \left(6\cdot 1\right)^2} = 6{,}7 \text{ м/с}.$$

Ускорение частицы равно производной от вектора скорости $\vec{W} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

$\vec{W} = 6t\vec{e}_x + 6\vec{e}_y$, где компоненты $W_x = 6t$, $W_y = 6$.

Модуль ускорения

$$W = \sqrt{W_x{}^2 + W_y{}^2 + W_z{}^2} = \sqrt{(6\cdot t)^2 + 6^2} = \sqrt{(6\cdot 1)^2 + 6^2} = 8{,}48 \text{ м/с}^2 \approx 8{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 1) υ = 6,7 м/с;

2) W = 8,5 м/с^2.

2. Точка движется в плоскости xy из положения с координатами $x_1 = y_1 = 0$ со скоростью $\vec{\upsilon} = a\vec{e}_x + bx\vec{e}_y$ (a; b – постоянные, $\vec{e}_y$; $\vec{e}_x$ – орты осей и x и y)

Определите: 1) уравнение траектории точки $y(x)$; 2) форму траектории.

Дано: $x_1 = y_1 = 0$ $\vec{\upsilon} = a\vec{e}_x + bx\vec{e}_y$	Решение: Компоненты скорости $\upsilon_x = a$, $\upsilon_y = bx$. Так как $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$, а $\upsilon_y = \frac{dy}{dt}$ (x и y – компоненты радиус-вектора) $\frac{dx}{dt} = a$; $\frac{dy}{dt} = bx$.
1) $y(x) = ?$ 2) форма траектории?	

Из последних выражений, исключая время, получаем $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{bx}$ или $dy = \frac{b}{a}xdx$. Интегрируя, получим $y = \int_0^x \frac{bx}{a}dx = \frac{bx^2}{2a}$. Траектория является параболой.

Ответ: 1) $y = \frac{b}{2a}x^2$; 2) парабола.

3. Частица движется по окружности радиусом $R = 2$ м, и путь изменяется со временем по закону $S = At^3$, где $A = 2$ м/с³. Найти: а) момент времени t_0, при котором нормальное ускорение W_n будет равно тангенциальному W_τ; б) полное ускорение в этот момент времени.

Дано: $R = 2{,}0$ м $S = At^3$ $A = 2$ м/с³ $W_n = W_\tau$	Решение а) Выражения для нормального, тангенциального и полного ускорений имеют вид: $W_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \frac{1}{R}$; $W_r = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$;$W = \sqrt{(W_n)^2 + (W_\tau)^2}$ Из условия задачи получим уравнение относительно t_0: $\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{d^2S}{dt^2}$ или $\left(3At_0^2\right)^2 \frac{1}{R} = 6At_0$. Отсюда для t_0 имеем: $t_0 = \left(\frac{2}{3}\frac{R}{A}\right)^{1/3} = 0{,}87$ с;
а) $t_0 - ?$ б) $W - ?$	

б) для полного ускорения из условия задачи получим

$$W = \sqrt{2W_\tau^{\,2}} = \sqrt{2\left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot 6At_0 = 14{,}8 \text{ м/с}^2 \approx 15 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: t_0 = 0,87 с, W = 15 м/с^2.

4. Тело брошено с вышки в горизонтальном направлении со скоростью υ_0 = 30 м/с. Найти значения следующих величин через две секунды τ = 2,0 с: а) скорости υ, тангенциального ускорения W_τ, нормального ускорения W_n; б) радиуса кривизны траектории R.

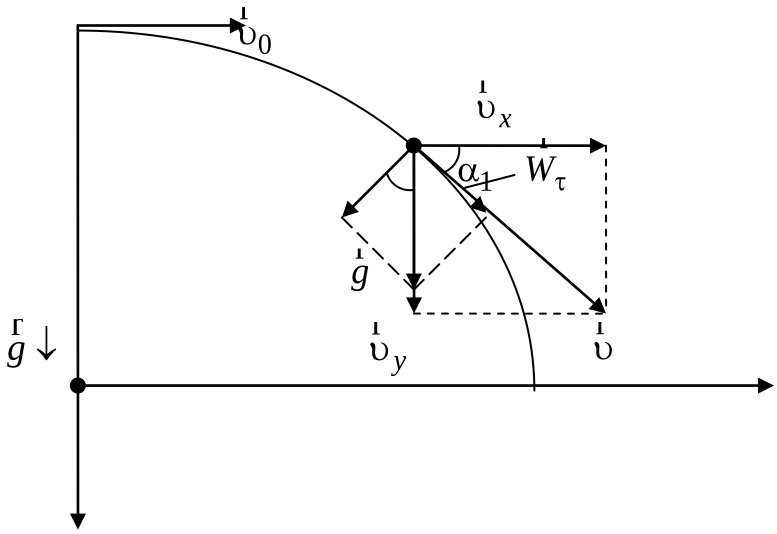
Дано:
υ_0 = 30 м/с
τ = 2,0 с

а) υ, W_τ, W_n –?
б) R –?

Решение

Траектория движения тела показана на рисунке.

Направление вектора $\vec{\upsilon}$, составляющих скорости $\vec{\upsilon}_x, \vec{\upsilon}_y$, а также $\vec{W}_n$, $\vec{W}_\tau$, $\vec{g}$ через время τ также показано на рисунке.



Введем систему координат XOY, как показано на рисунке, чтобы учесть независимость движений тела по горизонтали и вертикали. Проекция вектора скорости на ось OX υ_x остается всегда постоянной и равной υ_0. Проекция вектора скорости на ось OY υ_y растет со временем по закону $\upsilon_y = gt$, так как вдоль оси OY тело движется равноускоренно с ускорением свободного падения g. Поэтому для модуля скорости тела получим

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}\,. \qquad (1)$$

Через две секунды значение модуля скорости будет равно:

$$\upsilon = \sqrt{30^2 + (9,8)^2 (2,0)^2} = 35,8 \approx 36 \text{ м/с}.$$

Из рисунка следует, что

$\cos\alpha = \dfrac{W_n}{g} = \dfrac{\upsilon_x}{\upsilon} = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon}$, следовательно, значение нормального ускорения

$$W_n = g\frac{\upsilon_0}{\upsilon} = 9,8\frac{30}{35,8} = 8,2 \text{ м/с}^2$$

Аналогично

$\sin\alpha = \dfrac{W_\tau}{g} = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon} = \dfrac{gt}{\upsilon}$, отсюда тангенциальное ускорение

$$W_\tau = g\frac{\upsilon_y}{\upsilon} = 9,8\frac{9,8(2,0)}{35,8} = 8,2 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны из выражения для нормального ускорения

$$W_n = \frac{\upsilon^2}{R};$$

$$R = \frac{\upsilon^2}{W_n} = \frac{(35,8)^2}{8,2} = 156\text{м} \cong 1,6\cdot 10^2 \text{ м}.$$

Ответ: υ = 35,8 м/с; W_τ = 5,4 м/с²; W_n = 8,2 м/с²; $R = 1,6\cdot 10^2$ м.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. Компоненты скорости частицы изменяются со временем по законам: $\upsilon_x = a\cos\omega t$, $\upsilon_y = a\sin\omega t$, $\upsilon_z = 0$, где a и ω – константы. Найти модули скорости $|\vec{\upsilon}|$ и ускорения $|\vec{W}|$, а также угол α между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{W}$. По какой траектории движется частица?

($|\vec{\upsilon}| = a$, $|\vec{W}| = a\omega$, $\alpha = \pi/2$)

1.2. Зависимость координат движения частицы от времени имеет вид $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = 0$, где a и ω – константы.

а) определить радиус-вектор $\vec{r}$, скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{W}$ частицы, а также их модули;

б) найти уравнение траектории частицы.

($\vec{r} = a(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y)$; $|\vec{r}| = a$;

$\vec{\upsilon} = a\omega(-\sin\omega t\,\vec{e}_x + \cos\omega t\,\vec{e}_y)$; $|\vec{\upsilon}| = a\omega$;

$\vec{W} = -a\omega^2(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y)$; $|\vec{W}| = a\omega^2$;

$x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1$)

1.3. Точка движется по окружности радиусом R = 4 м. Закон ее движения выражается уравнением $S = A+Bt^2$, где A = 8 м, B = -2 м/с^2. Определить момент времени t, когда нормальное ускорение W_n точки равно 9 м/с^2. Найти модули скорости υ, тангенциального W_τ и полного W ускорения точки в тот же момент времени t.

(t = 1,5 с, υ = 6 м/с, W_τ = 4 м/с^2, W = 9,8 м/с^2)

1.4. Частица движется со скоростью $\vec{\upsilon} = at(2\vec{e}_x+3\vec{e}_y+4\vec{e}_z)$ (a = 1,0 м/с^2). Найти:

а) модуль скорости частицы в момент времени t = 1 с;

б) ускорение частицы $\vec{W}$ и его модуль;

в) путь S, пройденный частицей с момента времени t_1 = 2 с до t_2 = 3 с;

г) какой характер имеет движение частицы? Почему?

(υ = 5,4 м/с, $\vec{W} = a(2\vec{e}_x+3\vec{e}_y+4\vec{e}_z)$, $|\vec{W}|$ = 5,4 м/с^2, S = 14 м)

1.5. Точка движется вдоль оси X, причем координата изменяется по закону $x = a\cos[(2\pi/T)t]$. Найти:

а) выражение для проекции на ось X скорости $\vec{\upsilon}$ и ускорения $\vec{W}$ точки;

б) путь S, пройденный точкой за промежуток времени от $t = T/8$ до $t = T/4$.

($\upsilon x = -(2\pi/T)\, a \sin(2\pi/T)\, t$, $Wx = -(2\pi/T)^2 a \cos(2\pi/T)\, t$, $S = 0{,}707\, a$)

1.6. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону

$\vec{r} = 3t^2\vec{e}_x+2t\vec{e}_y+1\vec{e}_z$. Найти:

$а$) скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{W}$ частицы;

б) модуль скорости в момент времени t = 1 с;

в) приближенное значение пути S, пройденное частицей за 11-ю секунду движения.

($а$) $\vec{\upsilon} = 6t\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ (м/с); б) $\vec{W} = 6\vec{e}_x$ (м/с^2); в) $|\vec{\upsilon}|$ = 6,3 м/с, S = 63 м).

1.7. Тело брошено под углом α к горизонту и в начальный момент времени имеет скорость $\vec{\upsilon}_0$. Построить качественные зависимости υ_x и υ_y как функции от времени движения тела до момента падения. Определить радиус кривизны траектории в момент времени $t = \tau/4$, где τ – время движения до падения. Сопротивления движению нет.

$$(R = \frac{\upsilon_0^2\cos^2\alpha+(\upsilon_0\sin a - g\tau/4)^2}{g\cos(\mathrm{arctg}\,(\dfrac{\upsilon_0\sin\alpha - g\tau/4}{\upsilon_0\cos\alpha}))})$$

1.8. Тело в течение времени τ движется с постоянной скоростью υ_0. Затем скорость его линейно нарастает со временем так, что в момент времени 2τ она равна $2\upsilon_0$. Определить путь, пройденный телом за время t. Считать что $\tau<t<2\tau$.

$$(S = \frac{\upsilon_0\tau}{2} + \frac{\upsilon_0 t^2}{2\tau})$$

1.9. Точка движется по криволинейной траектории с постоянным тангенциальным ускорением w_τ = 0,5 м/с^2. Определить полное ускорение точки в момент времени t = 5 с от начала движения, если радиус кривизны траектории в этот момент времени R = 2 м.

(W = 3,2 м/с^2)

1.10. Начальное значение скорости $\vec{\upsilon}_\tau = 1\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$, (м/с), конечное $\vec{\upsilon}_2 = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$, (м/с). Найти:

а) приращение скорости $\Delta\vec{\upsilon}$; б) модуль приращения скорости $|\Delta\vec{\upsilon}|$;

в) приращение модуля скорости $\Delta\upsilon$.

(а) $\Delta\vec{\upsilon} = 1\vec{e}_x + 1\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$ м/с; б) $|\Delta\vec{\upsilon}|$ = 1,73 м/с, в) $\Delta\upsilon$ = 1,57 м/с).

1.11. По дуге окружности радиусом R = 10 м движется точка. В некоторый момент времени от начала движения ускорение точки W_n = 5,0 м/с^2; вектор полного ускорения $\vec{W}$ образует в этот момент с вектором тангенциального ускорения $\vec{W}_\tau$ угол $\alpha = 30^\circ$. Считая W_τ = const, найти закон изменения $W_n = f(t)$.

(W_n = 7,5 t^2 м/с^2).

1.12. Точка движется по дуге окружности радиусом R. Ее скорость зависит от пройденного пути S по закону $\upsilon = k\sqrt{S}$, где k – постоянная. Найти угол между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от S.

$$(\alpha = \mathrm{arctg}\ (\frac{2S}{R}))$$

1.13. Тело брошено под углом α = 45° к горизонту с начальной скоростью υ = 30 м/с. Определить радиус кривизны траектории R в максимальной точке подъема тела и в точке его касания с землей. Качественно постройте зависимости кинетической W_k, потенциальной W_p, и полной W энергии тела как функции времени. Сопротивления движению не учитывать.

(R_1 = 46 м, R_2 = 130 м)

1.14. Материальная точка движется по окружности радиусом R. Ее тангенциальное ускорение изменяется по закону $W\tau = kt$, где $k>0$. В какой момент времени t с начала движения модули нормального и тангенциального ускорения будут равны? Чему равно полное ускорение материальной точки в этот момент времени? Какой угловой путь φ пройдет точка к этому моменту времени? Качественно изобразите закон изменения угловой скорости ω как функцию времени.

($t = \sqrt[3]{\frac{4R}{k}}$; $W = k\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{4R}{k}}$; φ = 0,67 рад)

1.15. Точка движется по окружности радиусом R = 30 см с постоянным угловым ускорением. Определить тангенциальное ускорение точки, если известно, что с некоторого момента за интервал времени t = 4 с она совершила три оборота и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение W_n = 2,7 м/с^2. Определить угловую ω_0 и линейную υ_0 скорости в начале указанного интервала времени. Построить графики зависимости модулей ускорения и угловой скорости от времени на интервале движения:

$W_n = f(t)$; $W_\tau = f(t)$; $\omega = f(t)$.

(ω_0 = 6,4 рад/с; υ_0 = 1,9 м/с)

Динамика

Примеры решения задач

5. Система состоит из частицы 1 массой 1,0 г, расположенной в точке с координатами (1, 1, 1) м, частицы 2 массой 2,0 г, расположенной в точке с координатами (-2, 2, 2) м, частицы 3 массой 3,0 г, расположенной в точке с координатами (-1, 3, -2) м, частицы 4 массой 4,0 г, расположенной в точке с координатами (3, -3, 3) м. Найти радиус – вектор $\vec{r}_c$ центра масс системы и его модуль.

Дано:

m_1 = 1,0г

m_2 = 2,0г

m_3 = 3,0г

m_4 = 4,0г

$\vec{r}_1 = 1\vec{e}_x + 1\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$,м

$\vec{r}_2 = -2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$,м

$\vec{r}_3 = -1\vec{e}_x + -3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$,м

$\vec{r}_4 = 3\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$,м

а) $\vec{r}_c$ – ?

б) $|\vec{r}_c|$ – ?

Решение

Положение центра масс определяется выражением $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i^n (m_i \cdot \vec{r}_i)}{\sum_i^n m_1}$ где m_i – масса i-й частицы системы; $\vec{r}_1$ – радиус-вектор i-й частицы системы. Отсюда для радиус-вектора центра масс рассматриваемой системы, получим

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_4\vec{r}_4}{m_1 + \ldots + m_4} =$$

$$= \frac{1,0\left(1\vec{e}_x + 1\vec{e}_y + 1\vec{e}_z\right) + 2,0\left(-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z\right) + 3,0\left(-1\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z\right) +}{1,0 + 2,0 + 3,0 + 4,0}$$

$$\frac{+4,0\left(3\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z\right)}{1,0 + 2,0 + 3,0 + 4,0} = \frac{6\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 11\vec{e}_z}{10} = 0,6\vec{e}_x + 0,2\vec{e}_y + 1,1\vec{e}_z, \text{ м.}$$

Модуль радиус-вектора центра масс системы

$$|\vec{r}_c| = \sqrt{x_c{}^2 + y_c{}^2 + z_c{}^2} = \sqrt{(0,6)^2 + (0,2)^2 + (1,1)^2} = 1,27 \text{ м.}$$

Ответ: $\vec{r}_c = 0,6\vec{e}_x + 0,2\vec{e}_y + 1,1\vec{e}_z$ м; $|\vec{r}_c|$ = 1,27 м

6. На горизонтальной плоскости лежит доска массой m_1 = 1 кг, а на доске – брусок массой m_2 = 2кг. Коэффициент трения между бруском и доской μ_1 = 0,25, между доской и горизонтальной плоскостью μ_2 = 0,5. С каким ускорением должна двигаться доска, чтобы брусок начал с нее соскальзывать? Какую горизонтальную силу F_0 следует при этом приложить к доске?

Дано:

m_1 = 1,0 кг

m_2 = 2,0 кг

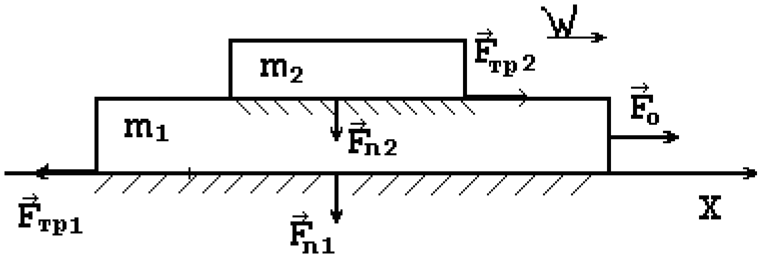
μ_1 = 0,25

μ_2 = 0,50

а) a_m –?

б) F_0 –?

Решение



Движения доски и бруска одномерные и происходят вдоль оси OX, как показано на рисунке. Поэтому для решения задачи достаточно воспользоваться проекцией уравнения 2-го закона Ньютона на ось OX (как для бруска, так и для доски). Брусок в горизонтальном направлении вынуждает двигаться с ускорением без проскальзования сила трения покоя со стороны поверхности доски. По мере роста ускорения доски растет и величина силы трения покоя. Когда она достигает предельной величины, равной силе трения скольжения $F_{тр2}$, брусок начинает соскальзывать с доски. В этом случае из 2-го закона Ньютона получим

$$m_2 W_m = F_{тр2} = \mu_1 F_{n2} \tag{1}$$

где F_{n2} – сила нормального давления бруска на поверхность доски.

$$F_{n2} = m_2 g. \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) следует:

$W_m = \mu_1 \cdot g = 0{,}25 \cdot 9{,}81 = 2{,}45$ м/с².

На доску действуют в горизонтальной плоскости силы $\vec{F}_0$, $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$, как показано на рисунке. Уравнение движения доски в этом случае имеет вид:

$$m_1 W_m = F_0 - F_{тр1} - F_{тр2}, \tag{3}$$

где $F_{тр1} = \mu_2 F_{n1}$ – сила трения скольжения между доской и горизонтальной плоскостью; F_{n1} – сила нормального давления доски с брусом на горизонтальную плоскость.

$$F_{n1} = (m_1 + m_2) g. \tag{4}$$

Из выражений (3) и (4) получим:

$F_0 = m_1\mu_1 g + m_2\mu_1 g + \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g = 22$ Н.

Ответ: $W_m = 2{,}5$ м/с²; $F_0 = 22$ Н.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.16. Система состоит из частицы 1 массой 0,10 г, частицы 2 массой 0,20 г и частицы 3 массой 0,30 г. Частица 1 помещается в точке с координатами (1, 2, 3), частица 2 – в точке с координатами (2, 3, 1), частица 3 – в точке с координатами (3, 1, 2) (значения координат даны в метрах). Найти радиус-вектор $\vec{r}_c$ центра масс системы и его модуль.

($\vec{r}_c = 2{,}3\vec{e}_x + 1{,}8\vec{e}_y + 1{,}8\vec{e}_z$, $|\vec{r}_c| = 3{,}4$ м)

1.17. Тело брошено сначала под углом α_1 к горизонту со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, а затем под углом α_2 со скоростью $\vec{\upsilon}_2$ ($\alpha_1 > \alpha_2$). В начальный момент движения

$\upsilon_{1x} = \upsilon_{2x}$.Сравнить в указанных случаях радиусы кривизны траектории в высшей точке подъема тела. Построить качественно зависимости проекции импульса p_{1y} и p_{2y} как функцию времени движения тела. Сопротивления движению нет.

$$\left(R_1 = \frac{\upsilon_{1x}^2}{g},\ R_2 = \frac{\upsilon_{2x}^2}{g} \right)$$

1.18. Брусок массой m_1 = 1 кг покоится на бруске массой m_2 = 2,0 кг. На нижний брусок начала действовать горизонтальная сила $F = 3t$ Н. В какой момент времени t верхний брусок начнет проскальзывать? Коэффициент трения между брусками μ = 0,1. Трение между нижним бруском и опорой пренебрежимо мало.

$$(t > \frac{\mu g(m_1 + m_2)}{3} = 0{,}98 \text{ с} \approx 1 \text{ с.})$$

1.19. На горизонтальной доске лежит брусок массой m. Один конец доски поднимается. Изобразите график зависимости силы трения, действующей на брусок, от угла α наклона доски в интервале значений $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Коэффициент трения между доской и бруском μ_0 = 0,25.

