

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)**

Кафедра химических технологий

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕРАБОТКИ  
ПЛАСТМАСС»**

**для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению  
18.04.01 «Химическая технология»**

Владимир – 2016 г.

Данные методические указания включают рекомендации по содержанию и выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математическое моделирование процессов переработки пластмасс» для студентов направления 18.04.01 «Химическая технология» ВлГУ.

Методические указания составлены на основе требований ФГОС ВО и ОПОП направления 18.04.01 «Химическая технология», рабочей программы дисциплины «Математическое моделирование процессов переработки пластмасс».

Рассмотрены и одобрены на  
заседании УМК направления  
18.04.01 «Химические реакторы»  
Протокол № 1 от 5.09.2016 г.

**Рукописный фонд кафедры ХТ ВлГУ**

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### «Математическое описание процессов переработки пластмасс с применением полного двухфакторного эксперимента»

**Цель работы:** рассчитать уравнения регрессии при 2х факторном эксперименте.

#### Теоретическая часть

*Эксперимент* – это некая совокупность операций, совершаемых над объектом исследования (ОИ) для получения информации о некоторых его свойствах.

*Планирование эксперимента* – это процедура составления плана эксперимента, который максимально подходит заданным требованиям; это некая совокупность действий, которая направлена на формирование стратегии экспериментирования (начиная с момента получения до опытной информации об ОИ, заканчивая построением работоспособной математической модели или определением оптимальных условий); это целенаправленное управление ходом эксперимента, которое реализуется в условиях недостаточного знания механизма изучаемого процесса.

*Целью планирования эксперимента* является определение такой совокупности правил и условий выполнения опытов, которая позволяет получить достоверную и надежную информацию об ОИ с минимальными трудозатратами, а также выразить эту информацию в удобной и компактной форме с количественной оценкой точности.

Первый этап планирования эксперимента для получения линейной модели основан на варьировании факторов на двух уровнях. В этом случае, если число факторов известно, можно сразу найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов. Простая формула, которая для этого используется, уже приводилась:  $N = 2^k$ , где  $N$  – число опытов,  $k$  – число факторов, 2 – число уровней. В общем случае эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называ-

ется полным факторным экспериментом. Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный эксперимент типа  $2^k$ .

Предположим, что изучается влияние ряда факторов  $x_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) на некоторую величину  $y$ . Для этого проводятся эксперименты по определенному плану, который позволяет реализовать все возможные комбинации факторов. Причем каждый фактор рассматривается лишь на двух фиксированных уровнях (верхнем и нижнем). Число всех экспериментов (опытов) в этом случае будет равно  $n = 2^k$ , где  $k$  – количество изучаемых факторов.

Постановка опытов по такому плану называется полным факторным экспериментом типа  $2^k$  (ПФЭ  $2^k$ ). План проведения экспериментов записывается в виде матрицы планирования, в которой в определенном порядке перечисляются различные комбинации факторов на двух уровнях. Например, в таблице 1 приведена матрица планирования ПФЭ  $2^2$  для двух факторов:  $x_1$ ,  $x_2$ . Знак «+» говорит о том, что во время опыта значение фактора устанавливается на верхнем уровне, а знак «-» показывает, что значение фактора устанавливается на нижнем уровне.

Матрица планирования для двух факторов приведена ниже:

№ опыта	$x_1$	$x_2$	$y$
1	-1	-1	$y_1$
2	+1	-1	$y_2$
3	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	$y_4$

При проведении экспериментов получают значения исследуемой величины  $y$  для каждого опыта (или серии опытов). Затем переходят к построению математической модели.

Под моделью понимается вид функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , которая связывает изучаемый параметр со значениями факторов, лежащих в интервале между верхним и нижним уровнями. Эту функцию называют уравнением

регрессии. По накопленному разными исследователями опыту работы с различными моделями можно считать, что самыми простыми моделями являются алгебраические полиномы.

Коэффициенты  $b$  рассчитываются по формулам:

$$y(\text{cp})=b_0=\frac{\sum y_i}{N};$$

$$b_1=0,125 \cdot \sum y_i;$$

$$b_2=0,125 \cdot \sum y_i.$$

Линейное уравнение регрессии относительно новых переменных имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k.$$

Для полного факторного эксперимента типа  $2^k$ :

$$y_1 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2;$$

### Экспериментальная часть:

1. Открыть Excel.
2. Построить таблицу исходных данных:

N опы- та	$x_1$ (ПВХ)	$x_2$ (SiO <sub>2</sub> )	плотность, кг/м <sup>3</sup>	прочность при сжатии, МПа
1	60	250	1800	14
2	80	250	1950	17
3	60	350	2100	28
4	80	350	2200	32

Пример приведен на рис. 1.

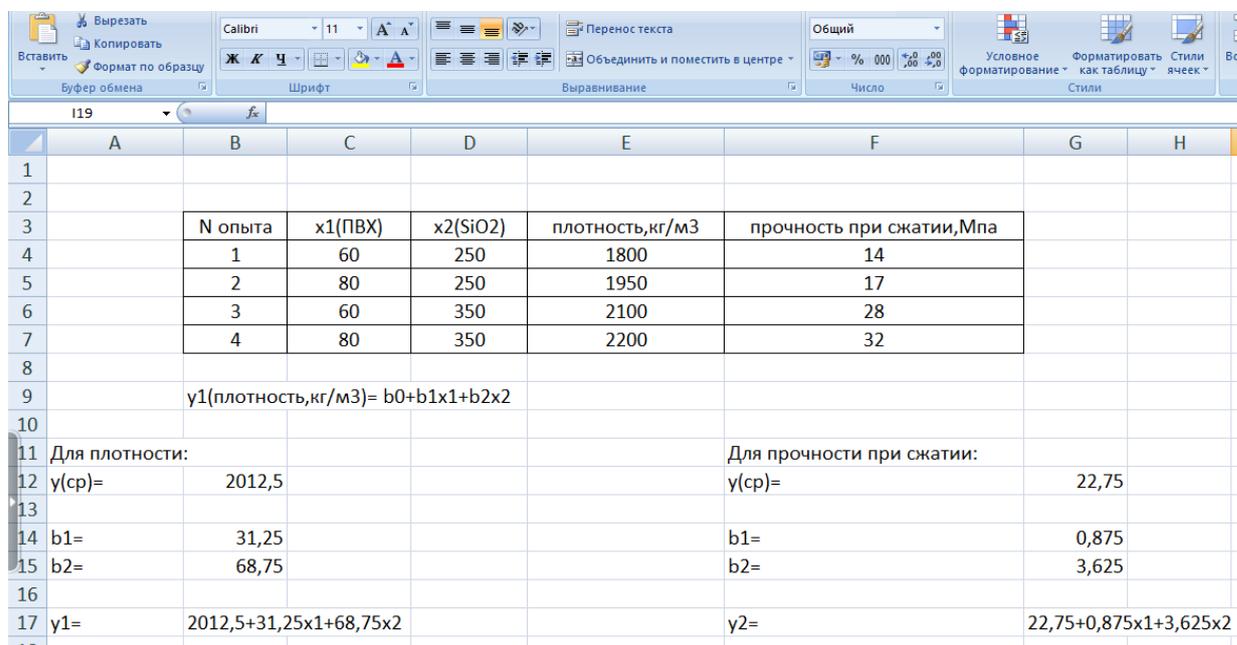
3. Рассчитать коэффициент  $b_0$ , в ячейку для автоматического расчета коэффициента вводим  $y(\text{cp})=b_0 = \text{CPЗНАЧ}(E6;E7;E5;E4)$ ;

