

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Институт инновационных технологий
Кафедра «Технология машиностроения»

Конспект лекций

по дисциплине

«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению
13.03.03 «Энергетическое машиностроение»

Составитель:
профессор кафедры ТМС Шевченко А.П.

Владимир 2015

Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 13.03.03 «Энергетическое машиностроение».

Настоящий конспект лекций составлен в соответствии с требованиями ФГОС ВО и ОПОП направления подготовки 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», рабочей программы дисциплины «Теоретическая механика». В качестве рекомендаций для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих ВУЗов России.

Рекомендации предназначены для студентов очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании
НМС направления 13.03.03
Протокол № 6 от 11.11.2015 г.
Рукописный фонд кафедры ТМС ВлГУ

Предисловие

Настоящий курс лекций разработан на основе теоретической части учебников:

1) Шевченко А.П. Практикум по дисциплине "Теоретическая механика" / А. П. Шевченко [и др.]; под ред. А. П. Шевченко — Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ); 2007 . -115с.

<http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1041/3/00513.pdf>;

2) Теоретическая механика: методические указания к лабораторным работам, составители: А.П. Шевченко, Л.Ф. Метлина. Владим. гос. ун-т – Владимир, 2010 – 94с.

<http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1373/3/00776.pdf>

А также на основе учебника:

Новожилов А. И. Краткий курс теоретической механики учеб. пособие для вузов / А. И. Новожилов; под ред. В. Н. Филимонова.— Изд. 2-е, перераб. и доп.— Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ), 2006.— 241с.

<http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/2816/1/00328.pdf>

ОГЛАВЛЕНИЕ КУРСА ЛЕКЦИЙ

Стр.

Введение.....	
<u>Лекция №1</u>	
4.1. Введение. Законы механики. Две задачи динамики точки.....	
<u>Лекция №2</u>	
4.2. Динамика относительного движения точки.....	
<u>Лекция №3</u>	
5.1. Введение в динамику механической системы. Геометрия масс.....	
<u>Лекция №4</u>	
5.2. Принцип Даламбера.....	
<u>Лекция №5</u>	
5.3.1. Работа сил. Возможные перемещения. Классификация связей.....	
<u>Лекция №6</u>	
5.3.2. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.....	
<u>Лекция №7</u>	
5.4.1. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кёнига.....	
<u>Лекция №8</u>	
5.4.2. Элементы теории силового поля. Силовая функция. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия механической системы.....	
<u>Лекция №9</u>	
5.5.1. Обобщенные координаты. Обобщенные силы.....	
<u>Лекция №10</u>	
5.5.2. Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода.....	
<u>Лекция №11</u>	
6.1. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.....	

Лекция №12

6.2. Теорема о движении центра масс механической системы.

6.3.1. Количество движения материальной точки и механической системы. Импульс силы.....

Лекция №13

6.3.2. Теорема об изменении количества движения механической системы.....

6.4.1. Момент количества движения материальной точки и кинетический момент механической системы относительно центра и оси.....

Лекция №14

6.4.2. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.....

Лекция №15

7.1.1. Понятия свободных колебаний, малые свободные колебания системы. Период и амплитуда колебаний.....

Лекция №16

7.1.2. Уравнение малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы.....

7.2.1. Понятия свободных колебаний системы с двумя или n -степенями свободы. Обобщенные координаты.....

Лекция №17

7.2.2. Собственные частоты и коэффициенты формы малых свободных колебаний системы с двумя или n -степенями свободы

Лекция №18

7.2.3. Вывод уравнений малых свободных колебаний механической системы с двумя или n -степенями свободы.....

ВВЕДЕНИЕ.

Теоретическая механика является древнейшей наукой, обеспечивающей потребности практики. Она относится к разряду естественных наук, образует научную основу современной техники и имеет общеобразовательное значение. Поэтому курс теоретической механики является значимым для формирования профессиональных и общекультурных компетенций у выпускников технических направлений подготовки, в том числе по направлению 13.03.03 «Энергетическое машиностроение» законы, принципы и методы теоретической механики основа всех расчетов при проектировании, производстве и эксплуатации машин, комплексов и оборудования.

Курс лекций подготовлен согласно рабочей программе, разработанной в соответствии с учебным планом подготовки бакалавров направления 13.03.03 «Энергетическое машиностроение» и требованиям ФГОС ВО к реализации основных образовательных программ бакалавриата.

Целью изучения курса «Теоретическая механика» обучение студентов общим закономерностям механического движения материальных точек и механических систем, взаимодействия между ними, основным методам исследования равновесия и движения механических систем. Задачи курса состоят в формировании у выпускников навыков практического использования, производства и эксплуатации машин, оборудования и комплексов.

Теоретическая механика логически связана с физикой и математикой, общетехническими и профессиональными дисциплинами. Эта связь позволяет решать задачи механики и техники широкого круга, на законах и методах теоретической механики базируются такие общетехнические дисциплины: «Сопротивление материалов», «Техническая механика», «Теория механизмов и машин», «Гидравлика» и др., а также профессиональные дисциплины «Механика жидкости и газа», «Динамика машин».

Успешное освоение курса теоретической механики студентами опирается на основные положения высшей математики, включая векторную алгебру, аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию дифференциальных уравнений; физики (основные физические понятия, законы и явления); информатики (численные методы решения литейных алгебраических и дифференциальных уравнений на ЭВМ).

Курс лекций содержит краткие теоретические доказательства некоторых теорем и принципов в силу малого количества часов лекционных часов, отведенных учебным планом

на весь курс теоретической механики. Для углубленного изучения отдельных значимых тем и разделов рекомендуется определенная литература.

Изучение теоретического материала, а также практического его приложения в достаточном объеме невозможно без самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа дает возможность закрепить знания, полученные по рекомендованной литературе в процессе аудиторных занятий и хорошо подготовиться к рейтинг – контролю, устным опросам, к выполнению курсовых или расчетно-графических работ, а также к экзамену.

ПЛАН И ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ЛЕКЦИЙ

Курс лекций

Лекция №1

План лекции

Введение. Законы механики. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Две задачи динамики точки.

Основная часть лекции

Законы динамики Галилея-Ньютона

В кинематике исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом, и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В динамике решается более сложная и важная задача. Определяется движение тел под действием сил, приложенных к ним, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на их движение.

В основе динамики лежат несколько законов. Это известные законы Ньютона. Чтобы их сформулировать, введем несколько понятий.

Первое – материальная точка. Материальной точкой будем называть тело, обладающее массой, размеры которого можно не учитывать при определении его движения. Так что материальная точка на самом деле может оказаться довольно солидных размеров. Все зависит от масштабов пространства, в котором тело движется, и от других обстоятельств.

Второе. Точку будем называть изолированной, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

Теперь можно сформулировать первую аксиому.

Первый закон – закон инерции

Изолированная от внешних воздействий материальная точка движется прямолинейно и равномерно, либо находится в покое, в равновесии.

Правда, при этом возникает вопрос: а относительно чего совершается такое движение? Конечно, наблюдение за таким движением должно вестись из системы отсчета, которая сама движется равномерно и прямолинейно.

Такая система, относительно которой изолированные материальные точки движутся равномерно и прямолинейно, называется инерциальной системой отсчета.

Если материальная точка в такой инерциальной системе не находится в равновесии, то эта точка не будет изолированной. Значит, на нее оказывается действие со стороны других тел, которые выводят ее из состояния равновесия, то есть на нее действуют силы.

Второй закон – закон пропорциональности силы и ускорения

Ускорение материальной точки пропорционально силе действующей на нее и имеет одинаковое с ней направление.

Эту зависимость можно записать в виде формулы $\vec{F} = m\vec{W}$. Коэффициент пропорциональности m называется массой точки.

Если на точку действует несколько сил, то их можно заменить одной силой, равнодействующей $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, и предыдущее равенство записать так:

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_i.$$

Это векторное равенство называется основным уравнением динамики или основной закон динамики.

При свободном падении тела на него действует сила P , сила тяжести, которую вблизи поверхности Земли будем называть весом тела. Если не учитывать другие силы, например сопротивление воздуха, то это будет единственная сила, приложенная к телу. Тогда получим

$mW = P$. Но при этом движении $W = g$, равно ускорению свободного падения. Поэтому массу тела будем определять так: $m = \frac{P}{g}$.

Третий закон – закон равенства действия и противодействия

При действии одного тела на другое возникают две силы, равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к этим телам.

Конечно, нельзя сказать, что эти две силы уравниваются, так как они приложены к разным телам.

Введем понятие силы инерции. Проведем небольшой эксперимент. Попробуем перемещать тяжелое тело по некоторой криволинейной траектории. Сразу обнаружим, что тело сопротивляется изменению направления движения, изменению скорости. Возникает сила со стороны тела, противодействующая силе $\vec{F}$, той, которую мы прикладываем к нему.

Эту силу, с которой материальная точка сопротивляется изменению своего движения, будем называть силой инерции этой точки, $\vec{F}^{\text{ин}}$. По третьей аксиоме она равна и противоположна действующей на точку силе $\vec{F}$, $\vec{F}^{\text{ин}} = -\vec{F}$. Но на основании второй аксиомы $\vec{F} = m\vec{W}$. Поэтому $\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W}$.

Итак, сила инерции материальной точки по величине равна произведению ее массы на ускорение

$$F^{\text{ин}} = mW$$

и направлена в сторону, противоположную вектору ускорения.

Например, при движении точки по кривой линии ускорение $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau$. Поэтому сила инерции

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W} = -m\vec{W}_n - m\vec{W}_\tau = \vec{F}_n^{\text{ин}} + \vec{F}_\tau^{\text{ин}}.$$

То есть ее можно находить как сумму двух сил: нормальной силы инерции и касательной силы инерции (см. рисунок). Причем

$$F_n^{\text{ин}} = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_\tau^{\text{ин}} = m \frac{dv}{dt}.$$

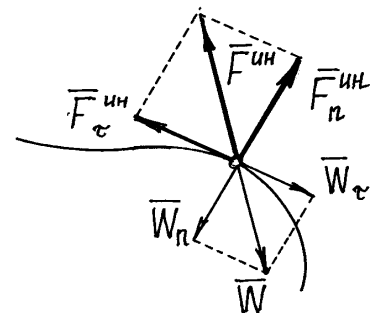


Рис.12.1

Необходимо заметить, что сила инерции материальной точки, как сила противодействия, приложена не к точке, а к тому телу, которое изменяет ее движение. Это очень важно помнить.