1.20. На горизонтальной плоскости лежит доска длиной L и массой m_1. Тело массой m_2 лежит посередине доски. Коэффициент трения между доской и плоскостью μ_1, между доской и телом μ_2. Какую силу в горизонтальном направлении надо приложить к доске, чтобы тело соскользнуло с нее? За какое время t тело соскользнет, если к доске приложена сила F_0 ?

$$(F > g(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2),\ t = \sqrt{\frac{Lm_1}{F_0 - g(m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)}})$$

1.21. Брусок движется вдоль горизонтальной поверхности под действием постоянной по величине силы, направленной под углом α к горизонту. Коэффициент трения между бруском и поверхностью равен 0,25. При каком значении угла α ускорение бруска вдоль поверхности будет максимальным?

(α = 14°)

1.22. Найти зависимость ускорения силы тяжести Земли над полюсом и экватором от высоты положения тела над уровнем моря h. Построить качественно эти зависимости на графике $g = f(h)$.

$$\left(g_1 = G\frac{M}{(R+h)^2},\;\; g = G\frac{M}{(R+h)^2} - \omega^2 (R+h) \right)$$

1.23. Электровоз массой m = $184 \cdot 10^3$ кг движется вдоль меридиана со скоростью υ = 72 км/ч на широте φ = 45°. Определить горизонтальную составляющую силы F, с которой электровоз давит на рельсы.

(0,38 кН)

Вращательное движение. Моменты инерции, силы, импульса

Примеры решения задач

7. Сила с компонентами (2, -1, 4), *Н* приложена к точке с координатами (–3, 2, 1), м. Найти:

а) момент силы $\vec{M}$ относительно начала системы координат;

б) модуль момента силы M;

в) проекцию M_z момента силы $\vec{M}$ на ось z.

Дано:	Решение
$F = 2\vec{e}_x - 1\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$, Н $\vec{r} = -3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$, м	По определению момент силы относительно начала системы координат – векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ и силы $\vec{F}$.

а) $\vec{M}$ – ?
б) M – ?
в) M_z – ?

Следотельно,

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yFz\text{-}zFy)\vec{e}_x + (zF_x\text{-}xF_z)\vec{e}_y +$$

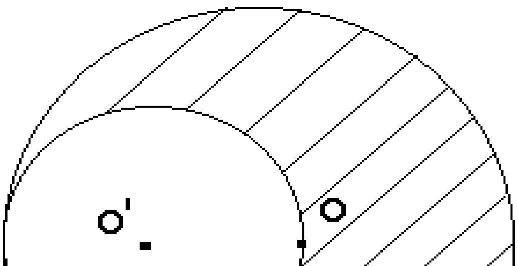
$$+(xF_y - yF_x)\vec{e}_z = 10\vec{e}_x + 14\vec{e}_y - 1{,}0\vec{e}_z \text{, Н·м,} \qquad (1)$$

z – компонента вектора $\vec{M}$ и есть проекция M_z момента силы на ось z.

Следовательно, M_z = -1, Н·м. Модуль момента силы получится из выражения вышеприведенного: $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{10^2 + 14^2 + 1^2}$ = $= \sqrt{297} = 17{,}2 \approx 17$, Н·м.

Ответ: $\vec{M} = 10\vec{e}_x + 14\vec{e}_y - 1\vec{e}_z$, Н·м; M = 17,2 Н·м; M_z = –1 Н·м.

8. Во сколько раз уменьшится момент инерции однородного сплошного диска оносительно оси, проходящей через его центр инерции (точка О) и перпендикулярной к плоскости диска, если сделать круглый дисковый вырез, как показано на рисунке.



Момент инерции – величина аддитивная. Поэтому момент инерции I_3 диска с вырезом относительно точки О равен разности момента инерции диска $I_1(\text{O})$ относительно точки О и момента инерции малого диска $I_2(\text{O})$, соответствующего вырезанной части, также относительно точки О, т. е. $I_3 = I_1(\text{O}) - I_2(\text{O})$. В задаче необходимо найти отношение $\dfrac{I_1(\text{O})}{I_3}$. Обозначим массу диска через m, а радиус диска через R. Тогда масса вырезанной части $\dfrac{m}{4}$, а радиус $\dfrac{R}{2}$. Как известно, момент инерции диска $I_1(\text{O})$ относительно оси симметрии равен: $I_1(\text{O}) = \dfrac{mR^2}{2}$. Для вычисления момента инерции $I_2(\text{O})$ используем теорему Штейнера:

$$I_2(\text{O}) = I_2(\text{O}') + \frac{m}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

где $I_2(\text{O}')$– момент инерции малого диска, соответствующего вырезанной части, относительно оси симметрии этого диска, походящей через точку О′. Окончательно $I_2(\text{O}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{4}\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + \dfrac{mR^2}{4\cdot 4} = \dfrac{3}{32}mR^2$. Таким образом, искомое отношение $\dfrac{I_1(\text{O})}{I_3} = \dfrac{I_1(\text{O})}{I_1(\text{O}) - I_2(\text{O})} = \dfrac{16}{13}$ = $1{,}23 \approx 1{,}2$.

Ответ: момент инерции диска после сделанного выреза уменьшается в 1,2 раза.

9. Тонкий однородный обруч массой m = 2,0 кг и радиусом R = 1,0 м вращается вокруг оси симметрии, перпендикулярной к плоскости обруча, делая n_0 = 120 об/мин. Под действием постоянной касательной к поверхности обруча силы $F_т$ = 4,0 Н обруч тормозится и останавливается. Определить время торможения $t_т$ и число оборотов $N_т$, которое сделает обруч от начала торможения до остановки.

Дано:	Решение
m = 2,0 кг R = 1,0 м n_0 = 120 об/мин = 2 об/с $F_т$ = 4,0 Н	Для вращающегося обруча, на который действует тормозящий момент сил $M_т = F_т R$, уравнение вращательного движения имеет вид $I\varepsilon = M_т = F_т R,$ (1)
а) $t_т$ –? б) $N_т$ –?	где I – момент инерции обруча, ε – угловое ускорение. Момент инерции тонкого однородного обруча $I = mR^2$. Угловое ускорение постоянно, так как тормозящий момент сил не изменяется. Следотельно, угловая скорость ω связана с угловым ускорением формулой

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t, \qquad (2)$$

где ω_0 – начальная угловая скорость обруча. Знак «минус» в выражении (2) показывает, что вращение равнозамедленное. Число оборотов N связано с углом поворота обруча $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$ соотношением

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 t}{2\pi} - \frac{\varepsilon t^2}{2 \cdot 2\pi}. \qquad (3)$$

В конце времени торможения угловая скорость обруча равна нулю, и из формул (1) и (2) получим

$$t_т = \frac{\omega_0}{|\varepsilon|} = \frac{2\pi n_0}{|\varepsilon|} = \frac{2\pi n_0 mR}{F_т} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 120 \cdot 2 \cdot 1}{60 \cdot 4} = 6{,}28 \text{ с} \approx 6{,}3 \text{ с}.$$

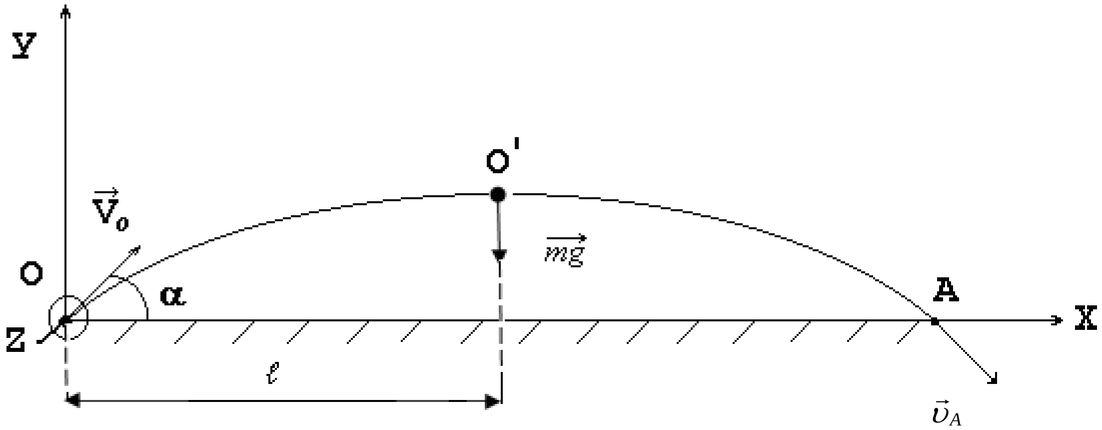
Для числа оборотов $N_т$ за время торможения из выражения (3) следует:

$$N_т = \frac{|\varepsilon|\, t_T^2}{2 \cdot 2\pi} = \frac{2(6{,}28)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3{,}14} = 12{,}6 \approx 13 \text{ об.}$$

Ответ: $t_т$ = 6,3 с; $N_т$ = 13 об.

10. Небольшое тело массой m = 200 г брошено по углом α = 60° к горизонту со скоростью υ_0 = 10 м/с. Выразить зависимость момента импульса тела $\vec{L}$ от времени в системе координат, изображенной на рисунке, относительно точки О.

Определить модуль изменения момента импульса $|\Delta\vec{L}|$ для положения тела в точке наивысшего подъема О´ и точке падения на землю А.



Дано:
m = 200г
α = 60°
v_0 = 10 м/с

а) $L(t)$ –?
б) $|\Delta\vec{L}|$ –?

Решение

Введем правовинтовую систему координат *OXYZ,* как показано на рисунке. Поскольку при движении тела на него действует только сила тяжести, то из уравнения моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

можно определить момент импульса

$$\vec{L} = \int \vec{M}dt,$$

где $\vec{M} = -mgl\vec{e}_z$, в котором mg – сила тяжести, l – плечо силы относительно точки О. Знак (-) обусловлен тем, что момент силы $\vec{M}$ в соответствии с правилом правого винта направлен в сторону противоположную оси z.

Плечо l найдем как $l = \upsilon_0 \cos\alpha t$, так как вдоль оси x силы не действуют и движение равномерное. Тогда момент импульса

$$\vec{L} = \int -mg\upsilon_0 \cos\alpha t\vec{e}_z dt = -mg\upsilon_0 \cos\alpha \frac{t^2}{2}\vec{e}_z . \qquad (1)$$

Время достижения телом точки наивысшего подъема O' определяется выражением $t_{\Pi} = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{10 \cdot 0{,}866}{9{,}81} = 0{,}883$ с (так как $\upsilon = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_n = 0$).

Время достижения телом точки А в два раза больше времени t_n (как известно, время подъема равно времени спуска тела).

Окончательно производя необходимые вычисления, получим для $\vec{L}(t) = -4{,}9t^2\vec{e}_z$ (кг·м^2)/с; для модуля изменения момента импульса из (*), учитывая, что в начальный момент времени $\vec{L}_0 = 0$ $|\Delta L| = 11{,}5 \approx 12$ (кг·м²)/с.

Ответ: $\vec{L}(t) = -4{,}9t^2\vec{e}_z$ (кг·м²)/с; $\left|\Delta\vec{L}\right| = 12$ (кг·м²)/с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.24. Сфера радиусом R = 2,0 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси симметрии, делая 30 об/мин. Внутри сферы находится шарик. Найти высоту h, соответствующую положению равновесия шарика. При какой наименьшей угловой скорости радиус вращения шарика будет 0,9 R? Шарик считать материальной точкой.

(h = 1,0 м; ω = 3,4 рад/с)

1.25. Тело участвует в двух вращательных движениях, происходящих со скоростями $\vec{\omega}_1 = at^2\vec{e}_x$ и $\vec{\omega}_2 = 2at^2\vec{e}_y$ (a = 1,0 рад/с^3). Определить:

а) на какой угол φ повернется тело за первые 3,0 с;

б) какой угол составляет ось вращения, вокруг которой происходит поворот, с осью X.

(а) φ = 20 рад, б) α = 63°)

1.26. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что угол его поворота меняется в зависимости от времени t по закону $\varphi = 2\pi(at - \frac{bt^2}{2})$, где a>0; b>0. Найти момент времени τ, в который тело остановится, а также число оборотов N тела до остановки.

($\tau = \frac{a}{b}$; $N = \frac{a^2}{2b}$)

1.27. Материальная точка движется по окружности радиусом R со скоростью $\upsilon = kt$, где k>0. Найдите зависимость от времени модуля полного ускорения точки; постройте графики зависимости тангенциального и нормального ускорений от времени.

($W = \frac{k}{R}\sqrt{k^2t^4 + R^2}$)

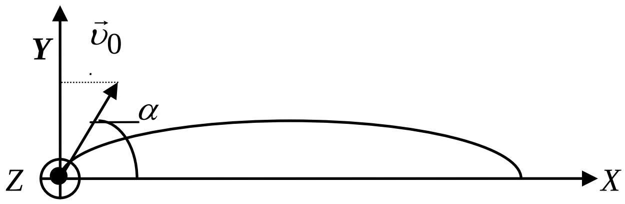
1.28. Определить полное ускорение W в момент времени t = 3,0 c точки, находящейся на ободе колеса радиусом R = 0,50 м, вращающегося согласно уравнению $\varphi = At+Bt^3$, где A = 2,0 рад/с; B = 0,20 рад/с^3. Изобразите графики нормального и полного ускорений $W_n = f(t)$ и $W = f(t)$ на интервале $0<t<3$ с.

(W = 27 м/с^2)

1.29. Точка движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением. Через некоторый промежуток времени t после начала движения, угол между полным ускорением и радиусом окружности равен 45°. Чему равно угловое ускорение точки?

($\varepsilon = \frac{1}{t^2}$)

1.30. Материальная точка (частица) массой m брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Траектория полета частицы лежит в плоскости X, Y. Ось Z направлена "на нас".



Найти зависимость от времени:

а) момента силы $\vec{M}$, действующего на частицу;

б) момента импульса частицы $\vec{L}$ относительно начала координат.

(а) $\vec{M} = -mg\upsilon_0(\cos\alpha)t\vec{e}_z$; б) $\vec{L} = -\frac{1}{2}mg\upsilon_0(\cos\alpha)t^2\vec{e}_z$) .

1.31. Две материальные точки массами m_1 и m_2 соединены жестким невесомым стрежнем длиной L. Найти положение центра масс системы X_c и момент инерции I этой системы относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через центр масс.

($X_c = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$; $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L^2$)

1.32. Тело массой m = 0,10 кг брошено с некоторой высоты в горизонтальном направлении со скоростью υ_0 = 20 м/с. Найти модуль приращения момента импульса тела $\left|\Delta\vec{L}\right|$ относительно точки бросания за первые τ = 5 с.

($\left|\Delta\vec{L}\right| = \frac{1}{2}mg\upsilon_0\tau^2 = 2{,}5 \cdot 10^2$ кгм^2/с)

1.33. Сила с компонентами (3, 4, 5) Н приложена к точке с координатами (4, 2, 3) (м). Найти:

а) момент силы $\vec{M}$ относительно начала координат;

б) модуль вектора $\left|\vec{M}\right|$;

в) проекцию на ось Z момента силы M_z.

($\vec{M} = -2\vec{e}_x - 11\vec{e}_y + 10\vec{e}_z$ (Н·м), $|\vec{M}|$ = 15 Н·м)

1.34. Найти момент инерции однородной прямоугольной пластинки массой m, длиной a и шириной b относительно перпендикулярной к ней оси, проходящей через одну из вершин пластинки.

($I = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$)

1.35. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться вокруг оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра m_1 = 12 кг. На цилиндр намотан шнур, к которому привязали гирю массой m_2 = 1,0 кг. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения гири?

(W = 1,4 м/с^2; T = 8,4 Н)

1.36. На обод маховика диаметром D = 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2,0 кг. Определить момент инерции маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время t = 3,0 с приобрел угловую скорость ω = 9,0 рад/с.

(J = 1,8 кг·м^2)

1.37. Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и положили (опустили) на горизонтальный стол. Через какое время t обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем равен μ? Сколько оборотов N сделает обруч до полной остановки?

($N = \frac{R\omega^2}{4\pi\mu g}$; $t = \frac{R\omega}{\mu g}$)

1.38. С какой угловой скоростью должен вращаться сосуд в виде усеченного конуса, чтобы шарик, лежащий на его дне, выкатился из него? Диаметр верхнего основания равен d. Стенки сосуда наклонены к горизонту под углом α.

($\omega = \sqrt{\frac{2g \operatorname{tg} \alpha}{d}}$)

1.39. Из сплошного однородного цилиндра радиусом R сделали полый, удалив внутреннюю часть радиусом R/2 от оси симметрии. Во сколько раз изменится момент инерции тела относительно указанной оси?

($\frac{J_1}{J_2} = 1{,}07$)

1.40. Из сплошного однородного цилиндра сделали полый, удалив половину его массы. Как изменится момент инерции J цилиндра относительно его оси и во сколько раз? Как и во сколько раз изменится момент импульса указанных цилиндров, если они вращаются с одинаковой угловой скоростью?

$$(\frac{J_1}{J_2} = 1{,}33)$$

1.41. В сплошном однородном диске радиусом R просверлили сквозное отверстие радиусом $R/2$ от оси симметрии. Как изменится момент инерции тела относительно указанной оси по отношению к первоначальному?

$$(\frac{J_2}{J_1} = 0{,}93)$$

1.42. Два однородных цилиндра с одинаковыми высотами h и равными массами m вращаются относительно своих осей симметрии. Соотношение плотностей материалов цилиндров $\rho_1 = (3/4)\rho_2$. Сравнить вращающие моменты сил, если угловые ускорения цилиндров одинаковы, а моменты сил трения $M_{тр}$ равны.

$$(\frac{M_1}{M_2} = 1{,}33)$$

1.43. Грузик массой 5,0 г, привязанный к нити длиной l = 50 см, вращается вокруг вертикальной оси и описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол φ образует нить с вертикалью, если частота вращения $n = 1{,}0\ c^{-1}$. Чему равен модуль проекции момента импульса на ось вращения?

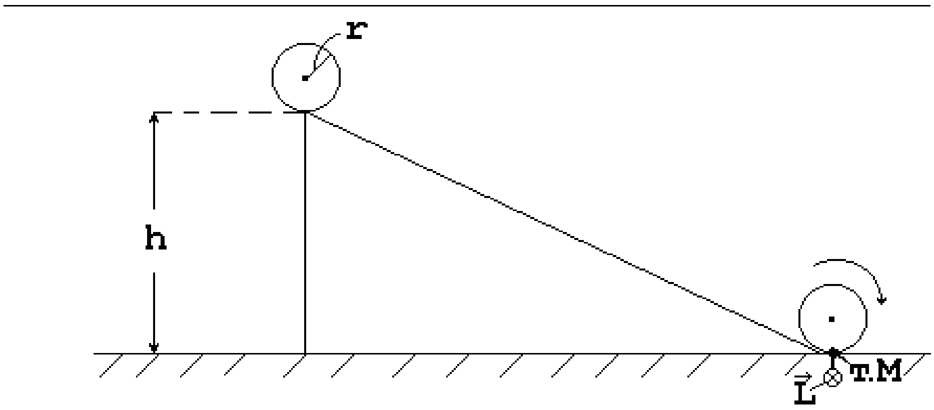
$(\varphi = 60°;\ L_z = 5{,}9 \cdot 10^{-2}$ (кг·м²)/с)

Законы сохранения. Работа. Энергия

Примеры решения задач

11. Однородный цилиндр массой m = 10 кг и радиусом r = 5 см свободно скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости высотой h = 1,0 м. Определить угловую скорость движения цилиндра с наклонной плоскости на горизонтальную плоскость. Начальная скорость цилиндра равна нулю.

Дано:	Решение
m = 10 кг r = 5,0 см h = 1,0 м	
а) ω –? б) L –?	



В начальный момент движения скорость цилиндра равна нулю и его полная механическая энергия равна потенциальной $W_{\text{п}}$. При переходе на горизонтальную плоскость полная механическая энергия цилиндра равна сумме кинетической энергии W_K и потенциальной энергии $W'_П$ цилиндра. По закону сохранения полной механической энергии получается:

$$W_{\text{п}} = W_{\text{к}} + W'_{\text{п}} \tag{1}$$

Потенциальная энергия цилиндра определяется положением центра масс цилиндра над горизонтальной плоскостью. Поэтому: $W_{\text{п}} = mg(h+r), W'_{\text{п}} = mgr$, где g – ускорение свободного падения.

