Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Курс лекций
по дисциплине
«Физика»

Составитель: Галкин А.Ф.

Владимир, 2016

Введение

"Физика – наука, изучающая общие свойства и законы движения вещества и поля" (А.Ф. Иоффе – советский физик). Это фундаментальная база для теоретической подготовки инженера, без которой его успешная работа невозможна. Предложенное издание облегчает студенту слушание лекций и самостоятельную работу, при этом преследовалась цель изложения материала с достаточной полнотой и ясностью при весьма ограниченном объеме. Предполагается издание четырех частей лекций: механика, молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; колебания, волны и оптика. Предлагаемая вниманию читателя первая часть посвящена механике – разделу физики, в котором изучается движение тел в пространстве и времени. Динамические законы и законы сохранения импульса, момента импульса и энергии представляют собой основные законы механики, они же составляют основное содержание лекций по механике.

Предлагаемые лекции по курсу общей физики должны помочь студентам технических специальностей ВлГУ в изучении курса. Максимальное внимание уделено раскрытию физического смысла основных законов и понятий физики. Стиль изложения соответствует этой цели: логичность, доступность и разумная строгость выкладок и доказательств, учитывающих уровень знаний студентов первого курса. Наиболее важные определения и понятия подчёркнуты, а главные формулы заключены в рамки, что облегчает студентам работу при изучении материала. Лекции сопровождаются примерами и вопросами для самоконтроля. Совершенно необходимо параллельно с изучением теоретического материала решать задачи, например, из пособия [7]. Краткость, ограниченный объём лекций позволяет студентам в условиях дефицита времени, например при подготовке к экзаменам, успеть усвоить основные законы и понятия физики. Лекции также могут быть полезны и преподавателям.

ВНИМАНИЕ! ПОСОБИЕ ОБЛЕГЧАЕТ РАБОТУ СТУДЕНТУ, НО НЕ ЗАМЕНЯЕТ САМИ ЛЕКЦИИ!

Лекция № 1

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

План

1. Элементы векторной алгебры и векторного анализа. Определение векторов. Сложение и вычитание векторов. Единичный вектор (орт). Проекция вектора на ось. Модуль вектора. Радиус-вектор. Умножение векторов. Дифференцирование векторных величин.

2. Поступательное движение. Система отсчёта. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Границы применимости классического способа описания движения.

3. Понятие материальной точки. Траектория. Путь и перемещение. Скорость и ускорение, их модули.

4. Радиус кривизны траектории. Тангенциальное и нормальное ускорение.

1. ***Элементы векторной алгебры и векторного анализа.*** Векторы – величины, характеризующиеся численным значением, направлением и складывающиеся по правилу параллелограмма (рис. 1.1).

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

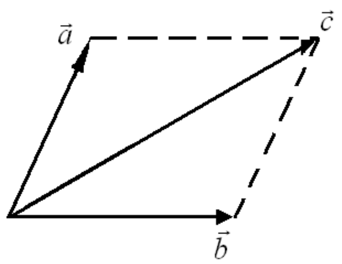
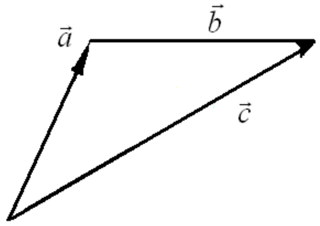
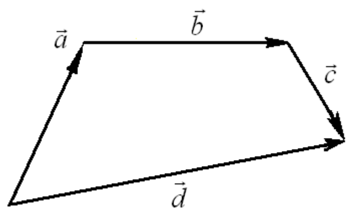


Рис. 1.1

Практически сложение векторов удобно производить без построения параллелограмма. Начало второго вектора совмещают с концом первого, начало третьего – с концом второго и т.д. Из начала первого вектора в конец последнего проводят результирующий вектор (рис. 1.2).



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Рис. 1.2

<u>Разностью двух векторов</u> $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$ (рис. 1.3).

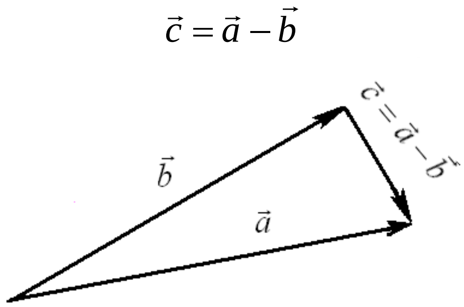


Рис. 1.3

<u>Умножение вектора на скаляр</u>

В результате умножения вектора $\vec{a}$ на скаляр α получается новый вектор $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, модуль которого в $|\alpha|$ раз отличается от модуля вектора $\vec{a}$. Направление $\vec{b}$ совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\alpha > 0$, либо противоположно $\vec{a}$, если $\alpha < 0$.

Всякий вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$, где a – модуль вектора, а $\vec{e}_a$ – вектор, называемый <u>единичным вектором,</u> или <u>ортом,</u> вектора $\vec{a}$.

<u>Проекция вектора.</u> Пусть вектор $\vec{a}$ образует с осью ℓ угол φ (рис. 1.4). Величина $a_e = a\cos\varphi$ называется проекцией вектора $\vec{a}$ на ось ℓ. Индекс указывает направление, на которое спроектирован вектор. (Например, на ось X: a_x и т.п.).

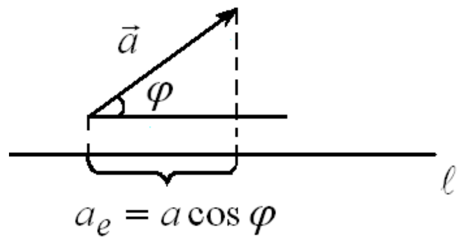


Рис. 1.4

<u>Любой вектор</u> можно выразить <u>через его проекции</u> на координатные оси (компоненты) и орты осей:

$$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z}$$

Радиус-вектор. Радиусом-вектором некоторой точки P называется вектор, проведённый из начала координат в данную точку (рис. 1.5). Радиус-вектор можно представить:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

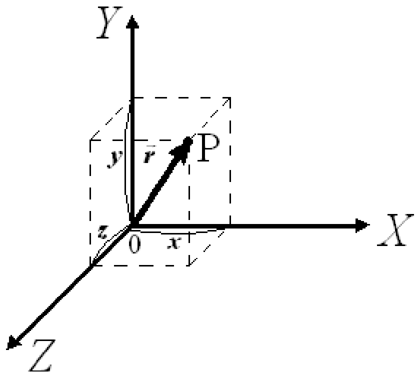


Рис. 1.5

где проекции $\vec{r}$ на ось координат равны декартовым координатам точки, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты осей *X*, *Y*, *Z*.

<u>Модуль радиус-вектора,</u> как видно из рис. 1.5, равен:

$$\boxed{|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(Аналогично, через компоненты можно найти модули любого вектора $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$).

<u>Умножение векторов.</u> ***Скалярное произведение*** векторов – это скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла α между ними:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha}$$

Скалярное произведение можно выразить через компоненты векторов:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Скалярное произведение коммутативно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Векторное произведение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой:

$$\boxed{\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] = ab \cdot \sin\alpha\vec{n}}$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.6).

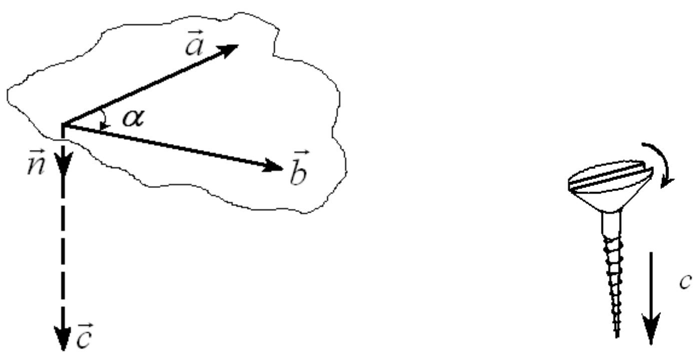


Рис. 1.6

(Примечание: направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта, если вращать вектор $\vec{a}$ по направлению к вектору $\vec{b}$ – правило правого винта).

Векторное произведение можно рассчитать с помощью определителя:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Векторное произведение некоммутативно:

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=-[\vec{b}\times\vec{a}]$$

Дифференцирование векторных величин

Производная вектора. Рассмотрим вектор $\vec{a}$, который изменяется по закону: $\vec{a}(t)=a_x(t)\vec{e}_x+a_y(t)\vec{e}_y+a_z(t)\vec{e}_z$, где t – время, тогда производная вектора $\vec{a}$ по переменной t равна:

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\vec{e}_x+\frac{da_y}{dt}\vec{e}_y+\frac{da_z}{dt}\vec{e}_z$$

Дифференциалом (приращением) функции $f(t)$ называется выражение $df=f^{/}dt$, тогда, используя выражение для производной вектора $\frac{d\vec{a}}{dt}$, получим дифференциал вектора $\vec{a}$:

$$d\vec{a}=da_x\vec{e}_x+da_y\vec{e}_y+da_z\vec{e}_z$$

Производная произведения векторов. Производная от скалярного и векторного произведения осуществляется по известным формулам:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b}+\vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left[\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}\right]+\left[\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}\right]$$

(Примечание: некоторые понятия векторного анализа – градиент, циркуляция, ротор, а также элементы теории вероятности – мы рассмотрим в дальнейшем по ходу курса).

2. ***Кинематика поступательного движения.*** Любое механическое движение тела можно представить в виде суммы поступательного и вращательного движений.

Поступательным называется такое движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной самой себе. При этом скорости всех точек тела одинаковы.

Для того чтобы описать движение, нужно задать систему отсчёта – это тело отсчёта, которое условно считается неподвижным, система координат, связанная с телом отсчёта, и прибор для измерения времени («часы»).

Принцип относительности Галилея: механические явления и форма законов, их описывающих, не изменяются при переходе из одной инерциальной системы отсчёта (ИСО) в другую (напомним, что ИСО называется такая система отсчёта, в которой выполняется 1-й закон Ньютона).

Никакими механическими опытами нельзя определить, покоится ли данная СО или движется прямолинейно и равномерно.

Преобразования Галилея. Пусть имеется две ИСО. Система отсчёта K, которую будем считать неподвижной, и система $K^{/}$, которая будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью V_0 (рис. 1.7).

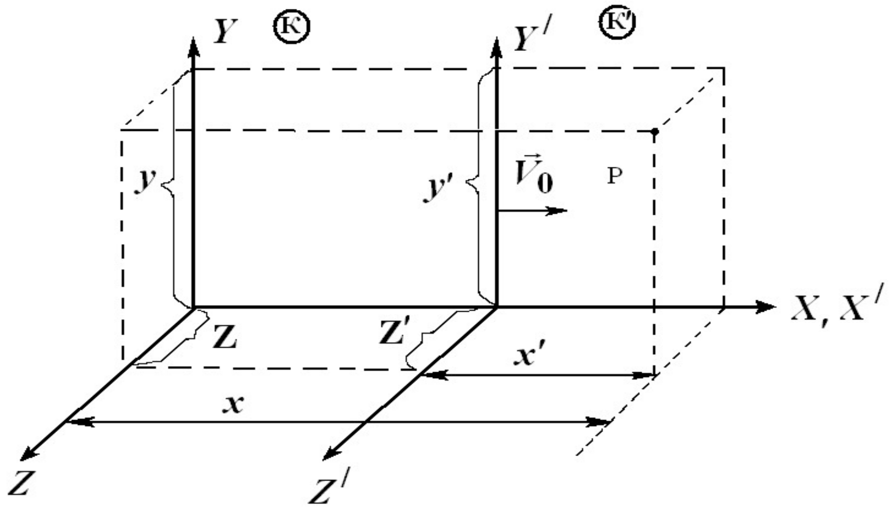


Рис. 1.7

Выберем координатные оси *X, Y, Z* системы *K* и оси X', Y', Z' системы K', так чтобы оси *X* и X' совпадали, а *Y* и Y', а также *Z* и Z' были параллельными друг другу.

Найдём связь между координатами *x, y, z* некоторой точки *P* в системе *K* и координатами x', y', z' той же точки в системе K'.

Если начать отсчёт времени с того момента, когда начала координат обеих систем совпадает, то из рисунка следует:

$$\begin{cases} x = x' + V_0 t, \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases}$$

Продифференцировав эти уравнения по времени, можно получить связь проекций скоростей точки *P* в системах *K* и K' на оси координат:

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + V_0,$$
$$\upsilon_y = \upsilon'_y,$$
$$\upsilon_z = \upsilon'_z.$$

Причём время в обеих системах отсчёта согласно классическим представлениям $t = t'$.

Заметим, что при скоростях V_0, сравнимых со скоростью света, преобразования Галилея должны быть заменены на более общие преобразования Лоренца. При описании движения микрочастиц используются методы квантовой механики.

3. *Понятие материальной точки.* Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой. Линия, которую описывает материальная точка при своём движении, называется траекторией. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное, криволинейное, движение по окружности и т.п.

Пусть материальная точка (частица) переместилась по некоторой траектории из точки 1 в точку 2. Расстояние между точками 1 и 2, отсчитываемое вдоль траектории, называется путём (обозначен S_{12}). Прямолинейный отрезок, проведённый из точки 1 в точку 2, называется перемещением, или вектором перемещения (обозначен $\Delta\vec{r}_{12}$) (рис. 1.8).