Две задачи динамики

Первая задача – по заданной массе точки и уравнениям ее движения определить равнодействующую сил, приложенных к точке.

Вторая задача – по заданной массе точки, силам действующим на нее и начальным условиям движения (начальному положению и начальной скорости точки) определить уравнения движения точки.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовой системе координат

Пусть точка M движется под действием нескольких сил (рис. 13.2). Составим основное уравнение динамики $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$ и спроектируем это векторное равенство на оси x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} mW_x &= \sum X_i, \\ mW_y &= \sum Y_i, \\ mW_z &= \sum Z_i. \end{aligned} \right\}$$

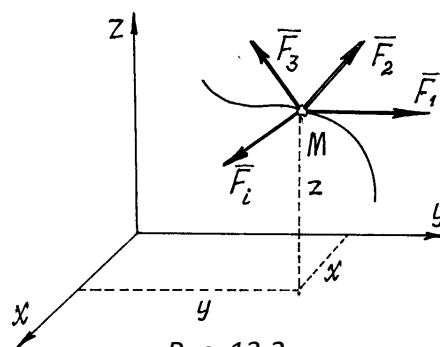


Рис. 13.2

Но проекции ускорения на оси есть вторые производные от координат точки по времени. Поэтому получим

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i, \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i, \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Эти уравнения и являются дифференциальными уравнениями движения материальной точки. Решив их, с учетом начальных условий получим уравнения

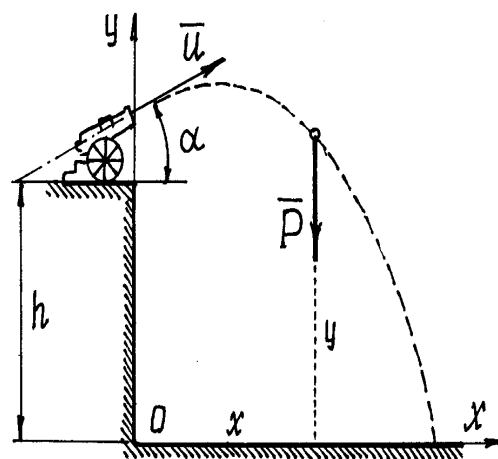


Рис. 13.3

движения точки: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

С помощью дифференциальных уравнений движения решаются две задачи динамики.

Пример 13.2. Из пушки, установленной на высоте h , произвели выстрел под углом α к горизонту (рис. 13.3). Ядро вылетело из ствола орудия со скоростью u . Определим уравнения движения ядра.

Чтобы правильно составить дифференциальные уравнения движения, надо решать подобные задачи по определенной схеме:

а) назначить систему координат (количество осей, их направление и начало координат). Удачно выбранные оси упрощают решение;

б) показать точку в промежуточном положении. При этом надо проследить за тем, чтобы координаты такого положения обязательно были положительными (см. рис. 13.3);

в) показать силы, действующие на точку в этом промежуточном положении (силы инерции не показывать!).

В примере 13.2 – это только сила $\vec{P}$, вес ядра. Сопротивление воздуха учитывать не будем;

г) составить дифференциальные уравнения по формулам (13.1): $\frac{P}{g} \ddot{x} = 0, \quad \frac{P}{g} \ddot{y} = -P$.

Отсюда получим два уравнения: $\ddot{x} = 0$ и $\ddot{y} = -g$;

д) решить дифференциальные уравнения.

Полученные здесь уравнения – линейные уравнения второго порядка, в правой части – постоянные. Решение этих уравнений элементарно.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + D_1, \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} x = C_1 t + C_2, \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + D_1 t + D_2. \end{array} \right\}$$

Осталось найти постоянные интегрирования. Подставляем начальные условия (при $t = 0$ $x = 0$, $y = h$, $\dot{x} = v_x = u \cos \alpha$, $\dot{y} = v_y = u \sin \alpha$) в эти четыре уравнения: $u \cos \alpha = C_1$, $u \sin \alpha = D_1$, $0 = C_2$, $h = D_2$.

Подставляем в уравнения значения постоянных и записываем уравнения движения точки в окончательном виде

$$\left. \begin{array}{l} x = ut \cos \alpha, \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + ut \sin \alpha + h. \end{array} \right\}$$

Имея эти уравнения, как известно из раздела кинематики, можно определить и траекторию движения ядра, и скорость, и ускорение, и положение ядра в любой момент времени.

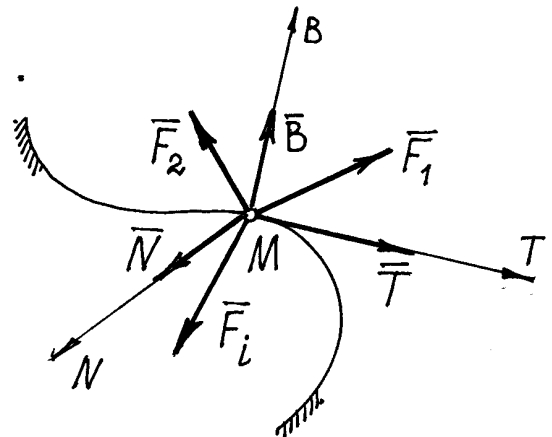
Как видно из этого примера, схема решения задач довольно проста. Сложности могут возникнуть только при решении дифференциальных уравнений, которые могут оказаться непростыми.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественном виде

Координатным способом обычно определяют движение точки, не ограниченное какими-либо условиями, связями. Если на движение точки наложены ограничения на скорость или координаты, то определить такое движение координатным способом совсем непросто. Удобнее использовать естественный способ задания движения.

Определим, например, движение точки по заданной неподвижной линии, по заданной траектории (рис. 13.4).

На точку М, кроме заданных активных сил $\vec{F}_i$, действует реакция линии. Показываем составляющие реакции $\vec{R}$ по естественным осям $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{B}$.



Составим основное уравнение динамики $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$ и спроектируем его на естественные оси

$$\left. \begin{aligned} mW_n &= \sum F_{in} + N, \\ mW_\tau &= \sum F_{i\tau} + T, \\ mW_B &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\}$$

Так как $W_n = \frac{v^2}{\rho}$, $W_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$, $W_B = 0$, то получим дифференциальные уравнения движения, такие

$$\left. \begin{aligned} m \frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{in} + N, \\ m \ddot{s} &= \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Здесь сила $\vec{T}$ равна силе трения. Если линия, по которой движется точка, гладкая, то сила $T = 0$ и тогда второе уравнение будет содержать только одну неизвестную – координату s :

$$m \ddot{s} = \sum F_{i\tau}.$$

Решив это уравнение, получим закон движения точки $s = s(t)$, а значит, при необходимости и скорость, и ускорение. Первое и третье уравнения (13.2) позволят найти реакции $\vec{N}$ и $\vec{B}$.

Пример 13.3. Лыжник спускается по цилиндрической поверхности радиусом r . Определим его движение, пренебрегая сопротивлениями движению (рис. 13.5).

Схема решения задачи та же, что и при координатном способе (пример 13.2). Отличие лишь в выборе осей. Здесь оси N и T движутся вместе с лыжником. Так как траектория –

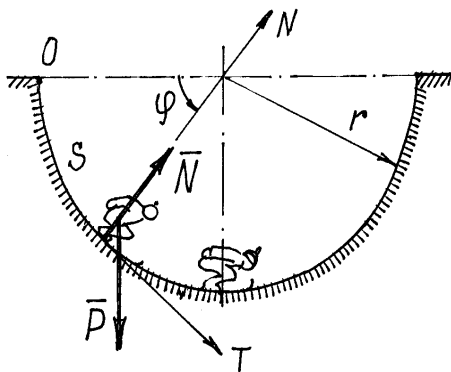


Рис. 13.5

плоская линия, то ось B , направленную по бинормали, показывать не нужно (проекции на ось B действующих на лыжника сил будут равны нулю).

Дифференциальные уравнения по формуле (13.2) получим такие

$$\frac{D}{g} \ddot{s} = P \cos \varphi; \quad \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = N - P \sin \varphi. \quad (13.3)$$

Первое уравнение получилось нелинейным:

$\ddot{s} = g \cos \varphi$. Так как $s = r\varphi$, то его можно переписать

так: $\ddot{\varphi} = \frac{g}{r} \cos \varphi$. Такое уравнение можно один раз проинтегрировать. Запишем

$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$. Тогда в дифференциальном уравнении переменные

разделятся $d\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \cos \varphi \cdot d\varphi$. Интегрирование дает решение $\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \sin \varphi + C_1$. Так

как при $t = 0$ $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = \omega_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и $\dot{\varphi} = \sqrt{2 \frac{g}{r}} \sin \varphi$, а $\dot{s} = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr \sin \varphi}$.

К сожалению, в элементарных функциях второй интеграл найти невозможно. Но и полученное решение позволяет сделать некоторые выводы. Можно найти скорость лыжника в любом положении как функцию угла φ . Так в нижнем положении, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$. А из второго уравнения (13.3) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ можно определить давление:

$$N = P + \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = P + \frac{P}{g} \frac{2gr}{r} = 3P. \text{ То есть давление на лыжника в нижнем положении}$$

равно его трехкратному весу.

Лекция №2

План лекции

Динамика относительного движения точки. Основное уравнение динамики относительного движения. Частные случаи. Принцип относительности классической механики.

Основная часть лекции

Относительное движение материальной точки

В предыдущем параграфе показано было, как определяется движение точки относительно неподвижной системы отсчета, абсолютное движение. Нередко приходится исследовать движение материальной точки относительно системы, которая сама движется и довольно сложным образом.