Как известно, качение цилиндра по плоской поверхности можно рассматривать как поворот с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси вращения, проходящей по линии соприкосновения цилиндрической поверхности и плоскости. На рисунке мгновенная ось вращения проходит через точку М перпендикулярно плоскости рисунка. Следовательно, кинетическая энергия определяется выражением

$$W_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{2}$$

где I – момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси вращения. Из известного выражения для момента инерции цилиндра относительно оси симметрии и теоремы Штейнера получается:

$$I = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2. \tag{3}$$

Выражение (1) с учетом формул (2) и (3) принимает вид

$$mg(h+r) = \frac{3}{4}mr^2\omega^2 + mgr. \tag{4}$$

Из уравнения (4) для угловой скорости ω следует:

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{4gh}{3}} = \frac{1}{5{,}0\cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{4\cdot 9{,}81\cdot 1{,}0}{3}} = 72\ \text{рад/с}.$$

Момент импульса L при переходе цилиндра на горизонтальную плоскость направлен вдоль мгновенной оси вращения, как показано на рисунке. Модуль момента импульса

$$L = I\omega = \frac{3}{2}mr^2\omega = \frac{3\cdot 10\cdot\left(5{,}0\cdot 10^{-2}\right)^2\cdot 72}{2} = 2{,}7\ (\text{кг}\cdot\text{м}^2)/\text{с}.$$

Ответ: ω = 72 рад/с; L = 2,7 (кг·м²)/с.

12. Два шара, один массой m_1 = 2,0 кг, второй m_2 = 3,0 кг, на горизонтальной плоскости движутся навстречу во взаимноперпендикулярных направлениях и сталкиваются абсолютно неупруго. Найти после соударения скорость шаров υ_3, направление скорости и часть механической энергии шаров, перешедшей во внутреннюю энергию шаров. До соударения скорость первого шара υ_1 = 5,0 м/с, второго υ_2 = 3,0 м/с.

Дано:
m_1 = 2,0 кг
m_2 = 3,0 кг
υ_1 = 5,0 м/с
υ_2 = 3,0 м/с

а) υ_3 –?
б) α –?
в) ΔW –?

Решение

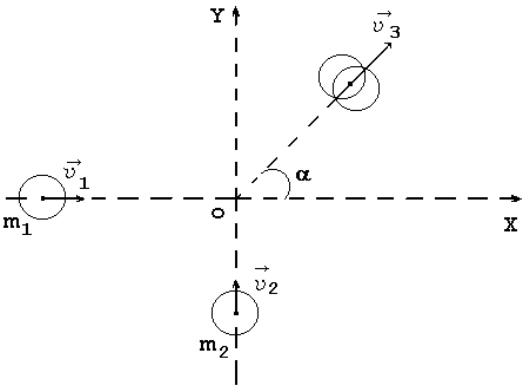


Рис. 1

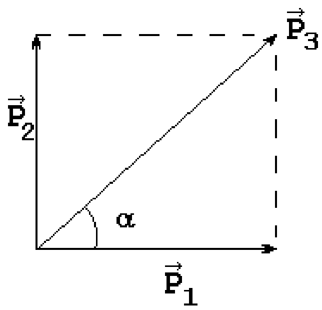


Рис. 2

На горизонтальной плоскости введем систему координат XOY, как показано на рис. 1. Соударение шаров происходит в начале системы координат. Соударение абсолютно неупругое, поэтому шары “слипаются” и движутся вместе со скоростью υ_3, как показано на рис. 1. Внешняя сила (сила тяжести), действующая на шары, перпендикулярна к горизонтальной плоскости и, следовательно, выполняется закон сохранения импульса

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_3\ , \qquad (1)$$

где $\vec{P}_1$ – импульс первого шара до соударения; $\vec{P}_2$ – импульс второго шара до соударения; $\vec{P}_3$ – импульс шаров после соударения. Из характера движения шаров и закона сохранения импульса следует, что направление векторов

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ должны соответствовать рис. 2, а модули векторов связаны соотношением $P_3^2 = P_1^2 + P_2^2$ или

$$((m_1 + m_2)\upsilon_3)^2 = (m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2 \qquad (2)$$

Из уравнения (2) для скорости υ_3 получаем:

$$\upsilon_3 = \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2} = \sqrt{\left(2,0 \cdot 5,0\right)^2 + \left(3,0 \cdot 3,0\right)^2} = 2,7 \text{ м/с.}$$

Угол α, характеризующий направление скорости υ_3, может быть найден из рис. 2 по формуле:

$$\alpha = \text{arctg}\frac{P_2}{P_1} = \text{actg}\frac{m_2\upsilon_2}{m_1\upsilon_1} = \text{arctg}\frac{3,0 \cdot 3,0}{5,0 \cdot 2,0} = \text{acctg } 0,9 = 42^{\text{o}}.$$

При абсолютно неупругом соударении механическая энергия тел уменьшается на величину ΔW, перешедшую во внутреннюю энергию шаров. Движение происходит на горизонтальной плоскости, поэтому механическая энергия системы обусловлена кинетической энергией шаров. Окончательно для величины ΔW следует

$$\Delta W = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon_3^2}{2} = \frac{2,0 \cdot \left(5,0\right)^2}{2} + \frac{3,0 \cdot \left(3,0\right)^2}{2} -$$

$$-\frac{\left(2,0 + 3,0\right)\left(2,7\right)^2}{2} = 20,2 \approx 20 \text{ Дж.}$$

Ответ: υ_3 = 2,7 м/с; α = 42º; ΔW = 20 Дж.

13. На скамье Жуковского вращается с частотой n_1 = 1,0 об/с человек, держащий в центре горизонтально расположенный металлический стержень массой m = 5,0 кг и длиной l = 1,5 м. Определить частоту вращения человека n_2 и совершенную работу A, если он повернет стержень в вертикальное положение. Момент инерции человека и скамьи I_0 = 5,0 кг·м².

Дано:
n_1 = 1,0 об/с
m = 5,0 кг
l = 1,5 м
I_0 = 5,0 кг·м^2
а) n_2 –?
б) A –?

Решение

Вращение человека со стержнем происходит вокруг вертикальной оси, момент внешних сил относительно которой равен нулю. Поэтому величина момента импульса L относительно вертикальной оси остается неизменной при повороте стержня, т. е.: $L_1 = L_2$, или

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad (1)$$

где I_1 и ω_1 – момент инерции и угловая скорость человека со стержнем, расположенным горизонтально; I_2 и ω_2 – момент инерции и угловая скорость человека со стержнем, расположенным вертикально. Угловая скорость ω и число оборотов в единицу времени связаны соотношением

$$\omega = 2\pi n. \qquad (2)$$

Момент инерции стержня I_c относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр масс, $I_C = \frac{1}{12}ml^2$. Поэтому

$$I_1 = I_0 + I_c = I_0 + \frac{1}{12}ml^2. \qquad (3)$$

При повороте стержня в вертикальное положение его момент инерции становится равным нулю. Следовательно, $I_2 = I_0$ (4) Подставляя соотношения (2) – (4) в формулу (1), получим: $(I_0 + \frac{1}{12}ml^2)2\pi n_1 = I_0 2\pi n_2$. Отсюда для величины n_2 следует:

$$n_2 = (1 + \frac{ml^2}{12I_0})n_1 = (1 + \frac{5,0 \cdot 1,5^2}{12 \cdot 5,0})1,0 = 1,19 \approx 1,2 \text{ об/с}.$$

Работа A, совершенная человеком при повороте стержня, равна изменению кинетической энергии. Поэтому

$$A = \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{4\pi^2}{2}\left\{I_0 n_2^2 - (I_0 + \frac{ml^2}{12})n_1\right\} =$$

$$= 2(3,14)^2\{5,0(1,19)^2 - (5,0 + \frac{5 \cdot 1,5^2}{12})1,0^2\} = 22,5 \approx 23 \text{ Дж}.$$

Ответ: n_2 = 1,2 об/с; A = 23 Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.44. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n_1 = 14 мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до n_2 = 25 мин$^{-1}$. Масса человека m = 70 кг. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

(180 кг)

1.45. Человек массой m_0 = 60 кг находится на неподвижной платформе массой m = 100 кг. С какой частотой ν будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом r = 5,0 м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы υ_0 = 4,0 км/ч. Радиус платформы R = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

(0,49 об/мин)

1.46. Шар скатывается с наклонной плоскости высотой h = 90 см. Какую линейную скорость будет иметь шар в тот момент, когда он скатится с наклонной плоскости? Момент инерции шара $J = 0{,}40\ m\cdot R^2$.

(3,6 м/с)

1.47. Два шара движутся навстречу друг другу вдоль оси X. Масса первого шара m_1 = 0,20 кг, масса второго шара m_2 = 0,30 кг. До столкновения проекции скоростей шаров на ось υ_{1x} = 1,0 м/с, υ_{2x} = -1,0 м/с. Найти проекции скоростей шаров υ'_{1x} и υ'_{2x} после центрального абсолютного упругого соударения.

(υ'_{1x} = -1,4 м/с; υ'_{2x} = 0,60 м/с)

1.48. Тонкий однородный стержень длиной L может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно ему. Стержень отклонили на 90° от положения равновесия и отпустили. Определить скорость υ нижнего конца стержня в момент прохождения равновесия.

($\upsilon = \sqrt{3gL}$)

1.49. Тонкий однородный стержень длиной l и массой m может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Стержень устанавливают горизонтально и отпускают. Пренебрегая трением, определить угловую скорость стержня в момент прохождения им положения равновесия. Построить график зависимости углового ускорения стержня от угла между стержнем и горизонтом.

($\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$)

1.50. Сплошной однородный шар скатывается по наклонной плоскости длиной 5,0 м. Угол наклона плоскости к горизонту α = 30°. Определить скорость шара в конце наклонной плоскости, время движения шара до горизонтальной поверхности и качественно построить зависимость кинетической энергии шара как функцию времени. Потерями энергии пренебречь. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс, $J_0 = \frac{2}{5} mR^2$.

(υ = 5,9 м/с; t = 1,7 с)

1.51. Сплошной цилиндр катится по горизонтальной поверхности в течение времени t = 3,0 c и останавливается, пройдя расстояние 9,0 м. Определить коэффициент трения, считая его постоянным. Построить качественно зависимость кинетической энергии тела как функцию времени движения.

(μ = 0,31)

1.52. Вал массой m = 50 кг и радиусом R = 5,0 см вращался с частотой n = 10 об/с. К его цилиндрической поверхности прижали тормозную колодку с силой F = 30 Н, и через 8,0 с после начала торможения вал остановился. Определить коэффициент трения, считая его постоянным. Построить график зависимости угловой скорости и углового ускорения вала как функцию времени на интервале торможения.

(μ = 0,33)

1.53. Шар и сплошной диск имеют одинаковые массы и катятся без проскальзывания по горизонтальной поверхности с одинаковыми постоянными скоростями. Кинетическая энергия шара W_1 = 70 Дж. Определить кинетическую энергию диска W_2. Найти отношение проекций момента импульса тел Lz_1/Lz_2 на мгновенную ось вращения, если R_1/R_2 = 0,7.

(W_2 = 75 Дж; $\frac{L_{z1}}{L_{z2}}$ = 0,56)

1.54. Тело массой M подвешено на нити длиной l. В тело попадает пуля массой m и застревает в нем, нить после этого отклоняется на угол α. Найти скорость пули. Считать, что вся масса тела M сосредоточена на расстоянии l от точки подвеса.

($\upsilon = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$)

1.55. Сколько времени будет скатываться цилиндр с наклонной плоскости длиной l = 2,0 м и высотой h = 0,10 м, если считать, что проскальзывания нет? Качественно постройте зависимость кинетической W_k и потенциальной W_p энергии цилиндра как функцию времени.

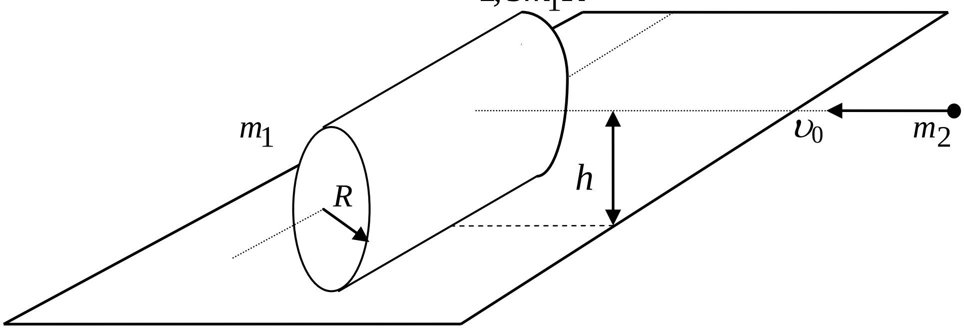
(t = 3,5 с)

1.56. Два шара массами m_1 = 10 кг и m_2 = 15 кг подвешены на нитях длиной l = 2,0 м так, что шары соприкасаются между собой. Меньший шар был отклонен на угол φ = 60° и отпущен. Определить высоту, на которую поднимутся оба шара после удара. Удар шаров считать неупругим.

(h = 0,16 м)

1.57. В цилиндр массой m_1 = 3,0 кг и радиусом R = 10 см, покоящийся на плоскости, попадает пуля массой m_2 = 9,0 г, летящая со скоростью υ_0 = 60 м/с. Пуля летит параллельно плоскости на высоте h = 0,12 м от нее и перпендикулярно образующей цилиндра. Считая удар абсолютно неупругим, найдите линейную скорость оси цилиндра, угловую скорость цилиндра. Проскальзыванием цилиндра пренебречь.

$$\left(\omega = \frac{m_2\upsilon_0 h}{1{,}5 m_1 R^2} = 1{,}44 \text{ рад/с}; \ \upsilon = 0{,}14 \text{ м/с}\right)$$



1.58. Тела с массами m_1 и m_2 связаны невесомой и нерастяжимой нитью, которая переброшена через блок массой m, установленный на краю стола. Тело m_1 находится на поверхности стола в закрепленном состоянии. Тело m_2 свободно висит. В момент времени t = 0 тело m_1 освободили, и вся система пришла в движение. Считая коэффициент трения между столом и телом m_1 равным μ, пренебрегая скольжением нити по блоку и трением в оси блока, найти работу сил трения за первые t секунд после начала движения. Блок считать однородным диском.

$$\left(A = -\frac{m_1\mu(m_2 - m_1\mu)}{2(m_1 + m_2 + \frac{m}{2})} g^2 t^2\right)$$

1.59. Стальной шарик массой m = 8 г, летящий горизонтально со скоростью 600 м/с, попадает в брусок массой $M = 4m$, прикрепленный к стенке пружиной с жесткостью k = 24 кН/м. Считая, что траектория шарика перпендикулярна поверхности бруска и совпадает с осью пружины, определить величину максимального сжатия пружины, если ударение было:

1) абсолютно неупругим; 2) абсолютно упругим.

Записать закон изменения деформации пружины как функцию от времени для случаев 1 и 2.

$$(x_{m1} = 15 \text{ см}; \ x_{m2} = 28 \text{ см})$$

1.60. Поршень, закрепленный на пружине жесткостью k = 10 кН/м, после застревания в нем горизонтально летевшей со скоростью υ = 520 м/с пули массой 20 г сместился на x = 8 см. Определить массу поршня M, если сила трения его о стенки цилиндра составляет 900 Н.

(M = 0,5 кг)

1.61. Нить с подвешенным на ней грузом отклонили на угол α и отпустили. На какой угол β отклонится нить с грузом, если при своем движении будет задержана штифтом, поставленным по вертикали посередине нити? Построить качественную зависимость скорости груза от времени, полагая, что потери энергии в системе не происходит.

($\beta = \arccos(2\cos\alpha - 1)$)

1.62. Хоккейная шайба, имея начальную скорость υ = 5,0 м/с, проходит до удара о борт площадки путь S = 10 м. Коэффициент трения шайбы о лед 0,10. Считая удар о борт абсолютно упругим и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, какой путь пройдет шайба после удара. Построить график зависимости $\upsilon_x = f(x)$, полагая положительное направление оси OX к борту.

(S_1 = 2,7 м)

1.63. Человек стоит на неподвижной тележке и бросает горизонтально камень массой m_1 = 2,0 кг со скоростью υ = 8,0 м/с. Определить, какую работу A совершает при броске человек, если масса тележки с человеком m_2 = 140 кг. Постройте график зависимости работы $A = f(m_2)$, если m_2 – величина переменная.

(A = 63 Дж)

1.64. Гимнаст "крутит солнце" на перекладине. Считая, что вся масса гимнаста m сосредоточена в его центре масс и скорость гимнаста в верхней точке равна нулю, определить силу, действующую на руки гимнаста в низшей точке. Построить график зависимости вертикальной составляющей скорости гимнаста от времени $\upsilon y = f(t)$. За начало отсчета принять верхнее положение гимнаста. Трением пренебречь.

($F = 5mg$)

Релятивистская механика. Механика жидкости и газа

Примеры решения задач

14. Плотность покоящегося в K'-системе отсчета однородного тела в движущейся K-системе отсчета возрастает на 10 %. Определить скорость

движения тела υ и изменение массы тела $\frac{m-m_0}{m_0}$ относительно K'– системы отсчета.

Дано:	Решение
$\frac{\rho}{\rho_0} = 1{,}1$	
а) υ –?	
б) $\frac{m-m_0}{m_0}$ – ?	

Решение

Плотность ρ_0 однородного тела в K' – системе отсчета имеет вид:

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0}, \qquad (1)$$

где m_0 – масса покоя тела; V_0 – объем тела в K – системе отсчета. Как известно, в движущей K' – системе отсчета масса m того же тела определяется выражением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \qquad (2)$$

где υ – скорость тела относительно K'-системы отсчета; c – скорость света в вакууме. Явление лоренцева сокращения для объема V тела в K'-системы отсчета дает выражение

$$V = V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \qquad (3)$$

Из соотношений (1) – (3) и условия задачи для скорости тела в K' – системе отсчета следует уравнение

$$\rho = \frac{m}{V} - = \frac{\rho_0}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \qquad (4)$$

Отсюда для скорости тела получается

$$\upsilon = c\sqrt{\frac{\frac{\rho}{\rho_0}-1}{\frac{\rho}{\rho_0}}} = 3{,}0\cdot 10^8\left(\frac{1{,}1-1}{1{,}1}\right)^{1/2} = 0{,}90\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Из выражения (2) для изменения массы тела вытекает

$$\frac{m-m_0}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} - 1 = (1{,}1)^{1/2} - 1 = 0{,}049 = 4{,}9\ \%$$

Ответ: υ = 0,90·10^8 м/с; $\dfrac{m-m_0}{m_0}$ = 0,049.

15. Шприц, используемый для промывки и смазки шарнирных соединений автомобиля, заполнен керосином плотностью ρ = 0,80 г/см^3. Радиус поршня шприца R = 2,0 см, ход поршня l = 25 см, радиус выходного отверстия r = 2,0 мм. Определить скорость вытекания керосина υ_2 из шприца, время τ, за которое будет выдавлен весь керосин из шприца, если давить на поршень с постоянной силой F = 5,0 Н. Вязкостью керосина, трением поршня о стенки пренебречь.

Дано:
ρ = 0,80 г/см^3 =
= $0{,}80\cdot10^{-2}$ кг/см^3
R = 2,0 см =
= $2{,}0\cdot10^{-2}$ м
l = 25 см
r = 2,0 мм =
= $2{,}0\cdot10^{-3}$ м
F = 5,0 Н

а) υ_2–?
б) τ –?

Решение

Движение керосина по шрицу соответствует течению идеальной жидкости по двум соединенным цилиндрическим сосудам. В первом – площадью поперечного сечения

$$S_1 = \pi R^2 \qquad (1)$$

керосин движется со скоростью υ_1, во втором – площадь поперечного сечения

$$S_2 = \pi r^2 \qquad (2)$$

керосин вытекает со скоростью υ_2. Давление P_1 в первом сосуде, обусловившее движение жидкости, создается поршнем и равно

$$P_1 = \frac{F}{S_1}. \qquad (3)$$

Для нахождения искомых величин используем уравнения неразрывности и уравнение Бернулли в сечениях S_1 и S_2:

$$\begin{cases} \upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2, \\ \dfrac{\rho\upsilon_1^2}{2} + P_1 = \dfrac{\rho\upsilon_2^2}{2}. \end{cases} \qquad (4)$$

Из системы уравнений (4) с учетом формул (1) – (3) для скорости вытекания керосина υ_2 получается:

$$\upsilon_2 = \left(\frac{2F}{\pi R^2 \rho \left(\frac{R^4}{r^4} - 1 \right)} \right)^{1/2} \frac{R^2}{r^2} = \frac{2 \cdot 5,0}{3,14 \cdot \left(2,0 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 0,80 \cdot 10^3 \left(\frac{2,0 \cdot 10^{-2}}{2,0 \cdot 10^{-3}} \right)^4} \times$$ С

$$\times \left(\frac{2,0 \cdot 10^{-2}}{2,0 \cdot 10^{-3}} \right)^2 = 3{,}15 \text{ м/с} \cong 3,2 \text{ м/с}.$$

корость движения керосина в шприце υ_1 и скорость движения поршня равны. Поэтому время, за которое будет выдавлен весь керосин из шприца, следует из соотношения: $\tau = \frac{l}{\upsilon_1} = \frac{lR^2}{\upsilon_2 r^2} = \frac{0,25 \cdot 10^2}{3{,}15} = 7,9$ с.