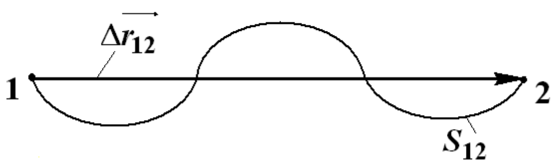


Рис. 1.8

Скорость – векторная величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения частицы. Разобьём траекторию на участки ΔS, каждому из которых соответствует перемещение $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.9). По определению

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

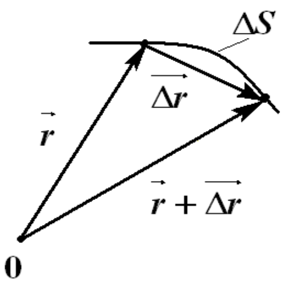


Рис. 1.9

Таким образом, скорость есть производная радиус-вектора частицы по времени. Перемещение $d\vec{r}$ совпадает с бесконечно малым элементом траектории. Следовательно, вектор $\vec{\upsilon}$ направлен по касательной к траектории.

Модуль скоростиˇ $\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left| \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$. При $\Delta t \to 0$ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta \vec{r}} = 1$, тогда

$$\boxed{\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}}$$

т.е. <u>модуль скорости равен производной пути по времени</u>.

Вектор скорости, как и любой вектор, можно выразить через его компоненты υ_x, υ_y, υ_z:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{e}_x + \upsilon_y \vec{e}_y + \upsilon_z \vec{e}_z} \tag{*}$$

Модуль скорости: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$

Свяжем компоненты скорости с компонентами радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, производная:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z, \tag{**}$$

сравнивая выражения (*) и (**) для $\vec{\upsilon}$, получим:

$$\boxed{\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt},}$$

т.е. проекции вектора скорости на координатные оси равны производным по времени соответствующих координат движущейся частицы.

<u>Ускорение</u> – векторная величина, характеризующая <u>изменение скорости по величине и направлению</u>. По определению ускорения $\vec{w}$:

$$\boxed{\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}}$$

Легко показать (читатель сам может это проверить), что

$$w_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$w_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$w_x = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

4. ***Радиус кривизны траектории.*** Можно показать, что в общем случае при движении по криволинейной траектории с переменной скоростью вектор ускорения можно представить в виде: $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$, или

$$\boxed{\vec{w} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}},$$

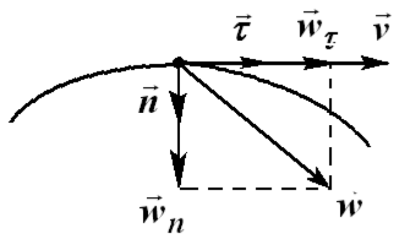


Рис. 1.10

где

$$\boxed{\vec{w}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}} \quad \boxed{\vec{w}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}}$$

Первое слагаемое – тангенциальное ускорение $\vec{w}_\tau$, характеризующее изменение скорости по абсолютной величине, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории ($|\vec{\tau}| = 1$) (рис. 1.10).

Второе слагаемое $\vec{w}_n$ – нормальное (центростремительное ускорение), характеризующее изменение скорости по направлению, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, направленный перпендикулярно скорости и по модулю равный единице: $|\vec{n}| = 1$; ρ – радиус кривизны, представляющий собой радиус окружности, которая сливается в данном месте с кривой на бесконечно малом её участке. Центр такой окружности называется центром кривизны для данной точки кривой (рис. 1.11).

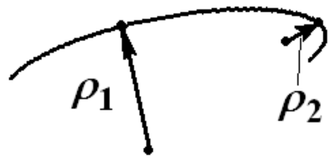


Рис. 1.11

Пример решения задачи на кинематику поступательного движения материальной точки.

Дано:	Решение:
$\vec{r} = (3t^2\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y + 1\vec{e}_z)$ м	

Найти:	
$\vec{\upsilon},\ \vec{w},\ \lvert\vec{\upsilon}\rvert,\ \lvert\vec{w}\rvert$	$\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=6t\vec{e}_x+2\vec{e}_y;$ $\vec{w}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=6e_x;$ $\lvert\vec{\upsilon}\rvert=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}=2\sqrt{9t^2+1}$ м/с, $\lvert\vec{w}\rvert=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}=\sqrt{6^2}=6$ м/с^2.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения скалярного и векторного произведения векторов.
2. Что такое радиус-вектор?
3. Какое движение называется поступательным?
4. В чём заключается принцип Галилея? Что устанавливают преобразования Галилея?
5. Что такое скорость? Как найти модуль скорости?
6. Какова ориентация векторов тангенциального и нормального ускорений? Запишите соответствующие выражения для них.

Лекция № 2

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

План

1. Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчёта.
2. Второй закон Ньютона как уравнение движения. Понятия массы, силы, импульса.
3. Третий закон Ньютона и пределы его применения.

4. Неинерциальные системы отсчёта. Абсолютные и относительные скорости и ускорения. Силы инерции (центробежная сила и сила Кориолиса).
5. Центр инерции (центр масс). Теорема о движении центра инерции.

1. ***1-й закон Ньютона.*** Материальная точка, не подверженная внешним воздействиям , либо находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно. Такое тело называется свободным, его движение – свободным движением, или движением по инерции.

Классическая механика постулирует, что существует система отсчёта, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно. Такая система называется инерциальной системой отсчёта. Таким образом, 1-й закон Ньютона выражает критерий инерциальности системы отсчёта.

2. ***2-й закон Ньютона.*** Производная импульса материальной точки по времени равна действующей на неё силе.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

где $\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}}$ – импульс (количество движения), векторная величина, равная для материальной точки произведению её массы на скорость $\vec{\upsilon}$ и направленная вдоль $\vec{\upsilon}$;

m – масса – мера инертности тел.

Импульс механической системы равен геометрической сумме импульсов всех точек системы.

Сила $\vec{F}$ в механике – мера механического действия на данное материальное тело других тел. Это действие может иметь место как при непосредственном контакте, так и через посредство создаваемых телами полей (электромагнитным, полем тяготения). Сила – величина векторная и в каждый момент времени характеризуется численным значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Сложение сил производится по правилу параллелограмма. В современной физике различают 4 вида взаимодействий:

1) гравитационное (обусловлено всемирным тяготением);

2) электромагнитное (осуществляется через электрические и магнитные поля);

3) сильное, или ядерное (обеспечивающее связь частиц в атомном ядре);

4) слабое (ответственное за многие процессы распада элементарных частиц).

Пример использования 2-го закона Ньютона как уравнения движения:

Дано:

$\vec{F} = m\vec{g}$,

$v\big|_{t=0} = \upsilon_0$,

$\vec{r}\big|_{t=0} = 0$.

Найти:

$\vec{\upsilon}(t)$, $\vec{r}(t)$

Решение:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m\vec{g},$$

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{g},$$

$$\vec{\upsilon} = \int \vec{g}dt = \vec{g}t + \text{const}_1.$$

При $t = 0$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0$, $\text{const}_1 = \vec{\upsilon}_0$,

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t,$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon},$$

$$\vec{r} = \int \vec{\upsilon}dt = \int (\vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t)dt = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} + \text{const}_2.$$

При $t = 0$, $\vec{r} = 0$, $\text{const}_2 = 0$,

$$\vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

3. ***3-й закон Ньютона.*** Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Третий закон, как и 1-й и 2-й, справедливы лишь в инерциальных системах отсчёта. Кроме того, отступление от 3-го закона наблюдается в случае движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света.

В случае движущихся зарядов необходимо учитывать также взаимодействие с магнитными полями, создаваемыми ими. Пусть два положительных заряда q_1 и q_2 двигаются со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ (рис. 2.1). На каждый заряд со стороны другого действует как кулоновская $F_k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi e_0 r^2}$, так и лоренцева силы $\vec{F}_л = q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]$. Направления векторов индукции магнитных полей $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$, создаваемых частицами q_1 и q_2, определяются по правилу правого винта (буравчика).

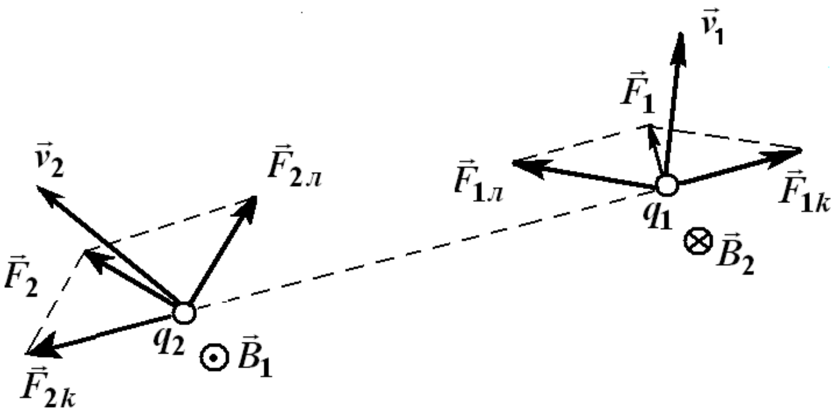


Рис. 2.1

Магнитные силы Лоренца $\vec{F}_{1л}$ и $\vec{F}_{2л}$ не совпадают по направлению. Результирующие силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не равны друг другу и не направлены противоположно.

4. *Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции.* Изобразим две системы отсчёта, из которых K является инерциальной, а система $K^/$ движется относительно K с некоторым ускорением и, следовательно, неинерциальная (рис. 2.2).

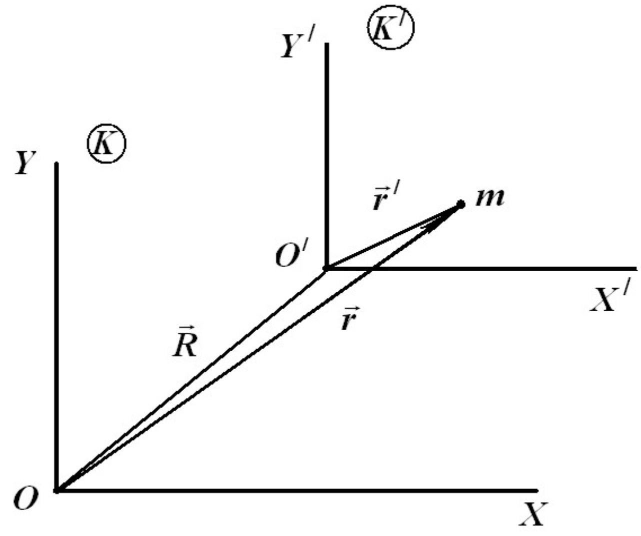


Рис. 2.2

В случае, когда система $K^{/}$ движется относительно K поступательно:

$$\boxed{\vec r = \vec R + \vec r^{/}} \qquad (*)$$

где $\vec r$ – радиус-вектор точки m в системе K; $\vec R$ – радиус-вектор начала координат $O^{/}$; $\vec r^{/}$ – радиус-вектор точки m в системе $K^{/}$. Продифференцируем дважды выражение $(*)$:

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = \frac{d^2\vec R}{dt^2} + \frac{d^2\vec r^{/}}{dt^2},$$

$$\vec a = \vec w + \vec a^{/},$$

где $\vec a$ – ускорение частицы m в системе K;

$\vec w = \dfrac{d^2\vec R}{dt^2}$ – ускорение начала $O^{/}$ системы $K^{/}$ относительно системы K;

$\vec a^{/} = \dfrac{d^2\vec r^{/}}{dt^2}$ – ускорение частицы в системе $K^{/}$.

$\vec a^{/} = \vec a - \vec w$; умножим обе части этого уравнения на m, получим

$m\vec{a}^{/} = m\vec{a} - m\vec{w}$, здесь $m\vec{a}$ по 2-му закону Ньютона сила, действующая на частицу со стороны других тел $\vec{F}$, тогда:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{w}}$$

То есть относительно системы $K^{/}$ частица ведёт себя так, как если бы кроме силы $\vec{F}$ на нее действует дополнительная сила $\vec{F}_{in} = -m\vec{w}$. Эта сила называется силой инерции.

Движение относительно выбранной условно неподвижной системы называется абсолютным. Вектор $\upsilon_a = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ даёт абсолютную скорость, $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – абсолютное ускорение, а $\upsilon^{/} = \dfrac{d\vec{r}^{/}}{dt}$ и $\vec{a}^{/} = \dfrac{d^2\vec{r}^{/}}{dt^2}$ – относительные скорость и ускорение.

Центробежная сила инерции

Пусть на некотором диске имеется радиальная направляющая, на которую наденем шарик, привязанный к оси диска пружиной (рис. 2.3). При раскручивании диска шарик растягивает пружину до тех пор, пока упругая сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ не станет равной $m\omega^2 R$.

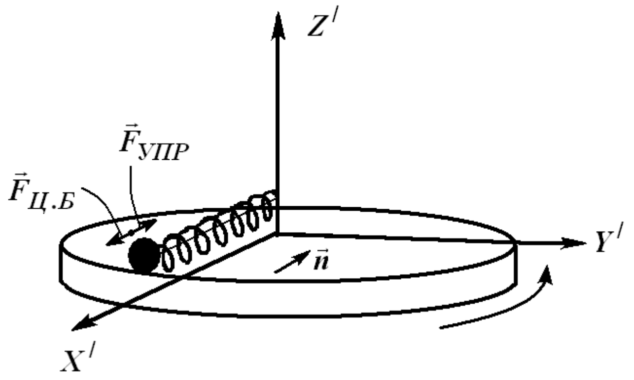


Рис. 2.3

$$F_{\text{упр}} = ma_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(\omega R)^2}{R} = m\omega^2 R,$$

где $a_{\text{ц}}$ – центростремительное ускорение;

ω – угловая скорость.

Относительно системы $K^/$ (диск) шарик покоится. Это можно формально объяснить тем, что в системе $K^/$ кроме силы $\vec{F}_{\text{упр}}$ на шарик действует сила инерции $\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 R$, направленная вдоль радиуса от оси вращения диска:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{цб}} = -m\omega^2 R\vec{n}}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный к центру диска.