Точка М (рис. 13.6) под действием некоторых $\vec{F}_i$ совершает сложное движение. Абсолютное определяется координатами x, y, z , относительное – координатами x_1, y_1, z_1 .

Составим основное уравнение динамики для точки: $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$, где абсолютное ускорение

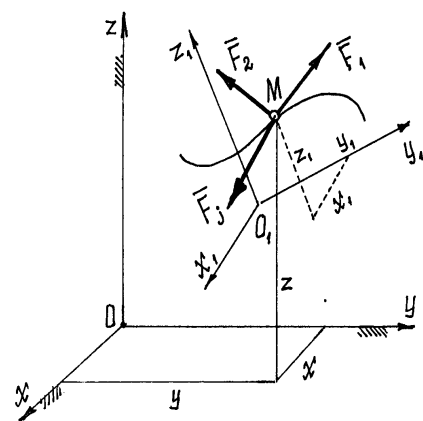


Рис. 13.6

сил

$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c$. Поэтому уравнение будет $m(\vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c) = \sum \vec{F}_i$ или $m\vec{W}_r = \sum \vec{F}_i - m\vec{W}_e - m\vec{W}_c$.

Но $(-m\vec{W}_e) = \vec{F}_e^{\text{ин}}$ – переносная сила инерции, $(-m\vec{W}_c) = \vec{F}_c^{\text{ин}}$ – кориолисова сила инерции. Поэтому основное уравнение динамики для относительного движения запишем так:

$$m\vec{W}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_e^{\text{ин}} + \vec{F}_c^{\text{ин}}. \quad (13.4)$$

Спроектировав это векторное равенство на подвижные оси x_1, y_1, z_1 , имея в виду, что проекции вектора ускорения на оси – есть вторые производные от соответствующих координат по времени, получим дифференциальные уравнения относительного движения

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \sum X_i + X_e^{\text{ин}} + X_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{y}_1 &= \sum Y_i + Y_e^{\text{ин}} + Y_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{z}_1 &= \sum Z_i + Z_e^{\text{ин}} + Z_c^{\text{ин}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями абсолютного движения (13.1), замечаем, что *относительное движение материальной точки определяется такими же методами, что и абсолютное, надо лишь кроме обычных сил учесть переносную силу инерции и кориолисову силу инерции.*

Если переносное движение поступательное, равномерное и прямолинейное, то есть подвижная система инерциальная, то ускорения $\vec{W}_e = 0$ и $\vec{W}_c = 0$. Значит, $\vec{F}_e^{\text{ин}} = 0$, $\vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$ и дифференциальные уравнения (13.5) будут точно совпадать с дифференциальными уравнениями абсолютного движения (13.1). Следовательно, *движение точки во всех инерциальных системах описывается аналогичными законами* (отличаются только постоянными интегрирования, зависящими от начальных условий).

Поэтому невозможно установить, наблюдая за движением точки, движется система поступательно, равномерно и прямолинейно или находится в покое. Этот вывод впервые был сделан Г. Галилеем и называется его именем – принцип относительности Галилея.

Пример 13.4. Вагон движется с постоянным ускорением $\vec{W}$. Определим траекторию движения предмета, упавшего с полки высотой h , которую увидит наблюдатель, пассажир, сидящий в вагоне (рис. 13.7).

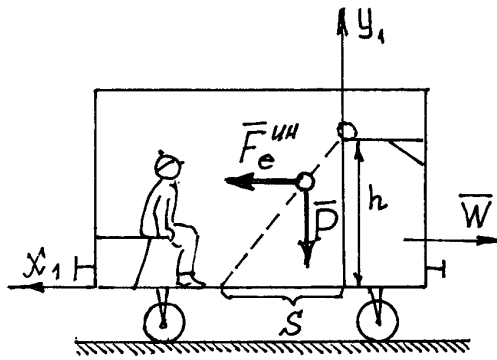


Рис. 13.7

Порядок решения задачи тот же, что и при определении абсолютного движения. Только оси надо провести по вагону и учесть кроме веса предмета $\vec{P}$ переносную силу инерции $F_e^{\text{ин}} = m \cdot W_e = \frac{P}{g} W$ (кориолисова сила инерции $\vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$, переносное движение поступательное).

Дифференциальные уравнения относительного движения получаются такими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_1 &= F_e^{\text{ин}}, \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_1 &= -P, \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= W, \\ \ddot{y}_1 &= -g. \end{aligned} \right\}$$

Решение этих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Wt + C_1, & x_1 &= \frac{1}{2} Wt^2 + C_1 t + C_2, \\ \dot{y}_1 &= -gt + D_1, & y_1 &= -\frac{1}{2} gt^2 + D_1 t + D_2. \end{aligned}$$

Используя начальные условия (при $t = 0$ $x_1 = 0$, $y_1 = h$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$, так как $v_r = 0$), найдем постоянные интегрирования: $C_1 = C_2 = D_1 = 0$, $D_2 = h$. Поэтому уравнения движения:

$x_1 = \frac{1}{2} Wt^2$, $y_1 = h - \frac{1}{2} gt^2$. Траекторию движения получим, исключив параметр t :

$y_1 = h - \frac{g}{W} x_1$. Это уравнение прямой (рис. 13.7). Предмет упадет на пол вагона на

расстоянии $s = h \frac{W}{g}$ от края полки (при $y_1 = 0$ $\hat{e}\hat{i}\hat{i}\hat{d}\hat{a}\hat{e}\hat{i}\hat{a}\hat{d}\hat{a}$ $x_1 = s$).

Если вагон будет двигаться равномерно ($W = 0$), то $s = 0$. Наблюдатель увидит траекторию – вертикальную прямую, такую же, как и при неподвижном вагоне.

Пример 13.5. Внутри трубки, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$ вокруг вертикальной оси, находится шарик М, привязанный нитью длиной a к оси вращения (рис. 13.8). Определим движение шарика в трубке после того, как нить оборвется. Соппротивление движению учитывать не будем.

Траектория движения шарика в трубке – прямая. Поэтому для определения этого движения достаточно одной координаты x_1 . Начало координат, точка O , – на оси вращения. В промежуточном положении на шарик действуют силы: вес $\vec{P}$, две составляющие реакции трубки $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$.

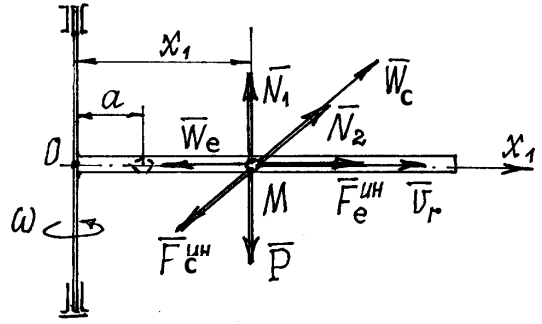


Рис. 13.8

Добавляем переносную силу инерции $F_e^{\text{ин}} = \frac{P}{g} W_e = \frac{P}{g} W_e^n = \frac{P}{g} x_1 \omega^2$, кориолисову

силу инерции $F_n^{\text{эй}} = \frac{P}{g} W_c = \frac{P}{g} \cdot 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \frac{P}{g} \omega \dot{x}_1$ и составляем дифференциальное

уравнение движения: $\frac{P}{g} \ddot{x}_1 = F_e^{\text{ин}}$. Или, после подстановки значения переносной силы

инерции и преобразований: $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$.

Решение такого дифференциального уравнения, как известно, имеет вид: $x_1 = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ и $\dot{x}_1 = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t})$. Так как при $t = 0$ $x_1 = a$ и $v_r = \dot{x}_1 = 0$, то $C_1 + C_2 = a$, $C_1 - C_2 = 0$. Значит $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$ и уравнение движения станет таким:

$$x_1 = \frac{1}{2} a (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \cdot \text{ch} \omega t.$$

Относительная скорость шарика $v_r = \dot{x}_1 = a\omega \cdot \text{sh} \omega t$. А так как $\text{ch}^2 \omega t - \text{sh}^2 \omega t = 1$, то $v_r = a\omega \sqrt{\text{ch}^2 \omega t - 1} = a\omega \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} = \omega \sqrt{x_1^2 - a^2}$. Можно теперь определить относительную скорость шарика в любом положении. Так, шарик вылетит из трубки длиной l со скоростью $v_r = \omega \sqrt{l^2 - a^2}$.

Лекция №3

План лекции

Введение в динамику механической системы. Классификация сил. Центр масс, радиус вектор и координаты центра масс. Момент инерции твердого тела (геометрия масс).

Основная часть лекции

Материальная система

Основные определения и характеристики

Материальной системой будем называть совокупность материальных точек, связанных между собой определенным образом (стержнями, нитями, винтами, пружинами и т.п., в том числе и силами взаимодействия).

Абсолютно твердое тело также является материальной системой, у которой точек бесконечное множество и связаны они между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

Центром масс материальной системы называется геометрическая точка C , положение которой определяется радиусом-вектором $\vec{r}_C$ таким, что

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (14.1)$$

где $\vec{r}_i$ – радиусы-векторы отдельных точек с массами m_i ; $M = \sum m_i$ – масса всей системы.

Координаты центра масс

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M}. \quad (14.2)$$

Умножив числитель и знаменатель в (14.1) и (14.2) на g (ускорение свободного падения) убедимся, что вблизи поверхности Земли ($g = \text{const}$) центр масс совпадает с центром тяжести материальной системы, так как $m_i g = P_i$ – вес точек системы, сила тяжести их.

При исследовании движения материальной системы силы, действующие на ее точки, иногда приходится делить на классы: или на внешние и внутренние, или на активные (задаваемые) и реакции связей.

Внешними силами (обозначать будем $\vec{F}^{(e)}$) являются силы, действующие на точки системы со стороны точек, принадлежащих другим системам.

Внутренние силы ($\vec{F}^{(i)}$) – силы взаимодействия между точками системы. Эти силы попарно равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Поэтому их главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю,

то есть:
$$\vec{R}' = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)} = 0 \text{ и } \vec{M}_O = \sum_{j=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}) = 0.$$

Конечно, при этом внутренние силы не всегда уравниваются: под действием этих сил отдельные точки системы могут перемещаться относительно друг друга.