4. Рассчитать коэффициент  $b_1$ , в ячейку для автоматического расчета коэффициента вводим  $b_1 = \text{СУММ}(-E4;E5;-E6;E7)*0,125$ ;

5. Рассчитать коэффициент  $b_2$ , в ячейку для автоматического расчета коэффициента вводим  $b_2 = 0,125*\text{СУММ}(-E4;-E5;E6;E7)$ ;

Рассчитываем коэффициенты для значений плотности и прочности при сжатии.

Рис.1. Исходные данные и расчет коэффициентов b:



	A	B	C	D	E	F	G	H	
1									
2									
3		N опыта	x1(ПВХ)	x2(SiO2)	плотность, кг/м3	прочность при сжатии, Мпа			
4		1	60	250	1800	14			
5		2	80	250	1950	17			
6		3	60	350	2100	28			
7		4	80	350	2200	32			
8									
9		y1(плотность, кг/м3)= b0+b1x1+b2x2							
10									
11		Для плотности:			Для прочности при сжатии:				
12		y(ср)=	2012,5			y(ср)=	22,75		
13									
14		b1=	31,25			b1=	0,875		
15		b2=	68,75			b2=	3,625		
16									
17		y1=	2012,5+31,25x1+68,75x2			y2=	22,75+0,875x1+3,625x2		

6. По заданным экспериментальным данным строим таблицу y для плотности:

Вместо значения x подставляем кодированные числа (от -1 до 1) с интервалов 0,1. Пример приведен на рис.2

Рис.2. Построение таблицы для автоматического нахождения

у:

		x2																					
		-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
		250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	
x1	-1	60	1912,5	1919,375	1926,25	1933,125	1940	1946,875	1953,75	1960,625	1967,5	1974,375	1981,25	1988,125	1995	2001,875	2008,75	2015,625	2022,5	2029,375	2036,25	2043,125	2050
	-0,9	61	1915,625	1922,5	1929,375	1936,25	1943,125	1950	1956,875	1963,75	1970,625	1977,5	1984,375	1991,25	1998,125	2005	2011,875	2018,75	2025,625	2032,5	2039,375	2046,25	2053,125
	-0,8	62	1918,75	1925,625	1932,5	1939,375	1946,25	1953,125	1960	1966,875	1973,75	1980,625	1987,5	1994,375	2001,25	2008,125	2015	2021,875	2028,75	2035,625	2042,5	2049,375	2056,25
	-0,7	63	1921,875	1928,75	1935,625	1942,5	1949,375	1956,25	1963,125	1970	1976,875	1983,75	1990,625	1997,5	2004,375	2011,25	2018,125	2025	2031,875	2038,75	2045,625	2052,5	2059,375
	-0,6	64	1925	1931,875	1938,75	1945,625	1952,5	1959,375	1966,25	1973,125	1980	1986,875	1993,75	2000,625	2007,5	2014,375	2021,25	2028,125	2035	2041,875	2048,75	2055,625	2062,5
	-0,5	65	1928,125	1935	1941,875	1948,75	1955,625	1962,5	1969,375	1976,25	1983,125	1990	1996,875	2003,75	2010,625	2017,5	2024,375	2031,25	2038,125	2045	2051,875	2058,75	2065,625
	-0,4	66	1931,25	1938,125	1945	1951,875	1958,75	1965,625	1972,5	1979,375	1986,25	1993,125	2000	2006,875	2013,75	2020,625	2027,5	2034,375	2041,25	2048,125	2055	2061,875	2068,75
	-0,3	67	1934,375	1941,25	1948,125	1955	1961,875	1968,75	1975,625	1982,5	1989,375	1996,25	2003,125	2010	2016,875	2023,75	2030,625	2037,5	2044,375	2051,25	2058,125	2065	2071,875
	-0,2	68	1937,5	1944,375	1951,25	1958,125	1965	1971,875	1978,75	1985,625	1992,5	1999,375	2006,25	2013,125	2020	2026,875	2033,75	2040,625	2047,5	2054,375	2061,25	2068,125	2075
	-0,1	69	1940,625	1947,5	1954,375	1961,25	1968,125	1975	1981,875	1988,75	1995,625	2002,5	2009,375	2016,25	2023,125	2030	2036,875	2043,75	2050,625	2057,5	2064,375	2071,25	2078,125
	0	70	1943,75	1950,625	1957,5	1964,375	1971,25	1978,125	1985	1991,875	1998,75	2005,625	2012,5	2019,375	2026,25	2033,125	2040	2046,875	2053,75	2060,625	2067,5	2074,375	2081,25
	0,1	71	1946,875	1953,75	1960,625	1967,5	1974,375	1981,25	1988,125	1995	2001,875	2008,75	2015,625	2022,5	2029,375	2036,25	2043,125	2050	2056,875	2063,75	2070,625	2077,5	2084,375
	0,2	72	1950	1956,875	1963,75	1970,625	1977,5	1984,375	1991,25	1998,125	2005	2011,875	2018,75	2025,625	2032,5	2039,375	2046,25	2053,125	2060	2066,875	2073,75	2080,625	2087,5
	0,3	73	1953,125	1960	1966,875	1973,75	1980,625	1987,5	1994,375	2001,25	2008,125	2015	2021,875	2028,75	2035,625	2042,5	2049,375	2056,25	2063,125	2070	2076,875	2083,75	2090,625
	0,4	74	1956,25	1963,125	1970	1976,875	1983,75	1990,625	1997,5	2004,375	2011,25	2018,125	2025	2031,875	2038,75	2045,625	2052,5	2059,375	2066,25	2073,125	2080	2086,875	2093,75
	0,5	75	1959,375	1966,25	1973,125	1980	1986,875	1993,75	2000,625	2007,5	2014,375	2021,25	2028,125	2035	2041,875	2048,75	2055,625	2062,5	2069,375	2076,25	2083,125	2090	2096,875
	0,6	76	1962,5	1969,375	1976,25	1983,125	1990	1996,875	2003,75	2010,625	2017,5	2024,375	2031,25	2038,125	2045	2051,875	2058,75	2065,625	2072,5	2079,375	2086,25	2093,125	2100
	0,7	77	1965,625	1972,5	1979,375	1986,25	1993,125	2000	2006,875	2013,75	2020,625	2027,5	2034,375	2041,25	2048,125	2055	2061,875	2068,75	2075,625	2082,5	2089,375	2096,25	2103,125
	0,8	78	1968,75	1975,625	1982,5	1989,375	1996,25	2003,125	2010	2016,875	2023,75	2030,625	2037,5	2044,375	2051,25	2058,125	2065	2071,875	2078,75	2085,625	2092,5	2099,375	2106,25
	0,9	79	1971,875	1978,75	1985,625	1992,5	1999,375	2006,25	2013,125	2020	2026,875	2033,75	2040,625	2047,5	2054,375	2061,25	2068,125	2075	2081,875	2088,75	2095,625	2102,5	2109,375
	1	80	1975	1981,875	1988,75	1995,625	2002,5	2009,375	2016,25	2023,125	2030	2036,875	2043,75	2050,625	2057,5	2064,375	2071,25	2078,125	2085	2091,875	2098,75	2105,625	2112,5