Эта сила называется центробежной силой инерции. Она возникает во вращающихся (неинерциальных) системах отсчёта независимо от того, покоится тело в этой системе или движется относительно неё со скоростью $\vec{\upsilon}^/$.

Сила Кориолиса

Густав Кориолис (1792 – 1873) – французский учёный в области механики.

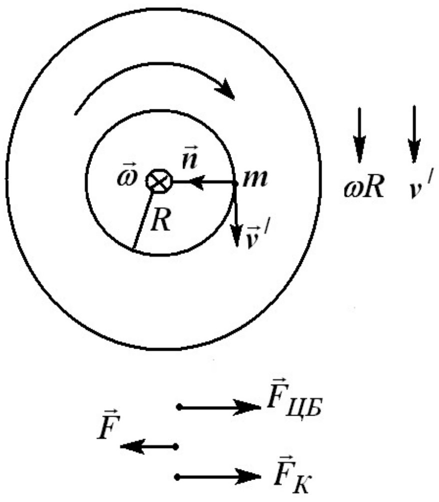


Рис. 2.4

При движении тела ($\vec{\upsilon}^/ \neq 0$) в неинерциальной вращающейся системе отсчёта кроме центробежной силы возникает еще одна сила инерции, называемая силой Кориолиса.

Возьмём горизонтально расположенный диск, вращающийся относительно инерциальной системы отсчёта с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ (её определение будет в лекции № 3) (рис. 2.4). Допустим, что по окружности радиусом R равномерно движется привязанная нитью к оси диска материальная точка (частица) со скоростью $\vec{\upsilon}^/$ относительно диска. Её скорость относительно Земли имеет модуль $\upsilon^/ + \omega R$.

Центростремительное ускорение:

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2 \vec{n}}{R} = \frac{(\upsilon' + \omega R)^2}{R}\vec{n} = \frac{\upsilon'^2}{R}\vec{n} + \omega^2 R\vec{n} + 2\upsilon'\omega\vec{n}.$$

Сила натяжения нити:

$$\vec{F} = m\vec{a}_n = m\vec{a}'_n + m\omega^2 R\vec{n} + m2\upsilon'\omega\vec{n},$$

где $a'_n = \dfrac{\upsilon'^2}{R}$ – ускорение частицы относительно диска. Перенося $m\vec{a}'_n$ в левую часть, а $\vec{F}$ в правую, получим:

$$m\vec{a}'_n = \vec{F} - m\omega^2 R\vec{n} - 2mv'\omega\vec{n},$$

или $$\boxed{m\vec{a}'_n = \vec{F} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_k}$$

(Формально это выглядит как 2-й закон Ньютона).

Здесь $\vec{F}_{цб} = -m\omega^2 R\vec{n}$ – центробежная сила инерции;

$\vec{F}_k = -2m\upsilon'\omega\vec{n}$ – сила Кориолиса, которую можно представить в виде векторного произведения:

$$\boxed{\vec{F}_k = 2m[\vec{\upsilon}' \times \vec{\omega}]}$$

Многие течения в мировом океане, а также ветры-пассаты обязаны своим происхождением силе Кориолиса. Силы Кориолиса необходимо учитывать при движении ракет и т.д.

5. ***Центр инерции.*** Определение. Центром инерции (центром масс) системы материальных точек (частиц) называется точка *C,* положение которой задаётся радиус-вектором $\vec{r}_c$, определённым следующим образом:

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m}}$$

где m_i – масса i –й частицы; $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение этой частицы; m – масса системы.

Замечание: в однородном поле сил тяжести центр инерции совпадает с центром тяжести системы.

Теорема о движении центра инерции (масс)

Запишем 2-й закон Ньютона для $i-$й частицы массой m_i.

$$m_i \vec{w}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i,$$

где $\vec{f}_i -$внутренняя сила, действующая на i-ю частицу (т.е равнодействующая сил, действующая со стороны других частиц системы на i-ю частицу); $\vec{w}_i -$ускорение i-й частицы; $\vec{F}_i -$внешняя сила, действующая на i-ю частицу.

Для всех тел (частиц) системы сумма

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{w}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i, \qquad (*)$$

так как $\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i = 0$ по 3-му закону Ньютона (внутренние силы попарно равны по величине, направлены противоположно и действуют вдоль одной прямой).

Из определения центра масс следует:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_c .$$

Продифференцируем это выражение дважды:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = m\vec{w}_c,$$

где $\vec{w}_c -$ускорение центра масс.

$$\sum m_i \vec{w}_i = m\vec{w}_c . \qquad (**)$$

Сравнив выражения(*) и (**), получим $m\vec{w}_c = \sum \vec{F}_i$.

Сумму внешних сил можно заменить равнодействующей $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_c$,

а $\vec{w}_c = \dfrac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}$ (по определению), получим:

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}_c}$$

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы и сосредоточена в центре инерции (масс), а действующая сила – геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему (приложенных к точке *C*). Этот результат называется теоремой о движении центра масс (инерции).

Физический смысл этой теоремы заключается в том, что зачастую при движении тел (системы материальных точек) нас интересует не движение отдельных частей тела, а перемещение его в пространстве в целом. И в этом случае замена сложного (в общем случае) движения точек тела движением одной точки (центра масс) сильно упрощает задачу.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте 1-й закон Ньютона. Что он устанавливает?
2. Сформулируйте 2-й закон Ньютона. Приведите пример использования этого закона как уравнения движения.
3. Сформулируйте 3-й закон Ньютона. Всегда ли он справедлив?
4. Когда возникает необходимость рассматривать силы инерции? Являются ли эти силы реальными?
5. Когда возникает центробежная сила инерции? Как ее рассчитывают?
6. При каких условиях возникает сила Кориолиса? Чему она равна?
7. Дайте определение центра инерции (центра масс).
8. Сформулируйте и докажите теорему о движении центра инерции (масс).

Лекция № 3

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

План

1. Абсолютное твёрдое тело. Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейными скоростями и ускорениями вращающегося твёрдого тела.
2. Момент инерции тела. Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела.
3. Вычисление моментов инерции. Теорема Штейнера. Свободные оси.
4. Момент силы. Момент импульса.
5. Уравнение моментов. Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси.
6. Гироскопы. Гироскопический эффект.

1. ***Абсолютно твёрдое тело.*** Абсолютно твёрдым телом называется такое тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Расстояние между любыми двумя точками тела остаётся неизменным.

Всякое движение твёрдого тела можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное.

Вращательным называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Введём понятие угловой скорости и углового ускорения. Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной в данной системе отсчёта оси $OO^{/}$ и за время dt совершает бесконечно малый поворот (рис. 3.1).

Соответствующий угол поворота будем характеризовать вектором $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота, а направление совпадает с осью

$OO^{/}$, причём так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора $d\vec{\varphi}$.

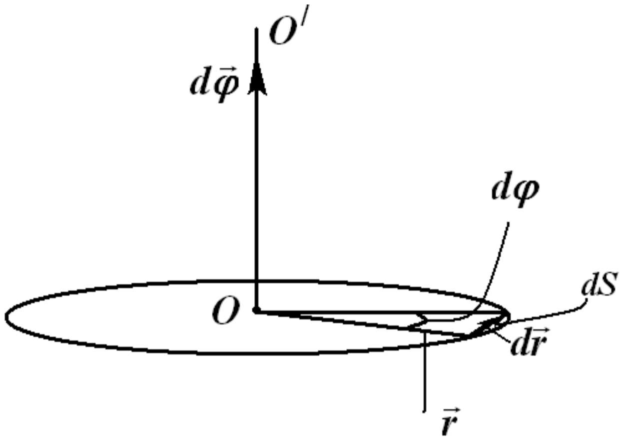


Рис. 3.1

Из рис. 3.1 следует, что $d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$. Вектор $\overrightarrow{dr}$ как бесконечно малую величину можно считать по модулю равным соответствующей дуге окружности $dS = rd\varphi$, его направление соответствует правилу правого винта по отношению к векторам $\overrightarrow{d\varphi}$ и $\vec{r}$

Разделим обе части на dt:

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right]. \qquad (*)$$

<u>Производная угла поворота по времени называется угловой скоростью.</u>

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}$$

Вектор $\vec{\omega}$ совпадает по направлению с вектором $d\vec{\varphi}$. <u>Изменение вектора</u> $\vec{\omega}$ <u>со временем характеризуют вектором углового ускорения</u>:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$

Из выражения * получаем <u>связь линейной</u> υ <u>и угловой скоростей:</u>

$$\boxed{\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}].} \qquad (**)$$

То есть скорость $\vec{\upsilon}$ любой точки A твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равна векторному произведению $\vec{\omega}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ точки A относительно произвольной точки на оси вращения.

Если выбрать в качестве точки отсчёта для радиус-вектора центр окружности вращения (точка О), при неизменном радиусе окружности r выражение (**) можно записать в скалярном виде:

$$\boxed{\upsilon = \omega \cdot r}$$

Продифференцируем это выражение по времени: $\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$, отсюда получаем связь тангенциального и углового ускорений:

$$\boxed{w_\tau = \varepsilon \cdot r}$$

Нормальное ускорение можно представить как

$$\boxed{w_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r}$$

Модуль полного ускорения:

$$\boxed{w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

2. ***Момент инерции тела.*** Определим кинетическую энергию вращения твёрдого тела (рис. 3.2). Разделим его мысленно на отдельные элементарные части, настолько малые, чтобы их можно было считать движущимися как материальные точки ($m_1, m_2 .... m_n$). Обозначим массу i-го элемента m_i, а скорость этого элемента υ_i.

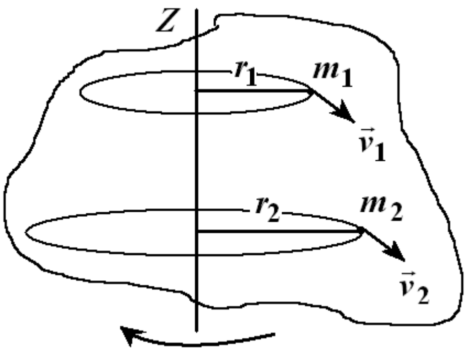


Рис. 3.2

Кинетическая энергия этого элемента

$$E_{i\ \text{вр}} = \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

Просуммировав кинетическую энергию всех элементов, получим кинетическую энергию вращательного движения тела:

$$E_{\text{кин.вр}} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 + ... + \frac{1}{2} m_n \upsilon_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

Линейная скорость υ_i связана с угловой скоростью вращения тела $v_i = \omega r_i$ ($\omega -$постоянна для всех точек тела).

$$E_{\text{кин.вр}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Определение. Моментом инерции материальной точки относительно оси z называется произведение массы этой точки на квадрат её расстояния от оси вращения:

$$\boxed{J_{zi} = m_i r_i^2}$$

Определение. Моментом инерции твёрдого тела относительно некоторой оси z называется сумма моментов инерций материальных точек относительно данной оси.

$$\boxed{J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

В соответствии с этими определениями:

$$\boxed{E_{\text{кин.вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}}$$

(Сравните с выражением для кинетической энергии поступательного движения $E_{\text{кин.пост}} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, очевидно соответствие $J_z \to m, \omega \to \upsilon$).

Физический смысл момента инерции. Момент инерции во вращательном движении играет такую же роль, как масса при поступательном движении, характеризует меру инертности тела при вращательном движении. Чем больше момент инерции тела, тем труднее при прочих равных условиях привести его во вращательное движение. Момент инерции определяется не только массой, но и тем, как эта масса распределена относительно оси вращения.

Соотношение $J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ является приближённым, причём тем более точным, чем меньше элементарные массы m_i. Задача нахождения моментов инерции сводится к интегрированию.

$$J = \lim_{\substack{n \to \infty \\ m_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm$$

$$\boxed{J = \int_m r^2 dm}$$

(Интегрирование ведётся по всей массе тела m).

3. ***Вычисление моментов инерции.*** 1. Кольцо (полый цилиндр) (рис. 3.3). В случае достаточно тонких стенок вся масса сосредоточена на расстоянии $r = R$ от центра.

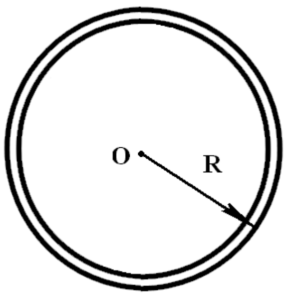


Рис. 3.3

Относительно оси, проходящей через центр кольца:

$$J_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2,$$

$$J_0 = mR^2.$$

2. Однородный диск (сплошной цилиндр)

Дано: R – радиус диска, m – масса диска.

Найти: J_0 – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр диска.

Разобьём диск (рис. 3.4) на кольца с радиусом r, толщиной dr. По определению момента инерции $J = \int\limits_m r^2 dm$. Пусть $\rho -$поверхностная плотность диска $[\rho]$ кг/м^2, тогда масса кольца $dm = \rho dS$, где $dS -$площадь кольца, $dS = 2\pi r dr$. Интегрируя по радиусу, находим момент инерции диска:

$$J_0 = \int\limits_0^R r^2 \rho 2\pi r dr = 2\pi\rho \int\limits_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \rho\pi R^2 \frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2},$$

$$\boxed{J_0 = \frac{mR^2}{2}}$$

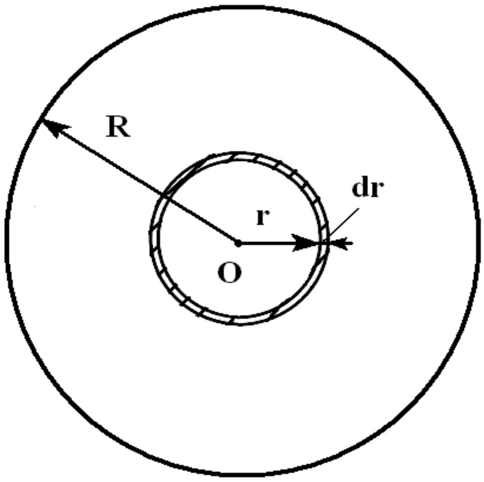


Рис. 3.4

3. <u>Тонкий однородный стержень</u>

Дано: $m -$масса стержня, $\ell -$длина стержня.