Реакции связей или просто – *реакции*, это силы, которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы, заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

Активными или задаваемыми силами называются все остальные силы, все кроме реакций.

Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

Моменты инерции тел

Инерционные свойства твердого тела характеризуются не только его массой M , определяющей инерционность при поступательном движении, но и моментом инерции, определяющим инерционность вращательного движения тела.

Моментом инерции тела относительно оси называется сумма произведений массы каждой точки на квадрат расстояния от точки до оси

$$J_z = \sum m_i r_i^2.$$

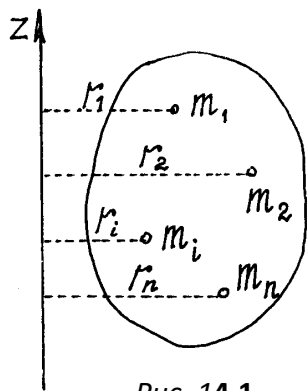


Рис. 14.1

(14.3)

Заметим сразу, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения (рис.14.1).

Для однородных тел простой симметричной формы момент инерции можно найти в справочниках. А моменты инерции некоторых тел, которые чаще всего встречаются при исследовании

движения материальных систем, даны на рис. 14.2.

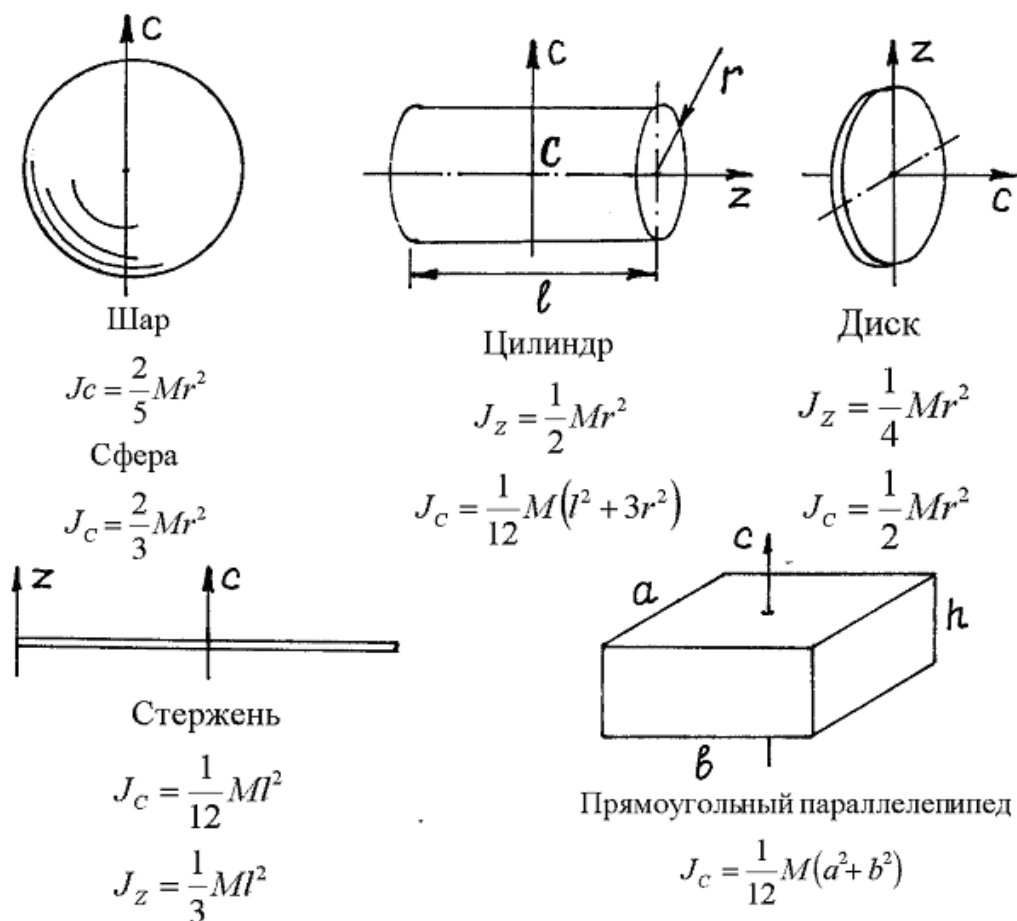


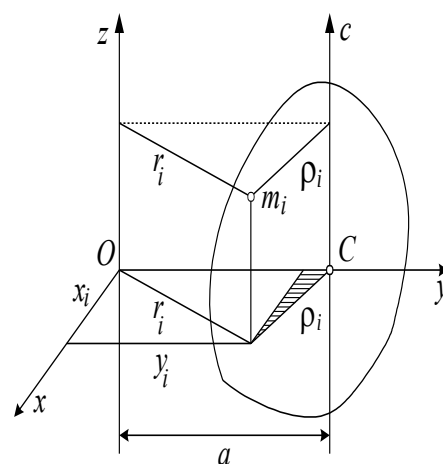
Рис. 14.2

На рисунке даны моменты инерции тел относительно осей симметрии. Но нередко при исследовании движения реальных механизмов приходится определять моменты инерции относительно осей, не совпадающих с осями симметрии. Этому помогают следующие теоремы.

Теорема Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции тела относительно параллельных осей

Найдем зависимость между моментами инерции тела относительно параллельных осей z и C (рис. 14.3). Ось C , проходящая через центр масс тела, называется центральной осью. Расстояние между осями — a .

По определению (14.3) $J_z = \sum m_i r_i^2$, причём $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Но из заштрихованного прямоугольного треугольника (рис.



14.3) следует, что $\rho_i^2 = x_i^2 + (a - y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + a^2 - 2ay_i = r_i^2 + a^2 - 2ay_i$.

Значит $r_i^2 = \rho_i^2 - a^2 + 2ay_i$

и момент инерции относительно оси z $J_z = \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i a^2 + \sum m_i 2ay_i =$
 $= J_c - Ma^2 + 2a \sum m_i y_i$.

Но по формуле (14.2) сумма $\sum m_i y_i = My_c = Ma$.

Поэтому $J_z = J_c - Ma^2 + 2Ma^2 = J_c + Ma^2$.

Рис.14.3

Следовательно, момент инерции тела относительно оси z равен сумме момента инерции тела относительно центральной оси C, параллельной оси z, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$J_z = J_c + Ma^2. \quad (14.4)$$

Так, например, момент инерции стержня относительно оси z

(см. рис.14.2) $J_z = \frac{1}{12} Ml^2 + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2$. А момент инерции прямо- угольного

параллелепипеда относительно оси z, проведенной по какому-нибудь вертикальному

ребру $J_z = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) + M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$.

Момент инерции тела относительно произвольной оси

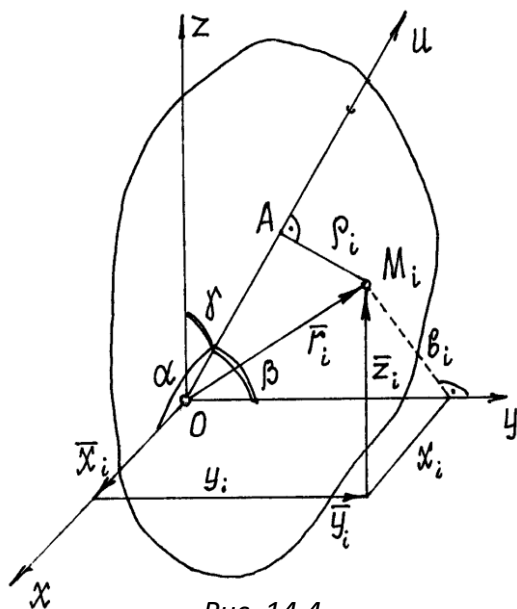


Рис. 14.4

Найдем момент инерции тела относительно оси u, проходящей через некоторую точку O (рис. 14.4).

По определению момент инерции

$$J_u = \sum m_i \rho_i^2.$$

Поместим в точку O начало координатных осей x, y, z. Из прямоугольного треугольника

OAM_i следует $\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2$, где

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

И так как радиус-вектор точки M_i

равен $\vec{r}_i = \vec{x}_i + \vec{y}_i + \vec{z}_i$, то, проектируя это равенство на ось u , получим

$$OA = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ — углы между осью } u \text{ и осями } x, y, z).$$

Как известно из тригонометрии $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= r_i^2 - OA^2 = r_i^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 = \\ &= x_i^2 \cos^2 \alpha + x_i^2 \cos^2 \beta + x_i^2 \cos^2 \gamma + y_i^2 \cos^2 \alpha + y_i^2 \cos^2 \beta + y_i^2 \cos^2 \gamma + z_i^2 \cos^2 \alpha + \\ &+ z_i^2 \cos^2 \beta + z_i^2 \cos^2 \gamma - x_i^2 \cos^2 \alpha - y_i^2 \cos^2 \beta - z_i^2 \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - \\ &- 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

группируя подобные члены, содержащие косинусы одинаковых углов,

$$\rho_i^2 = (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha + (x_i^2 + z_i^2) \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma.$$

Но $y_i^2 + z_i^2 = a_i^2$; $x_i^2 + z_i^2 = b_i^2$; $x_i^2 + y_i^2 = c_i^2$, а a_i, b_i, c_i — расстояния от точки M_i до осей x, y, z соответственно. Поэтому

$$\begin{aligned} J_u &= \sum m_i \rho_i^2 = \left(\sum m_i a_i^2 \right) \cos^2 \alpha + \left(\sum m_i b_i^2 \right) \cos^2 \beta + \left(\sum m_i c_i^2 \right) \cos^2 \gamma - \\ &- 2 \left(\sum m_i x_i y_i \right) \cos \alpha \cos \beta - 2 \left(\sum m_i y_i z_i \right) \cos \beta \cos \gamma - 2 \left(\sum m_i x_i z_i \right) \cos \alpha \cos \gamma \end{aligned}$$

или $J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \alpha \cdot \cos \gamma, \quad (14.5)$ где J_x, J_y, J_z —

моменты инерции тела относительно осей координат; а J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} — центробежные моменты инерции относительно осей, отмеченных в индексах.