Ответ: υ_2 = 3,2 м/с; τ = 7,9 с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.65. За промежуток времени Δt = 1,0 с, отсчитанный по часам некоторой системы отсчета K, частица, двигаясь прямолинейно и равномерно, переместилась из начала координат системы K в точку с координатами $X = Y = Z = 1{,}5 \cdot 10^8$ м. Найти промежуток собственного времени Δt_0, за который произошло это перемещение.

(0,5 с)

1.66. Относительно К-системы отсчета летит куб со скоростью $\upsilon = \upsilon_x$. Ребро куба равно a. Ось X параллельна одному из ребер куба. Чему равен его объем V в K-системе отсчета? Во сколько раз изменится объем тела V по сравнению с объемом V_0 относительно неподвижной к кубу системы отсчета? Годится ли полученный ответ для тела произвольной формы?

$(\frac{V}{V_0} = \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2})$.

1.67. Как изменится плотность стального кубика с точки зрения наблюдателя, движущегося вдоль одного из ребер кубика со скоростью $\vec{\upsilon} = (C/2)\vec{e}_x$ по сравнению с плотностью относительно наблюдателя, покоящегося по отношению к кубику?

$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{4}{3} \right)$

1.68. Электрон движется со скоростью, равной 0,6 скорости света. Определите импульс и полную энергию электрона.

(p = 20,5 $10^{-23}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$; $W = 1{,}0\cdot10^{-13}$ Дж)

1.69. Две частицы, покоящиеся в K'-системе отсчета на расстоянии Δl друг от друга по оси X', одновременно распадаются. Одновременным ли будет распад частиц для наблюдателя в K-системе отсчета, относительно которой частицы двигались со скоростью $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{e}_x$?

1.70. Определить периметр П квадрата со стороной a , движущегося со скоростью $\vec{\upsilon} = (C/2)\vec{e}_x$ вдоль одной из своих сторон, где C- скорость света

(П = 3,7a)

1.71. В широкой части горизонтально расположенной трубы течет нефть со скоростью υ_1 = 2,0 м/с. Определить скорость течения нефти в узкой части трубы, если разность давлений в широкой и узкой частях трубы Δp = 50 мм рт.ст. Плотность нефти $\rho = 0{,}85\cdot10^3$ кг/м^3.

(υ_2 = 4,4 м/с).

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Основы молекулярно-кинетической теории

Примеры решения задач

16. Удельные теплоемкости некоторого газа равны c_p = 912 Дж/(кг·К) и C_v = 649 Дж/(кг·К). Определить молярную массу μ этого газа, число степеней свободы i его молекул.

Дано:
c_p = 912 Дж/(кг·К)
c_v = 649Дж/(кг·К)

а) μ –?
б) i –?

Решение

Как известно, молярные теплоемкости C_p и C_v при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно, связаны соотношением:

$$C_p = C_v + R \tag{1}$$

где R – универсальная газовая постоянная. Тогда, из связи соответствующих удельных и молярных теплоемкостей получается:

$$c_p = c_v + \frac{R}{\mu}, \tag{2}$$

Из выражения (1) найдем молярную массу газа

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_v} = \frac{8{,}314}{912 - 649} = 31{,}6\cdot10^{-3} \cong 32\cdot10^{-3}\ \text{г/моль}.$$

Удельная теплоемкость при постоянном объеме связана с числом степеней свободы молекул газа i выражением

$$c_v = \frac{iR}{2\mu}. \quad (3)$$

Из формулы (3) получается значение числа степеней свободы молекул газа:

$$i = \frac{2c_v\mu}{R} = \frac{2 \cdot 649 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,314} = 4.996 \cong 5.$$

Ответ: $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $i = 5$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Имеется поток молекул массой m, летящих с одинаковой по модулю и направлению скоростью υ. Плотность молекул в потоке n. Найти :

а) число ν ударов молекул за секунду о единицу поверхности плоской стенки, нормаль к которой образует угол α с направлением $\vec{\upsilon}$;

б) давление p потока молекул на стенку. Считать, что молекулы отражаются стенкой зеркально и без потери энергии.

(a) $\nu = n\upsilon\cos\alpha$; б) $p = 2nm\upsilon^2\cos^2\alpha$)

2.2. Определить кинетическую энергию W_{kp} поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде объёмом $V = 5,0$ л под давлением $p = 500$ кПа. Определить молярные теплоёмкости C_p и C_v этого газа, если считать, что полная кинетическая энергия молекул этого газа в 1,666 раз превышает W_{kp}.

($W_{kp} = 3,8$ кДж; $C_p = 29$ Дж/мольК; $C_v = 21$ Дж/моль·К)

2.3. Каково давление смеси газов в колбе объемом 2,5 л, если в ней находится $1,0 \cdot 10^{15}$ молекул кислорода, $4,0 \cdot 10^{15}$ молекул азота и $3,3 \cdot 10^{-7}$ г аргона? Температура смеси $t = 150$ °С. Найти молярную массу смеси газа.

($P = 24 \cdot 10^{-3}$Па; $\mu = 34 \cdot 10^{-3}$кг/моль)

2.4. В рассматриваемом интервале температур теплоемкость некоторого тела определяется функцией $C = 10+2 \cdot 10^{-2}T+3 \cdot 10^{-5}T^2$ Дж/К. Определить количество теплоты Q, получаемое телом при нагревании от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К.

($Q = 2,07 \cdot 10^3$ Дж)

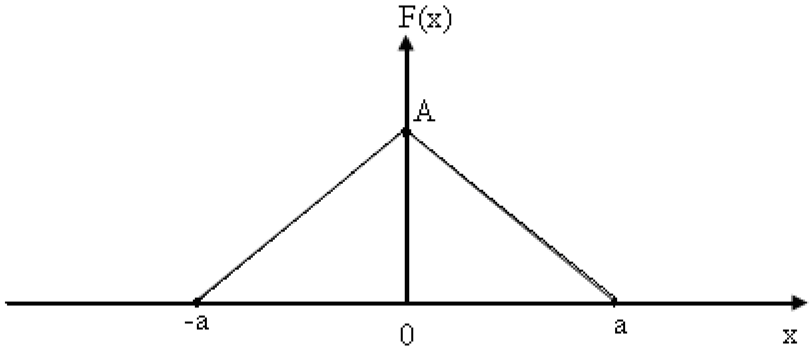
2.5. Некоторый газ при нормальных условиях имеет плотность ρ = 0,089 кг/м^3. Определить его удельные теплоемкости c_p и c_v. Определить изменение внутренней энергии ΔU 1,00 моля этого газа при изобарическом увеличении его плотности в два раза.

(c_p = 14,5·10^{3}Дж/(кг·град); c_v = 10,4·10^{3}Дж/(кг·град))

Элементы статистической физики, распределения

Примеры решения задач

17. На рисунке приведен график функции распределения некоторой случайной величины x. Считая известной величину a, определить константу A из условия нормировки функции распределения. Вычислить средние значения x и x^2.



Решение

Знание функции распределения $f(x)$ позволяет найти среднее любой функции $F(x)$ по формуле:

$$< F(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) f(x) dx. \quad (1)$$

Для определения вида функции распределения необходимо найти константу A. Это можно сделать из условия нормировки функции распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (2)$$

Из геометрической интерпретации этого интеграла следует, что выражение (2) равно площади под кривой графика функции распределения, т. е. $Aa = 1$. Отсюда для константы A получается: $A = \frac{1}{a}$. По известной величине A и по графику можно установить аналитический вид функции распределения $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\infty \le x \le -a \\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & -a \le x < 0 \\ -\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{a} & 0 \le x \le a \\ 0 & 0 < x < +\infty \end{cases}. \qquad (3)$$

Из формулы (1) и выражения (3) для средних значений $<x>$ и $<x^2>$ следует:

$$<x>=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{-a}0dx+\int_{-a}^{0}x\left(\frac{x}{a^2}+\frac{1}{a}\right)dx+\int_{0}^{a}x\left(-\frac{x}{a^2}+\frac{1}{a}\right)dx+\int_{a}^{\infty}0\cdot dx=0;$$

$$<x^2>=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{-a}0\cdot dx+\int_{-a}^{0}x^2\left(\frac{x}{a^2}+\frac{1}{a}\right)dx+\int_{0}^{a}x^2\left(-\frac{x}{a^2}+\frac{1}{a}\right)dx+\int_{a}^{\infty}0\cdot dx=\frac{a^2}{6}.$$

Ответ: $A=1/a$; $<x>=0$; $<x^2>=a^2/6$.

18. На какой высоте давление воздуха вдвое меньше, чем на уровне моря?. Температура воздуха T = 290 К.

Дано:

$\dfrac{P(h)}{P_0}=0{,}5$

T = 290 К

$\mu = 29\cdot10^{-3}$кг/моль

h –?

Решение

Зависимость давления $P(h)$ атмосферы с высотой выражается барометрической формулой

$$P(h)=P_0\cdot\exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \qquad (1)$$

где P_0 – давление на уровне моря; μ – молярная масса воздуха; g – ускорение свободного падения; R – универсальная газовая постоянная.

Логарифмирование выражения (1) дает $\ln\dfrac{P(h)}{P_0}=-\dfrac{\mu gh}{RT}$. (2)

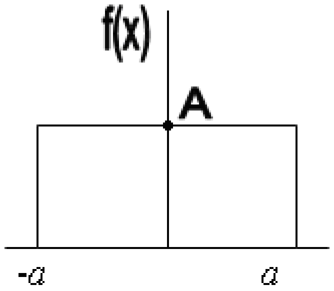
Из соотношения (2) находим высоту h:

$$h=-\ln\frac{P(h)}{P_0}\,\frac{RT}{\mu g}=\frac{0{,}693\cdot 8{,}314\cdot 290}{29\cdot10^{-3}\cdot 9{,}81}=5{,}87\cdot10^3 \text{ м}=5{,}87 \text{ км}.$$

Ответ: h = 5,87 км.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.6. На рисунке приведен график функции распределения вероятности значения некоторой величины x. Найти константу A, при которой функция оказывается нормированной. Вычислить среднее значение x и x^2.



О $(1/2a; \langle x\rangle = 0№ \langle x^2\rangle = a^2/3)$

2.7. Азот находится в равновесном состоянии при T = 421 К. Определить относительное число $\Delta N/N$ молекул, скорости которых заключены в пределах от 499,9 до 500,1 м/с.

$(\Delta N/N = 3{,}32\cdot 10^{-4})$

2.8. Имеется N частиц, энергия которых может принимать лишь два значения: E_1 и E_2. Частицы находятся в равновесном состоянии при температуре T. Чему равна суммарная энергия E всех частиц в этом состоянии?

$$\left(E = N\frac{E_1\exp\left(\frac{-E_1}{kT}\right) + E_2\exp\left(\frac{-E_2}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{-E_1}{kT}\right) + \exp\left(\frac{-E_2}{kT}\right)}\right)$$

2.9. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу m = $1{,}00\cdot 10^{-18}$ г. Во сколько раз уменьшиться их концентрация n при увеличении высоты на Δh = 10,0 м? Температура воздуха T = 300 К.

(В $e^{23.6}$ раз)

2.10. В кабине вертолета барометр показывает давление p = $9{,}00\cdot 10^4$ Па. На какой высоте находится вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал p_0 = $1{,}01\cdot 10^5$ Па? Считать, что температура воздуха T = 290 К не изменяется с высотой.

(h = 890 м)

2.11. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Температуру воздуха считать постоянной и равной 0° С.

(h = $4.07\cdot 10^3$ м)

Физическая кинетика

Пример решения задачи

19. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$, среднее число столкновений в единицу времени z, среднюю продолжительность свободного пробега τ молекул водорода в сосуде при температуре T = 290 К и плотности ρ = 1,0 кг/м^3. Эффективный диаметр молекулы водорода

d = $2{,}3\cdot 10^{-10\text{ м}}$.

Дано:	Решение
T = 290 К ρ = 1,0 г/м^3 μ = 2,0 г/моль d = 2,3·10^{-10} м	Средняя длина свободного пробега молекул определяется концентрацией n по формуле $$<\lambda>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \quad (1)$$
а) $<\lambda>$ –? б) $<z>$ –? в) $<\tau>$ –?	Среднее число столкновений в единицу времени выражается соотношением, в которое входит средняя скорость молекул $<\upsilon>$: $$<z>=\sqrt{2}\pi d^2 n <\upsilon>. \quad (2)$$ Средняя продолжительность свободного пробега молекул $<\tau>$ имеет вид $$<\tau>=\frac{<\lambda>}{<\upsilon>}=\frac{1}{<z>}. \quad (3)$$

По известной плотности газа ρ концентрация молекул n может быть вычислена из формулы:

$$n=\frac{\rho}{\mu}N_A, \quad (4)$$

где N_A – число Авогадро. Средняя арифметическая скорость молекул газа равна

$$<\upsilon>=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad (5)$$

где R – универсальная газовая постоянная. Из соотношений (1) и (4) для $<\lambda>$ получается

$$<\lambda>=\frac{\mu}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho N_A}=\frac{2,0\cdot 10^{-3}}{1,41\cdot 3,14\left(2,3\cdot 10^{-10}\right)^2 1,0\cdot 6,02\cdot 10^{23}}=1,4\cdot 10^{-8}\text{ м.}$$

Из формул (1), (2) и (5) для $<z>$ следует

$$<z>=\frac{<\upsilon>}{<\lambda>}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{1}{<\lambda>}=\left(\frac{8\cdot 8,31\cdot 290}{3,14\cdot 2,0\cdot 10^{-3}}\right)^{1/2}\frac{1}{1,4\cdot 10^{-8}}=1,3\cdot 10^{11}\text{ с}^{-1}.$$

По известному значению $<z>$ из выражения (3) для $<\tau>$ имеем:

$$<\tau>=\frac{1}{<z>}=\frac{1}{1,3\cdot 10^{11}}=7,7\cdot 10^{-12}\text{ с.}$$

Ответ: $<\lambda>$ = 1,4·10^{-8} м; $<z>$ = 1,3·10^{11}с$^{-1}$; $<\tau>$ = 7,7·10^{-12} с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.12. Найти среднюю длину свободного пробега $< \lambda >$ молекулы азота в сосуде объёмом V = 5,0 л. Масса газа m = 0,50 г. Во сколько раз необходимо изобарически изменить температуру газа, чтобы длина свободного пробега молекулы уменьшилась в 2 раза?

($<\lambda> = 1{,}2\cdot10^{-6}$ м; $T_2/T_1 = 0{,}5$)

2.13. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля шарообразной формы диаметром d = 0,30 мм, если она падает в атмосфере при нормальных условиях? Считать, что на интервале установившегося движения капли давление не изменяется с высотой. Эффективный диаметр молекулы воздуха принять равным $3{,}0\cdot10^{-10}$ м.

(υ = 2,7 м/с)

2.14. Сколько молекул азота N_2 находится в сосуде объёмом в 1,0 л, если температура его 27 °С, а давление 10 Па? Определить число столкновений z молекулы азота за 1,0 с. Эффективный диаметр молекулы $d = 3{,}0\cdot10^{-10}$ м.

($N = 2{,}4\cdot10^{18}$; $z = 4{,}6\cdot10^{5}$)

2.15. На высоте h = 20 см над горизонтальной трансмиссионной лентой, движущейся со скоростью υ = 70 м/с, параллельно ей подвешена пластина площадью S = 4,0 см^2. Какую силу надо приложить к этой пластине, чтобы она оставалась неподвижной? В условиях опыта температура воздуха t = 27 °С, давление атмосферное. Принять эффективный диаметр молекулы $d = 3{,}0\cdot10^{-10}$ м.

($F = 2{,}6\cdot10^{-6}$ H)

2.16. Определить отношение числа столкновений молекул газа за единицу времени для двух состояний, если переход из одного состояния в другое был изобарическим, а отношение объемов в этих состояниях соответствует $V_2/V_1 = 2$.

($z_2/z_1 = 0{,}71$)

2.17. Идеальный газ находится при температуре T_0 и давлении ρ_0. Качественно изобразить зависимость длины свободного пробега λ и числа z столкновений его молекул в секунду от давления, если газ сжимается изотермически.

2.18. Двухатомный газ адиабатически расширяется до объема в 2 раза больше начального. Определить, во сколько раз изменится коэффициент диффузии D газа. Эффективный диаметр молекулы считать постоянным.

($D_2/D_1 = 1{,}7$)

2.19. Найти верхний предел давления водорода в шарообразном сосуде объёмом V = 1,0 л, при котором длина свободного пробега молекулы больше размеров сосуда. Расчет произвести при температуре T = 300 К. Эффективный диаметр молекулы водорода $d_{\text{В}}$ = 2,3·10^{-10} м.

(0,14 Па)

Термодинамические процессы, циклы

Примеры решения задач

20.Азот массой $m = 30$ г занимает объем $V_1 = 10$ л и находиться под давлением $P_1 = 0{,}10$ МПа. Сначала этот газ нагревается при неизменном давлении до объема $V_2 = 30$ л, а затем при постоянном объеме до давления $P_2 = 0{,}20$ МПа. Найти:

а) изменение ΔU внутренней энергии газа;

б) совершенную системой работу A;

в) количество теплоты Q, переданной газу;

г) конечную температуру T_3.

Построить график процесса на P – V-диаграмме.

Дано:

$m = 30$ г

$V_1 = 10$ л

$P_1 = 0{,}10$ МПа

$V_2 = 30$ л

$P_2 = 0{,}20$ МПа

$\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

а) ΔU – ?

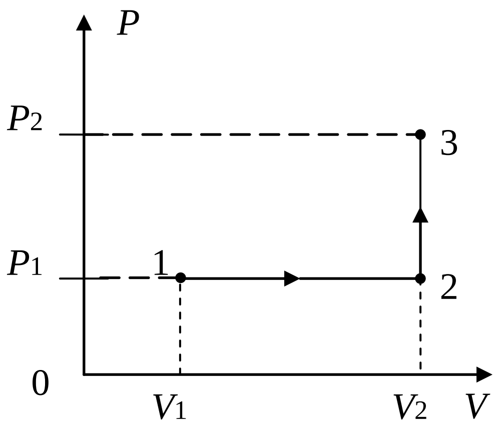
б) A – ?

в) Q – ?

г) T_3 – ?

Решение

Анализ условия задачи начнём с построения графика процесса на P – V-диаграмме, учитывая соотношения величин P_1, P_2, V_1, V_2.



Как видно из рисунка, система из состояния 1 переходит в конечное состояние 3 сначала по изобаре 1 – 2, а затем по изохоре 2 – 3. Из графика следует, что работа A, совершенная газом в этом процессе, равна площади прямоугольника под изобарой 1 – 2, т. е.

$$A = P_1(V_2 - V_1) = 0{,}10 \cdot 10^6 (30 - 10)10^{-3} = 2{,}0 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Для определения изменения внутренней энергии газа в рассматриеваемом процессе $\Delta U = U_3 - U_1$ используем уравнение Клапейрона – Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \qquad (1)$$

и выражение для внутренней энергии двухатомного идеального газа:

$$U = \frac{m}{\mu}\,\frac{5}{2} RT. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) для ΔU следует

$$\Delta U = U_3 - U_1 = \frac{m}{\mu}\,\frac{5}{2} RT_3 - \frac{m}{\mu}\,\frac{5}{2} RT_1 = \frac{5}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) =$$

$$= \frac{5(0{,}20 \cdot 10^6 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - 0{,}10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-3})}{2} = 12{,}5 \cdot 10^3 \cong 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Из первого закона термодинамики для количества теплоты Q, переданного газу, получается:

$$Q = \Delta U + A = 12{,}5 \cdot 10^3 + 2{,}0 \cdot 10^3 = 14{,}5 \cdot 10^3 \cong 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева (1) для конечной температуры газа T_3 имеем:

$$T_3 = \frac{P_2V_2\mu}{mR} = \frac{0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}314} = 674 \cong 6{,}7 \cdot 10^2 \text{ К.}$$

Ответ: $\Delta U = 1{,}3 \cdot 10^4$ Дж; $A = 2{,}0 \cdot 10^3$ Дж; $Q = 1{,}5 \cdot 10^4$ Дж; $T_3 = 6{,}7 \cdot 10^2$ К.