Найти: J_{00} (момент инерции относительно оси *OO,* проходящей через конец стержня перпендикулярно ему) (рис. 3.5).

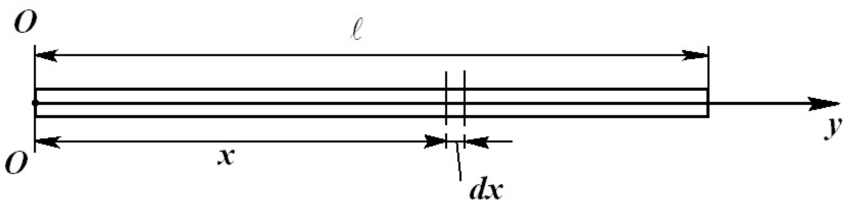


Рис. 3.5

Ввиду одномерного характера задачи выражение $J = \int\limits_m r^2 dm$ можно заменить на $J = \int\limits_m x^2 dm$, где $dm = \frac{m}{\ell} dx$, тогда $J_{00} = \int\limits_0^\ell x^2 \frac{m}{\ell} dx = \frac{1}{3} m\ell^2$.

$$\boxed{J_{00} = \frac{1}{3} m\ell^2}$$

Теорема Штейнера (без вывода)

Постановка задачи. Известен момент инерции произвольного тела массой m относительно оси, проходящей через его центр тяжести J_c (рис. 3.6). Требуется найти, каков момент инерции J_z относительно какой-либо оси z, параллельной первой и находящейся на расстоянии a от неё.

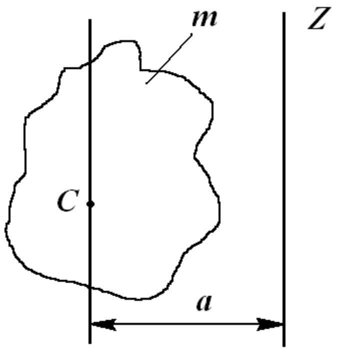


Рис. 3.6

Теорема. Момент инерции тела относительно произвольной оси z равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела C и параллельной данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями a:

$$J_z = J_c + ma^2.$$

Пример применения теоремы Штейнера.

Требуется найти момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной ℓ относительно перпендикулярной к нему оси CC, проходящей через центр стержня (рис. 3.7).

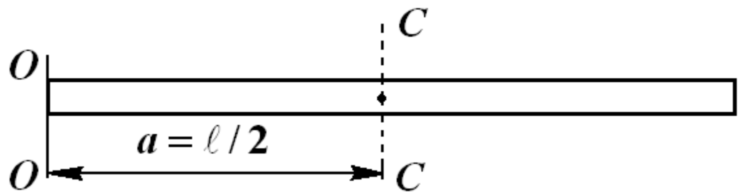


Рис. 3.7

Решение:

Воспользуемся полученным ранее выражением для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец:

$J_{00} = \frac{1}{3} m\ell^2$. Используя теорему Штейнера, получаем:

$$J_{00} = J_{cc} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2, \text{ отсюда } J_{cc} = \frac{1}{3}m\ell^2 - m\frac{\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{12}.$$

$$\boxed{J_{cc} = \frac{m\ell^2}{12}}$$

Свободные оси

Определение. Ось вращения тела, положение которой в пространстве остаётся неизменным без действия на неё внешних сил, называется свободной.

Можно доказать, что в любом теле существует три взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр масс тела, которые могут служить свободными осями. Они называются главными осями инерции тела. Например, главные оси инерции однородного прямоугольного параллелепипеда проходят через центры противоположных граней. Вращение вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим (экстремальными) моментами инерции оказывается устойчивым, а вращение вокруг оси со средним моментом – неустойчивым. Этот факт является достаточно важным при проектировании конструкций с вращающимися частями.

4. ***Момент силы.*** Пусть О – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы. Обозначим $\vec{r}$ радиус-вектор, проведённый из этой точки к точке приложения силы $\vec{F}$ (Рис. 3.8).

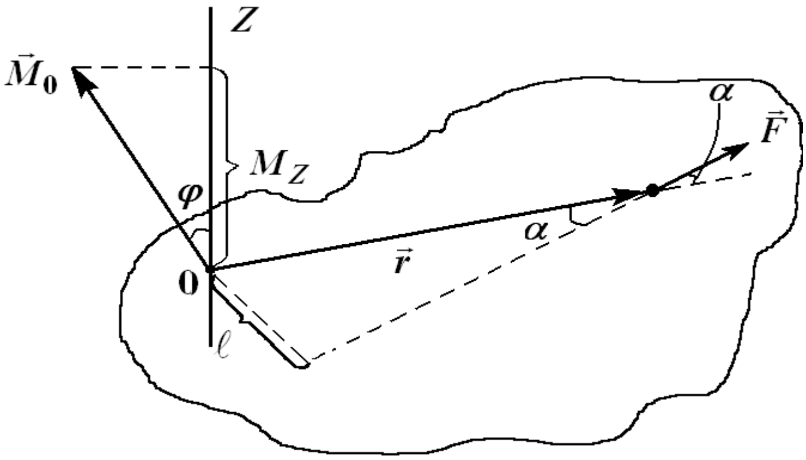


Рис. 3.8

Определение. Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки О называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$:

$$\boxed{\vec{M}_0 = [\vec{r} \times \vec{F}]}$$

Раскрывая векторное произведение, получим $M_0 = rF\sin\alpha = \ell \cdot F$, где $\ell = r \cdot \sin\alpha -$ плечо силы (длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы).

В соответствии с определением векторного произведения вектор $\vec{M}_0$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$ в соответствии с правилом правого винта (буравчика).

Определение. Момент силы относительно оси Z, проходящей через точку О, есть проекция на эту ось вектора момента силы $\vec{M}_0$ относительно точки, лежащей на этой же оси.

$$\boxed{M_z = M_0 \cos\varphi}$$

M_z как проекция на ось является скалярной величиной.

Момент импульса

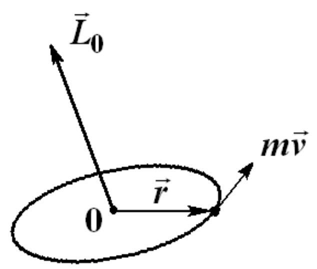


Рис. 3.9

Пусть материальная точка массой m движется со скоростью $\vec{v}$ относительно точки О, а $\vec{r}$ – радиус-вектор этой материальной точки, проведённый из точки О (рис. 3.9).

Определение. Моментом импульса материальной точки относительно точки О называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на вектор импульса $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$:

$$\boxed{\vec{L}_0 = [\vec{r} \times \vec{p}]}$$

Направление $\vec{L}_0$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$, в соответствии с правилом правого винта, например момент импульса

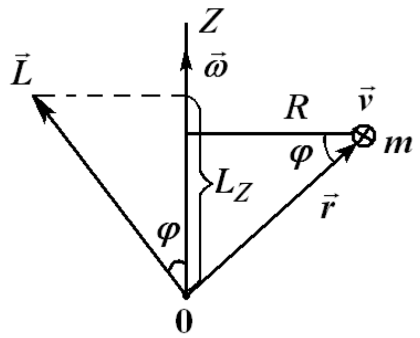


Рис. 3.10

электрона, двигающегося по круговой орбите в боровской модели атома.

Свяжем момент импульса с моментом инерции и угловой скоростью. Пусть радиус-вектор $\vec{r}$ некоторой частицы массой m лежит в плоскости рис. 3.10, скорость $\vec{v}$ перпендикулярна ей («от нас»), частица движется по окружности радиусом R.

Модуль момента импульса $L_0 = rmv$. Линейную скорость v можно связать с угловой ω относительно оси Z как $v = \omega \cdot R$, тогда $L = rm\omega R$. Проекция вектора $\vec{L}_0$ на ось вращения равна

$L_z = L_0 \cos\varphi = rm\omega R \cos\varphi$. Как видно из рис. 3.10, $r \cdot \cos\varphi = R$, т.е.

$$\boxed{L_z = mR^2\omega = J_z\omega}$$

Для системы материальных точек (твёрдого тела) выражение связи L_z, J_z и ω формально такое, как и для материальной точки:

$$\boxed{L_z = J_z\omega}$$

Но под J_z здесь подразумевается сумма моментов инерции материальных точек системы:

$$\boxed{J_z = \sum_i J_{zi}}$$

Можно показать (см., например, в [1]), что для однородного тела, симметричного относительно оси вращения, суммарный момент импульса тела $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$. Он направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$, т.е.

$$\boxed{\vec{L} = J_z\vec{\omega}}$$

(Для несимметричного тела в общем случае $\vec{L}$ не совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$).

5. *Уравнение моментов.* В дальнейших преобразованиях условимся для упрощения записи индекс 0 у $\vec{L}$, $\vec{M}$ и других величин не писать, но подразумевать, что он есть.

Продифференцируем выражение для момента импульса материальной точки: $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} p\right] + \left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right]$.

Учтём, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$, а $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

Рассмотрим первое слагаемое (см. в лекции № 1 «Векторное произведение»).

$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] = [\vec{v} \times \vec{p}] = \upsilon \cdot m\upsilon \sin(\vec{\upsilon}, m\vec{\upsilon})\vec{n} = 0$ (так как угол между $\vec{v}$ и $m\vec{v}$ равен нулю).

Второе слагаемое в выражении для $\frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M} \text{ (по определению момента силы).}$$

В результате получаем:

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$ Уравнение моментов (оно связывает момент импульса с моментом силы).

Производная по времени момента импульса материальной точки относительно точки О равна моменту действующей силы относительно точки О.

Уравнение моментов для твёрдого тела

Рассмотрим систему частиц, на которую действуют как внутренние, так внешние силы. Моментом импульса $\vec{L}$ системы относительно точки О называется сумма моментов импульса $\vec{L}_i$ отдельных частиц $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$. Дифференцирование по времени даёт, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}.$$

Для каждой из частиц можно написать уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_{i\ \text{внутр}} + \vec{M}_{i\ \text{внеш}},$$

где $\vec{M}_{i\ \text{внутр}}$ – момент внутренних сил, а $\vec{M}_{i\ \text{внеш}}$ – момент внешних сил, действующих на i-ю частицу. $\sum\limits_i \vec{M}_{i\ \text{внутр}} = 0$ (по 3-му закону Ньютона, так как внутренние силы образуют пары, равные по величине, противоположные по направлению и действующие вдоль одной прямой, т.е. образуют равные по величине и противоположно направленные моменты сил).

Получаем $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum\limits_i \vec{M}_{i\ \text{внеш}}$.

Обозначим $\sum\limits_i \vec{M}_{i\ \text{внеш}} = \vec{M}_{\text{внеш}}$, получаем окончательно

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}}$$

<u>Производная по времени от момента импульса механической системы относительно некоторой точки О равна суммарному моменту относительно той же точки всех внешних сил, приложенных к системе (уравнение моментов).</u>

Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси

В проекции на ось Z предыдущее уравнение запишется:

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = M_z}$$

а так как $L_z = J_z \omega_z$, то $\dfrac{d(J_z\omega_z)}{dt} = M_z$, если $J_z = \text{const}$, то $J_z \dfrac{d\omega_z}{dt} = M_z$. Так как $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon_z$ – проекция углового ускорения на ось Z, то получим <u>уравнение динамики вращательного движения относительно оси</u> Z и сравним с уравнением динамики для поступательного движения (2-й закон Ньютона).

$$\boxed{J_z \cdot \varepsilon_z = M_z}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$m \times \; a \; = \; F.$$

Соответствие очевидно:

Поступательное движение		Вращательное движение
m	$\rightarrow$	J_z
a	$\rightarrow$	ε_z
F	$\rightarrow$	M_z

Замечание: если вокруг оси Z вращается однородное симметричное тело, то $\vec{L} = J\vec{\omega}$, и тогда очевидно:

$$\boxed{J\vec{\varepsilon} = \vec{M}}$$

(Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором момента силы).

6. ***Гироскопы*** (от греч. *gyros* – круг, *skopeo* – смотрю, наблюдаю).

Гироскопом называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии.

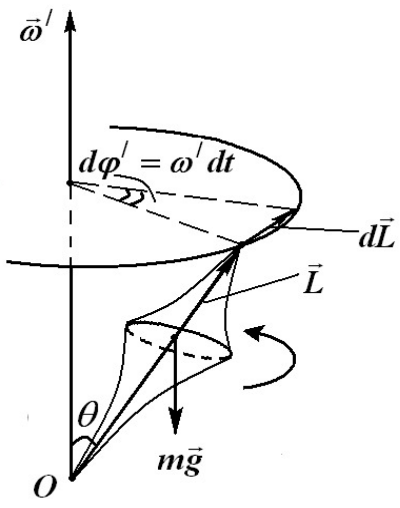


Рис. 3.11

Рассмотрим поведение гироскопа на примере волчка (рис. 3.11). Опыт показывает, что если ось вращающегося волчка наклонена к вертикали, то волчок не падает, а совершает так называемое прецессионное движение (прецессию) – т.е. его ось описывает конус вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}^{/}$, причём чем больше скорость $\vec{\omega}$ вращения волчка, тем меньше угловая скорость прецессии $\vec{\omega}^{/}$ ($\omega >> \omega^{/}$).