Если два центробежных момента инерции, оба содержащих в индексах названия какой-нибудь одной оси, равны нулю, то эта ось называется *главной осью инерции*. Например, если $J_{yz} = 0$ и $J_{xz} = 0$, то ось z — главная ось инерции.

Так как все моменты инерции зависят от того, где находится точка O , от выбора начала координат, то обязательно надо указать, для какой точки определены эти моменты инерции. Если начало координат взято в центре масс C , то все главные оси инерции называются *главными центральными осями инерции*.

Если в данной точке координатные оси являются главными осями инерции (центробежные моменты инерции относительно их равны нулю), то формула (14.5) упрощается

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (14.6)$$

Иногда по некоторым признакам нетрудно найти главные оси инерции тела.

1. Если у однородного тела имеется ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Действительно. Направим координатную ось z по оси симметрии. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно отыскать точку с координатами $(-x_i, -y_i, z_i)$ и поэтому центробежные моменты инерции $J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$ и $J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$. Значит ось z – главная ось инерции и центральная ось, так как центр масс, как известно, находится на оси симметрии. Причем, эта ось будет главной для любой точки, расположенной на оси симметрии.

2. Если у однородного тела имеется плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная ей, будет главной осью инерции для всех точек этой плоскости.

Направим ось z перпендикулярно плоскости симметрии из любой ее точки O , назначив там начало координат. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно найти симметричную ей точку с координатами $(x_i, y_i, -z_i)$. Поэтому центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} будут равны нулю. Значит ось z – главная ось инерции.

Пример. Определим момент инерции диска относительно оси u , расположенной под углом γ к оси симметрии диска z , в плоскости uCz (рис. 14.5).

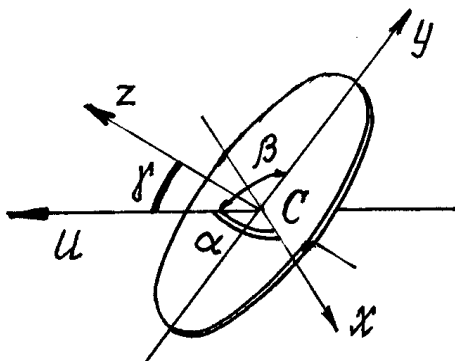


Рис. 14.5

Оси x, y и z – главные центральные оси инерции, так как они являются осями симметрии.

Тогда $J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$, где γ – угол между осями u и z ; угол β – угол между осями u и y , равный $(90^\circ + \gamma)$; угол α – угол между осями u и x , равный 90° . Поэтому

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 90^\circ + J_y \cos^2 (90^\circ + \gamma) + J_z \cos^2 \gamma \\ &= \frac{1}{4} Mr^2 \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} Mr^2 \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} Mr^2 (\sin^2 \gamma + 2 \cos^2 \gamma) \end{aligned}$$

Лекция №4

План лекции

Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру при различных видах движения. Главный вектор и главный момент сил инерции точек тела.

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера для материальной точки

Запишем для материальной точки массой m второй закон динамики

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$$

или

$$\sum \vec{F}_i - m\vec{W} = 0,$$

где $\vec{F}^{ин} = -m\vec{W}$. Тогда получим

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}^{ин} = 0.$$

Из последней формулы следует принцип Даламбера для материальной точки: если к силам, действующим на материальную точку, условно добавить ее силу инерции, то полученная система сил будет уравновешена.

Принцип Даламбера для механической системы

Применив принцип Даламбера для материальной точки к механической системе, т.е. ко всем точкам механической системы, можно сказать, что если к точкам системы приложить их силы инерции, то система будет находиться в равновесии, а главный вектор всех сил (внешних, внутренних и сил инерции точек) и главный момент их будут равны нулю:

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_j^{(e)} + \sum \vec{F}_j^{(i)} + \sum \vec{F}_j^{ин} = 0,$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{ин}) = 0$$

Сразу заметим, что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю. Поэтому внутренние силы исключаются при исследовании движения материальной системы этим методом.

Из сказанного выше следует метод решения задач динамики, который называют принципом Даламбера. Он заключается в том, что задачу динамики, исследования движения материальной системы, можно решать методами статики, составлением известных уравнений равновесия, учтя силы инерции точек системы.

Но этот удобный метод усложняется определением сил инерции твердых тел. Поэтому следует научиться складывать силы инерции точек тела, находить их главный вектор $\vec{R}'_{ин}$ и главный момент $\vec{M}_O^{ин}$ или равнодействующую $\vec{R}_{ин}$.

Силы инерции твердого тела

Главный вектор сил инерции точек тела $\vec{R}'_{ин} = \sum \vec{F}_i^{ин} = -\sum m_i \vec{W}_i$. Но из определения радиуса-вектора центра масс $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ следует $M\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$. Взяв вторую производную по времени, получим $M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$ или $\sum m_i \vec{W}_i = M\vec{W}_C$.

Поэтому главный вектор сил инерции точек тела при любом его движении

$$\vec{R}'_{ин} = -M\vec{W}_C.$$

То есть модуль главного вектора равен произведению массы тела на ускорение центра масс его $R'_{ин} = MW_C$ и направлен вектор $\vec{R}'_{ин}$ в сторону, противоположную вектору ускорения центра масс.

Прикладывается главный вектор к точке приведения, которую можно назначить в любом месте, то есть он не зависит от выбора этой точки.

С определением главного момента сил инерции возникает немало сложностей. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Твердое тело движется поступательно.

При таком движении главный момент сил инерции можно не определять, а находить сразу равнодействующую этих сил. Как известно, она равна главному вектору $\vec{R}_{ин} = \vec{R}'_{ин} = -M\vec{W}_C$, но имеет определенную точку приложения.

Поскольку при поступательном движении все точки тела имеют равные и параллельные векторы ускорений $\vec{W}_i = \vec{W}_C$, то силы инерции их также будут параллельными и направленными в одну сторону. Но равнодействующая таких параллельных сил приложена к точке, радиус-вектор которой

$$\vec{r} = \frac{\sum F_i^{\text{èí}} \vec{r}_i}{\sum F_i^{\text{èí}}} = \frac{\sum m_i W_i \vec{r}_i}{\sum m_i W_i} = \frac{\sum m_i W_C \vec{r}_i}{\sum m_i W_C} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_C, \text{ равен радиусу-вектору центра масс.}$$

Следовательно, равнодействующая сил инерции точек тела при поступательном движении приложена к центру масс тела, как к центру параллельных сил.

2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z (рис. 16.1).

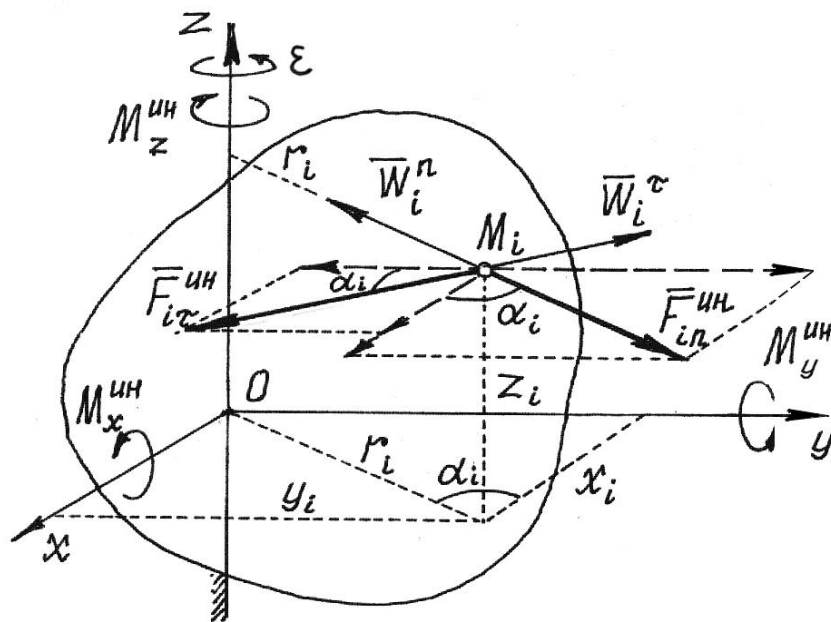


Рис.16.1

Проведем в теле, в какой-нибудь точке О на оси z, еще две оси x и y, перпендикулярные друг другу и оси z, которые вращаются вместе с телом.

Определим касательное и нормальное ускорения некоторой точки M_i : $W_i^\tau = r_i \varepsilon$, $W_i^n = r_i \omega^2$ и соответствующие им силы инерции $F_{i\tau}^{ин} = m_i W_i^\tau$, $F_{in}^{ин} = m_i W_i^n$, направленные противоположно ускорениям.

Тогда главный момент сил инерции всех точек тела относительно оси z

$$M_z^{ин} = \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{ин}) + \sum M_z(\vec{F}_{in}^{ин}) = \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{ин}) = -\sum F_{i\tau}^{ин} \cdot r_i = -\sum m_i W_i^\tau r_i = -\sum m_i r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_z.$$

Итак, главный момент сил инерции точек тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_z^{ин} = J_z \cdot \varepsilon.$$

Направляется он в сторону, противоположную угловому ускорению.