21.Одноатомный газ, имевший при давлении $P_1 = 100$ кПа объем $V_1 = 5{,}0$ м^3, сжимался изобарически до объема $V_2 = 1{,}0$ м^3 , затем – адиабатически сжимался и на последнем участке цикла, расширялся при постоянной температуре до начального объема и давления. Найти теплоту Q_1, полученную газом от нагревателя, теплоту Q_2, переданную газом холодильнику, работу A, совершенную газом за весь цикл, КПД цикла η. Изобразить цикл на P – V-диаграмме.

Дано:

$i = 3$

$P_1 = 100\,\text{кПа}$

$V_1 = 5{,}0\,\text{м}^3$

$V_2 = 1{,}0\,\text{м}^3$

$Q_1 - ?$

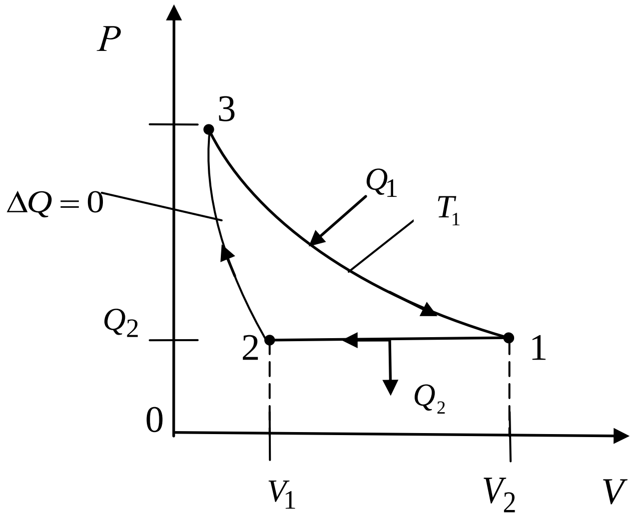
$Q_2 - ?$

$A - ?$

$\eta - ?$

Решение

Анализ условия задачи начнём с построения графика цикла на P – V-диаграмме, учитывая соотношения величин P_1, P_2, V_1, V_2, V_3.



Как видно из рисунка, на первом участке цикла 1 – 2 газ сжимался изобарически, отдавая холодильнику количество теплоты Q_2 и совершая работу A_{1-2}. По первому закону термодинамики для перехода из состояния 1 в состояние 2 можно записать:

$$Q_2 = U_2 - U_1 + A_{1-2}, \tag{1}$$

где $U_2 - U_1$ – изменения внутренней энергии газа. Выражение для внутренней энергии одноатомного газа имеет вид:

$$U = \nu \frac{3}{2} RT, \tag{2}$$

где ν – количество вещества, а уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$PV = \nu RT. \tag{3}$$

Используем уравнения (2), (3) и тот факт, что работа газа на участке 1 – 2 равна площади прямоугольника (с обратным знаком) под изобарой 1 – 2, для количества теплоты Q_2 из соотношения (1) получим

$$Q_2 = \frac{3}{2} P_1 (V_2 - V_1) + P_1 (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} P_1 (V_2 - V_1) = -\frac{5}{2} 100 \cdot 10^3 (1{,}0 – 0{,}5) 4 = -1 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Знак “минус” показывает, что количество теплоты Q_2 отдаётся газом холодильнику.

Количество теплоты Q_1, которое получает газ от нагревателя на изотерме 3 – 1 при температуре T_1, по первому закону термодинамики равно:

$$Q_1 = A_{3-1}, \tag{4}$$

где A_{3-1} – работа, совершённая газом на участке 3 – 1.

Как известно, работа газа при изотермическом процессе определяется формулой

$$A_{3-1} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right). \tag{5}$$

Состояния (3) и (1) находятся на одной изотерме, поэтому

$$PV_3 = P_1V_1. \tag{6}$$

В то же время состояния (3) и (2), как видно из рисунка, соответствует одной адиабате, поэтому из уравнения Пуассона следует

$$P_3V_3^{\gamma} = P_1V_2^{\gamma} \tag{7}$$

где γ – показатель адиабаты одноатомного идеального газа $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{3+2}{3} = 1,67$. Исключая из уравнений (6) и (7) величины давления P_3 и P_1, получим

$$\frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{8}$$

Используя формулы (3), (5) и (8) для количества теплоты Q_1 из соотношения (4) имеем

$$Q_1 = A_{3-1} = \nu R T_1 \ln\frac{V_1}{V_3} = P_1V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_1V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) =$$

$$= \frac{1,67}{1,67-1,0} 100 \cdot 10^{-3} \cdot 5,0 \cdot \ln\left(\frac{5,0}{1,0}\right) = 2,0 \cdot 10^{6} \text{ Дж.}$$

Работа A, совершённая газом за цикл, как вытекает из первого закона термодинамики, $A = Q_1 - |Q_2| = \left(2,0 \cdot 10^6 - 1,0 \cdot 10^6\right) = 1,0 \cdot 10^6$ Дж.

Для КПД цикла η имеем: $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{1,0 \cdot 10^6}{2,0 \cdot 10^6} = 0,5 = 50$ %.

Ответ: $Q_1 = 2,0 \cdot 10^6$ Дж; $Q_2 = -1,0 \cdot 10^6$ Дж; $A = 1,0 \cdot 10^6$ Дж; $\eta = 50$ %

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.20. Молекулярный кислород массой m = 250 г, имевший температуру T_1 = 200 К, был адиабатно сжат. При этом была совершена работа A = 25 кДж. Определить конечную температуру T_2 газа.

(354 *К*)

2.21. Газ адиабатически расширяется, изменяя объем в 2 раза, а давление в 2,64 раза. Определить молярные теплоемкости C_p и C_v этого газа.

(C_p = 29,1 Дж/(моль·К), C_v = 20,8 Дж/(моль·К))

2.22. Некоторое количество азота ν, имеющего параметры состояния p_1, V_1, T_1, переходит при постоянной температуре в состояние 2, а затем при постоянном объеме – в состояние 3. Определить работу перехода 1 – 3, изменение внутренней энергии газа и теплоту, полученную при переходах, если в конце процесса установилась температура T_3 и давление $p_3 = p_1$. Изобразить процесс 1 – 3 на диаграмме V-T.

($A_{1\text{-}3} = \nu R T_1 ln(T_3/T_1)$; $\Delta U_{1\text{-}3} = (5/2)\nu R(T_3 - T_1)$;
$Q = \nu R[(5/2)(T_3\text{-}T_1)+T_1 ln(T_3/T_1)]$)

2.23. Азот плотностью ρ_1 = 1,4 кг/м^3 занимает объем V_1 = 5 л при температуре t_1 = 27 °*C*. Газ адиабатически переведен в состояние с плотностью ρ = 3,5 кг/м^3. Определить температуру газа T_2 в конце перехода и изменение его внутренней энергии. Построить переход на диаграмме S – T.

(T_2 = 433 К; ΔU = 691 Дж)

2.24. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $p^{1/2}\cdot V$ = const? Изобразите этот закон на диаграмме (V – T). Считая этот процесс политропическим, определить, чему равен показатель политропы η. При расширении газа тепло подводится к нему или отводится от него? Сравнить теплоёмкость C этого процесса с C_V.

($C_V > C$)

2.25. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону p^2V = const? Изобразите этот закон на диаграмме (p-T). Считая этот процесс политропическим, определить чему равен показатель политропы η. При расширении газа тепло подводится к нему или отводится от него? Сравнить теплоёмкость C этого процесса с C_V.

$\eta = \frac{1}{2}$; $C > Cv$)

2.26. В сосуде вместимостью V = 10 л находится идеальный газ под давлением $p_1 = 1{,}0\cdot10^5$ Па. Стенки сосуда могут выдержать максимальное давление p_2 = 1,0·10^6 Па. Какое максимальное количество тепла Q можно сообщить газу? Постоянная адиабаты γ = 1,4.

(Q = 23 кДж)

2.27. Некоторую массу азота сжали в 5 раз (по объёму) двумя разными способами: один раз изотермически, другой раз адиабатически. Начальное состояние газа в обоих случаях одинаково. Найти отношение соответствующих работ, затраченных на сжатие газа. Изобразить процессы в координатах $P – V$ и $T – S$.

(A_T/A_A = 0,712)

2.28. В бензиновом автомобильном двигателе степень сжатия горючей смеси равна 6,2. Смесь засасывается в цилиндр при температуре t_1 = 15 °C. Найти температуру t_2 горючей смеси к концу такта сжатия. Горючую смесь рассматривать как двухатомный идеальный газ, процесс считать адиабатным.

(324 °C)

2.29. Тепловая машина работает по циклу Карно, КПД которого η = 0,25. Каков будет холодильный коэффициент $\kappa_{\text{хол}}$ машины, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении? Холодильным коэффициентом называется отношение количества теплоты, отнятого от охлаждаемого тела, к работе двигателя, приводящего в движение машину.

($\kappa_{\text{хол}}$ = 3)

2.30. Один моль одноатомного идеального газа совершает тепловой цикл Карно между тепловыми резервуарами с температурами t_1 = 127 °C и t_2 = 27 °C. Наименьший объем газа в ходе цикла V_1 = 5,0 л, наибольший V_3 = 20 л. Какую работу A совершает эта машина за один цикл? Сколько тепла Q_1 берет она от высокотемпературного резервуара за один цикл? Сколько тепла Q_2 поступает за цикл в низкотемпературный резервуар?

(Q_1 = 3,2·10^3 Дж; Q_2 = 2,4·10^3 Дж; A = 8,1·10^2 Дж)

2.31.Трехатомный идеальный газ с жесткой связью между молекуламисовершает цикл Карно, при этом в процессе адиабатного расширения объем газа увеличивается в 4 раза. Определите термический КПД цикла.

($\eta = 37$ %)

2.32. Найти КПД цикла, состоящего из двух изохор и двух изотерм, если в пределах цикла объём изменяется в k раз, а абсолютная температура в τ раз. Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ.

$$\left(\eta = \frac{(\tau-1)\ln k}{\frac{\tau-1}{\gamma-1}+\tau\ln k}\right)$$

Энтропия

Пример решения задачи

22. При нагревании двухатомного идеального газа (ν = 2 моля) его термодинамическая температура увеличилась в 2 раза (n = 2). Определите изменение энтропии, если нагревание происходит: 1)изохорно; 2) изобарно.

Дано:	Решение
$i = 5$ ν = 2,0 моля $n = \frac{T_2}{T_1} = 2$ 1) V = const 2) p = const	1)V = const. Из определения энтропии $dS = \frac{d'Q}{T}$. Изменение энтропии $\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{d'Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_V dT}{T} = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1}$,
$\Delta S_1 -$? $\Delta S_2 -$?	где C_V – молярная теплоёмкость при постоянном давлении. Так как $C_V = \frac{i}{2}R$, то $\Delta S_1 = \nu\frac{i}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu\frac{i}{2}R\ln n = 2,0\frac{5}{2}\cdot 8,31\ln 2 =$ $= 28,8$ Дж/К$\cong 29$ Дж/К

2) p = const.

Учитывая что $C_p = \frac{i+2}{2}R$, где C_p – молярная теплоёмкость при постоянном давлении аналогично п. 1 получим:

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_p \frac{dT}{T} = \nu C_p \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu\frac{i+2}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu\frac{i+2}{2}R\ln n =$$

$$= 2\frac{5+2}{2}8,31\cdot\ln 2 = 40,3 \cong 40 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: 1) $\Delta S_1 = 29$ Дж/К; 2) $\Delta S_2 = 40$ Дж/К.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.33. Какое количество тепла Q нужно сообщить 75 г водяных паров, чтобы нагреть их от 100 С до 250 °С при постоянном давлении? Определите изменение энтропии водяного пара.

(Q = 20,8 кДж; ΔS = 47,5 Дж/К)

2.34. Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении кислорода массой m = 10 г от объема V_1 = 25 л до объема V_2 = 100 л. (Относительная молекулярная масса кислорода 32).

(3,6 Дж/К)

2.35. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой m = 100 г от температуры t_1 = 0 °C до температуры t_2 = 100 °C и последующим превращении воды в пар той же температуры. Удельная теплоемкость воды C = 4,18 кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $2{,}25\cdot10^3$ кДж/кг.

(737Дж/К)

2.36. Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы m = 200 г льда, находившегося при температуре t_1 = -10,7 °C в воду при t_2 = 0 °C.

Теплоемкость льда считать не зависящей от температуры. $C = 2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Температуру плавления принять равной 273 К.Удельная теплота плавления льда $\lambda = 333\cdot10^3$ Дж/кг.

($\Delta S = m[C\cdot ln(T_2/T_1)+\lambda/T_2]$ = 261 Дж/К)

2.37. Один киломоль газа изобарически нагревается от 20 до 600 °С, при этом газ поглощает $1{,}20\cdot10^7$ Дж тепла. Найти число степеней свободы молекулы газа i; построить зависимость энтропии S как функцию от температуры T газа.

(i = 3)

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

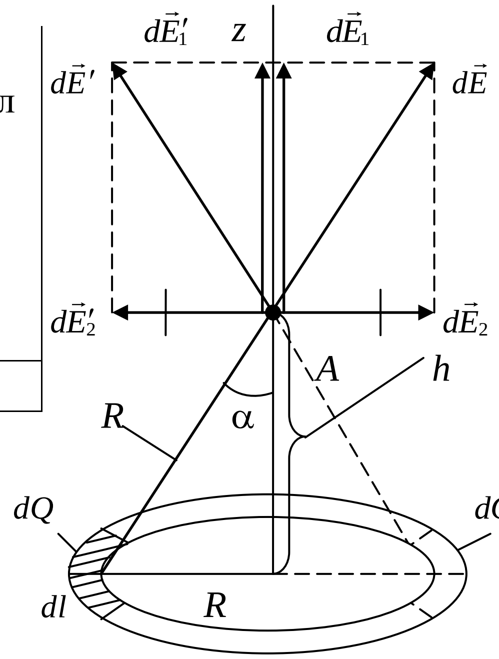
Электростатика. Диэлектрики

Примеры решения задач

23. По тонкому кольцу равномерно распределен заряд Q = 40 нКл с линейной плотностью τ = 50 нКл/м. Определить напряженность $\vec{E}$ электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке A, лежащей на оси кольца и удаленной от его центра на расстояние, равное половине радиуса.

Дано:
Q = 40 нКл = $40 \cdot 10^{-9}$ Кл
τ = 50 нКл/м =
= $50 \cdot 10^{-9}$ Кл/м
$h = \frac{R}{2}$

$E_{R/2} = ?$



Решение:

На кольце выделим малый участок длиной dl с зарядом $dQ = \tau dl$ (см. рисунок) Ввиду малости участка заряд можно считать точечным.

Напряженность поля, создаваемого этим зарядом $d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_\tau$,

где ε_0 – электрическая постоянная; $\vec{e}_\tau$ – единичный вектор, направленный вдоль r . Разложим вектор $d\vec{E}$ на две составляющие: $d\vec{E}_1$ вдоль оси Z, и $d\vec{E}_2$, перпендикулярную оси z ,т.е.

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 .$$

Напряжённость $\vec{E}$ электрического поля в точке A найдём интегрированием

$$\vec{E} = \int_e d\vec{E}_1 + \int_e d\vec{E}_2 ,$$

где интегрирование ведется по всем элементам заряженного кольца. Заметим, что для каждой пары зарядов dQ и dQ', расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы $d\vec{E}_2$ и dE_2, в точке A равны по модулю и противоположны по направлению $d\vec{E}_2 = - d\vec{E}_2$, т.е компенсируют друг друга.

Составляющие $d\vec{E}_1$ для всех элементов кольца сонаправлены с осью z, т.е. $d\vec{E}_1 = dE_1\vec{e}_z$.

Тогда $\vec{E} = \vec{e}_z \int_e dE_1$

Так как $dE = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}R}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{4\tau}{5R^2\sqrt{5}} dl = \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Таким образом $\vec{E} = \vec{e}_Z \int\limits_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 R^2} = \vec{e}_Z \frac{2\tau}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 R}$.

Поскольку $Q = 2\pi\tau R$, то радиус кольца $R = \frac{Q}{2\pi\tau}$.

Тогда $\vec{E} = \frac{2\tau 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_0 = \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 Q}\vec{e}_z$.

Значение напряженности на расстоянии $z = h = R/2$.

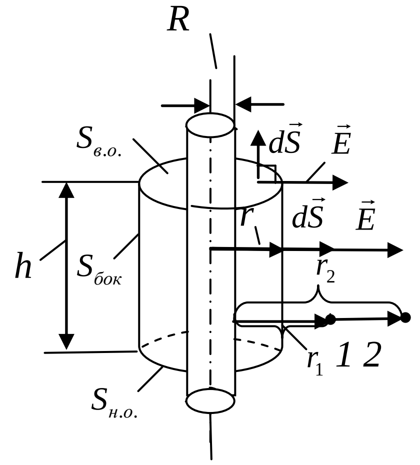
$$E = \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\varepsilon_0 Q} = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(5\cdot 10^{-8})^2}{5\sqrt{5}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 10^{-8}} = 7000 \text{ В/м} = 7{,}9 \text{ кВ/м}$$

Ответ: $E = 7{,}9$ кВ/м.

24. Электрическое поле создается бесконечным цилиндром радиусом R, равномерно заряженным с линейной плотность τ. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии r_1 и r_2 от поверхности этого цилиндра. Решение

Дано
R
τ
r_1
r_2

$\varphi_1 - \varphi_2$
?



Проведем вспомогательную гауссову поверхность в виде цилиндра высотой h, радиусом r соосного с исходным. Записываем теорему Гаусса для вектора $\vec{E}$

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}.$$

Интегрирал по гауссовой поверхности, верхности раскладываем на три интеграла: по верхнему и нижнему основаниям, по боковой поверхности. Интеграл по верхнему основанию $\int\limits_{S_{\text{в.о}}} \vec{E}d\vec{S} = \int EdS\cos\alpha = 0$, так как угол α между вектором элементарной площадки $d\vec{S}$ и вектором $\vec{E}$ равен $\pi/2$ и $\cos \pi/2 = 0$. Аналогично для нижнего основания. Остается интеграл по боковой поверхности $\int\limits_{\text{бок}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{\text{бок}} EdS\cos\alpha$, здесь угол $\alpha = 0$, $\cos 0 = 1$, значение напряженности E на одном и том же расстоянии r одинаково, E выносим за знак интеграла $E\int\limits_{S_{бок}} dS = E\cdot 2\pi rh$. В правой части теоремы Гаусса заряд, охватываемый гауссовой поверхностью $\sum q_i = \tau h$. Таким образом, получаем

$$E2\pi rh = \frac{\tau\ h}{\varepsilon_0},$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Для нахождения разности потенциалов воспользуемся связью напяженности и потенциала

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Для случая радиальной симметрии, реализующейся у нас,

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int\limits_{R+r_1}^{R+r_2} Edr,\ \text{или}$$

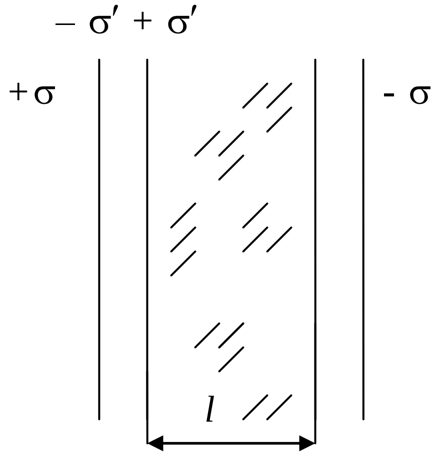
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{R+r_1}^{R+r_2} Edr = \int\limits_{R+r_1}^{R+r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{R+r_1}^{R+r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+r_2}{R+r_1}.$$

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R+r_2}{R+r_1}$.

25. Плоский конденсатор, между обкладками которого помещена стеклянная пластинка ε (ε = 6) толщиной l = 2,00 мм, заряжен до напряжения U = 200 В (рис. 1). Пренебрегая величиной заряда между пластинкой и обкладками, найти а) поверхностную плотность σ свободных зарядов на обкладках конденсатора, а также б) поверхностную плотность σ′ связанных зарядов (зарядов поляризации) на стекле. Изобразить силовые линии электрического поля в стекле и воздушном зазоре между стеклом и обкладками.

Дано:
ε = 6,0
ℓ = 2,00 мм
U = 200 В

σ – ?
σ′ – ?