Для автоматического построения таблицы для  $x_1=60$  и  $x_2=250$  вводим формулу  $y= СУММ(2012,5;Q27*31,25;(-1)*68,75)$  и тяним уголок вниз по столбцу, машина автоматически посчитает вам столбец. При расчете последующих столбцов необходимо изменить в формуле кодированное число. в формуле приведен пример для -1. Обратите внимание, что **Q27**- это ячейка где располагается ваше кодированное число для  $x_1= -1$ , т.е та ячейка где написано -1. В вашем случае она может находиться в другой ячейке. Все зависит от того где вы расположили таблицу.

Чтобы рассчитать следующий столбец для  $x_1=60$  и  $x_2=255$  необходимо ввести формулу  $y =СУММ(2012,5;Q27*31,25;(-0,9)*68,75)$ . В формуле мы изменили только кодированное число, которое соответствует этому столбцу. Затем тянем уголок вниз для автоматического расчета столбца. Все последующие столбцы рассчитываются по тому же принципу.

### 7. По полученной таблице строим поверхность:

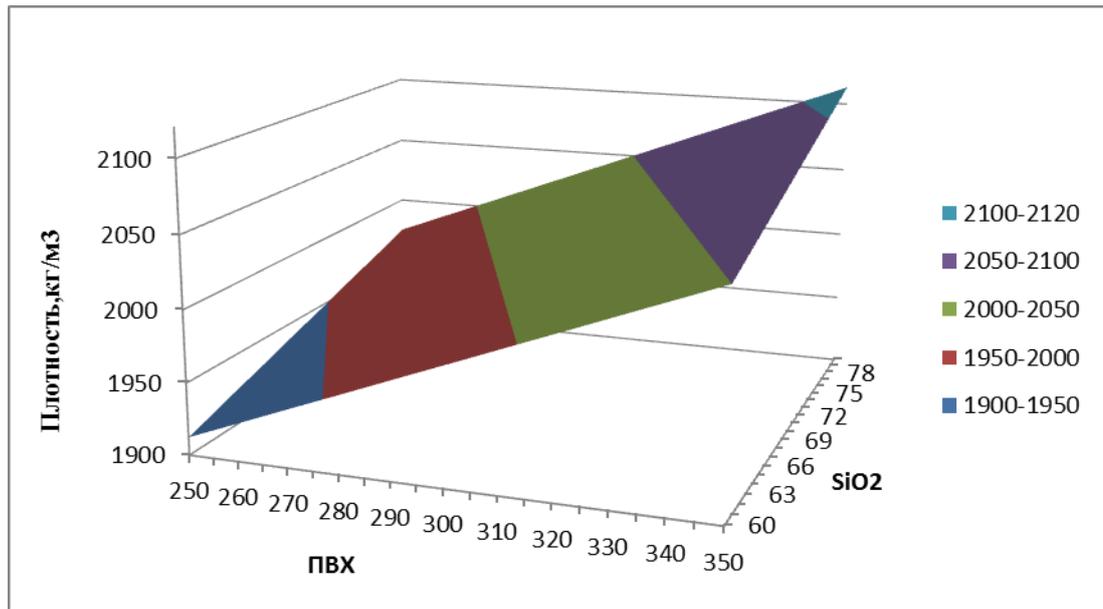
Выделяем данные на таблице по рис.3

*Рис.3 Выделенные значения необходимые для построения поверхности*

		x2																					
		-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
x1	-1	60	1912,5	1919,375	1926,25	1933,125	1940	1946,875	1953,75	1960,625	1967,5	1974,375	1981,25	1988,125	1995	2001,875	2008,75	2015,625	2022,5	2029,375	2036,25	2043,125	2050
	-0,9	61	1915,625	1922,5	1929,375	1936,25	1943,125	1950	1956,875	1963,75	1970,625	1977,5	1984,375	1991,25	1998,125	2005	2011,875	2018,75	2025,625	2032,5	2039,375	2046,25	2053,125
	-0,8	62	1918,75	1925,625	1932,5	1939,375	1946,25	1953,125	1960	1966,875	1973,75	1980,625	1987,5	1994,375	2001,25	2008,125	2015	2021,875	2028,75	2035,625	2042,5	2049,375	2056,25
	-0,7	63	1921,875	1928,75	1935,625	1942,5	1949,375	1956,25	1963,125	1970	1976,875	1983,75	1990,625	1997,5	2004,375	2011,25	2018,125	2025	2031,875	2038,75	2045,625	2052,5	2059,375
	-0,6	64	1925	1931,875	1938,75	1945,625	1952,5	1959,375	1966,25	1973,125	1980	1986,875	1993,75	2000,625	2007,5	2014,375	2021,25	2028,125	2035	2041,875	2048,75	2055,625	2062,5
	-0,5	65	1928,125	1935	1941,875	1948,75	1955,625	1962,5	1969,375	1976,25	1983,125	1990	1996,875	2003,75	2010,625	2017,5	2024,375	2031,25	2038,125	2045	2051,875	2058,75	2065,625
	-0,4	66	1931,25	1938,125	1945	1951,875	1958,75	1965,625	1972,5	1979,375	1986,25	1993,125	2000	2006,875	2013,75	2020,625	2027,5	2034,375	2041,25	2048,125	2055	2061,875	2068,75
	-0,3	67	1934,375	1941,25	1948,125	1955	1961,875	1968,75	1975,625	1982,5	1989,375	1996,25	2003,125	2010	2016,875	2023,75	2030,625	2037,5	2044,375	2051,25	2058,125	2065	2071,875
	-0,2	68	1937,5	1944,375	1951,25	1958,125	1965	1971,875	1978,75	1985,625	1992,5	1999,375	2006,25	2013,125	2020	2026,875	2033,75	2040,625	2047,5	2054,375	2061,25	2068,125	2075