Главный момент сил инерции точек тела относительно оси x, раскладывая силы инерции на две составляющие, параллельные и перпендикулярные оси x (см. рис.16.1),

$$M_x^{ин} = \sum M_x(\vec{F}_{i\tau}^{ин}) + \sum M_x(\vec{F}_{in}^{ин}) = \sum F_{i\tau}^{ин} \cos \alpha_i \cdot z_i - \sum F_{in}^{ин} \sin \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i W_i^\tau \cos \alpha_i \cdot z_i - \sum m_i W_i^n \sin \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i r_i \varepsilon \cdot \cos \alpha_i \cdot z_i - \sum m_i r_i \omega^2 \cdot \sin \alpha_i \cdot z_i.$$

$$\text{А так как } r_i \cos \alpha_i = x_i \text{ и } r_i \sin \alpha_i = y_i, \text{ то } M_x^{ин} = \varepsilon \sum m_i x_i z_i - \omega^2 \sum m_i y_i z_i = \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}.$$

Итак, главный момент сил инерции относительно оси x

$$M_x^{ин} = J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2,$$

где J_{xz} , J_{yz} – центробежные моменты инерции тела относительно соответствующих осей в точке О.

В частности, если тело имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную оси вращения z, то эта ось z будет главной осью инерции $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и тогда $M_x^{ин} = 0$.

Осталось вычислить главный момент сил инерции относительно оси y

$$\begin{aligned}
M_y^{\text{ин}} &= \sum M_y(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) + \sum M_y(\vec{F}_{in}^{\text{ин}}) = \sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \sin \alpha_i \cdot z_i - \sum F_{in}^{\text{ин}} \cos \alpha_i \cdot z_i = \\
&= \sum m_i W_i^\tau \sin \alpha_i \cdot z_i - \sum m_i W_i^n \cos \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i r_i \varepsilon \cdot \sin \alpha_i \cdot z_i - \\
&- \sum m_i r_i \omega^2 \cdot \cos \alpha_i \cdot z_i = \varepsilon \sum m_i y_i z_i - \omega^2 \sum m_i x_i z_i = \varepsilon J_{yz} - \omega^2 J_{xz}.
\end{aligned}$$

Следовательно, главный момент сил инерции точек тела относительно оси у

$$M_y^{\text{ин}} = J_{yz} \varepsilon - J_{xz} \omega^2.$$

Опять, если тело имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, этот момент $M_y^{\text{ин}} = 0$.

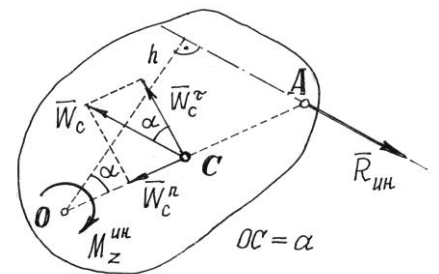
Примечания

а) Определив главные моменты сил инерции точек тела относительно взаимно перпендикулярных осей x, y, z , можно найти главный момент относительно точки O , начала координат,

$$M_O^{\text{ин}} = \sqrt{(M_x^{\text{ин}})^2 + (M_y^{\text{ин}})^2 + (M_z^{\text{ин}})^2},$$

так как главные моменты относительно осей $M_x^{\text{ей}}, M_y^{\text{ей}}, M_z^{\text{ей}}$ являются проекциями вектора $\vec{M}_O^{\text{ин}}$ на оси.

б) Если у тела имеется плоскость материальной симметрии, перпендикулярная оси вращения z , то нетрудно отыскать равнодействующую сил инерции точек тела $\vec{R}_{\text{ин}}$.



Она будет расположена в этой плоскости и равна главному вектору $\vec{R}_{\text{ин}} = \vec{R}'_{\text{ин}} = -M\vec{W}_C$.

Центр масс также находится в этой плоскости.

На рис.16.2 дано сечение тела плоскостью симметрии (точка O – точка пересечения оси вращения z и этой плоскости) и показаны центр масс C , ускорение центра масс $\vec{W}_C$ и направление вектора равнодействующей $\vec{R}_{\text{ин}}$.

Легко находится расстояние h от оси z , от точки O , до линии действия равнодействующей $h = \frac{M_z^{\text{ей}}}{R'_{\text{ей}}} = \frac{J_z \varepsilon}{MW_C}$.

Но лучше найти расстояние ОА от оси до линии действия равнодействующей, проведенное через центр масс С:

$$OA = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{J_z \varepsilon}{MW_C \cos \alpha} = \frac{J_z \varepsilon}{MW_C^\tau} = \frac{J_z \varepsilon}{Ma \varepsilon} = \frac{J_z}{Ma}. \quad (16.1)$$

Это расстояние удобнее тем, что оно не зависит от закона вращения тела, определяется только геометрией его. Следовательно, в этом случае у тела имеется такая точка А, к которой всегда приложена равнодействующая сил инерции точек тела (направление линии действия вектора $\vec{R}_{ин}$, конечно, может быть различным, зависящим от закона вращения, но параллельным вектору ускорения $\vec{W}_C$).

3. Тело совершает плоскопараллельное движение

При плоскопараллельном движении ускорение точки тела есть сумма трех ускорений: ускорения полюса, нормального ускорения и касательного ускорения точки при вращении вокруг полюса. Если полюс – центр масс С, то ускорение i-й то $\vec{W}_i = \vec{W}_C + \vec{W}_{ic}^n + \vec{W}_{ic}^\tau$. Соответственно у точки будут три составляющие силы инерции: $\vec{F}_{ie}^{ин}$, $\vec{F}_{in}^{ин}$, $\vec{F}_{it}^{ин}$ (рис. 16.3).

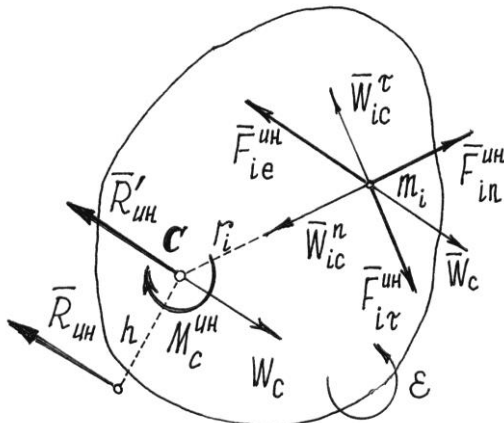


Рис. 16.3

к центру масс, потому что переносное движение тела при плоско-параллельном движении – поступательное.

Вторая сумма также равна нулю, так как линии действия этих сил $\vec{F}_{in}^{ин}$ пересекают ось С. Поэтому

$$\begin{aligned} M_C^{ин} &= \sum M_C(\vec{F}_{it}^{ин}) = -\sum F_{it}^{ин} \cdot r_i = -\sum m_i W_{ic}^\tau \cdot r_i = \\ &= -\sum m_i \cdot r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_C. \end{aligned}$$

Тогда главный момент сил инерции точек тела относительно оси С, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения,

$$M_C^{ин} = \sum M_C(\vec{F}_{ie}^{ин}) + \sum M_C(\vec{F}_{in}^{ин}) + \sum M_C(\vec{F}_{it}^{ин}).$$

Но первая сумма равна нулю, так как по теореме Вариньона она равна моменту равнодействующей сил, которая приложена

Итак, главный момент сил инерции точек тела при плоскопараллельном движении относительно центральной оси С, перпендикулярной плоскости движения, равен произведению момента инерции относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_c^{\text{ин}} = J_c \varepsilon.$$

Направляется этот момент в сторону, противоположную направлению углового ускорения ε .

При желании можно найти равнодействующую сил инерции. Она будет равна главному вектору $\vec{R}_{\text{ин}} = \vec{R}'_{\text{ин}} = -M\vec{W}_c$, параллельна ему, а линия действия ее будет

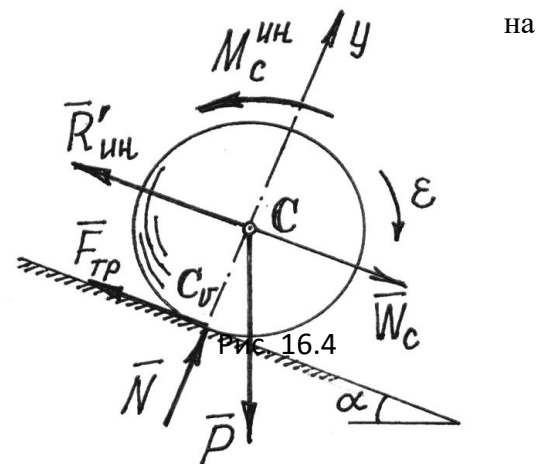
находиться на расстоянии $h = \frac{M_c^{\text{ин}}}{R'_{\text{ин}}}$ от центра масс, отложенном перпендикулярно $\vec{R}'_{\text{ин}}$ в

сторону, определяемую направлением момента $M_c^{\text{ин}}$ (рис.16.3).

Принцип Даламбера удобно использовать при решении задач, в которых требуется определить неизвестные силы и иногда ускорение.

Пример 16.1. Шар весом P скатывается без скольжения по наклонной плоскости. Определим реакции плоскости и ускорение центра масс С.

Показываем внешние силы, действующие на шар: вес $\vec{P}$, реакции $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (трение качения учитывать не будем). Добавляем силы инерции: главный вектор $\vec{R}'_{\text{ин}}$, приложенный к центру масс, и главный момент сил инерции относительно центральной оси (рис.16.4). Величина их



$$R'_{\text{эй}} = MW_C = \frac{P}{g} W_C;$$

$$M_c^{\text{эй}} = J_c \varepsilon = \frac{2}{5} \frac{P}{g} r^2 \frac{W_C}{r} = \frac{2}{5} \frac{P}{g} r W_C.$$

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_{ic_v} = 0; R'_{\text{эй}} \cdot r - Pr \cdot \sin \alpha + M_c^{\text{эй}} = 0;$$

$$\sum M_{ic} = 0; -F_{\text{тр}} \cdot r + M_c^{\text{ин}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; N - P \cos \alpha = 0.$$

Из первого уравнения находим ускорение центра масс. Так как $\frac{P}{g}W_C r - P \cdot r \cdot \sin \alpha + \frac{2}{5} \frac{P}{g} W_C r = 0$, то $W_C = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha$. Из второго уравнения – силу трения $F_{\text{тр}} = \frac{2}{7} P \cdot \sin \alpha$; из третьего – нормальную реакцию $N = P \cos \alpha$.