Решение:

Величину σ выразим через напряженность поля E внутри конденсатора. Поскольку введение диэлектрика между его обкладками уменьшает эту напряженность поля в ε раз, используем формулу поля напряженности для плоского конденсатора ε = $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, с учетом наличиия

силовы
е линии E

Рис. 1

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \qquad (1)$$

Отсюда, учитывая соотношение $E = \frac{U}{l}$, справедливое для однородного поля конденсатора, найдем:

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon U / l \qquad (2)$$

Чтобы определить величину σ', воспользуемся формулой $\sigma = P_n$ (поверхностная плотность связанных зарядов равна проекции вектора поляризованности $\vec{P}$ на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика). Так как вектор $\vec{P}$ параллелен вектору напряженности $\vec{E}$ поля в диэлектрике, направленному по нормали к поверхности стеклянной пластинки, то $P_n = P$. Учитывая соотношение $\vec{P} = æ\,\varepsilon_0 \vec{E}$, где æ – диэлектрическая проницаемость среды и соотношение $\varepsilon = 1 + æ$, получим:

$$\sigma' = P = æ\,\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U / l. \qquad (3)$$

Подставляя в формулы (2) и (3) величины в единицах СИ: U = 200 B, ℓ = $2{,}00 \cdot 10^{-3}$ м, ε_0 = $8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, найдем:

$$\sigma = 5{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2;\ \sigma' = 4{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2.$$

Чтобы изобразить силовые линии электрического поля в стекле и воздуш ном зазоре, надо помнить, что густота силовых линий пропорциональна напряженности поля, а диэлектрическая проницаемость среды ε показывает во сколько раз поле внутри диэлектрика слабее поля внутри зазора, следовательно густота силовых линий внутри стеклянной пластинки в шесть раз меньше, чем в зазоре (рис. 2).

Ответ: $\sigma = 5{,}3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2; $\sigma' = 4{,}4 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

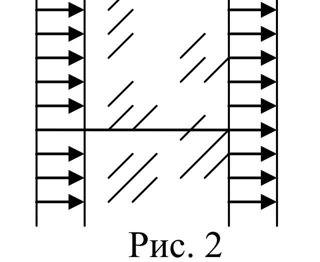


Рис. 2

26. Определить дивергенцию следующих векторных полей:

а) $\vec{a} = f(x)\vec{e}_x$, где $f(x)$ – некоторая функция декартовой координаты x;

b) $\vec{a} = \vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, в которой определяется дивергенция.

Дано:	Решение
a) $\vec{a} = f(x)\vec{e}_x$; b) $\vec{a} = \vec{r}$	По определению
$div\vec{a}$ - ?	$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$.

a) $div\vec{a} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$;

b) Выразим радиус-вектор через компоненты:

$$\vec{a} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

$$div\vec{a} = div\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3.$$

Ответ: a) $div\vec{a} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$; b) $div\vec{a} = 3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Шар радиусом R заряжен однородно с объёмной плотностью ρ. Найти напряженность поля $\vec{E}$ для точек внутри и вне шара.

$$\left(\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r;\ \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\right)$$

3.2. Бесконечно тонкая прямая нить заряжена однородно с плотностью λ. Найти напряженность электрического поля E и потенциал φ как функции расстояния r от нити. Потенциал на расстоянии r_0 положить равным нулю.

($E = (1/2\pi\varepsilon_0)\,\lambda/r$; $\varphi = -(\lambda/2\pi\varepsilon_0)\,ln(r/r_0)$)

3.3. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ = 1,5 нКл/см. На продолжении оси стержня на расстоянии d = 12 см от его конца находится точечный заряд Q = 0,20 мкКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

(F = 2,2 мН)

3.4. По тонкому проволочному кольцу радиусом r = 60 мм равномерно распределен заряд q = 20 нКл.

а) приняв ось кольца за ось x, найти потенциал φ и напряженность поля $\vec{E}$ на оси кольца как функцию x (начало отсчета x поместить в центр кольца);

б) исследовать случаи $x = 0$ и $|x| >> r$.

($E = (1/4\pi\varepsilon_0)\cdot\frac{q\cdot x}{(r^2+x^2)^{3/2}}\vec{e}_x$; $\varphi = (1/4\pi\varepsilon_0)\,\frac{q}{\sqrt{r^2+x^2}}$)

3.5. Чему равен поток вектора $\vec{E}$ через поверхность сферы, внутри объема которой находится:

а) заряд e;

б) заряд $-e$;

в) диполь с моментом p_e?

Объясните результат с помощью картины силовых линий электрического поля.

3.6. Металлический шар радиусом R помещен в однородное электрическое поле. Изобразите качественную картину силовых и эквипотенциальных линий электрического поля.

3.7. Два точечных заряда $+e$ и $-e$ расположены в точках с координатами $(a/2,0,0)$, $(-a/2,0,0)$. Построить качественно график зависимости проекции напряженности поля $E_x(x)$ для точек, лежащих на оси x ($y = 0$).

3.8. Найти зависимость плотности зарядов от декартовых координат $\rho(x,y, z)$, при которой напряженность поля описывалась бы функцией $\vec{E} = 1x\vec{e}_x + 2y^2\vec{e}_y + 3z\vec{e}_z$ (В/м).

($\rho(x,y, z) = \varepsilon_0(1 + 4y + 9z^2)$ Кл/м^3)

3.9. Потенциал поля, создаваемого некоторой системой зарядов, имеет вид: $\varphi = a(x^2+y^2)-bz^2$, где a и b – положительные константы. Найти напряженность поля E и ее модуль $|E|$. Построить графики зависимости $E_x = f(x)$, $E_z = f(z)$.

($E = 2\sqrt{a^2(x^2+y^2)+(вz)^2}$; $\vec{E} = -2ax\vec{e}_x - 2ay\vec{e}_y + 2вz\vec{e}_z$)

3.10. Плоский воздушный конденсатор подключили к батарее, а затем отключили от неё. После этого уменьшим расстояние между пластинами конденсатора в 2 раза. Как изменится:

а) энергия, запасенная конденсатором;

б) заряд на обкладках конденсатора;

в) плотность энергии электрического поля конденсатора?

3.11. Диэлектрическая пластина шириной $2a$ с проницаемостью $\varepsilon = 2$ помещена в однородное электрическое поле напряженности E, силовые линии которого перпендикулярны пластине.

а) изобразите на рисунке линии полей E и D электрического поля;

б) постройте качественно графики зависимостей E_x, D_x от x (ось x перпендикулярна пластине, вектор E направлен вдоль оси x, точка $x = 0$ находится в середине пластины).

3.12. Диэлектрическая пластинка с проницаемостью $\varepsilon = 2$ помещена в однородное электрическое поле с напряженностью E. Линии поля E образуют некоторый угол φ с поверхностью пластины. Изобразите качественно линии полей E и D в вакууме и в пластине. Постройте качественно графики зависимостей $E_x = f(x)$ и $D_x = f(x)$.

3.13. Внутри плоской однородной диэлектрической пластины с $\varepsilon = 3$ вектор напряженности однородного электрического поля составляет угол φ с поверхностью пластины. Считая, что с одной стороны пластины вакуум, а с другой стороны диэлектрик с $\varepsilon = 2$, изобразить качественно линии E и D электрического поля в трех указанных средах. Построить качественно зависимости $E_x = f(x)$ и $D_x = f(x)$. Ось OX перпендикулярна поверхностям пластины, а ее толщина d.

3.14. Плоский воздушный конденсатор опустили в воду так, что поверхность воды параллельна плоскостям пластин, а ее уровень расположен на расстоянии h от нижней пластины. Найти зависимость электроемкости конденсатора от величины h, если площадь пластины S, а расстояние между ними d.

$$\left(C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{\varepsilon d - h(\varepsilon - 1)}\right)$$

3.15. Электрическое поле создается равномерно заряженным шаром радиусом R с объемной плотностью заряда ρ. Определить зависимость вектора электрического смещения электрического поля от r. Построить качественно график $D = f(r)$.

$$(D = (1/3)\rho r;\ D = (\rho/3)\cdot(R^3/r^2))$$

Постоянный ток

Примеры решения задач

27. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε монотонно уменьшается от пластины 1 от значения $\varepsilon_1 = 4$ до значения $\varepsilon_2 = 3$ у пластины 2. Удельная

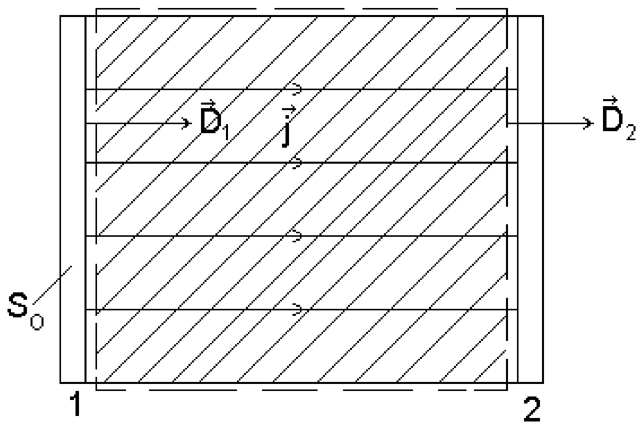
электропроводность σ монотонно уменьшается от пластины 1 от значения $\sigma_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ Ом.$^{-1}$ м$^{-1}$ до значения $\sigma_2 = 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ Ом.$^{-1}$ м$^{-1}$ у пластины 2. Конденсатор включен в цепь с постоянной ЭДС, и в нем устанавливается постоянный электрический ток силой $I = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик от стороны 1 конденсатора к стороне 2. Найти величину свободного заряда Q, возникшего в диэлектрике при протекании тока.

Дано:
$\varepsilon_1 = 4$
$\varepsilon_2 = 3$
$\sigma_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ Ом.$^{-1}$м$^{-1}$
$\sigma_2 = 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ Ом.$^{-1}$м$^{-1}$
$J = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ А

Q – ?

Решение

Среда между пластинами конденсатора обладает как электропроводящими, так и диэлектрическими свойствами. Поэтому в решении используется закон Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, (1) где $\vec{j}$ – плотность тока; $\vec{E}$ - напряженность электрического поля, и теорема Гаусса для диэлектрика. Направление линий тока вектора $\vec{j}$ и направления векторов электрического смещения D_1 и D_2 у пластины 1 и пластины 2 соответственно показаны на рисунке.



Ток через среду постоянный, линии тока перпендикулярны к пластинам конденсатора, следовательно, для величин силы тока у пластины 1 и пластины 2 можно записать

$$I = j_1 S_0 = j_2 S_0,$$

где S_0 - площадь пластины конденсатора. Это же соотношение с учетом закона Ома (1) принимает форму

$$I = \sigma_1 E_1 S_0 = \sigma_2 E_2 S_0. \qquad (2)$$

Для использования теоремы Гаусса проведем гауссову поверхность в виде прямоугольного параллелепипеда (пунктирная линия на рисунке), так, чтобы внутри находился диэлектрик. По теореме Гаусса для диэлектрика, учитывая направление векторов $\vec{D}$, имеем:

$$Q = \oint_S \vec{D}d\vec{S} = D_2S_0 - D_1S_0. \qquad (3)$$

Связь между вектором электрического смещения $\vec{D}$ и напряженностью $\vec{E}$ электрического поля, как известно имеет вид:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \qquad (4)$$

Из соотношений (2) – (4) для величины заряда Q следует

$$Q = D_2S_0 - D_1S_0 = \varepsilon_2\varepsilon_0E_2S_0 - \varepsilon_1\varepsilon_0E_1S_0 = \left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 I}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 I}{\sigma_1}\right) = I\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right) =$$

$$= 1,0\cdot10^{-7}\cdot 8,85\cdot10^{-12}\left(\frac{3}{1\cdot10^{-10}} - \frac{4}{1\cdot10^{-7}}\right) = 27\cdot10^{-9}\text{ Кл.}$$

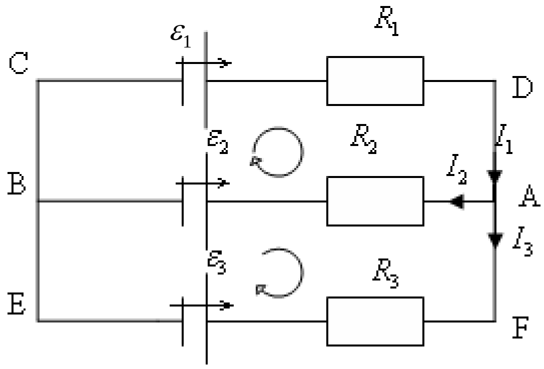
Ответ: $Q = 27$ нКл.

28. В схеме, изображенной на рисунке $\varepsilon_1 = 11$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В, $\varepsilon_3 = 6$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 2$ Ом. Внутреннее сопротивление источников тока пренебрежимо мало. Определить силы токов I_1, I_2, I_3, текущих через сопротивления.

Дано:
$\varepsilon_1 = 11$ В
$\varepsilon_2 = 4$ В
$\varepsilon_3 = 6$ В
$R_1 = 5$ Ом
$R_2 = 10$ Ом
$R_3 = 2$ Ом

$I_1 - ?$
$I_2 - ?$
$I_3 - ?$

Решение



Представленная в задаче схема постоянного тока, может быть рассчитана на основе законов Кирхгофа. Для применения законов Кирхгофа выделим два замкнутых контура А*BCDA* и *AFEBA*. Зададим направление обхода этих замкнутых контуров по часовой стрелке, как показано на рисунке. Также будем рассматривать узел схемы *A*, в котором сходятся (или вытекают) токи $I_1,\ I_2,\ I_3$.

По первому закону Кирхгофа для токов узла *A* следует уравнение:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{1}$$

В данном выражении учитывалось правило знаков: ток втекает в узел – положителен, ток вытекает из узла – отрицателен.

По второму закону Кирхгофа для контуров *ABCDA* и *AFEBA* имеем соответственно:

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{2}$$

$$-I_2R_2 + I_3R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3. \tag{3}$$

В выражениях (2) и (3) учитывалось правило знаков, определяемое выбранным направлением обхода контура. ЭДС положительна, если направление обхода контура совпадает с направлением ЭДС.

Подставляя известные численные значения сопротивлений участков цепи и ЭДС источников тока в уравнения (1) – (3), получим

$$\begin{cases} 1I_1 - 1I_2 - 1I_3 = 0, \\ 5I_1 + 10I_2 + 0I_3 = 7, \\ 0I_1 - 10I_2 + 2I_3 = -2. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, получается система трех линейных уравнений с тремя искомыми неизвестными $I_1,\ I_2,\ I_3$. Решение такой системы дается формулами Крамера:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ ,\ I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}\ , \tag{5}$$

где Δ – определитель системы (4); Δ_1 – определитель при первом неизвестном I_1; Δ_2 – определитель при втором неизвестном I_2; Δ_3 – определитель при третьем неизвестном I_3.

По значениям коэффициентов системы уравнений (4) следует:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 80 \ (6),\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 7 & 10 & 0 \\ -2 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 64 \tag{7}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24 \ (8),\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & -2 \end{vmatrix} = 40 \tag{9}$$

Из выражений (5) – (9) для величин сил токов получается

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{64}{80} = 0{,}8\,\text{А},\; I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{80} = 0{,}3\,\text{А},\; I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{40}{80} = 0{,}5\,\text{А}.$$

Ответ: $I_1 = 0{,}8\,\text{А}$; $I_2 = 0{,}3\,\text{А}$; $I_3 = 0{,}5\,\text{А}$.

29. Сила тока в проводнике убывает со временем по закону $I = I_0 e^{-\alpha t}$ ($I_0 = 20\,\text{А}$, $\alpha = 10^2\,\text{с}^{-1}$). Определить заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время $\tau = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ с.

Дано:	Решение
$I = I_0 e^{-\alpha \cdot t}$ $I_0 = 20\,\text{А}$ $\alpha = 100\,\text{с}^{-1}$ $\tau = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{с}$	Величина силы тока I связана с зарядом q, проходящим через поперечное сечение проводника, соотношением
g – ?	

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (1)$$

Следовательно, за бесконечно малый промежуток времени dt через поперечное сечение проводника пройдет заряд

$$dq = Idt = I_0 e^{-\alpha \cdot t} dt \qquad (2)$$

Величина заряда q, прошедшего через поперечное сечение проводника за промежуток времени τ, может быть найдена интегрированием выражения (2):

$$q = \int_0^{\tau} I_0 e^{-\alpha t} dt = \frac{I_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\tau}) = \frac{20}{100}(1 - \frac{1}{e}) = 0{,}13\,\text{Кл}.$$

Ответ: $q = 0{,}13\,\text{Кл}$.

30. В медном проводнике объемом $V_0 = 6{,}0$ см^3 при прохождении по нему постоянного тока за время $\tau = 1{,}0$ мин выделилось количество теплоты $Q = 216\,\text{Дж}$. Найти напряжённость E электрического поля в проводнике, плотность тока j, скорость упорядоченного движения электронов u. Считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Проводимость, плотность и молярная масса меди соответственно $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7\,\text{Ом.}^{-1}\text{м}^{-1}$, $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$, $\mu = 63{,}5\,\text{г/моль}$.

Дано:	Решение
6,0 см^3 = $V_0 = 6{,}0 \cdot 10^{-6}$ м^3 $\tau = 1$ мин = 60 с $Q = 216$ Дж $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ Ом$^{-1}$·м$^{-1}$ $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ Кг/м^3 $\mu = 63{,}5$ г/моль = $63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль а) E – ? б) j – ? в) u - ?	а) для решения используем закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$, (1) закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме $Q_{уд} = j^2 / \sigma$ (2) где σ – удельная электропроводность меди, $Q_{уд} = \dfrac{Q}{V_0 \tau}$ – удельная тепловая мощность тока. Из формул (1) и (2) для напряженности E электрического поля в проводнике следует:

$$E = \left(\frac{Q_{уд}}{\sigma}\right)^{1/2} = \left(\frac{Q}{V_0 \tau \sigma}\right)^{1/2} = \left(\frac{216}{6{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 5{,}8 \cdot 10^7}\right)^{1/2} = 1{,}0 \cdot 10^{-1}\text{В/м}.$$

б) из выражения (1) для плотности тока j имеем

$$j = \sigma E = 5{,}8 \cdot 10^7 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-1} = 5{,}8 \cdot 10^6 \text{А} \cdot \text{м}^{-2}.$$

в) скорость упорядоченного движения электронов $\vec{u}$ и плотность тока $\vec{j}$ связана соотношением

$$\vec{j} = e_0 \cdot n \cdot \vec{u}, \quad (3)$$

где e_0 – заряд электрона; n – концентрация свободных электронов. Учитывая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, для концентрации свободных электронов получается

$$n = \frac{\rho}{\mu} N_A, \quad (4)$$

где N_A – число Авогадро.

Из формул (3) и (4) для скорости упорядоченного движения электронов следует

$$u = \frac{j}{|e_0| \cdot n} = \frac{j \cdot \mu}{|e_0| \cdot N_A \cdot \rho} = \frac{5{,}8 \cdot 10^6 \cdot 63{,}5 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 8{,}9 \cdot 10^3} = 4{,}3 \cdot 10^{-4}\text{м/с}$$

Ответ: а) $E = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$В/м , б) $j = 5{,}8 \cdot 10^6$ А$\cdot м^{-2}$, в) $u = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$м/с.

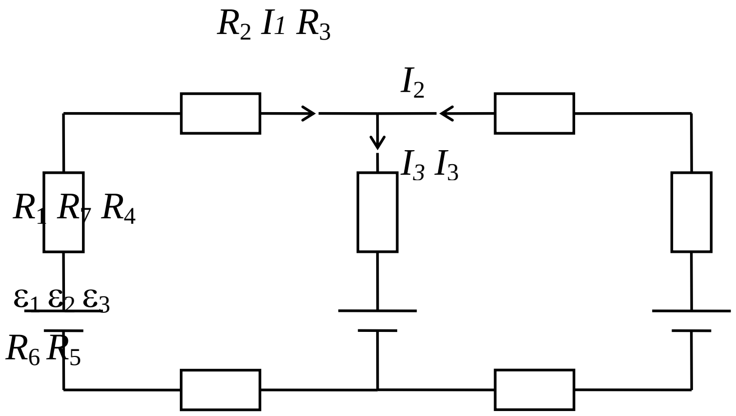
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.16. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с проницаемостью ε = 7 и удельным сопротивлением ρ = 100

ГОм·м. Емкость конденсатора C = 3000 пФ. Найти силу тока утечки через конденсатор при подаче на него напряжения U = 2000 В.

(I = $9{,}7 \cdot 10^{-7}$ A)

3.17. В схеме, изображенной на рисунке, ε_1 = 10 В, ε_2 = 20 В, ε_3 = 30 В, R_1 = 1,0 Ом, R_2 = 2,0 Ом, R_3 = 3,0 Ом, R_4 = 4,0 Ом, R_5 = 5,0 Ом, R_6 = 6,0 Ом, R_7 = 7,0 Ом. Внутреннее сопротивление источников тока пренебрежимо мало. Найти силы токов I_1, I_2, I_3.



(I_1 = -1,02 A, I_2 = 0,90 A, I_3 = -0,12 A)

3.18. Определить заряд Q, прошедший по проводу с сопротивлением R = 3,0 Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от U_0 = 2,0 $В$ до U = 4,0 $В$ в течение 20 с.

(Q = 20 Кл)

3.19. Сила тока в проводнике сопротивлением 20 Ом нарастает в течение времени Δt = 2,0 с по линейному закону от I_0 = 0 до I_{max} = 6,0 A. Определить количество теплоты Q, выделившееся в этом проводнике за первую секунду.