Из уравнения моментов следует:

$$\boxed{d\vec{L} = \vec{M}dt}$$

Приращение $d\vec{L}$ совпадает по направлению с $\vec{M}$ – моментом внешних сил, относительно точки О. Момент силы тяжести mg, как видно из рис. 3.11, перпендикулярен моменту импульса, т.е. $\vec{M} \perp \vec{L}$, следовательно, приращение момента импульса $d\vec{L} \perp \vec{L}$. В результате вектор $\vec{L}$ (и ось волчка) будут поворачиваться вместе с вектором $\vec{M}$ вокруг вертикали, описывая круговой конус с углом полураствора θ.

Найдём связь между $\vec{M}$, $\vec{L}$ и $\vec{\omega}'$:

$\left|d\vec{L}\right| = L\sin\vartheta\omega' dt$ или в векторном виде $d\vec{L} = [\vec{\omega}' \times \vec{L}]dt$, сравнивая с $d\vec{L} = \vec{M}dt$, получаем уравнение для угловой скорости прецессии.

$$\boxed{[\vec{\omega}' \times \vec{L}] = \vec{M}}$$

Из уравнения видно, что момент силы определяет угловую скорость прецессии, а не ускорение. Это означает, что мгновенное устранение момента $\vec{M}$ приводит к мгновенному исчезновению и прецессии, т.е. <u>прецессия не обладает инерцией.</u>

Гироскопический эффект

Рассмотрим эффект, возникающий при вынужденном вращении оси гироскопа. Пусть ось гироскопа укреплена в U-образной подставке, которую мы будем поворачивать вокруг оси OO' (рис. 3.12).

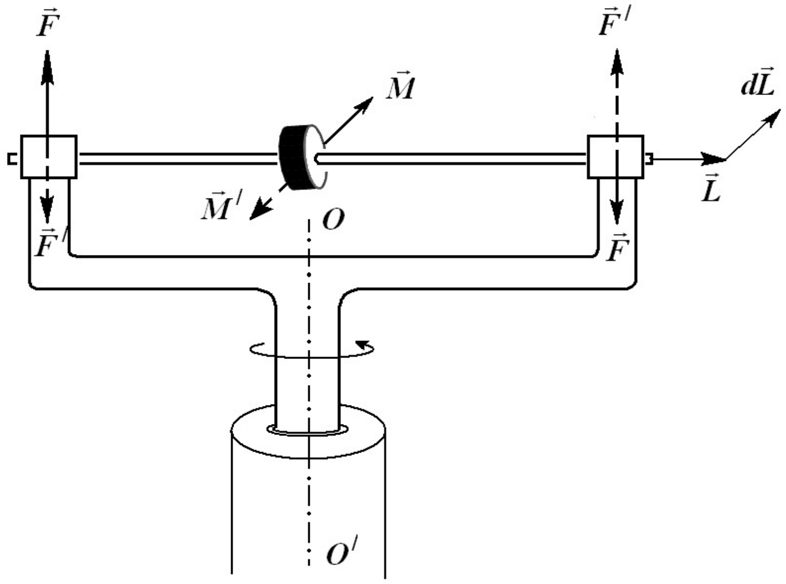


Рис. 3.12

Если момент импульса гироскопа $\vec{L}$ направлен вправо, то при таком повороте за время dt вектор $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L}$ – вектор, направленный перпендикулярно $\vec{L}$. Согласно уравнению $d\vec{L} = \vec{M}dt$ это означает, что на гироскоп действует момент силы $\vec{M}$, совпадающий по направлению с вектором $d\vec{L}$. Момент $\vec{M}$ обусловлен возникновением пары сил $\vec{F}$, действующих на ось гироскопа со стороны подставки. Ось гироскопа, в свою очередь, в соответствии с 3-им законом Ньютона будет действовать на подставку с силами $\vec{F}^{/}$. Эти силы называются гироскопическими. Они создают гироскопический момент $\vec{M}^{/} = -\vec{M}$. Появление гироскопических сил называют гироскопическим эффектом.

Замечание: в узком смысле гироскопическим эффектом иногда называют движение волчка не в сторону действия силы, а перпендикулярно к ней.

Примеры возникновения гироскопического эффекта: гироскопическое давление на подшипники у роторов турбин, компрессоров на кораблях, самолётах при поворотах, виражах.

Гироскопы являются основными узлами в гирокомпасах, в которых используется свойство гироскопов с тремя степенями свободы: его ось стремится устойчиво сохранить в мировом пространстве приданное ей первоначальное направление. Если ось направить на какую-либо звезду, то при любых перемещениях прибора и случайных толчках она будет указывать на эту звезду.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение называется вращательным?
2. Как определяют угловую скорость и угловое ускорение?
3. Что является мерой инертности при вращательном движении?
4. Дайте определение момента инерции материальной точки и момента инерции твёрдого тела.
5. Как вычисляют моменты инерции для сплошного цилиндра и тонкого стержня?
6. Сформулируйте теорему Штейнера.
7. Что называется свободной осью? Какие оси называют главными осями инерции?

8. Дайте определения момента силы и момента импульса материальной точки относительно некоторой точки.
9. Как связан момент импульса с моментом инерции и угловой скоростью?
10. Выведите уравнение моментов.
11. Запишите уравнение динамики вращательного движения относительно оси Z.
12. Что называется гироскопом?
13. Что такое прецессия? От чего зависит скорость прецессии?
14. Что называется гироскопическим эффектом?

Лекция № 4

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

План

1. Закон сохранения импульса. Однородность пространства.
2. Закон сохранения момента импульса. Изотропия пространства.
3. Работа, мощность. Энергия кинетическая и потенциальная. Понятие силового поля. Консервативные силы.
4. Связь между потенциальной энергией и силой.
5. Закон сохранения механической энергии. Однородность времени.
6. Значение законов сохранения в механике.

1. ***Закон сохранения импульса.*** Рассмотрим произвольную систему взаимодействующих частиц. Введём понятие импульса системы как

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i ,$$

где $\vec{p}_i$ – импульс i-й частицы.

Продифференцируем по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

По 2-му закону Ньютона $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_i + \vec{F}_i$, где $\vec{f}_i$ – сила, действующая на i-ю частицу со стороны других частиц системы (внутренние силы); $\vec{F}_i$ – сила, действующая на эту же частицу со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему (внешние силы). Подставим в $\frac{d\vec{p}}{dt}$, получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i + \sum \vec{F}_i.$$

Сумма всех внутренних сил $\sum_i \vec{f}_i = 0$ по 3-му закону Ньютона (силы взаимодействия между частицами системы попарно одинаковы по модулю и противоположны по направлению).

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$, т.е. производная импульса системы по времени равна векторной сумме внешних сил, действующих на систему.

Система материальных точек называется изолированой, если отсутствуют внешние силы (либо их действие скомпенсировано).

Если $\sum_i \vec{F}_i = 0$, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$.

$$\boxed{\vec{P} = \text{const}}$$

Закон сохранения импульса

Импульс изолированной системы не изменяется при любых процессах, протекающих внутри системы.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства: параллельный перенос замкнутой системы с одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в те же условия (без изменения расположения и скоростей), в каких они находились в прежнем положении, не отразится на ходе всех последующих явлений.

Необходимо отметить, что на Земле нет идеальных изолированных систем, так как на любую пару взаимодействующих тел действуют внешние силы (например силы тяжести на пару взаимодействующих тел пушка-снаряд) и закон сохранения импульса выполняется <u>в проекции на горизонтальную ось,</u> так как проекция сил тяжести на эту ось равна нулю. Другой случай, <u>когда внутренние силы много больше внешних</u> (например при взрыве гранаты), и последними можно пренебречь.

<u>Подумайте, как с помощью закона сохранения импульса объяснить принцип реактивного движения</u>.

2. ***Закон сохранения момента импульса.*** Пусть имеется произвольная система частиц. Введём момент импульса данной системы $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ (момент импульса – величина аддитивная), где $\vec{L}_i$ – момент импульса i-й частицы. Продифференцируем это выражение:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}.$$

Для i-й частицы из уравнения моментов:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^{/} + \vec{M}_i,$$

где $\vec{M}_i^{/}$ – момент внутренних сил;

$\vec{M}_i$ – момент внешних сил.

Подставляя $\frac{d\vec{L}_i}{dt}$, получаем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{\,/} + \sum_i \vec{M}_i,$$

где $\sum\limits_i \vec{M}_i^{\,/}$ и $\sum\limits_i \vec{M}_i$ – суммарные моменты соответственно внутренних и внешних сил.

По 3-му закону Ньютона внутренние силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на данной прямой, т.е. имеют одинаковое плечо. Поэтому моменты сил каждой пары внутренних сил равны по модулю и противоположны по направлению, т.е. уравновешивают друг друга, и, значит, суммарный момент всех внутренних сил равен нулю, т.е. $\sum\limits_i \vec{M}_i^{\,/} = 0$, соответственно:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i .$$

Для изолированной системы $\sum\limits_i \vec{M}_i = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, $\boxed{\vec{L} = \text{const}}$

<u>Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы частиц остаётся постоянным.</u>

Если система движется в <u>поле силы тяжести Земли</u>, то легко показать, что относительно любой вертикальной оси момент силы тяжести равен нулю и <u>закон сохранения момента импульса выполняется в проекции на вертикальную ось</u>, т.е. $L_z = \text{const}$ (z – вертикальная ось), и соответственно:

$$J_z \omega_z = \text{const}$$

(<u>*Например*</u>, фигурист на льду, резко прижав руки к туловищу, увеличивает свою угловую скорость вращения).

Закон сохранения момента импульса связан с <u>изотропностью пространства</u>: поворот замкнутой системы в пространстве на любой угол не отражается на ходе всех последующих явлений.

3. ***Работа, мощность. Энергия кинетическая и потенциальная.***

Пусть частица под действием силы $\vec{F}$ совершает перемещение по некоторой траектории 1 – 2. В общем случае сила

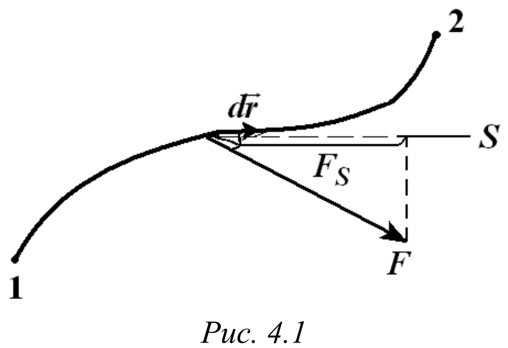


Рис. 4.1

$\vec{F}$ в процессе движения может меняться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной (рис. 4.1).

<u>Элементарной работой</u> силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение:

$$dA = \vec{F}d\vec{r}\ .$$

$\vec{F}d\vec{r} = F\cos\alpha \cdot dS = F_S dS$, где $dS = |d\vec{r}|$ – элементарный путь,

а F_S – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

Интегрируя по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, получим работу силы $\vec{F}$ при перемещении частицы от точки 1 до точки 2.

$$\boxed{A_{12} = \int\limits_{1\to 2} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{1\to 2} F_S dS}$$

Работа, совершаемая в единицу времени, называется <u>мощностью</u>.

$$\boxed{P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}$$

Полученное скалярное произведение силы на скорость точки приложения силы называется <u>мгновенной мощностью</u>.

(Работа на конечном перемещении, отнесённая к соответствующему времени перемещения, называется <u>средней мощностью</u> на данном участке:

$$P_{\text{ср}} = \frac{A_{12}}{\Delta t_{12}}\ ).$$

<u>Свяжем работу с кинетической энергией</u>. Как было показано:

$$dA = F_S dS\ .$$

По 2-му закону Ньютона в проекции на направление движения $F_S = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$. Из связи пути со скоростью $dS = \upsilon dt$, тогда

$$dA = m\frac{d\upsilon}{dt}\upsilon dt = m\upsilon d\upsilon\ ,$$

или

$$dA = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right).$$

Таким образом, работа, совершаемая силой при движении, равна изменению (приращению) величины $T = \frac{m\upsilon^2}{2}$, которая называется кинетической энергией:

$$dA = dT .$$

Интегрируя, получим:

$$\boxed{T_2 - T_1 = A_{12}}$$

(в дифференциальной форме $dA = dT$), т.е. изменение кинетической энергии на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу на том же перемещении.

Кинетическую энергию иногда называют энергией движения.

Прежде чем перейти к понятию потенциальной энергии, дадим определения:

1. Силовым полем называется область пространства, в каждой точке которого на помещённую туда частицу действует сила.

2. Стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между двумя любыми точками не зависит от формы пути, а зависит только от положения этих точек, называют потенциальным, а сами силы – консервативными.

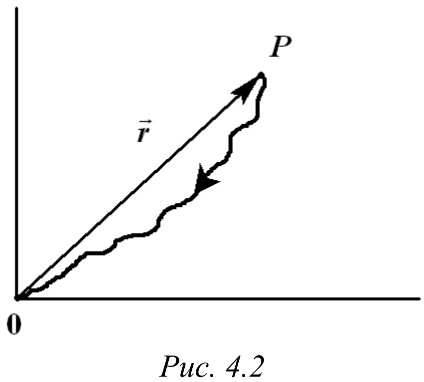


Рис. 4.2

Примем какую-либо точку пространства за начало отсчёта и будем рассматривать работу, совершаемую при переносе частицы из произвольной точки P в точку О (рис. 4.2). Так как работа сил потенциального поля не зависит от формы пути, то остаётся зависимость её только от положения точки P относительно точки О, т.е. будет некоторой функцией радиуса-вектора $\vec{r}$ точки P. Обозначим эту функцию $U(\vec{r})$.

$$A_{p0} = \int\limits_{P\to 0} \vec{F}d\vec{r} = U(\vec{r}).$$

Функцию $U(\vec{r})$ называют потенциальной энергией частицы в данном поле. Различают собственную потенциальную энергию системы, зависящую при данном характере взаимодействия только от относительного расположения частиц системы, т.е. от её конфигурации, а также внешнюю потенциальную энергию, характеризующую взаимодействие данной системы с другими телами.