	-0,1	69	1940,625	1947,5	1954,375	1961,25	1968,125	1975	1981,875	1988,75	1995,625	2002,5	2009,375	2016,25	2023,125	2030	2036,875	2043,75	2050,625	2057,5	2064,375	2071,25	2078,125
	0	70	1943,75	1950,625	1957,5	1964,375	1971,25	1978,125	1985	1991,875	1998,75	2005,625	2012,5	2019,375	2026,25	2033,125	2040	2046,875	2053,75	2060,625	2067,5	2074,375	2081,25
0,1	71	1946,875	1953,75	1960,625	1967,5	1974,375	1981,25	1988,125	1995	2001,875	2008,75	2015,625	2022,5	2029,375	2036,25	2043,125	2050	2056,875	2063,75	2070,625	2077,5	2084,375	
0,2	72	1950	1956,875	1963,75	1970,625	1977,5	1984,375	1991,25	1998,125	2005	2011,875	2018,75	2025,625	2032,5	2039,375	2046,25	2053,125	2060	2066,875	2073,75	2080,625	2087,5	
0,3	73	1953,125	1960	1966,875	1973,75	1980,625	1987,5	1994,375	2001,25	2008,125	2015	2021,875	2028,75	2035,625	2042,5	2049,375	2056,25	2063,125	2070	2076,875	2083,75	2090,625	
0,4	74	1956,25	1963,125	1970	1976,875	1983,75	1990,625	1997,5	2004,375	2011,25	2018,125	2025	2031,875	2038,75	2045,625	2052,5	2059,375	2066,25	2073,125	2080	2086,875	2093,75	
0,5	75	1959,375	1966,25	1973,125	1980	1986,875	1993,75	2000,625	2007,5	2014,375	2021,25	2028,125	2035	2041,875	2048,75	2055,625	2062,5	2069,375	2076,25	2083,125	2090	2096,875	
0,6	76	1962,5	1969,375	1976,25	1983,125	1990	1996,875	2003,75	2010,625	2017,5	2024,375	2031,25	2038,125	2045	2051,875	2058,75	2065,625	2072,5	2079,375	2086,25	2093,125	2100	
0,7	77	1965,625	1972,5	1979,375	1986,25	1993,125	2000	2006,875	2013,75	2020,625	2027,5	2034,375	2041,25	2048,125	2055	2061,875	2068,75	2075,625	2082,5	2089,375	2096,25	2103,125	
0,8	78	1968,75	1975,625	1982,5	1989,375	1996,25	2003,125	2010	2016,875	2023,75	2030,625	2037,5	2044,375	2051,25	2058,125	2065	2071,875	2078,75	2085,625	2092,5	2099,375	2106,25	
0,9	79	1971,875	1978,75	1985,625	1992,5	1999,375	2006,25	2013,125	2020	2026,875	2033,75	2040,625	2047,5	2054,375	2061,25	2068,125	2075	2081,875	2088,75	2095,625	2102,5	2109,375	
1	80	1975	1981,875	1988,75	1995,625	2002,5	2009,375	2016,25	2023,125	2030	2036,875	2043,75	2050,625	2057,5	2064,375	2071,25	2078,125	2085	2091,875	2098,75	2105,625	2112,5	

В разделе вставка входим в другие диаграммы и выбираем поверхность. После чего построится поверхность по массиву данных, представленная на рис.4.

Рис.4 Поверхность по массиву для плотности



8. По заданным экспериментальным данным строим таблицу  $u$  для прочности при сжатии.

Вместо значения  $x$  подставляем кодированные числа (от -1 до 1) с интервалов 0,1. Пример приведен на рис.5

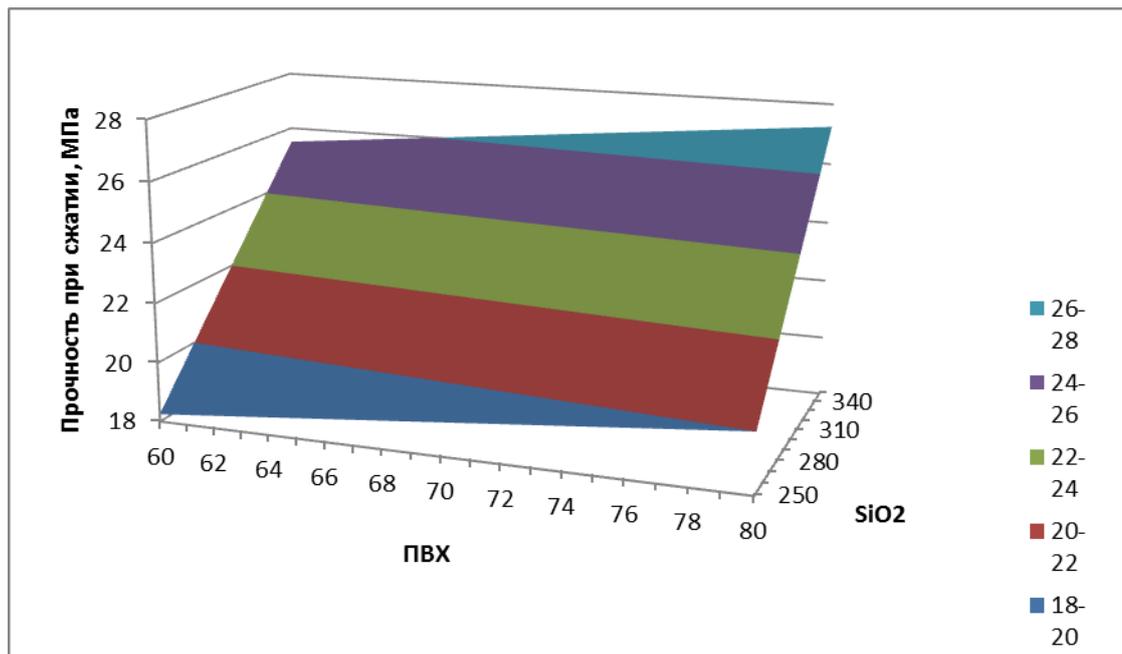
Рис.5. Построение таблицы для автоматического нахождения  $u$ :