Так как при движении без скольжения сила трения $F_{\text{тр}} \leq fN$, то шар будет скатываться без скольжения, если выполняется условие $\frac{2}{7} P \sin \alpha \leq fP$ или $f \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$.

Пример 16.2. Однородный стержень весом P и длиной l качается как маятник в вертикальной плоскости, вращаясь вокруг оси O (рис.16.5). Определим движение стержня и реакции оси.

На стержень действуют сила $\vec{P}$ и реакции оси $\vec{X}_O$ и $\vec{Y}_O$. Добавляем силы инерции. Приводим их к точке O на оси вращения. Главный вектор сил инерции, составляющие его,

$$R_{\text{ei}}^n = MW_C^n = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega^2 = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2; \quad R_{\text{ei}}^\tau = MW_C^\tau = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \varepsilon = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \ddot{\varphi}.$$

Главный момент сил инерции относительно оси вращения O

$$\dot{I}_i^{\text{ei}} = J_i \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi}.$$

Направляем его в сторону, противоположную предполагаемому положительному направлению углового ускорения ε .

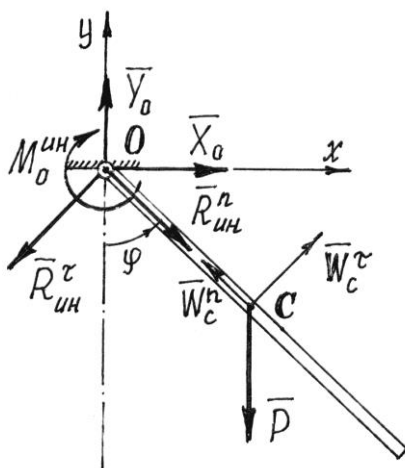
Составляем уравнение равновесия, уравнение моментов сил относительно оси O ,

$$\Sigma M_{io} = 0; \quad -M_O^{\text{ин}} - P \frac{l}{2} \sin \varphi = 0.$$

Подставив значение $M_O^{\text{ин}}$, получим дифференциальное уравнение вращения

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (16.2)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение. Решение его в элементарных функциях не существует. Но первый интеграл можно найти.



Так как $\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{\dot{\phi} d\dot{\phi}}{d\varphi}$, то в уравнении (16.2) переменные разделяются:

$$\dot{\phi} d\dot{\phi} = -\frac{2g}{3l} \sin\varphi \cdot d\varphi. \text{ Проинтегрировав, получим } \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{2g}{3l} \cos\varphi + C_1.$$

Если движение началось из горизонтального положения (при $t = 0$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\phi} = 0), \text{ то постоянная } C_1 = 0. \text{ И тогда } \dot{\phi} = \sqrt{\frac{4g}{3l} \cos\varphi}.$$

Составив уравнения проекций сил на оси x и y ,

$$\sum X_i = 0; \quad X_O - R_{\text{ин}}^{\tau} \cos\varphi + R_{\text{ин}}^n \sin\varphi = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_O - P - R_{\text{ин}}^{\tau} \sin\varphi - R_{\text{ин}}^n \cos\varphi = 0,$$

найдем реакции:

$$X_O = R_{\text{ин}}^{\tau} \cos\varphi - R_{\text{ин}}^n \sin\varphi = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \ddot{\phi} \cos\varphi - \frac{P}{g} \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{P}{g} l \cdot \left(-\frac{2g}{3l} \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{4g}{3l} \cos\varphi \sin\varphi \right) = -\frac{1}{2} P \sin 2\varphi;$$

$$Y_O = P + R_{\text{ин}}^{\tau} \sin\varphi + R_{\text{ин}}^n \cos\varphi = P + \frac{P}{g} \frac{l}{2} \ddot{\phi} \sin\varphi + \frac{P}{g} \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \cos\varphi =$$

$$= P + \frac{P}{g} \frac{l}{2} \cdot \left(-\frac{2g}{3l} \sin^2 \varphi + \frac{4g}{3l} \cos^2 \varphi \right) = \frac{1}{3} P (2 + 3 \cos^2 \varphi).$$

Так, например, в начале движения, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $X_O = 0$ и $Y_O = \frac{2}{3} P$.

А в нижнем положении, при $\varphi = 0$, $X_O = 0$ и $Y_O = \frac{5}{3} P$.

Заметим, что при решении этой задачи вместо главного вектора и главного момента сил инерции можно было показать только равнодействующую сил инерции, равную, конечно, главному вектору и приложенную (см. выражение (16.1)) к точке А на расстоянии

$$OA = \frac{J_O}{M \cdot OC} = \frac{M l^2}{3M \cdot 0,5l} = \frac{2}{3} l.$$

Лекция №5

План лекции

Работа силы. Работа постоянной силы. Элементарная работа силы. Работа на конечном пути. Работа сил тяжести, упругости и силы, проложенной к вращающемуся телу.

Понятия возможных перемещений. Классификация связей. Идеальные связи.

Основная часть лекции

Работа силы

Если точка приложения силы движется по прямолинейной траектории, то работой

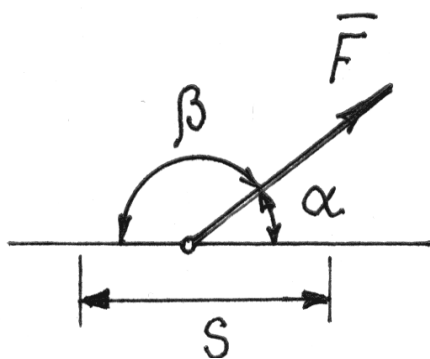


Рис. 15.1

постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на перемещении точки равном s (рис. 15.1), называется выражение

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (15.1)$$

Поскольку от выбора угла α или β зависит знак работы, то договоримся брать всегда *острый* угол α между вектором силы и траекторией. И будем считать работу положительной, если направление силы совпадает с направлением перемещения точки приложения силы из

начального положения в конечное.

Из (15.1) следует, что если вектор силы перпендикулярен траектории, работа силы равна нулю.

Если вектор силы изменяется и точка приложения ее движется по кривой линии, то формула (15.1) неприменима. В этом случае надо сначала вычислить *элементарную работу* силы на перемещении ds (рис. 15.2)

$$dA = F ds \cdot \cos \alpha, \quad (15.2)$$

где α – угол между касательной осью T и вектором силы $\vec{F}$. А затем, предполагая силу F и угол α функциями s , найти криволинейный интеграл на перемещении по дуге из положения M_1 в положение M_2 :

$$A = \int_{(s)} F ds \cos \alpha.$$

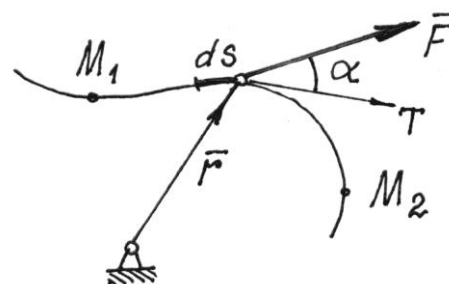


Рис. 15.2

Выражение элементарной работы dA можно преобразовать, полагая $ds = vdt$ и $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$dA = F \cdot v dt \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (15.3)$$

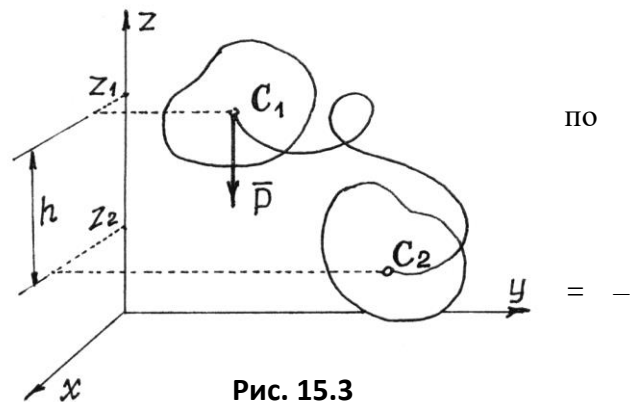
Определим далее радиус-вектор точки M с помощью ее координат: $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ и $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, а вектор силы – с помощью проекций на оси: $\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$. Тогда скалярное произведение двух векторов $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, то есть элементарная работа силы,

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (15.4)$$

Конечно, чтобы проинтегрировать это выражение, надо проекции силы определять как функции координат точки приложения силы.

Пример 15.1. Работа веса тела (силы тяжести).

Пусть тело перемещается вблизи поверхности Земли из одного положения в другое так, что центр тяжести его движется кривой линии (рис.15.3). Элементарная работа силы $\vec{P}$, постоянной и направленной вертикально вниз, по выражению (15.4), $dA = Pdz$. Поэтому



$$A = - \int_{z_1}^{z_2} Pdz = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2) \text{ или } A = Ph. \quad (15.5)$$

Следовательно, работа веса тела (постоянной силы тяжести) не зависит от траектории движения центра тяжести. Определяется лишь высотой, на которую опустится или поднимется центр тяжести.

Пример 5.12. Работа силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

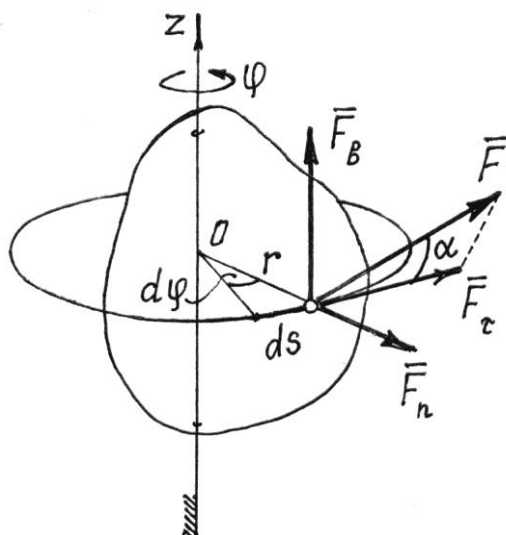


Рис. 15.4

В этом случае (рис.15.4) точка приложения силы $\vec{F}$ движется по дуге окружности радиусом r . Элементарная работа, по формуле (15.2), $dA = F ds \cdot \cos \alpha$, где $ds = r \cdot d\varphi$. Поэтому $dA = Fr d\varphi \cdot \cos \alpha$.

$$\text{Но } F \cdot r \cdot \cos \alpha = F_{\tau} \cdot r = M_z(\vec{F}).$$

Это нетрудно установить, разложив силу на три составляющие (см. рис. 15.4). (Моменты сил $\vec{F}_B$ и $\vec{F}_n$ относительно оси z равны нулю). Значит,

$$dA = M_z(\vec{F}) \cdot d\varphi. \quad (15.6)$$

В частности, если момент силы относительно оси $M_z(\vec{F}) = \text{const}$, работа силы при повороте тела на угол φ равна

$$A = \pm M_z(\vec{F}) \cdot \varphi. \quad (15.7)$$

Знак работы определяется знаками момента силы и угла поворота. Если они одинаковы, работа положительная.