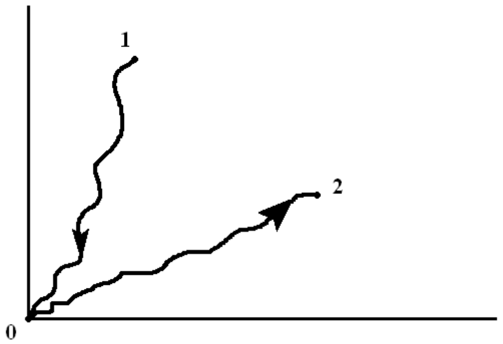


Рис. 4.3

Найдём работу сил потенциального поля при перемещении частиц из точки 1 в точку 2. Так как эта работа не зависит от пути, выберем путь, проходящий через точку О (рис. 4.3).

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20}.$$

Согласно равенству $A_{po} = U(\vec{r})$

$$A_{10} = U_1 \text{ и } A_{20} = U_2$$

$$\boxed{A_{12} = \int\limits_{1\to 2} \vec{F}d\vec{r} = U_1 - U_2}$$

Работа сил поля на пути 1 – 2 равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле. Для элементарного перемещения

$$\boxed{dA = -dU}$$

4. ***Связь между потенциальной энергией и силой.*** Работа сил поля на элементарном перемещении:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F_S dS.$$

С другой стороны, $dA = -dU$, отсюда $F_S dS = -dU$, $F_S = -\dfrac{dU}{dt}$, т.е. проекция силы поля – вектора $\vec{F}$ в данной точке на направление перемещения $d\vec{r}$ равна с обратным знаком производной потенциальной энергии U по данному направлению. Например, для направления вдоль оси X: $F_x = -\dfrac{dU}{dx}$.

При перемещении в произвольном направлении в проекции на оси координат $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$; т.е. проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат равны взятым с обратным знаком частным производным потенциальной энергии U по x, y, z. Вектор $\vec{F}$, как и любой вектор, можно представить через его компоненты: $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$. Подставим вместо F_x, F_y, F_z соответствующие производные потенциальной энергии, получим:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right).$$

Выражение в скобках есть градиент потенциальной энергии:

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z.$$

По определению градиент скалярной функции есть вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания этой функции и численно равный производной по направлению.

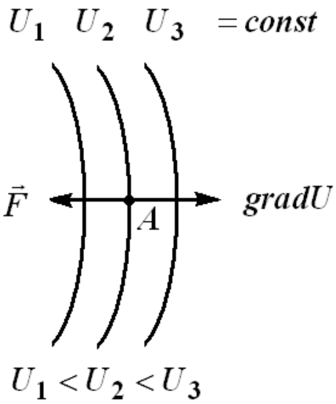


Рис. 4.4

В результате получим:

$$\boxed{\vec{F} = -gradU}$$

(или $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, градиент обозначен $\vec{\nabla}$ – «набла»), т.е. сила поля $\vec{F}$ равна со знаком минус градиенту потенциальной энергии частицы в данной точке поля (Иллюстрация этого положения на рис. 4.4 для произвольной точки А в потенциальном поле).

5. ***Закон сохранения механической энергии.*** Рассмотрим замкнутую систему тел, в которой действующие силы консервативны. Для любых сил

$dA = dT$, а для консервативных сил $dA = -dU$. Из этих двух равенств следует, что

$$dT = -dU,$$

$$dT + dU = 0,$$

$$d(T + U) = 0.$$

$$\boxed{T + U = \text{const}}$$

$T + U$ – полная механическая энергия системы.

Закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы частиц, на которую действуют только консервативные силы, остаётся постоянной в процессе движения системы.

В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени, которая означает, что если в два любых момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то, начиная с этих моментов, все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

6. ***Значение законов сохранения в механике.*** Важная роль законов сохранения обусловлена рядом причин:

1. Законы сохранения не зависят ни от траектории частиц, ни от характера действующих сил. Поэтому они позволяют получить ряд весьма общих и существенных заключений о свойствах различных механических процессов, не вникая в их детальное рассмотрение, с помощью уравнений движения. Если, например, выясняется, что какой-то процесс противоречит законам сохранения, то сразу можно утверждать: этот процесс невозможен, и бессмысленно пытаться его осуществить.

2. Тот факт, что законы сохранения не зависят от характера действия сил, позволяет использовать их даже тогда, когда силы вообще не известны. В этих случаях законы сохранения являются единственным и незаменимым инструментом исследования.

3. Привлечение законов сохранения очень часто позволяет получить решение наиболее простым и изящным путём, избавляет от громоздких и утомительных расчётов.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит закон сохранения импульса? Следствием каких законов является закон сохранения импульса?
2. Сформулируйте и выведите закон сохранения момента импульса.
3. Что называется механической работой? Напишите формулу для расчёта работы постоянной и переменной силы.
4. При каком значении угла между направлением силы и перемещением работа равна нулю? Имеет наибольшее значение?
5. Что называется мгновенной мощностью? Средней мощностью?
6. Как связаны изменение кинетической энергии и работа сил, действующих на материальную точку?
7. Какое поле называется потенциальным? Какие силы называются консервативными?
8. Что называется потенциальной энергией?
9. Как связана потенциальная энергия частицы с силой поля, действующего на частицу, в данной точке? Дайте определение градиента скалярной функции координат. Как направлен градиент?
10. Сформулируйте закон сохранения механической энергии для замкнутой системы.

Лекция № 5

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

План

1. Основные задачи механики жидкости и газов.
2. Понятия сжимаемости и вязкости. Поле скоростей, линии и трубки тока, стационарное течение.

3. Уравнение неразрывности и уравнение Бернулли.
4. Течение вязкой жидкости. Формула Пуазейля.
5. Ламинарный и турбулентный режимы течения.
6. Циркуляция скорости. Потенциальное и вихревое движение. Формула Жуковского.

1. ***Основные задачи механики жидкостей и газов:***

1. Определение усилий, действующих на тела, движущиеся в жидкости или газе, например определение силы лобового сопротивления самолёта для расчета мощности его двигателя, определение силы торможения парашюта, расчёт ветровой нагрузки телебашен, линий электропередач и т.д.

2. Определение наиболее выгодных форм тел, например формы крыльев самолёта, корпуса подводной лодки, лопаток турбины и т.п.

3. Определение режима течения в каналах, трубах. Если, например, ламинарный режим изменяется на турбулентный, то изменяются и уравнения, описывающие течения, и конечные решения.

4. Изучение распространения механических волн, например распространения ультразвуковых волн при локации кораблей и подводных лодок, изучение закономерностей ударных волн, возникающих при взрыве атомных бомб, от самолётов, движущихся со скоростями больше скорости звука в атмосфере.

2. ***Понятие о сжимаемости и вязкости.*** Пусть имеется деформируемое тело длиной L, которое мы в некоторый момент начнём толкать слева направо со скоростью υ (рис. 5.1). Придёт ли всё тело сразу в движение со скоростью υ? Нет. Левый конец начнёт двигаться сразу. По телу от левого конца к правому побежит волна упругого воздействия со скоростью звука a. В течение времени $\Delta t = \frac{L}{a}$ правый конец не будет «знать», что левый конец двигается, и будет стоять. За это время левый конец пройдёт расстояние $\Delta L = \upsilon \Delta t = \frac{\upsilon L}{a}$. Тело станет короче на величину ΔL, т.е. сожмётся на эту величину. Относительное сжатие тела будет:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\upsilon}{a}.$$

Отношение υ/a обозначают числом M и называют числом Маха по имени австрийского физика и философа Эрнста Маха (1838 – 1916). Видно, что сжимаемость равна отношению скорости движения к местной скорости звука – числу Маха. Чем больше скорость звука в веществе, тем меньше его сжимаемость. Скорость звука в воздухе примерно равна 330, в воде – 1400 и в металлах – 4000 – 7000 м/с.

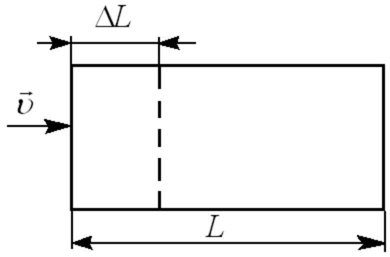


Рис. 5.1

Условно считают, что если $M < 0{,}3$, то жидкость несжимаемая, а если $M \geq 0{,}3$, то жидкость сжимаемая. Например, если пуля летит со скоростью примерно 800 м/с в воде, то $M = \frac{800}{1400} = 0{,}57 > 0{,}3$. Поэтому вода для летящей пули – сжимаемая жидкость.

Вязкость. Все реальные жидкости являются вязкими. Вязкость (внутреннее трение) проявляется в том, что при движении в жидкости тело встречает сопротивление. Из опыта известно: чтобы поддерживать постоянным течение жидкости в трубе, необходимо наличие между концами трубы разности давлений. Необходимость сил давления указывает на то, что эти силы уравновешиваются какими-то силами, тормозящими движение. Этими силами являются силы внутреннего трения на границе со стенкой трубы и на границах между слоями. Более быстрый слой стремится увлечь за собой более медленный слой, действуя на него с силой $\vec{F}_1$, направленной по течению. Одновременно более медленный слой стремится замедлить движение более быстрого слоя, действуя на него силой $\vec{F}_2$, направленной против течения (рис. 5.2). Экспериментально установлено, что модуль силы внутреннего трения, приложенной к площадке S, лежащей на границе между слоями, определяется формулой:

$$\boxed{F_{\text{вн.тр}} = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dr} \right| S}$$

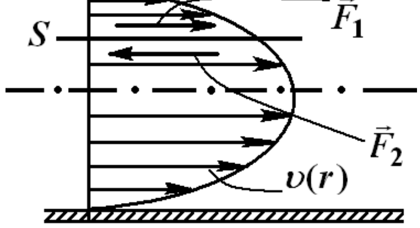


Рис. 5.2

где η – коэффициент пропорциональности, зависящий от природы жидкости и её состояния (например температуры); $\frac{d\upsilon}{dr}$ – производная скорости жидкости по радиусу, показывающая, как быстро изменяется в данном месте скорость течения в направлении оси r, перпендикулярной к площадке S.

Под идеальной жидкостью понимают жидкость, в которой нет сил внутреннего трения, т.е. вязкость равна нулю (более строго говорят, что жидкость не оказывает сопротивления деформации сдвига).

Поле скоростей. Движение жидкости характеризуется совокупностью функций $\upsilon(t)$ – скоростей, с которыми проходят через каждую точку отдельные частицы жидкости. Совокупность векторов $\upsilon(t)$, заданных для всех точек пространства течения жидкости, называется полем вектора скорости. Это поле наглядно можно изобразить с помощью линий тока. Линия тока – такая линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор скорости направлен по касательной.

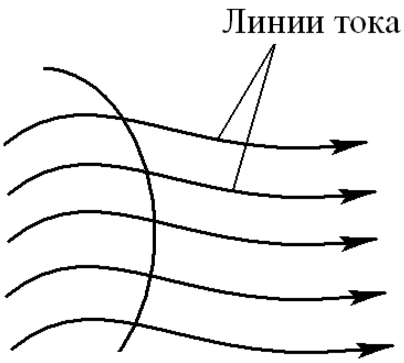


Рис. 5.3

Поверхность тока – совокупность линий тока, проходящих через некоторую кривую (рис. 5.3). Часть жидкости, ограниченная замкнутой поверхностью тока, называется трубкой тока. Если скорость в каждой точке пространства остаётся постоянной ($\upsilon = \mathrm{const}$), то течение жидкости называется стационарным (установившимся).

3. ***Уравнение неразрывности***. Пусть имеется достаточно тонкая трубка тока (скорость во всех точках поперечного сечения одинакова) несжимаемой жидкости. При стационарном течении трубка тока подобна стенкам жёсткой трубы. Поэтому через сечение S за время Δt пройдёт объём жидкости $S\upsilon\Delta t$, а в единицу времени $V = S\upsilon$.

Возьмём 2 сечения трубки тока (рис. 5.4). Если жидкость несжимаемая, то количество её между этими сечениями остаётся неизменным. Отсюда следует, что

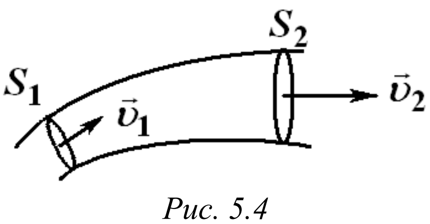


Рис. 5.4

объёмы жидкости, протекающие в единицу времени через сечения S_1 и S_2, должны быть одинаковыми: $S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2$. Это равенство справедливо для любой пары произвольно взятых сечений. Следовательно, для несжимаемой жидкости при стационарном течении произведение $S \cdot \upsilon$ в любом сечении данной трубки тока имеет постоянное значение:

$$\boxed{S \cdot \upsilon = \text{const}}$$

Это утверждение носит название теоремы о неразрывности струи. Она применима даже к газам, если их сжимаемостью можно пренебречь ($M < 0{,}3$). *Примеры*: 1) в узком месте река течёт быстро, в широком – медленно; 2) пожарный брандспойт имеет сужающийся наконечник, чтобы скорость воды была больше и струя летела дальше.