(Q = 60 Дж)

3.20. Концентрация электронов проводимости в меди n = $1{,}0 \cdot 10^{29}$ м$^{-3}$. Считая условия нормальными, определить среднее время между двумя столкновениями электрона с решеткой (среднее время свободного пробега). Определить среднюю длину свободного пробега электрона. Удельное сопротивление меди ρ = $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

(λ = $4{,}7 \cdot 10^{-9}$ м)

3.21. По медному проводнику сечением 0,20 мм^2 течет ток. Определить, какая сила действует на отдельный электрон проводимости со стороны электрического поля, если объемная плотность энергии, выделяемая в проводнике, равна $9{,}0\cdot10^{3}$ Дж/м^{3}. Определить плотность и силу тока в проводнике.

$F = 20\cdot10^{-22}$ H; $j = 7{,}3\cdot10^{5}$ A/м^{2}; I = 0,15 A)

3.22. Два источника тока, соединенные одинаковыми полюсами, с ЭДС $E_1 = 2{,}0$ В и $E_2 = 1{,}5$ В и внутренними сопративлениями $r_1 = 0{,}50$ Ом и $r_2 = 0{,}40$ Ом включены параллельно сопративлению R = 2,0 Ом. Определите силу тока через это сопративление.

(I = 0,78 A)

Магнетизм

Примеры решения задач

31. Бесконечно длинный прямой проводник согнут под прямым углом, как показано на рис. 1. По проводнику течет ток $I = 10$ А. Найти магнитную индукцию $\vec{B}$ в точках M и N, если $a = 5{,}0$ см.

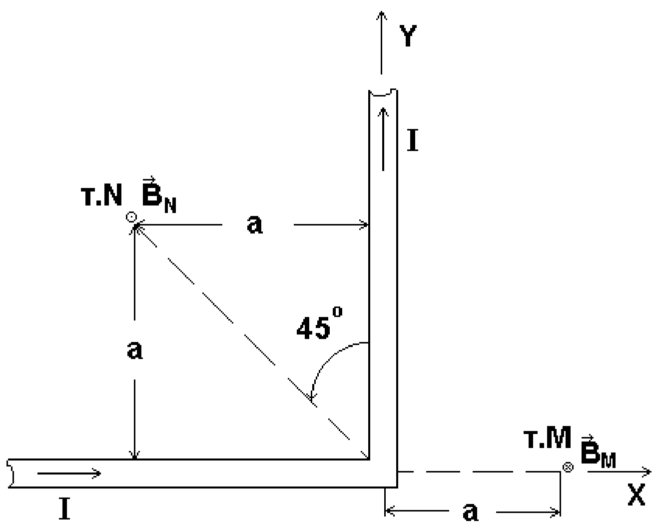


Рис. 1

Дано:	Решение
$I = 10$ А $a = 5{,}0$ см = $5{,}0\cdot10^{-2}$ м	Величина магнитной индукции $\vec{B}$ в точках M и N может быть найдена по принципу суперпозиции:
а) B_M – ? б) B_N – ?	$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

где $\vec{B}_1$ – магнитная индукция от полубесконечной части проводника, лежащей вдоль оси *X*; $\vec{B}_2$ – магнитная индукция от полубесконечной части проводника, лежащей вдоль оси *Y*. Модуль вектора магнитной индукции может быть рассчитан на основе закона Био – Савара – Лапласа. Нас интересует и будет использоваться результат расчета для прямолинейного отрезка проводника, представленного на рис. 2. Модуль вектора магнитной индукции в точке *A* на расстоянии *b* от отрезка проводника выражается формулой

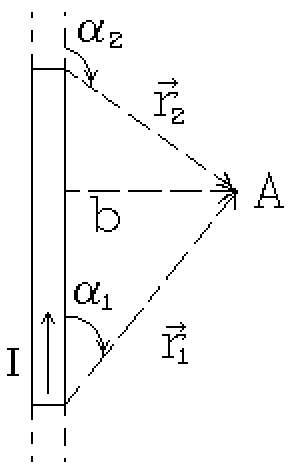


Рис. 2

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \qquad (2)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, α_1 и α_2 – углы между направлениями тока и направлениями радиус-векторов r_1 и r_2 – начала и конца отрезка (см. рис. 2).

В точке *M* (см. рис. 1) вклад в величину магнитной индукции от полубесконечной части проводника, лежащей вдоль оси *X*, равен нулю ($\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$). Вклад в величину магнитной индукции от полубесконечной части проводника, лежащей вдоль оси *Y*, характеризуется углами $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2 = \pi$. Поэтому, как это следует из формул (1) и (2), модуль вектора магнитной индукции B_M в точке *M*:

$$B_M = B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}}[0-(-1)] = 2 \cdot 10^{-5} = 20 \text{ мкТл.}$$

Направление вектора $\vec{B}_M$ определяется правилом правого винта и показано на рис. 1.

В точке *N*, как это следует из правила правого винта, вектора $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены вдоль одной линии перпендикулярно плоскости рис. 1. Поэтому модуль вектора магнитной индукции в точке *N* равен сумме модулей векторов B_1 и B_2. Для величины магнитной индукции B_1, как следует из рис. 1, угол α_1 равен нулю, а угол $\alpha_2 = -\frac{3\pi}{4}$. Для величины B_2 магнитной индукции, как следует из рис.1, угол $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, а угол $\alpha_2 = \pi$. Поэтому, как это следует из формул (1) и (2), модуль вектора магнитной индукции B_N в точке N равен:

$$B_M = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos 0 - \cos\frac{3\pi}{4}) + \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\pi) =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{4\pi \cdot 5,0 \cdot 10^{-2}}(2+\sqrt{2}) = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 68 \text{ мкТл}.$$

Направление вектора $\vec{B}_N$ определяется правилом правого винта и показано на рис.1.

Ответ: а) $B_M = 20$ мкТл; б) $B_N = 68$ мкТл.

32. Тонкое кольцо радиусом $r = 10$ см заряжено равномерно с линейной плотностью заряда $\tau = 16$ нКл/м. Кольцо вращается с частотой $n = 10$ об/с. относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Определить магнитный момент $\vec{P}_m$, обусловленный вращением кольца.

Дано:	Решение:
$r = 10$ см $\tau = 16$ нКл/м $n = 10$ об/с	Вращение заряженного кольца представляет собой круговой ток. Круговой ток создает в пространстве магнитный момент, величина модуля которого определяется выражением:
$\vec{P}_m$ – ?	$P_m = IS$,

где I – сила кругового тока; $S = \pi r^2$ – площадь контура (кольца).

Сила кругового тока характеризуется количеством заряда, пересекающего площадку, перпендикулярную линии кольца в единицу времени. Поэтому для силы тока получается: $I = qn$, где $q = \tau 2\pi r$ – заряд кольца.

Таким образом модуль магнитного момента:
$P_m = IS = \tau 2\pi r n \pi r^2 = \tau 2\pi^2 r^3 n = 16 \cdot 10^{-9} 2(3{,}14)^2 (0{,}10)^2 10 = 3{,}16 \cdot 10^{-9}\ \text{А} \cdot \text{м}^2 \cong 3{,}2\ \text{нА} \cdot \text{м}^2$ Направление вектора $\vec{P}_m$ определяется правилом правого винта. Поэтому вектор $\vec{P}_m$ направлен по оси кольца и его направление совпадает с направлением вектора угловой скорости вращения кольца.

Ответ: $P_m = 3{,}2$ нА $\cdot$ м^2

33. Длинный прямой соленоид с сердечником намотан из проволоки диаметром $d = 0{,}50$ мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Найти напряженность магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I = 4$А.

Магнитную проницаемость μ сердечника соленоида при данной силе тока принять равной 800.

Дано:	Решение
$d = 0{,}50$ мм $= 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ м $I = 4{,}0$ А $\mu = 800$	Для длинного прямого соленоида можно пренебречь краевыми эффектами, и модуль напряженности H внутри соленоида определяется формулой
а) H – ? б) B – ?	$$H = nI, \qquad (1)$$

где n – число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины. Так как витки плотно прилегают друг к другу, то их число на единицу длины

$$n = \frac{1}{d}. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) для модуля напряженности H имеем

$$H = nI = \frac{I}{d} = \frac{4}{0{,}50 \cdot 10^{-3}} = 8{,}0 \cdot 10^{3}\,\text{А/м}.$$

Вектор $\vec{H}$ направлен параллельно оси соленоида.

Как известно, вектор магнитной индукции $\vec{B}$ связан с вектором напряженности магнитного поля $\vec{H}$ соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \qquad (3)$$

Из условия задачи и выражения (3) для магнитной индукции внутри соленоида получим $B = \mu_0 \mu H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{3} = 8{,}0$ Тл.

Вектор $\vec{B}$ направлен параллельно оси соленоида.

Ответ: $H = 8{,}0 \cdot 10^{3}$ А/м; B=8,0 Тл.

34. Тороид с сердечником, длина которого по средней линии $l = 1{,}0$ м, имеет воздушный зазор шириной $b = 4{,}0$ мм. Обмотка тора равномерно распределена по всей его длине с числом витков на единицу длины $n = 8{,}0\,\text{см}^{-1}$. Найти силу тока I в обмотке, при которой магнитная индукция в зазоре будет равна $B = 1{,}0$ Тл. Магнитную проницаемость μ сердечника тороида при данной силе тока принять равной 800.

Дано:	Решение
$l = 1{,}0$ м $b = 4{,}0$ мм $n = 8{,}0$ см$^{-1}$ $B = 1{,}0$ Тл $\mu = 800$	По теореме о циркуляции вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ можно записать $$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i, \qquad (1)$$

где I_i – макроскопические точки, охватываемые контуром.

I – ?	Для тороида по средней линии левая часть формулы (1) принимает вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = Hl + H_0 b, \qquad (2)$$

где H – напряженность магнитного поля в сердечнике; H_0 – напряженность магнитного поля в воздушном зазоре. Правая часть выражения (1) в случае тороида с обмоткой принимает форму

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = NI = nlI, \qquad (3)$$

где N – число витков всей обмотки тора.

Величины напряженностей магнитного поля H и H_0, в случае пренебрежения рассеянием магнитного потока связаны с магнитной индукцией B известными соотношениями:

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}, \qquad (4)$$

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0}. \qquad (5)$$

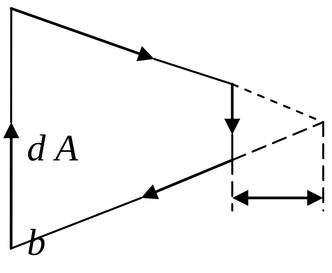
Приравнивая выражения (2) и (3) с использованием формул (4) и (5), для силы тока I получим

$$I = \frac{Hl + H_0 b}{nl} = \frac{B}{\mu_0 nl}\left(\frac{l}{\mu} + b\right) = \frac{1,0}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8,0 \cdot 10^{2} \cdot 1,0}\left(\frac{1,0}{800} + 4,0 \cdot 10^{-3}\right) = 5,2 \text{ А}.$$

Ответ: $I = 5{,}2$ А.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.23. Ток силы I = 1,0 А циркулирует в контуре, имеющем форму равнобочной трапеции. Отношение оснований трапеции η = 2 : 1. Найти магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке A, лежащей в плоскости трапеции (см. рисунок). Меньшее основание трапеции d = 100 мм, расстояние b = 50 мм.



($B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2Id}{b\sqrt{d^2 + 4b^2}}\left(1 - \dfrac{1}{\eta}\right)$ = 1,4 мкТл)

3.24. В тонком проводнике, изогнутом в виде правильного шестиугольника со стороной a = 20 см, идет ток I = 10 А. Определить магнитную индукцию в центре шестиугольника.

($B = 35 \cdot 10^{-6}$ Тл)

3.25. Оценить индукцию магнитного поля B, создаваемого электроном в центре атома водорода, при движении электрона по первой боровской орбите, радиус которой $a = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м.

(12,5 Тл)

3.26. По витку радиусом R = 10 см течет ток I = 50 А. Виток помещен в однородное магнитное поле B = 0,20 Тл. Определить момент силы M, действующей на виток, если плоскость витка составляет угол φ = 60° с линиями индукции.

(0,16 Н·м)

3.27. Обмотка соленоида содержит два слоя плотно прилегающих друг к другу витков провода диаметром d = 0,20 мм. Определить магнитную индукцию на оси соленоида, если по проводу течет ток I = 0,50 А.

(6,3 мТл)

3.28. По тонкому стержню длиной l = 40 см равномерно распределен заряд Q = 60 нКл. Стержень вращается с частотой n = 12 $с^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через стержень на расстоянии $a = l/3$ от одного из его концов. Определить магнитный момент P_m, обусловленный вращением стержня.

($4{,}0 \cdot 10^{-8}$ А·м^2)

3.29. Заряд Q = 0,10 мкКл равномерно распределен по стержню длиной l = 50 см. Стержень вращается с угловой скоростью ω = 50 рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти магнитный момент Pm, обусловленный вращением стержня.

($5{,}2 \cdot 10^{-8}$ А·м^2)

3.30. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток I = 50 А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны её длиной l = 65 см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно её ширине. Каков магнитный поток φ, пронизывающий рамку?

($4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Вб)

3.31. Стержень длиной l = 20 см заряжен равномерно распределенным зарядом с линейной плотностью τ = 0,20 мкКл/м. Стержень вращается с частотой n = 10 $с^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить магнитный момент P_m, обусловленный вращением стержня.

($P_m = 1{,}7\cdot10^{-8}$ А·м^2)

3.32. Диск с равномерно распределенным по его плоскости зарядом Q равномерно вращается вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости с частотой n. Радиус диска R. Найти магнитный момент диска относительно оси z.

($P_m = (1/2)Q\pi nR^2$ А·м^2)

3.33. Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной l_0 = 5,0 мм. Длина l средней линии кольца равна 1,0 м. Сколько витков N содержит обмотка на кольце, если при силе тока I = 4,0 А индукция B магнитного поля в воздушном зазоре 0,50 Тл? Напряженность поля в металле $H = 1{,}5\cdot10^3$ А/м. Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре пренебречь.

($N = 8{,}7\cdot10^2$)

3.34. На сердечнике в виде тора диаметром d = 500 мм имеется обмотка с числом витков N = 1000. В сердечнике сделана поперечная прорезь, в результате чего образовался воздушный зазор ширины b = 1,0 мм. При силе тока в обмотке I = 0,85 А напряженность поля в зазоре H = 600 кА/м. Определить магнитную проницаемость μ железа при этих условиях. Рассеянием поля у краев зазора пренебречь.

($\mu = \dfrac{(\pi d - b)H}{NI - bH} = 3{,}8\cdot10^3$)

3.35. Тонкий металлический стержень длиной l = 1,2 м вращается с частотой n = 120 $мин^{-1}$ в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к стержню и отстоящей от одного из его концов на расстоянии l_1 = 0,25 м. Вектор $\vec{B}$ параллелен оси вращения, B = 0,10 мТл. Найти разность потенциалов I, возникающую между концами стержня. Выполните рисунок, поясняющей решение задачи.

(0,53 мВ)

3.36. В магнитное поле, изменяющееся по закону $B = B_o \cos\omega t$ (B_o = 0,10 Тл, $\omega = 4{,}0\ с^{-1}$), помещена квадратная рамка со стороной a = 50 см, причём нормаль к рамке образует с направлением поля угол α = 45°. Определите ЭДС индукции, возникающую в рамке в момент времени t = 5,0 с.

($\varepsilon_i = 64$ мВ)

3.37. Электрон движется в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 7{,}0 \cdot 10^{-3}$ Тл, по окружности радиусом R = 3,0 см. Определить скорость и энергию электрона, а также цилиндрическую (лармарову) частоту его вращения .

($B = 3{,}7 \cdot 10^7$ м/с; $W = 6{,}2 \cdot 10^{-16}$Дж; $\omega_{л} = 1{,}2 \cdot 10^9$ рад/с)

3.38. Электрон, обладая скоростью $\upsilon = 1{,}0$ мм/с, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60^0$ к направлению поля и начинает двигаться по спирали. Напряженность магнитного поля $H = 1{,}5$ кА/м. Определите 1) шаг спирали; 2) радиус витка спирали. Изобразите качественно траекторию электрона в магнитном поле.

(1) $h = 9{,}5$ мм; 2) $R = 2{,}6$ мм)

3.39. Катушку индуктивностью $L = 0{,}60$ Гн подключают к источнику тока. Определите сопротивление катушки, если за время $t = 3{,}0$ с сила тока через катушку достигает 80 % предельного значения. Постройте график зависимости силы тока (в относительных единицах силы тока) от времени.

($R = 0.32$ Ом)

3.40. Определите, через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,95 предельного значения, если источник тока замыкают на катушку сопротивлением $R = 12$ Ом и индуктивностью 0,50 Гн. Постройте график зависимости силы тока (в относительных единицах I / I_m) от времени.

($t = 0{,}12$ с)

4. КОЛЕБАНИЯ, ВОЛНЫ И ОПТИКА

Механические колебания и волны

Пример решения задачи

35. Вдоль шнура распространяется поперечная волна, уравнение которой имеет вид $y = 0{,}050 \sin(1{,}4\pi t - 0{,}50x)$, м , где y – смещение точек шнура; t – время, с; x – координата точек шнура, м.

Найти: а) период колебания точек шнура T; б) скорость распространения волны υ; в) длину волны λ; г) разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ точек шнура, находящихся на расстоянии $\Delta x = 1$ м; д) амплитуду скорости υ_m поперечного движения частиц шнура.

Дано:	Решение
$y = 0{,}050\sin(1{,}4\pi \cdot t - 0{,}50x)$ м $\Delta x = 1{,}0$ м	Как известно, уравнение поперечной плоской волны, распространяющейся вдоль оси X, имеет вид:
а) T - ?; б) υ – ? в) λ – ?; г) $\Delta\varphi$ – ?; д) υ_m – ?	$$y = A\sin(\omega_0 t - kx + \alpha), \qquad (1)$$

где A- амплитуда смещения, ω_0 – циклическая частота, k – волновое число, α – начальная фаза. Из сравнения условий задачи и выражения (1) можно найти искомые величины.

Период колебания T вязан с циклической частотой соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \text{ Поэтому } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1,4\pi} = 1,42 = 1,4 \text{ с.}$$

Волновое число определяется выражением $k = \dfrac{\omega_0}{\upsilon}$.

Поэтому для скорости распространения волны υ имеем

$$\upsilon = \frac{\omega_0}{k} = \frac{1,4\pi}{0,15} = 8,8 \text{ м/с}$$

По найденным значениям периода колебаний T и скорости волны υ можно определить длину волны из соотношения $\lambda = \upsilon T = 8,8 \cdot 1,42 = 12,5$ м.

Разность фаз колебаний любых двух точек шнура определяется формулой

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta x) = k\Delta x.$$

Поэтому для точек шнура из условия задачи имеем

$\Delta\varphi = k\Delta x = 0,50 \cdot 1 = 0,50$ рад.

Скорость смещения точек шнура в поперечном направлении получается дифференцированием по времени выражения (1), т.е.

$$\frac{dy}{dt} = A \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t - kx + \alpha) \qquad (2)$$

Из условия задачи и формулы (2) для максимального значения скорости $\dfrac{dy}{dt}$ получается: $\upsilon_m = A\omega_0 = 0,050 \cdot 1,4\pi = 0,22$ м/с

Ответ: а) $T = 1,4$ с; б) $\upsilon = 8,8$ м/с; в) $\lambda = 12$ м; г) $\Delta\varphi = 0,50$ рад; д) $\upsilon_m = 0,22$ м/с.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Найти смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстояние $l = \lambda/12$, для момента времени $t = T/6$. Амплитуда колебания $A = 0,050$ м.

(0,043 м)

4.2. Амплитуда гармонического колебания 5,0 см, период 4,0 с. Найти максимальную скорость колеблющейся точки и ее максимальное ускорение.

($\upsilon_m = 7,8\cdot10^{-2}$ м/с; $a_m = 0,12$ м/с^2)

4.3. Уравнение плоской волны имеет вид $y = 0,34\cdot\cos(0,20t - 0,40x)$, где y – смещение частиц среды, и все числовые значения заданы в системе СИ. Записать числовые значения частоты и периода колебаний, волнового числа, фазовой скорости и длины волны, а также максимальное значение смещения.

($\upsilon = 0,50$ м/с; $\lambda = 16$ м)

4.4. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $\upsilon = 15$ м/с. Период колебания точек шнура $T = 1,2$ с. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20$ м, $x_2 = 30$ м.

(200°)

4.5. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0,02\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$м. Определить: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение; 6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить положение равновесия.

(Т = 2 с; $\upsilon_{\max} = 0,02\pi$ м/с; $a_{\max} = 0,02\pi^2$ м/с^2; $t = m$ $(m = 0, 1, 2, 3...)$)

4.6. Период затухающих колебаний Т = 4,0 с; логарифмический декремент затухания $\lambda = 1,6$; начальная фаза $\alpha = 0$. При $t = T/8$ смещение точки $x = 4,5$ см. Написать уравнение этого колебания. Построить график этого колебания в пределах двух периодов.