		$x_2$																					
		-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
		250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	
$x_1$	-1	60	18,25	18,6125	18,975	19,3375	19,7	20,0625	20,425	20,7875	21,15	21,5125	21,875	22,2375	22,6	22,9625	23,325	23,6875	24,05	24,4125	24,775	25,1375	25,5
	-0,9	61	18,3375	18,7	19,0625	19,425	19,7875	20,15	20,5125	20,875	21,2375	21,6	21,9625	22,325	22,6875	23,05	23,4125	23,775	24,1375	24,5	24,8625	25,225	25,5875
	-0,8	62	18,425	18,7875	19,15	19,5125	19,875	20,2375	20,6	20,9625	21,325	21,6875	22,05	22,4125	22,775	23,1375	23,5	23,8625	24,225	24,5875	24,95	25,3125	25,675
	-0,7	63	18,5125	18,875	19,2375	19,6	19,9625	20,325	20,6875	21,05	21,4125	21,775	22,1375	22,5	22,8625	23,225	23,5875	23,95	24,3125	24,675	25,0375	25,4	25,7625
	-0,6	64	18,6	18,9625	19,325	19,6875	20,05	20,4125	20,775	21,1375	21,5	21,8625	22,225	22,5875	22,95	23,3125	23,675	24,0375	24,4	24,7625	25,125	25,4875	25,85
	-0,5	65	18,6875	19,05	19,4125	19,775	20,1375	20,5	20,8625	21,225	21,5875	21,95	22,3125	22,675	23,0375	23,4	23,7625	24,125	24,4875	24,85	25,2125	25,575	25,9375
	-0,4	66	18,775	19,1375	19,5	19,8625	20,225	20,5875	20,95	21,3125	21,675	22,0375	22,4	22,7625	23,125	23,4875	23,85	24,2125	24,575	24,9375	25,3	25,6625	26,025
	-0,3	67	18,8625	19,225	19,5875	19,95	20,3125	20,675	21,0375	21,4	21,7625	22,125	22,4875	22,85	23,2125	23,575	23,9375	24,3	24,6625	25,025	25,3875	25,75	26,1125
	-0,2	68	18,95	19,3125	19,675	20,0375	20,4	20,7625	21,125	21,4875	21,85	22,2125	22,575	22,9375	23,3	23,6625	24,025	24,3875	24,75	25,1125	25,475	25,8375	26,2
	-0,1	69	19,0375	19,4	19,7625	20,125	20,4875	20,85	21,2125	21,575	21,9375	22,3	22,6625	23,025	23,3875	23,75	24,1125	24,475	24,8375	25,2	25,5625	25,925	26,2875
	0	70	19,125	19,4875	19,85	20,2125	20,575	20,9375	21,3	21,6625	22,025	22,3875	22,75	23,1125	23,475	23,8375	24,2	24,5625	24,925	25,2875	25,65	26,0125	26,375
	0,1	71	19,2125	19,575	19,9375	20,3	20,6625	21,025	21,3875	21,75	22,1125	22,475	22,8375	23,2	23,5625	23,925	24,2875	24,65	25,0125	25,375	25,7375	26,1	26,4625
	0,2	72	19,3	19,6625	20,025	20,3875	20,75	21,1125	21,475	21,8375	22,2	22,5625	22,925	23,2875	23,65	24,0125	24,375	24,7375	25,1	25,4625	25,825	26,1875	26,55
	0,3	73	19,3875	19,75	20,1125	20,475	20,8375	21,2	21,5625	21,925	22,2875	22,65	23,0125	23,375	23,7375	24,1	24,4625	24,825	25,1875	25,55	25,9125	26,275	26,6375
	0,4	74	19,475	19,8375	20,2	20,5625	20,925	21,2875	21,65	22,0125	22,375	22,7375	23,1	23,4625	23,825	24,1875	24,55	24,9125	25,275	25,6375	26	26,3625	26,725
	0,5	75	19,5625	19,925	20,2875	20,65	21,0125	21,375	21,7375	22,1	22,4625	22,825	23,1875	23,55	23,9125	24,275	24,6375	25	25,3625	25,725	26,0875	26,45	26,8125
	0,6	76	19,65	20,0125	20,375	20,7375	21,1	21,4625	21,825	22,1875	22,55	22,9125	23,275	23,6375	24	24,3625	24,725	25,0875	25,45	25,8125	26,175	26,5375	26,9
	0,7	77	19,7375	20,1	20,4625	20,825	21,1875	21,55	21,9125	22,275	22,6375	23	23,3625	23,725	24,0875	24,45	24,8125	25,175	25,5375	25,9	26,2625	26,625	26,9875
	0,8	78	19,825	20,1875	20,55	20,9125	21,275	21,6375	22	22,3625	22,725	23,0875	23,45	23,8125	24,175	24,5375	24,9	25,2625	25,625	25,9875	26,35	26,7125	27,075
	0,9	79	19,9125	20,275	20,6375	21	21,3625	21,725	22,0875	22,45	22,8125	23,175	23,5375	23,9	24,2625	24,625	24,9875	25,35	25,7125	26,075	26,4375	26,8	27,1625
	1	80	20	20,3625	20,725	21,0875	21,45	21,8125	22,175	22,5375	22,9	23,2625	23,625	23,9875	24,35	24,7125	25,075	25,4375	25,8	26,1625	26,525	26,8875	27,25

9. Выполняются те же действия, описанные в пункте 6 только с другими значениями, которые соответствуют для прочности при сжатии.

10. По полученной таблице для значение прочности при сжатии строим поверхность. Выполняем те же действия, которые описаны в пункте 7.

Рис. 6. Поверхность по массиву для прочности при сжатии



### Контрольные вопросы:

- 1) Что такое планирование эксперимента?
- 2) Цель планирования эксперимента?
- 3) Что такое эксперимент?
- 4) Уравнение регрессии?
- 5) Как найти коэффициенты  $b$ ?
- 6) Матрица планирования для двух факторного эксперимента?
- 7) Как построить поверхность отклика?
- 8) Для чего нужно строить поверхность отклика?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### «Применение трехфакторного полного эксперимента на примере переработки пластических масс и композитов»

#### Теоретическая часть

**Цель работы:** освоить принципы составления матрицы планирования полного факторного эксперимента, произвести расчет уравнений регрессии полного трехфакторного эксперимента и определить влияние концентрации исходных веществ на свойства продукта (плотность и прочности при сжатии).