Уравнение Бернулли

Рассмотрим стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости. Выделим трубку тока, а в ней объём жидкости, ограниченной стенками узкой трубки тока и перпендикулярными к линии тока сечениями S_1 и S_2. За некоторое время Δt этот объём сместится вдоль трубки тока, причём граница объёма S_1 получит перемещение $\Delta\ell_1$, а граница S_2 – перемещение $\Delta\ell_2$ (рис. 5.5).

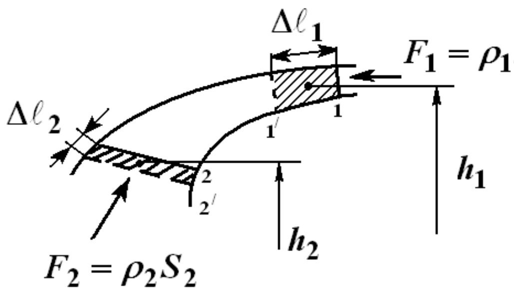


Рис. 5.5

Работа, совершаемая при этом силами давления, равна приращению полной механической энергии: $E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$, заключённой в рассматриваемом объёме жидкости (на рис. 5.5 между сечениями 1 и 2).

$$A = F_1\Delta\ell_1 - F_2\Delta\ell_2 = p_1S_1\Delta\ell_1 - p_2S_2\Delta\ell_2 = (p_1 - p_2)\Delta V,$$

где $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$ вследствие несжимаемости жидкости; $\Delta V_1 = S_1\Delta\ell_1$, а $\Delta V_2 = S_2\Delta\ell_2$ (на рисунке эти объёмы заштрихованы).

Полная энергия рассматриваемого объёма жидкости слагается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле сил земного тяготения. Возьмём сечения S трубки тока и перемещения $\Delta\ell$ настолько малыми, чтобы всем точкам каждого из заштрихованных объёмов можно было приписать одни и те же значения скорости υ, давления P и высоты h. Приращение полной энергии (это разность полных энергий заштрихованных объёмов):

$$\Delta E = \left(\frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2\right) - \left(\frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1\right),$$

так как $m = \rho\Delta V$, то

$$\Delta E = \left(\frac{\rho\Delta V\upsilon_2^2}{2} + \rho\Delta Vgh_2\right) - \left(\frac{\rho\Delta V\upsilon_1^2}{2} + \rho\Delta Vgh_1\right).$$

Приравняв A и ΔE, сократив на ΔV и перенеся члены с одинаковыми индексами в одну сторону, получим:

$$\boxed{\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho gh_1 + P_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho gh_2 + P_2}$$

Заметим, что уравнение вполне строго лишь при $S \to 0$, т.е. для одной и той же линии тока. Так как S_1 и S_2 были выбраны произвольно, то можно утверждать, что для любой линии тока в стационарно текущей идеальной и несжимаемой жидкости выполняется условие (уравнение Бернулли):

$$\boxed{\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho gh + P = \text{const}}$$

Уравнение выражает для движущейся жидкости закон сохранения механической энергии.

Для горизонтальной линии тока:

$$\boxed{\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + P_2}$$

Если скорость течения вдоль линии тока возрастает, то давление падает, и наоборот. Уравнение используется, например, в аэродинамических измерениях скорости потока газа. Обычно измеряют полное давление $P_0 = \frac{\rho\upsilon^2}{2} + P$ и статическое давление P в исследуемой точке потока, а значение скорости определяют как $\upsilon = \sqrt{2(P_0 - P)/\rho}$.

4. ***Течение вязкой жидкости. Формула Пуазейля.*** Для практических применений представляет особый интерес течение в круглой трубе (нефте- и газопроводы). Измерения показывают, что при медленном течении скорость частиц жидкости изменяется от нуля в непосредственной близости к стенкам трубы до максимума на оси трубы.

Найдём закон изменения скорости по радиусу трубы. Выделим воображаемый цилиндрический объём жидкости радиусом r и длиной ℓ (рис. 5.6). При стационарном течении этот объём движется без ускорения. В направлении движения на жидкость действует сила давления, модуль которой равен $P_1 \cdot \pi r^2$, во встречном направлении – $P_2 \cdot \pi r^2$. Результирующая сила давления:

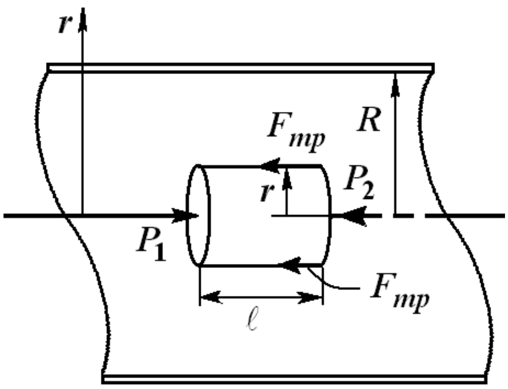


Рис. 5.6

$$F_{\text{давл}} = (P_1 - P_2)\pi r^2 .$$

На боковую поверхность действует тормозящая сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dr} \right| 2\pi r\ell = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} 2\pi r\ell .$$

(Замечание: модуль отрицательного числа равен этому числу, взятому с обратным знаком).

Приравняв $F_{\text{давл}}$ и $F_{\text{тр}}$, получим:

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} 2\pi r\ell .$$

Производя сокращения и разделив переменные, получим:

$$d\upsilon = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta\ell} r dr .$$

Интегрируем:

$$\upsilon = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} r^2 + C . \qquad (*)$$

При $r = R$ $\upsilon = 0$, отсюда

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} R^2 .$$

Подставим константу в выражение $(*)$ для υ, получим:

$$\upsilon(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell}(R^2 - r^2) .$$

Скорость на оси трубы равна:

$$\upsilon_0 = \upsilon(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} R^2 . \qquad (**)$$

С учётом этого:

$$\boxed{\upsilon(r) = \upsilon_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

Вычислим поток жидкости Q, т.е. объём жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени (рис. 5.7). Через кольцо радиусом r, шириной dr пройдёт в единицу времени объём жидкости dQ, равный произведению площади кольца $dS = 2\pi r dr$ на скорость $\upsilon(r)$ на расстоянии r от оси трубы:

$$dQ = \upsilon(r) dS = \upsilon_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr .$$

Проинтегрировав от 0 до R, получим:

$$Q = \int_0^R \upsilon_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \int_0^R \upsilon_0 2\pi r dr - \int_0^R \upsilon_0 \frac{r^2}{R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2}\pi R^2 \upsilon_0 .$$

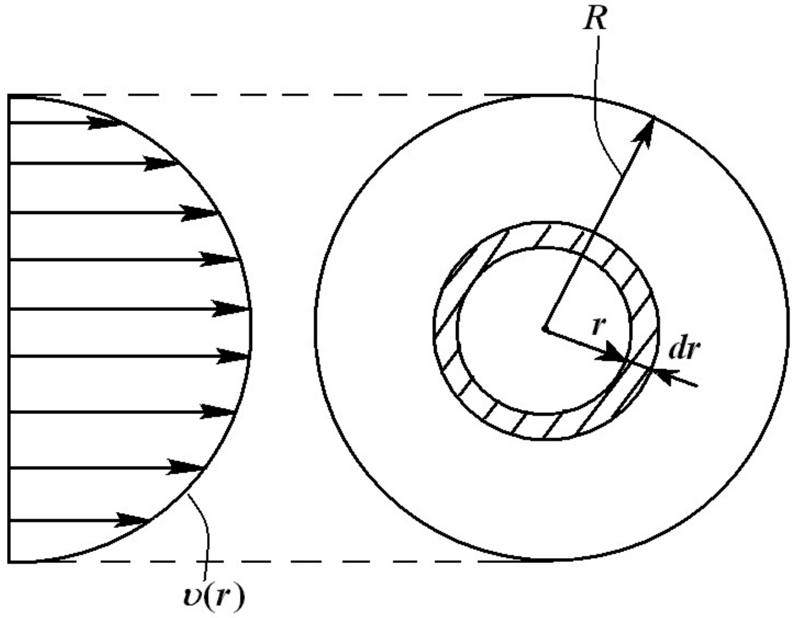


Рис. 5.7

Подставив значение υ_0 в выражение (**), получим формулу Пуазейля (французский учёный):

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{P_1 - P_2}{4\eta\ell} R^2 = \frac{(P_1 - P_2)4R^4}{8\eta\ell}}$$

Физический смысл формулы: объём Q жидкости, протекающий за секунду через поперечное сечение трубы, прямо пропорционален разности давлений P_1 и P_2 у входа в трубу и на выходе из неё, четвёртой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине ℓ трубы и коэффициенту вязкости η жидкости.

Формула справедлива только при ламинарном течении жидкости (см. далее). Формула применяется для определения коэффициента вязкости жидкостей, а также для оценки необходимого перепада давления для получения нужного объёмного расхода.

5. ***Ламинарный и турбулентный режимы течения.*** Если при течении жидкости слои жидкости скользят относительно друг друга не перемешиваясь, такое течение называется ламинарным (или слоистым; *lamina* – (лат.) пластина, плоская).

Ламинарное течение наблюдается обычно при медленном течении. Если увеличить скорость течения, то при достижении определенного значения скорости характер течения резко меняется. Скорость частиц в каждой точке пространства всё время быстро и нерегулярно изменяется. Такое течение называется турбулентным (*turbulentus* (лат.) – бурный, беспорядочный). При турбулентном течении происходит интенсивное перемешивание жидкости.

Английский физик Рейнольдс (1842 – 1912) установил, что характер течения определяется значением безразмерной величины:

$$\boxed{R_e = \frac{\rho \upsilon \ell}{\eta}}$$

где $\rho -$ плотность жидкости (или газа); $\upsilon -$ средняя по сечению трубы скорость потока; $\eta -$ вязкость жидкости; $\ell -$ характерный для поперечного сечения потока размер, например диаметр при круглом сечении или сторона квадрата при квадратном сечении.

Величина *Re* называется числом Рейнольдса. При малых *Re* течение носит ламинарный характер. Начиная с некоторого значения *Re*, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Значение $Re_{кр}$ для течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе около $2{,}3 \cdot 10^3$. *Примеры* турбулентного течения: вода в горном потоке, за кормой корабля, дым из фабричной трубы и т.п.

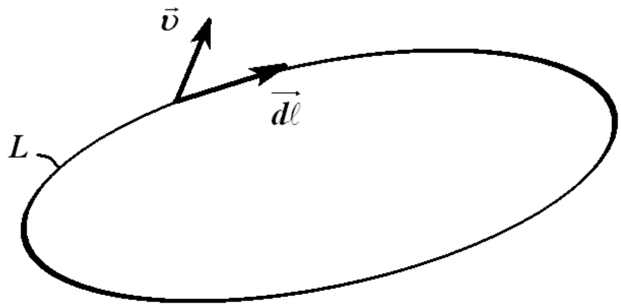


Рис. 5.8

6. *Циркуляция скорости.* Рассмотрим поле скоростей жидкости $\vec{\upsilon}$. В этом поле возьмём произвольный замкнутый контур *L* (рис. 5.8).

Пусть $\overrightarrow{d\ell} -$ элемент длины контура. Интеграл $\Gamma = \oint\limits_{\ell} \vec{\upsilon}\,\overrightarrow{d\ell}$ называется циркуляцией вектора скорости по контуру *L*. Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему обтекаемое тело, равна нулю, то движение жидкости (газа) называется потенциальным. В противном случае движение называется вихревым.

Н.Е. Жуковский (выдающийся русский механик, уроженец Владимирской губернии (1847 – 1921)) впервые установил вихревую природу сил, действующих со стороны потока на крыло, и указал на наличие простой зависимости между силой и циркуляцией скорости по контуру, охватывающему обтекаемое идеальной несжимаемой жидкостью крыло (рис. 5.9).

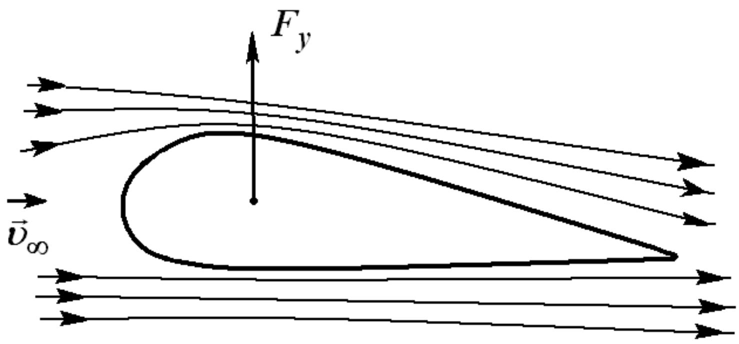


Рис. 5.9

Сверху профиль крыла выпуклый, линии тока сверху крыла сгущаются, сечение потока уменьшается, скорость больше, чем снизу, где профиль плоский. Циркуляция скорости потока по контуру профиля крыла оказывается отличной от нуля. Согласно формуле Жуковского возникает подъёмная сила на единицу длины крыла:

$$\boxed{F_y = \Gamma\rho\upsilon_\infty}$$

где ρ и υ_∞ соответственно плотность потока и скорость невозмущённого крылом потока.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные задачи механики жидкостей и газов.
2. В чём заключается понятие сжимаемости? Каким числом определяется сжимаемость?
3. Что такое вязкость? Какая жидкость называется идеальной?
4. Что называется линией тока, поверхностью тока, трубкой тока?
5. Запишите уравнение неразрывности. К каким средам оно применимо?