($x = 7,8e^{-0,4t}\sin\dfrac{\pi}{2}t$ см)

4.7. Поперечная волна, распространяясь вдоль упругого шнура, описывается уравнением $\xi(x,t) = 0,10\cos(2\pi t - \frac{\pi}{5}x)$ м. Определите: длину волны, фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, расположенной на расстоянии x_1 = 9 м от источника колебаний в момент времени $t_1 = 2c$. ($\lambda = 10$ м; $\varphi_1 = 2,2\pi$; $\xi_1 = 8,1$ см; $\upsilon = 0,36$ м/с; $a_x = -3,2$ м/с^2)

Электромагнитные колебания и волны

Пример решения задач

36. В колебательном контуре амплитуда колебаний напряжения на обкладках конденсатора за время $\tau = 1,0 \cdot 10^{-3}$ с уменьшается в n раз ($n = 3$). Найти: а) величину коэффициента затухания β контура; б) величину активного сопротивления R контура; в) добротность Q контура, если электроемкость конденсатора $C = 0,20$ мкФ, индуктивность катушки $L = 8,0$ Гн.

Дано:
$C = 0,20$ мкФ
$L = 8,0$ Гн
$\tau = 1,0 \cdot 10^{-3}$ с
$n = 3$

а) B-?
б) R-7
в) Q-?

Решение

В колебательном контуре происходят затухающие электрические колебания. Амплитуда колебаний напряжения на обкладках конденсатора U_m со временем t уменьшается по закону

$$U_m(t) = U_0 e^{-\beta t}, \qquad (1)$$

где U_0 – постоянная величина.

Через промежуток времени τ амплитуда напряжения

$$U_m(t+\tau) = U_0 e^{-\beta(t+\tau)} \qquad (2)$$

и уменьшается в n раз. Поэтому из выражений (1) и (2) получается

$$\frac{U_m(t)}{U_m(t+\tau)} = e^{\beta\tau} = n. \qquad (3)$$

Прологарифмировав выражение (3), для коэффициента затухания имеем $\beta = \frac{\ln n}{\tau} = \frac{\ln 3}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 1,1 \cdot 10^3$ с$^{-1}$.

Коэффициент затухания β и активное сопротивление R контура связаны соотношением:

$$\beta = \frac{R}{2L}. \qquad (4)$$

Отсюда для величины R следует:

$R = 2\beta L = 2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 17{,}6 \cong 18$ Ом.

Как известно, добротность контура определяется формулой:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{17{,}6}\sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{0{,}2 \cdot 10^{-6}}} = 11{,}4 \cong 11$$

Ответ: а) $\beta = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$; б) $R = 18$ Ом; в) $Q = 11{,}4$

37. Цепь переменного тока частотой $\nu = 50{,}0$ Гц и напряжения $U = 220$ В состоит из последовательно соединенных конденсатора электроемкости $C = 35{,}4$ мкФ, катушки индуктивности $L = 0{,}700$ Гн, активного сопротивления $R = 100$ Ом. Найти: а) импеданс (полное сопротивление) Z; б) сдвиг по фазе φ между током и напряжением; в) силу тока I; г) падение напряжения на конденсаторе U_C, катушке U_L, активном сопротивлении U_R.

Дано:
$U = 220$ В
$C = 35{,}4$ мкФ
$L = 0{,}700$ Гн
$R = 100$ Ом
$\nu = 50{,}0$ Гц

а) Z – ?
б) φ – ?
в) I – ?
г) U_C – ? U_L – ?
U_R – ?

Решение

Величины, характеризующие протекание тока циклической частоты $\omega = 2\pi\nu$ в цепи, определяется выражениями для индуктивного сопротивления $X_L = \omega L$, емкостного сопротивления $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, реактивного сопротивления $X = X_L - X_C$.

Поэтому для искомых в задаче величин имеем:

а) $$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{100^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}70 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 35{,}4 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 164 \text{ Ом}.$$

б) $$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = 1{,}3, \quad \varphi = 58{,}3^{\circ};$$

в) $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{220}{164} = 1{,}34$ А; г) $U_C = IX_C = 120$ В;

$U_L = IX_L = 295$ В; $U_R = IR = 134$ В

Ответ: а) $Z = 164$ Ом; б) $\varphi = 38^{o}25'$; в) $I = 1{,}34$ А; г) $U_C = 120$ В; $U_L = 295$ В; $U_R = 134$ В.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.8. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре дается в виде I = -0,020·sin400 πt (A). Индуктивность контура 1,0 Гн. Найти:

а) период колебаний;

б) емкость контура;

в) максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора.

($T = 5\cdot10^{-3}$ с; $C = 6{,}3\cdot10^{-7}$ Ф; $U_{\max} = 25$ B)

4.9. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре дано в виде

$U = 50\cdot\cos10^4\pi t$ (В). Емкость конденсатора составляет $9\cdot10^{-7}$ Ф. Найти:

а) период колебаний;

б) индуктивность контура;

в) закон изменения со временем силы тока в цепи;

г) длину волны, соответствующую этому контуру.

($T = 2\cdot10^{-4}$ c, L = 1,1 мГн, $I = -1{,}4\cdot\sin10^4\cdot\pi t$ A, $\lambda = 6\cdot10^4$ м)

4.10. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью C = 7 мкФ, катушки индуктивности L = 0,23 Гн и сопротивления R = 40 Ом. Конденсатор заряжен количеством электричества $Q = 5{,}6\cdot10^{-4}$ Кл. Найти:

а) период колебаний контура;

б) логарифмический декремент затухания колебаний.

Написать уравнение зависимости изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора от времени.

($T = 8\cdot10^{-3}$ c; $\lambda = 0{,}7$; $U = 80\ exp(-87\cdot t)\cos(250\ \pi t)$)

4.11. В цепь переменного тока напряжением 220 В включены последовательно емкость C, активное сопротивление R и индуктивность L. Найти падение напряжения U_R на омическом сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе равно $U_C = 2U_R$ и падение напряжения на индуктивности $U_L = 3U_R$.

($U_R = 156$ B)

4.12. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L = 1,27 Гн и ёмкостью C = 1,59 мкФ. На зажимы подано 50-периодное действующее напряжение U = 127 В. Найти:

а) действующее значение силы тока I в цепи;

б) сдвиг по фазе между током и напряжением;

в) действующее значение напряжений U_R, U_L и U_C на зажимах каждого элемента цепи.

(71 мА; -63°; 57 В; 28 В; 142 В)

4.13. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 25 нФ и катушки с индуктивностью L = 1,015 Гн. Обкладкам конденсатора сообщается заряд q = 2,5 мкКл. Написать уравнения (с числовыми коэффициентами) изменения разности потенциалов U и тока I в цепи от времени. Найти разность потенциалов на обкладках конденсатора и ток в цепи в моменты времени $T/8$, $T/4$, $T/2$ (T – период колебаний). Построить графики $U(t)$ и $I(t)$ в пределах одного периода.

$$(U = 100\cos\left(2\pi\cdot 10^3 t\right)B;\ I = -15{,}7\sin\left(2\pi\cdot 10^3 t\right)\text{ мА}; U_1 = 70{,}7B;$$

$$I_1 = -11{,}1\text{ мА};\ U_2 = 0;\ I_2 = -15{,}7\text{мА};\ U_3 = -100\ B;\ I_3 = 0).$$

4.14. В однородной и изотропной среде с ε = 3,0 и $\mu = 1{,}0$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_m = 10,0 В/м. Найти: а) амплитуду напряженности магнитного поля волны H_m, б)фазовую скорость υ волны.

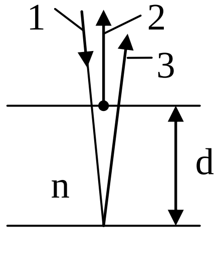
$$(H_m = 46\text{ мА/м};\ \upsilon = 1{,}7\cdot 10^8\text{ м/с})$$

Оптика

Пример решения задач

38. На мыльную пленку с показателем преломления $n = 1{,}33$ падает по нормали пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине пленки $d_{\min}$ она в отраженном свете будет казаться зеленой ($\lambda_0 = 550$ нм)?

Дано:	Решение
$n = 1{,}33$ $\lambda_0 = 550$ нм	



Падающий на пленку пучок белого света 1 (см. рисунок) содержит лучи различных длин волн, часть пучка отражается от верхней (2) и проходящая часть от нижней поверхностей пленок (3).

$d_{\min}$ – ?

Для того, чтобы в отраженном свете пленка выглядела зеленой, необходимо, чтобы при интерференции отраженных лучей выполнялось условие максимума для зеленой части спектра. Оптическая разность хода Δ лучей 3 и 2, отраженных от нижней и верхней поверхностей пленки,

$$\Delta = 2dn - \frac{\lambda}{2},$$

(оптический ход в плёнке луча 3 больше луча 2 на $2dn$, но луч 2 отражается от оптически более плотной среды, поэтому его ход скачком увеличивается на $\frac{\lambda}{2}$). Условие максима:

$$\Delta = 2k\frac{\lambda}{2},$$

где k = 0, 1, 2… . Наименьшая толщина пленки будет при k = 0, тогда

$$\Delta = 2d_{\min}n - \frac{\lambda}{2} = 0,$$

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550\cdot 10^{-9}}{4\cdot 1,33} = 1,0\cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Ответ: $d_{\min} = 1,0\cdot 10^{-7}$ м.

39. На прозрачную дифракционную решетку с периодом $d = 1,50$ мкм падает нормально монохроматический свет с длинной волны $\lambda = 530$ нм. Найти: а) наибольший порядок m главного дифракционного максимума; б) угол дифракции φ_m главного дифракционного максимума наибольшего порядка.

Дано:	Решение
$\lambda = 530$ нм $d = 1,50$ мкм	Условие главного дифракционного максимума порядка m имеет вид $d\sin\varphi = \pm m\lambda$, ($m = 0, 1, 2, ...$),
а) m – ? б) φ_m – ?	где φ – угол дифракции, соответствующего главного максимума

Как следует из вышеприведенной формулы, наибольший порядок дифракционного максимума должен удовлетворять соотношению

$$\frac{m\lambda}{d} = \sin\varphi_m \le 1.$$

Отсюда имеем $m = \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-6}}{530 \cdot 10^{-9}} = 2{,}83$. Поскольку угол φ не может быть больше $\pi/2$, а m должно быть целым, то выбираем m = 2. Для соответствующего угла дифракции получим $\varphi_m = \arcsin\dfrac{m\lambda}{d} = \arcsin\dfrac{2 \cdot 530 \cdot 10^{-9}}{1{,}5 \cdot 10^{-6}} = = \arcsin 0{,}7066 = 45^{\circ}$

Ответ: а) $m = 2$; б) $\varphi_m = 45^{\circ}$

40. Луч света, падающий на поверхность кристалла каменной соли, при отражении максимально поляризуется, если угол падения i равен 57°. Найти: а) показатель преломления n кристалла каменной соли; б) скорость распространения υ света в этом кристалле.

Дано:	Решение
$i = 57^{\circ}$	Согласно закону Брюстера отраженный луч света максимально поляризован, если угол падения луча удовлетворяет соотношению
а) n – ? б) υ – ?	$$n = \mathrm{tg}\, i = \mathrm{tg} 57^{\circ} = 1{,}54. \qquad (1)$$

Скорость света в кристалле может быть найдена из известного соотношения:

$$\upsilon = \frac{c}{n}, \qquad (2)$$

где c – скорость света в вакуме. Поэтому из формул (1) и (2) имеем

$$\upsilon = \frac{c}{n} = \frac{c}{\mathrm{tg}\, i} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8}}{1{,}54} = 1{,}95 \cdot 10^{8} \text{ м/с}.$$

Ответ: а) $n = 1{,}54$ б) $U = 1{,}95 \cdot 10^{8}$ м/с

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.15. На мыльную пленку с показателем преломления n = 1,33 падает по нормали монохроматический свет с длиной волны λ = 0,60 мкм. Отраженный свет в результате интерференции имеет наибольшую яркость. Какова наименьшая возможная толщина плёнки d_{min}?

(0,11 мкм)

4.16. Плоская световая волна длиной λ_0 в вакууме падает по нормали на прозрачную пластинку с показателем преломления n. При каких толщинах b пластинки отраженная волна будет иметь:

а) максимальную интенсивность;

б) минимальную интенсивность?

(а) $b = (\lambda_0/2n)(m+0{,}5)$ (m = 1, 2, 3...); б) $b = (\lambda_0/2n)m$ (m = 1,2,3...))

4.17. На дифракционную решетку нормально падает пучок света.

Красная линия (λ = 6300 Å) видна в спектре 3-го порядка под углом φ = 60°.

Определить:а) какая спектральная линия видна под этим же углом в спектре 4-го порядка; б) какое число штрихов на 1 мм длины имеет дифракционная решетка.

(λ = 475 нм; N = 460 мм$^{-1}$)

4.18. Пластина кварца толщиной d_1 = 1,0 мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол φ_1 = 20°. Определить:

а) какова должна быть длина d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя “параллельными” николями, чтобы свет был полностью погашен;

б) какой длины l трубку с раствором сахара концентрации C = 0,40 кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта.

Удельное вращение раствора сахара α_0 = 0,665 град/(м$^{-2}$·кг).

(d_2 = 4,5 мм; l = 3,4 дм)

4.19. Под каким углом к горизонту должно находиться солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, стали бы наиболее полно поляризованы, если скорость света в воде $2{,}26 \cdot 10^8$ м/с?

(37°)

4.20. Источник света диаметром d = 30,0 см находится от места наблюдателя на расстоянии l = 200 м. В излучении источника содержатся волны длиной от 490 до 510 нм. Оценить для этого излучения: а) время когерентности $t_{\text{ког}}$; б) длину когерентности $l_{\text{ког}}$; в) радиус когерентности $\rho_{\text{ког}}$.

($t_{\text{ког}} \approx 4{,}0 \cdot 10^{-14}$ с; $l_{\text{ког}} \approx$ 0,010 мм; $\rho_{\text{ког}} \approx$ 0,30 мм)

4.21. Пластинка кварца толщиной d = 4,0 мм (удельное вращение кварца 15 град/мм), вырезанная перпендикулярно оптической оси, помещена между двумя скрещенными николями. Пренебрегая потерями света в николях, определите, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего эту систему.

$$\left(\frac{I_0}{I} = 2,7\right).$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Таблица вариантов задач к разделу «Механика»

Вариант	Номер задачи				
1	1.1	1.16	1.22	1.44	1.65
2	1.2	1.17	1.23	1.45	1.66
3	1.3	1.18	1.25	1.46	1.67
4	1.4	1.19	1.26	1.47	1.68
5	1.5	1.20	1.27	1.48	1.69
6	1.6	1.21	1.28	1.49	1.70
7	1.7	1.16	1.29	1.50	1.71
8	1.8	1.17	1.30	1.51	1.71
9	1.9	1.18	1.31	1.52	1.65
10	1.10	1.19	1.32	1.53	1.66
11	1.11	1.20	1.33	154	1.67
12	1.12	1.21	1.34	1.55	168
13	113	1.16	1.35	1.56	1.69
14	1.14	1.17	1.36	1.57	1.70
15	1.15	1.18	1.37	1.58	1.71
16	1.1	1.19	138	159	1.71
17	1.2	1.20	1.39	1.60	1.65
18	1.3	1.21	1.40	1.61	1.66
19	114	1.16	1.41	1.62	167
20	1.5	1.17	1.42	1.63	1.68
21	1.6	1.18	1.43	164	1.69
22	1.7	1.19	1.22	1.45	1.70
23	1.8	1.20	1.23	1.46	1.71
24	1.9	1.21	1.25	1.47	1.71
25	1.10	1.16	1.26	1.48	1.65
26	1.11	1.17	1.27	1.49	1.66
27	1.12	1.18	1.28	1.50	1.67
28	1.13	1.19	1.29	1.51	1.68
29	1.14	1.20	1.30	1.52	1.69
30	1.15	1.21	1.31	1.53	1.70

Таблица вариантов задач к разделу
«Молекулярная физика и термодинамика»

Вариант	Номер задачи				
1	2.1	2.6	2.12	2.20	2.33
2	2.2	2.7	2.13	2.21	2.34
3	2.3	2.8	2.14	2.22	2.35
4	2.4	2.9	2.15	2.23	2.36
5	2.5	2.10	2.16	2.24	2.37
6	2.1	2.11	2.17	2.25	2.33
7	2.2	2.6	2.18	2.26	2.34
8	2.3	2.7	2.19	2.27	2.35
9	2.4	2.8	2.12	2.28	2.36
10	2.5	2.9	2.13	2.29	2.37
11	2.1	2.10	2.14	2.30	2.33
12	2.2	2.11	2.15	2.31	2.34
13	2.3	2.6	2.16	2.32	2.35
14	2.4	2.7	2.17	2.20	2.36
15	2.5	2.8	2.18	2.21	2.37
16	2.1	2.9	2.19	2.22	2.33
17	2.2	2.10	2.12	2.23	2.34
18	2.3	2.11	2.13	2.24	2.35
19	2.4	2.6	2.14	2.25	2.36
20	2.5	2.7	2.15	2.26	2.37
21	2.1	2.8	2.16	2.27	2.33
22	2.2	2.9	2.17	2.28	2.34
23	2.3	2.10	2.18	2.29	2.35
24	2.4	2.11	2.19	2.30	2.36
25	2.5	2.6	2.12	2.31	2.37
26	2.1	2.7	2.13	2.32	2.33
27	2.2	2.8	2.14	2.20	2.34
28	2.3	2.9	2.15	2.21	2.35
29	2.4	2.10	2.16	2.22	2.36
30	2.5	2.11	2.17	2.23	2.37

Таблица вариантов задач к разделу «Электричество и магнетизм»

Вариант	Номер задачи				
1	3.1	3.10	3.16	3.23	3.33
2	3.2	3.11	3.17	3.24	3.34

3	3.3	3.12	3.18	3.25	3.35
4	3.4	3.13	3.19	3.26	3.36
5	3.5	3.14	3.20	3.27	3.33
6	3.6	3.15	3.21	3.28	3.34
7	3.7	3.10	3.22	3.29	3.35
8	3.8	3.11	3.16	3.30	3.36
9	3.9	3.12	3.17	3.31	3.37
10	3.1	3.13	3.18	3.32	3.38
11	3.2	3.14	3.19	3.23	3.39
12	3.3	3.15	3.20	3.24	3.40
13	3.4	3.10	3.21	3.25	3.33
14	3.5	3.11	3.22	3.26	3.34
15	3.6	3.12	3.16	3.27	3.35
16	3.7	3.13	3.17	3.28	3.36
17	3.8	3.14	3.18	3.29	3.37
18	3.9	3.15	3.19	3.30	3.38
19	3.1	3.10	3.20	3.31	3.39
20	3.2	3.11	3.21	3.32	3.40
21	3.3	3.12	3.22	3.23	3.33
22	3.4	3.13	3.16	3.24	3.34
23	3.5	3.14	3.17	3.25	3.35
24	3.6	3.15	3.18	3.26	3.36
25	3.7	3.10	3.19	3.27	3.37
26	3.8	3.11	3.20	3.28	3.38
27	3.9	3.12	3.21	3.29	3.39
28	3.1	3.13	3.22	3.30	3.40
29	3.2	3.14	3.16	3.31	3.37
30	3.3	3.15	3.17	3.32	3.39

Таблица вариантов задач к разделу «Колебания, волны, оптика»

Вариант	Номер задачи			
1	4.1	4.7	4.8	4.15
2	4.2	4.6	4.9	4.16
3	4.3	4.5	4.9	4.17
4	4.4	4.5	4.10	4.18
5	4.1	4.6	4.11	4.19
6	4.2	4.7	4.12	4.20
7	4.3	4.5	4.13	4.21

8	4.4	4.6	4.14	4.17
9	4.1	4.7	4.8	4.18
10	4.2	4.5	4.9	4.19
11	4.3	4.6	4.9	4.20
12	4.4	4.7	4.10	4.16
13	4.1	4.5	4.11	4.17
14	4.2	4.6	4.13	4.18
15	4.3	4.6	4.14	4.19
16	4.4	4.5	4.14	4.15
17	4.1	4.6	4.8	4.21
18	4.2	4.7	4.9	4.17
19	4.3	4.5	4.9	4.18
20	4.4	4.6	4.8	4.19
21	4.1	4.7	4.10	4.15
22	4.2	4.5	4.11	4.16
23	4.3	4.6	4.12	4.17
24	4.4	4.5	4.13	4.18
25	4.1	4.5	4.14	4.19
26	4.2	4.6	4.9	4.20
27	4.3	4.6	4.9	4.21
28	4.4	4.5	4.8	4.17
29	4.1	4.6	4.10	4.18
30	4.2	4.7	4.11	4.19