#### Полный факторный эксперимент

План эксперимента указывает расположение опытных точек в  $n$ -мерном пространстве независимых переменных (факторном пространстве), или иными словами, условия всех опытов, которые следует провести. Чаще всего план эксперимента задается в виде матрицы планирования — прямоугольной таблицы, каждая строка которой отвечает условиям определенного опыта, а каждый столбец — значениям какой-то из независимых переменных в разных опытах.

Полным факторным экспериментом называется система опытов, содержащая все возможные неповторяющиеся комбинации уровней варьирования факторов.

*Матрица планирования.* Для удобства вычислений коэффициентов регрессии все факторы в ходе полного факторного эксперимента варьируют на двух уровнях: нижнем  $-1$  и верхнем  $+1$ , соответствующих значениям кодированных переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Таким образом, *полным факторным экспериментом* называется система опытов, содержащая все возможные неповторяющиеся комбинации уровней варьирования факторов.

В таблице приведены условия опытов полного трехфакторного эксперимента. Эти опыты соответствуют в факторном пространстве вершинам куба с центром в начале координат.

Номер опыта	Факторы			Функция отклика
	X1	X2	X3	
1	-1	-1	-1	y1
2	+1	-1	-1	y2
3	-1	+1	-1	y3
4	+1	+1	-1	y4
5	-1	-1	+1	y5
6	+1	-1	+1	y6
7	-1	+1	+1	y7
8	+1	+1	+1	y8

Каждый фактор принимает лишь два значения - варьируется на двух уровнях, верхнем и нижнем. Поэтому общее число экспериментов  $N=2^3$

Из таблицы видны основные принципы построения матриц планирования полного факторного эксперимента:

Матрица планирования ПЭ обладает следующими свойствами:

$$\sum_{j=1}^N X_{j,i} = 0 \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i}^2 = N \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

где  $j$ - номер опыта;  $i$  - номер фактора, ( $1 \leq i \leq m$ ). Свойство, выраженное последним уравнением, называется *ортогональностью* матрицы.

Оно позволяет вычислять коэффициенты регрессии по простым формулам независимо друг от друга:

$$\sum_{j=1}^N X_{j,i} = 0 \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i}^2 = N \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

Расширенная матрица - это матрица, дополненная столбцами, учитывающими взаимодействия факторов. На практике, как правило, ограничиваются парными взаимодействиями.

*Расчет коэффициентов регрессии.* Коэффициенты регрессии рассчитываются методом наименьших квадратов. Основное условие метода формулируется следующим образом: коэффициенты регрессии определяются на основании минимизации суммы квадратов отклонений между экспериментальными  $y$ , и рассчитанными по уравнению регрессии  $yp$  значениями функции отклика:

$$\sum_{j=1}^N X_{j,i} = 0 \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i}^2 = N \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

После определения коэффициентов регрессии определяем значимость этих коэффициентов. Все коэффициенты подразделяются на значимые и незначимые. Для определения значимости коэффициентов регрессии сравнивается погрешность вычисления коэффициента с погрешностью экспериментальных данных.

Вычисляется доверительный интервал:

$$\sum_{j=1}^N X_{j,i} = 0 \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i}^2 = N \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

Здесь  $t_T$  - табличное значение критерия Стьюдента, которое находится по числу степеней свободы и доверительной вероятности. Тогда значимость оценивают, сравнивая абсолютные значения коэффициента и доверительного интервала:

$$\sum_{j=1}^N X_{j,i} = 0 \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i}^2 = N \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

Если это условие выполнено, то  $i$  - коэффициент признаётся значимым.

Незначимые коэффициенты отбрасываются из уравнения регрессии, после чего записывается окончательный вид уравнения регрессии. Это уравнение проверяется на адекватность. Для этого вычисляется оценка дисперсии адекватности :

$$\sum_{j=1}^N X_{j,i} = 0 \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i}^2 = N \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

Здесь  $V$  - число значимых коэффициентов регрессии.

Вычисляют расчётное значение критерия Фишера:

$$\sum_{j=1}^N X_{j,i} = 0 \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i}^2 = N \quad \sum_{j=1}^N X_{j,i} * X_{j,l} = 0$$

По таблице находят табличное значение критерия Фишера. Оно зависит от доверительной вероятности  $P$ , числа степеней свободы  $f_{ад} = N-V$  и  $f = N*(k-1)$ . На основании этого делается вывод об адекватности или неадекватности уравнения регрессии. Уравнение регрессии считается адекватным, если выполняется условие:  $F_p = F_T$ .

Чем меньше  $V$ , тем больше  $N-V$  - в этом одна из главных целей, достигаемых при исключении незначимых членов.

Если уравнение неадекватно, переходят к более сложной модели (например, повышают степень многочлена), для чего обычно требуется постановка добавочных опытов. Иногда можно обойтись без дополнительного эксперимента, если соответствующим образом преобразовать переменные  $y$  или  $x$ .

## Экспериментальная часть:

### 1. Исходные данные:

№ опыта	Факторы						Функции отклика	
	X <sub>1</sub> [ПЭ] масс. ч		X <sub>2</sub> [ЧХЗ-21] масс. ч.		X <sub>3</sub> [стеарат цинка] масс. ч.		Y <sub>1</sub> δ <sub>сж</sub> , мПа	Y <sub>2</sub> ρ, кг/см <sup>3</sup>
1	+1	100	+1	8	+1	2	2,3	150
2	-1	60	+1	8	+1	2	1,4	90
3	+1	100	-1	4	+1	2	2,8	215
4	-1	60	-1	4	+1	2	1,6	103
5	+1	100	+1	8	-1	1	1,8	180
6	-1	60	+1	8	-1	1	1,5	95
7	+1	100	-1	4	-1	1	2,0	190
8	-1	60	-1	4	-1	1	1,7	110

### 2. Расчетная часть:

$$b_0 = \frac{\sum y_1}{8}; \quad b_0 = \frac{\sum y_2}{8}$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum x_1 \cdot y_1; \quad b_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum x_1 \cdot y_2$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum x_2 \cdot y_1; \quad b_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum x_2 \cdot y_2$$

$$b_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum x_3 \cdot y_1; \quad b_3 = \frac{1}{n} \cdot \sum x_3 \cdot y_2$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_1 \cdot x_2 \cdot y_1; \quad b_{1,2} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_1 \cdot x_2 \cdot y_2$$

$$b_{2,3} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_2 \cdot x_3 \cdot y_1; \quad b_{2,3} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_2 \cdot x_3 \cdot y_2$$

$$b_{1,3} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_1 \cdot x_3 \cdot y_1; \quad b_{1,3} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_1 \cdot x_3 \cdot y_2$$

Уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$y_{1,2} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{1,2} x_1 x_2 + b_{2,3} x_2 x_3 + b_{1,3} x_1 x_3$$

Для y<sub>1</sub>:

$$b_0 = \frac{2,3 + 1,4 + 2,8 + 1,6 + 1,8 + 1,5 + 2,0 + 1,7}{8} = 1,8875;$$

$$b_1 = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 2,3) + (-1) \cdot 1,4 + (1 \cdot 2,8) + (-1) \cdot 1,6 + (1 \cdot 1,8) + (-1) \cdot 1,5 + (1 \cdot 2,0) + (-1) \cdot 1,7 = 0,3375$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 2,3) + (1 \cdot 1,4) + (-1) \cdot 2,8 + (-1) \cdot 1,6 + (1 \cdot 1,8) + (1 \cdot 1,5) + (-1) \cdot 2,0 + (-1) \cdot 1,7 = 0,1375$$

$$b_3 = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 2,3) + (1 \cdot 1,4) + (1 \cdot 2,8) + (1 \cdot 1,6) + (-1) \cdot 1,8 + (-1) \cdot 1,5 + (-1) \cdot 2,0 + (-1) \cdot 1,7 = 0,1375$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2,3) + (-1) \cdot 1 \cdot 1,4 + (1 \cdot (-1) \cdot 2,8) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1,6 + (1 \cdot 1 \cdot 1,8) + (1) \cdot 1 \cdot 1,5 + (1 \cdot 1 \cdot 2,0) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1,7 = -0,0375$$

$$b_{2,3} = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2,3) + (1 \cdot 1 \cdot 1,4) + (-1) \cdot 1 \cdot 2,8 + (-1) \cdot 1 \cdot 1,6 + (1 \cdot (-1) \cdot 1,8) + (1 \cdot (-1) \cdot 1,5) + (-1) \cdot (-1) \cdot 2,0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1,7 = -0,0375$$

$$b_{1,3} = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2,3) + (-1) \cdot 1 \cdot 1,4 + (1 \cdot 1 \cdot 2,8) + (-1) \cdot 1 \cdot 1,6 + (1 \cdot (-1) \cdot 1,8) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1,5 + (1 \cdot (-1) \cdot 2,0) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1,7 = 0,1875$$

$$y_1 = 1,8875 + 0,3375 \cdot x_1 - 0,1375 \cdot x_2 + 0,1375 \cdot x_3 - 0,0375 \cdot x_1 x_2 - 0,0375 \cdot x_2 x_3 + 0,1875 \cdot x_1 x_3$$

Для  $y_2$ :

$$b_0 = \frac{150 + 90 + 215 + 103 + 180 + 95 + 190 + 110}{8} = 141,625;$$

$$b_1 = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 150) + (-1) \cdot 90 + (1 \cdot 215) + (-1) \cdot 103 + (1 \cdot 180) + (-1) \cdot 95 + (1 \cdot 190) + (-1) \cdot 110 = 42,125$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 150) + (1 \cdot 90) + (-1) \cdot 215 + (-1) \cdot 103 + (1 \cdot 180) + (1 \cdot 95) + (-1) \cdot 190 + (-1) \cdot 110 = 12,875$$

$$b_3 = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 150) + (1 \cdot 90) + (1 \cdot 215) + (1 \cdot 103) + (-1) \cdot 180 + (-1) \cdot 95 + (-1) \cdot 190 + (-1) \cdot 110 = 2,125$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 150) + (-1) \cdot 1 \cdot 90 + (1 \cdot (-1) \cdot 215) + (-1) \cdot (-1) \cdot 103 + (1 \cdot (-1) \cdot 180) + (-1) \cdot (-1) \cdot 95 + (1 \cdot (-1) \cdot 190) + (-1) \cdot (-1) \cdot 110 = -5,875$$

$$b_{2,3} = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 150) + (-1) \cdot 1 \cdot 90 + (-1) \cdot 1 \cdot 215 + (-1) \cdot (-1) \cdot 103 + (1 \cdot 1 \cdot 180) + (-1) \cdot 1 \cdot 95 + (1 \cdot (-1) \cdot 190) + (-1) \cdot (-1) \cdot 110 = -6,625$$

$$b_{1,3} = \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 150) + (-1) \cdot 1 \cdot 90 + (1 \cdot 1 \cdot 215) + (-1) \cdot 1 \cdot 103 + (1 \cdot (-1) \cdot 180) + (-1) \cdot (-1) \cdot 95 + (1 \cdot (-1) \cdot 190) + (-1) \cdot (-1) \cdot 110 = 0,875$$

$$y_2 = 141,625 + 42,125 \cdot X_1 - 12,875 \cdot X_2 - 2,125 \cdot X_3 - 5,875 \cdot X_1 X_2 - 6,625 \cdot X_2 X_3 + 0,875 \cdot X_1 X_3$$

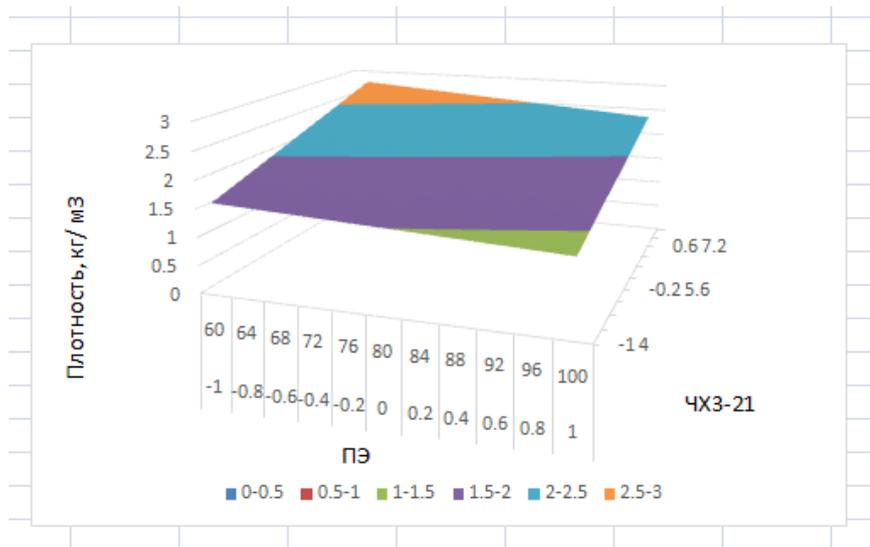
### 3. Машинный эксперимент:

номер опыта	x1	X1 [ПЭ]	X2 [чх3*21]	X2	X3	З[стеарат Zn]	y1 σ, мПа	y2 ркаж, кг/см3
1	1	100	8	1	1	2	2.3	150
2	-1	60	8	1	1	2	1.4	90
3	1	100	4	-1	1	2	2.8	215
4	-1	60	4	-1	1	2	1.6	103
5	1	100	8	1	-1	1	1.8	180
6	-1	60	8	1	-1	1	1.5	95
7	1	100	4	-1	-1	1	2	190
8	-1	60	4	-1	-1	1	1.7	110
y1:								
bo=	1.8875						bo=	141.625
b1=	0.3375		p1=	7.55			b1=	42.125
b2=	-0.1375		p2=	97.125			b2=	-12.875
b3=	0.1375		p3=	248.18			b3=	-2.125
b1.2=	-0.0375						b1.2=	-5.875
b2.3=	-0.0375						b2.3=	-6.625
b1.3=	0.1875						b1.3=	0.875
y1=1,8875+0,3375*x1-0,1375*x2+0,1375*x3-0,0375*x1*x2-0,0375*x2*x3+0,1875*x1*x3								
y2=141,625+42,125*x1-12,875*x2-2,125*x3-5,875*x1*x2-6,625*x2*x3+0,875*x1*x3								

На основе полученных уравнений регрессии формируем массив данных для плотности:

		-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
		60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
-1	4	1.6375	1.61	1.5825	1.555	1.5275	1.5	1.4725	1.445	1.4175	1.39	1.3625
-0.8	4.4	1.75	1.721	1.692	1.663	1.634	1.605	1.576	1.547	1.518	1.489	1.46
-0.6	4.8	1.8625	1.832	1.8015	1.771	1.7405	1.71	1.6795	1.649	1.6185	1.588	1.5575
-0.4	5.2	1.975	1.943	1.911	1.879	1.847	1.815	1.783	1.751	1.719	1.687	1.655
-0.2	5.6	2.0875	2.054	2.0205	1.987	1.9535	1.92	1.8865	1.853	1.8195	1.786	1.7525
0	6	2.2	2.165	2.13	2.095	2.06	2.025	1.99	1.955	1.92	1.885	1.85
0.2	6.4	2.3125	2.276	2.2395	2.203	2.1665	2.13	2.0935	2.057	2.0205	1.984	1.9475
0.4	6.8	2.425	2.387	2.349	2.311	2.273	2.235	2.197	2.159	2.121	2.083	2.045
0.6	7.2	2.5375	2.498	2.4585	2.419	2.3795	2.34	2.3005	2.261	2.2215	2.182	2.1425
0.8	7.6	2.65	2.609	2.568	2.527	2.486	2.445	2.404	2.363	2.322	2.281	2.24
1	8	2.7625	2.72	2.6775	2.635	2.5925	2.55	2.5075	2.465	2.4225	2.38	2.3375

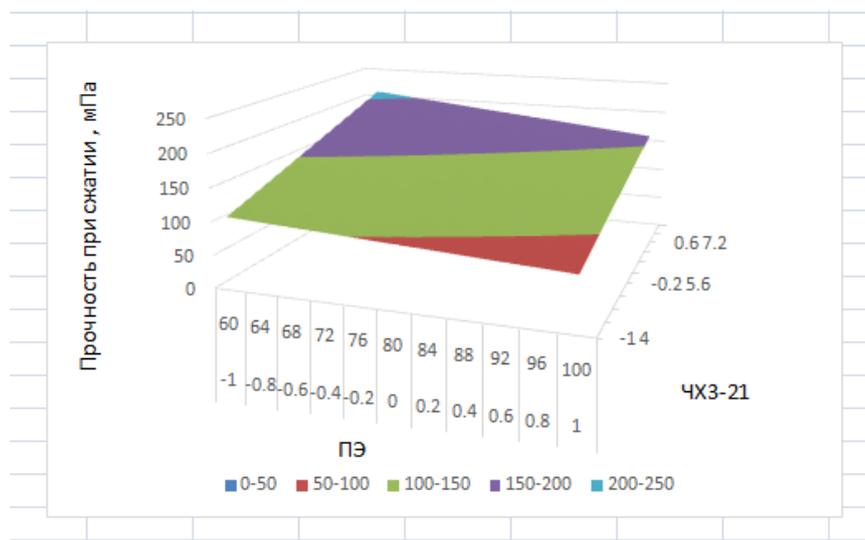
По полученным значениям строим поверхности отклика для плотности:



Также получаем массив данных для прочности при сжатии:

		-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
		60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
-1	4	110.125	107.4	104.675	101.95	99.225	96.5	93.775	91.05	88.325	85.6	82.875
-0.8	4.4	119.9	116.94	113.98	111.02	108.06	105.1	102.14	99.18	96.22	93.26	90.3
-0.6	4.8	129.675	126.48	123.285	120.09	116.895	113.7	110.505	107.31	104.115	100.92	97.725
-0.4	5.2	139.45	136.02	132.59	129.16	125.73	122.3	118.87	115.44	112.01	108.58	105.15
-0.2	5.6	149.225	145.56	141.895	138.23	134.565	130.9	127.235	123.57	119.905	116.24	112.575
0	6	159	155.1	151.2	147.3	143.4	139.5	135.6	131.7	127.8	123.9	120
0.2	6.4	168.775	164.64	160.505	156.37	152.235	148.1	143.965	139.83	135.695	131.56	127.425
0.4	6.8	178.55	174.18	169.81	165.44	161.07	156.7	152.33	147.96	143.59	139.22	134.85
0.6	7.2	188.325	183.72	179.115	174.51	169.905	165.3	160.695	156.09	151.485	146.88	142.275
0.8	7.6	198.1	193.26	188.42	183.58	178.74	173.9	169.06	164.22	159.38	154.54	149.7
1	8	207.875	202.8	197.725	192.65	187.575	182.5	177.425	172.35	167.275	162.2	157.125

На основании полученных данных строим поверхность отклика для прочности при сжатии:



**Сделать вывод о проделанной работе.**

***Контрольные вопросы:***

1. Что такое планирование эксперимента?
2. Цель планирования эксперимента?
3. Что такое полный трехфакторный эксперимент?
4. Каким образом ведут расчет уравнения регрессии?
5. Как найти коэффициенты  $b$ ?
6. Матрица планирования для трехфакторного эксперимента?
7. Каким образом ведут построение поверхности отклика?
8. Какие выводы можно сделать по построенной модели?