6. Запишите уравнение Бернулли. Какие законы (уравнения) использованы при его получении?
7. Запишите уравнение Бернулли для частных случаев:

а) жидкость неподвижна;

б) трубка тока расположена горизонтально.

8. Запишите формулу Пуазейля. Для какого режима течения она справедлива? Для каких целей может быть использована эта формула?
9. Что такое ламинарное и турбулентное течения? Сформулируйте условие перехода ламинарного режима течения в турбулентный.
10. Что выражает формула Жуковского?

Лекция № 6

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

План

1. Принцип относительности Эйнштейна: постулат относительности, постулат постоянства скорости света. Роль скорости света. Преобразования Лоренца.
2. Лоренцево сокращение длины и замедление времени.
3. Релятивистский импульс. Взаимосвязь массы и энергии.

1. ***Принцип относительности Эйнштейна.*** Классическая механика, основанная на законах Ньютона, справедлива только для тел, движущихся со скоростями, много меньшими скорости света в пустоте ($\upsilon << c$). Для описания движений, совершающихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света, Эйнштейн создал релятивистскую механику (*relativus* (лат.) – относительный). Различают специальную (являющуюся предметом нашего рассмотрения) и общую теорию относительности. Специальная означает рассмотрение явлений в инерциальных системах отсчёта.

В основе теории лежит принцип относительности, состоящий из двух постулатов:

1. Постулат относительности. Все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны, т.е. не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой (Замечание: неизменность вида уравнений при замене координат и времени одной системы отсчёта координатами и временем другой системы называется инвариантностью).

2. Постулат постоянства скорости света. Скорость света в вакууме не зависит от движения источника и приёмника света и одинакова во всех

направлениях, т.е. скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта.

Роль скорости света. Скорость света занимает особое положение в природе. В отличие от всех других скоростей, меняющихся при переходе от одной системы к другой, скорость света в пустоте является инвариантной величиной. Из постулатов Эйнштейна следует, что скорость света в вакууме является предельной: никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме. Именно предельный характер этой скорости и объясняет одинаковость скорости света во всех системах отсчёта. (Значение предельной скорости должно быть одинаково во всех инерциальных системах отсчёта).

Преобразования Лоренца (голландский физик, 1853 – 1928 гг.)

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта K и $K^{/}$. Пусть система $K^{/}$ движется относительно системы K со скоростью $\vec{\upsilon}$ (рис. 6.1).

Направим координатные оси так: X и $X^{/}$ – совпадают и направлены параллельно вектору $\vec{\upsilon}$, а оси Y и $Y^{/}$ – параллельны друг другу. Возьмём за начало отсчёта времени в обеих системах момент, когда начала координат O и $O^{/}$ совпадают $(t = t^{/} = 0)$. Предположим, что в момент времени t (в K-системе) в точке с координатами x, y (точка A) произошло некоторое событие, например вспыхнула лампочка.

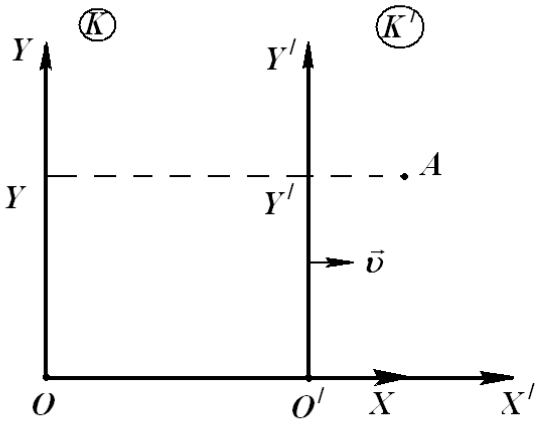


Рис. 6.1

Преобразования Лоренца дают связь координат $x^{/}, y^{/}$ и момента времени события $t^{/}$ в системе $K^{/}$ с координатами x, y и моментом времени t в системе K (прямые преобразования), и наоборот (обратные преобразования). Приводим их без вывода.

Прямые преобразования	Обратные преобразования
$x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$x = \dfrac{x' + \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}$
$y' = y$	$y = y'$
$t' = \dfrac{t - x\,\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$t = \dfrac{t' + x'\,\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Здесь $\beta = \upsilon/c$.

2. ***Лоренцево сокращение длины.*** Расположим неподвижный в системе K' стержень вдоль оси X'. Пусть длина стержня в K'-системе равна $\ell_0 = x_2' - x_1'$ (собственная длина стержня). В K-системе, относительно которой стержень движется, его длину определяют как расстояние ℓ между координатами x_2 и x_1 его концов в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = b$. Воспользовавшись прямыми преобразованиями Лоренца, получим:

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon b}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x_2' = \frac{x_2 - \upsilon b}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

вычитаем одно уравнение из другого:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

или
$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Так как $\beta < 1$, то $\ell < \ell_0$.

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется ℓ, оказывается меньше длины ℓ_0, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. Это явление называется лоренцевым сокращением длины.

Замедление времени

Пусть в точке $x' = a$, неподвижной относительно системы K', происходит событие, длящееся время $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$. Относительно системы *К* начало и конец события (согласно обратным преобразованиям):

$$t_1 = \frac{t_1' + \left(\upsilon / c^2\right) a}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \left(\upsilon / c^2\right) a}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Обозначим длительность события в системе *К* $\Delta t = t_2 - t_1$, тогда

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad (*)$$

Так как $\beta < 1$; $1-\beta^2 < 1$, тогда $\Delta t > \Delta t_0$.

Время Δt_0, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем тела. Таким образом, время, отсчитанное по часам, относительно которых система движется, всегда больше собственного времени (замедление времени).

Соотношение $(*)$ получило непосредственное экспериментальное подтверждение. Среднее время жизни μ-мезонов в условиях, когда они неподвижны (собственное время), порядка примерно $2 \cdot 10^{-6}$ с. Образуются μ-мезоны при взаимодействии космических лучей с атмосферой на высоте около $20-30$ км.

Двигаясь со скоростью света (оценка «сверху»), μ-мезоны могут пройти путь лишь порядка 600 м. Однако они регистрируются и на Земле. Дело в том, что время, отсчитанное по часам экспериментатора, связанного с Землёй, оказывается гораздо большим (υ близка к с), и пробег мезонов составляет около 30 км, и они достигают Земли.

В своё время недоверчивым скептикам Эйнштейн предлагал проделать мысленный эксперимент.

Пусть имеется движущийся вагон с лампочкой по середине. В некоторый момент лампочка вспыхивает.

Если наблюдатель находится в вагоне, то относительно него свет достигает задней и передней стенки вагона одновременно (рис. 6.2, а).

Если же наблюдатель находится вне вагона, то относительно него свет достигает задней стенки быстрее, чем передней (рис. 6.2, б). Мысленный эксперимент демонстрирует относительность понятия одновременности.

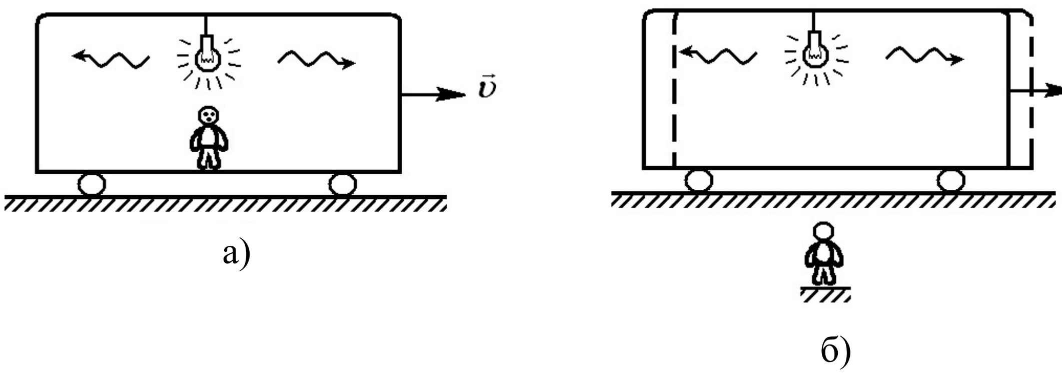


Рис. 6.2

3. ***Релятивистский импульс.*** Ньютоновское выражение импульса $\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt}$. В релятивистской теории выражение для импульса, обеспечивающее инвариантность закона сохранения импульса и переход в ньютоновскую форму при $\upsilon << c$, получается, если заменить время dt собственным временем частицы $dt_0 = dt\sqrt{1-\beta^2}$, тогда

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В такой форме выражение

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

называется релятивистским импульсом. При $\beta \to 0$ релятивистское выражение переходит в ньютоновское $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$. Постоянная величина m_0 называется массой покоя, поскольку является мерой инертности при нулевой скорости. Величина

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

называется релятивистской массой.

Взаимосвязь массы и энергии

Используя выражение для релятивистского импульса, запишем релятивистское уравнение движения:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \vec{F}} \qquad (**)$$

Чтобы найти релятивистское выражение для энергии, умножим уравнение (**) на перемещение частицы $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$:

$$\vec{\upsilon}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{\upsilon}dt = \vec{F}\overrightarrow{dr}.$$

Правая часть этого соотношения даёт работу dA, совершаемую над частицей за время dt. Из закона сохранения энергии следует, что работа, совершённая над частицей, должна быть равна приращению энергии частицы dE, т. е. $dE = dA$.

Поэтому можно написать

$$dE = \vec{\upsilon}dt\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right).$$

Опуская дальнейшие преобразования, являющиеся весьма непростыми (некоторые любознательные читатели могут их найти в более полных курсах физики, например [2], [5]) приведём результат преобразований:

$$dE = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right).$$

Интегрирование полученного соотношения даёт:

$$\boxed{E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2}$$

Физический смысл этой формулы: полная энергия тела E (системы тел), из каких бы видов энергии она ни состояла (кинетической, электрической, химической и т.д.) связана с массой этого тела соотношением $E = mc^2$. В полную энергию не входит потенциальная энергия тела во внешнем поле, если таковая действует на тело.

В том случае, когда тело покоится ($\upsilon = 0$), оно обладает энергией которая называется энергией покоя:

$$\boxed{E_0 = m_0c^2}$$

Из соотношения $E = mc^2$ вытекает, что энергия тела и его масса пропорциональны друг другу. Всякое изменение энергии тела ΔE (за исключением изменения потенциальной энергии во внешнем поле сил) сопровождается изменением ма[…]оборот.

$$\boxed{\Delta E = c^2\Delta m}$$

Это утверждение называется законом взаимосвязи массы и энергии.

Пример. Рассмотрим реакцию деления ядер урана ${}^{235}_{92}U$ при захвате медленных нейтронов:

$$\underbrace{{}^{235}_{92}\mathrm{U} + n \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow}_{m_{01}} \underbrace{\begin{cases} {}^{140}_{55}Cs + n \\ {}^{94}_{37}Rb + n \end{cases}}_{m_{02}}$$

Суммарная масса покоя урана-235 и нейтрона превосходит суммарную массу покоя частиц в правой части ($m_{01} > m_{02}$) на $4 \cdot 10^{-28}$ кг. Отвечающая этому избытку массы энергия $\Delta E = c^2 \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 4 \cdot 10^{-28} \approx$ $\approx 4 \cdot 10^{-11}$ Дж (на одну пару взаимодействующих частиц) превращается в кинетическую энергию образующих частиц и в энергию возникающего при делении электромагнитного излучения.

Создание атомных электростанций (как, впрочем, и создание атомной бомбы) стало возможным, в частности, благодаря теоретической основе – полученному Эйнштейном соотношению $\Delta E = c^2 \Delta m$. Это позволило нобелевскому лауреату Максу Борну заявить, что "идеи Эйнштейна дали физической науке импульс, который освободил её от устаревших философских доктрин и превратил в одну из решающих сил современного мира людей".

Вопросы для самоконтроля

1. При каких скоростях движения тел справедлива ньютоновская механика?
2. Сформулируйте принцип относительности Эйнштейна. Обратите внимание на общее и отличное в этом принципе и принципе относительности Галилея.
3. Сформулируйте постулат постоянства скорости света.
4. Получите из преобразований Лоренца выражение, описывающее длину тела в системе, относительно которой оно движется.
5. Получите из преобразований Лоренца формулу для определения промежутка времени между событием по часам, относительно которых система движется.

6. Запишите выражение для импульса в релятивистской форме.
7. Зависит ли масса от выбора системы отсчёта? Запишите выражение для массы в релятивистской физике.
8. Как связаны между собой полная энергия тела и релятивистская масса? Приведите примеры применения этой взаимосвязи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иродов. И.Е.* Механика. Основные законы. – М. – СПб.: Физматлит, 2000. – 320 с.

2. *Савельев И.В.* Курс общей физики: В 3 т. – М.: Наука, 1987. Т.1. – 432 с.

3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: В 5 т. – М.: Наука, 1974. Т.1. – 519 с.

4. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.

5. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. – М.: Высш. шк., 1976. – 416 с.

6. *Кунин В.Н.* Конспект лекций по трудным разделам физики / Владим. политехн. ун-т. – Владимир, 1982. – 52 с.

7. Физика. Программа, методические указания и задачи для студентов-заочников (с примерами решения) / Сост.: А.Ф. Галкин, А.А. Кулиш, В.Н. Кунин и др.; Под ред. А.А. Кулиша / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2002. – 128 с.

8. Методические указания для самостоятельной работы студентов по физике / Сост.: Е.В. Орлик, Э.Д. Корж, В.Г. Прокошев / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1988. – 48 с.

Оглавление