Из формулы (15.7) следует и правило определения работы пары сил. Если пара с моментом m расположена в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела, то ее работа при повороте тела на угол φ

$$A = \pm m\varphi. \quad (15.8)$$

Если же пара сил действует в плоскости, не перпендикулярной оси вращения, то ее надо заменить двумя парами. Первую расположить в плоскости, перпендикулярной оси, другую – в плоскости параллельной оси. Моменты их определяются разложением вектора момента $\vec{m}$ по соответствующим направлениям $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$. Конечно, работу будет совершать только первая пара с моментом $m_1 = m \cdot \cos \gamma$, где γ – угол между вектором $\vec{m}$ и осью вращения z ,

$$A = \pm m\varphi \cdot \cos \gamma. \quad (15.9)$$

Пример 15.3. Работа силы упругости.

Такая сила (рис. 15.5) возникает при деформации упругого тела. Если сила подчиняется закону Гука, то ее величина будет пропорциональна деформации. Так, при

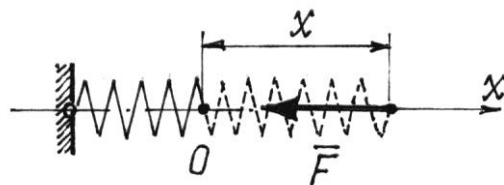


Рис. 15.5

удлинении, например, пружины на величину x сила равна $F = cx$. (Постоянная, коэффициент c , называется жесткостью пружины). Сила эта переменная. Поэтому по (15.4) $dA = -F \cdot dx = -cx \cdot dx$. И, если начало координат O находится на конце недеформированной пружины, то полная работа при перемещении конца пружины от положения x_1 до x_2 ($x_2 > x_1$)

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} cx \cdot dx = -\frac{1}{2} c(x_2^2 - x_1^2). \quad (15.10)$$

Конечно, при увеличении деформации (сжатия или растяжения) работа силы – отрицательная; при уменьшении – положительная.

Этот результат верен для любого упругого тела. И деформацией может быть не только линейное перемещение, но и угол поворота, и объем тела и др. Соответственно изменится и размерность коэффициента жесткости.

Возможные перемещения. Классификация связей

Рассмотрим возможные перемещения точки M на стержне, прикрепленном к неподвижной поверхности шарниром O (рис.17.1,а). Конечно, стержень позволяет точке двигаться по сферической поверхности в любом направлении и на любое расстояние. Все эти перемещения возможны. Возможно, кстати, перемещение и вниз. Но такое перемещение не стоит называть возможным, потому что нарушается связь, стержень.

Кроме того, возможным перемещением будем называть только малое перемещение, настолько малую часть траектории, что ее можно заменить прямой, отрезком касательной.

Теперь можно сформулировать определение возможного перемещения.

Возможным перемещением δs точки материальной системы будем называть ее бесконечно малое перемещение, допускаемое связями этой системы и без нарушения этих связей.

К этому определению следует добавить несколько замечаний.

Первое. Само название таких перемещений показывает, что они только возможны, но не обязательны; что этих перемещений из данного положения системы может быть много; что среди них только одно есть действительное*; что эти перемещения происходят не под действием сил, приложенных к системе, а, так сказать, по нашему желанию.

Второе. За счет малости таких перемещений направляются они по касательной к траектории и имеют, таким образом, направление, совпадающее с вектором скорости. Эту скорость в данном случае также называют *возможной скоростью*, а не действительной.

Третье. При наличии связей между точками материальной системы возможные перемещения этих точек связаны между собой определенными зависимостями, уравнениями связей.

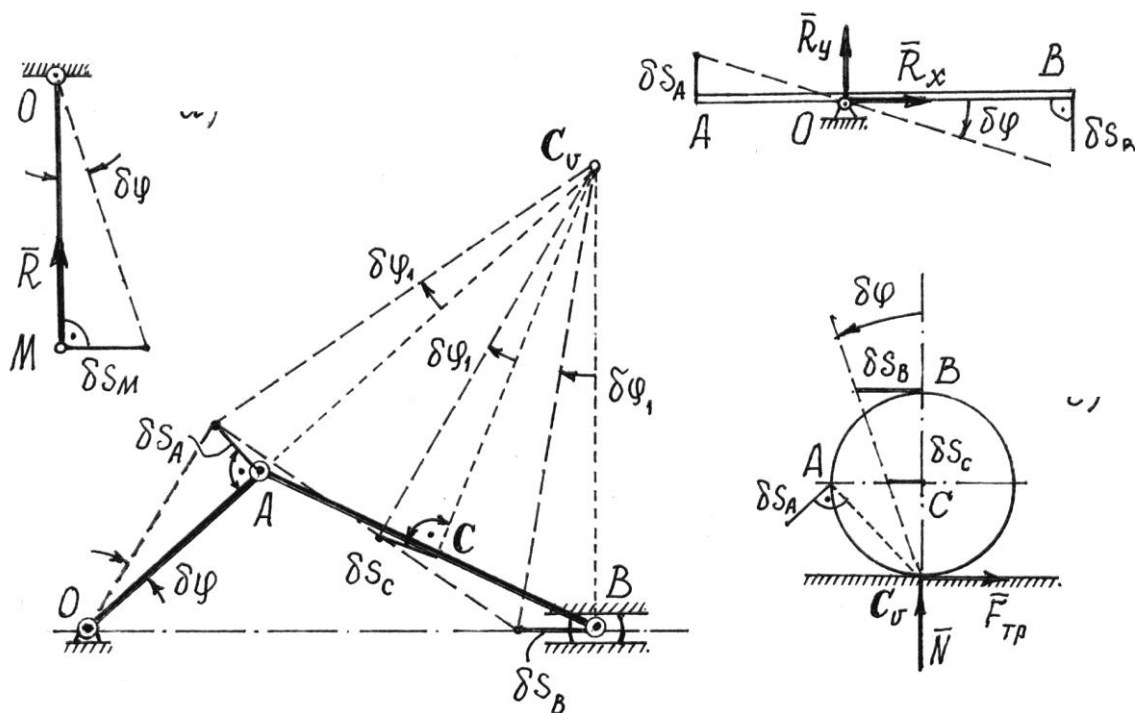
На рис. 17.1 дано несколько примеров возможных перемещений точек некоторых материальных систем. Из этих примеров следует, что возможным перемещением всего тела, вращающегося вокруг оси, является малый угол поворота $\delta\varphi$. И возможные перемещения точек его можно определить с помощью этого угла. Так, например, $\delta s_M = OM \cdot \delta\varphi$;

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi; \quad \delta s_B = OB \cdot \delta\varphi \quad (\text{рис. 17.1, а и 17.1, б}).$$

а)

Так как направления возможных перемещений имеют направления скоростей, то перемещения точек звена AB (рис. 17.1, в) определяются с помощью мгновенного центра скоростей C_v этого звена. А возможное перемещение всего тела при плоскопараллельном движении есть поворот на малый угол $\delta\varphi_1$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Этот угол можно определить.

Рис.
17.1



Так как $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$, то $\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_A}{AC_v} = \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$, а перемещение

ползуна B $\delta s_B = BC_v \cdot \delta\varphi_1 = BC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$ и точки C $\delta s_C = CC_v \delta\varphi_1 =$

$= CC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$. То есть перемещения всех точек этого механизма можно выразить через

одно возможное перемещение, перемещение звена OA , через угол $\delta\varphi$.

Аналогично поворотом на малый угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра скоростей C_v , определяются возможные перемещения точек колеса, которое может катиться без скольжения по неподвижной прямой (рис.17.2, г).

Работу сил, приложенных к материальной системе, на возможном перемещении будем называть *возможной работой*.

Если рассмотреть различные типы материальных систем, можно обнаружить, что элементарная работа реакций многих связей на возможном перемещении окажется равной нулю. Такие связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются *идеальными связями*. К таким связям относятся, например, все связи без трения.

Связи, которые не изменяются со временем, называются *стационарными*.

Есть связи, которые называют или *удерживающими*, или *односторонними* в зависимости от того, препятствуют они перемещению точки во взаимно противоположных направлениях или только в одном.

У некоторых материальных систем встречаются и довольно сложные связи, ограничивающие или только положение системы, координаты ее точек, или еще и скорость их, производные от координат по времени. Первые называют *голономными*, геометрическими, связями; вторые – *неголономными*, кинематическими, неинтегрируемыми. Мы в дальнейшем будем рассматривать системы только с голономными связями.

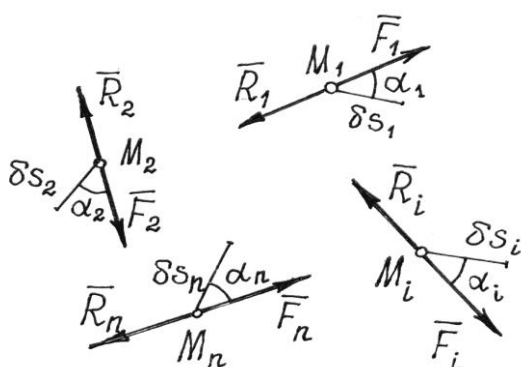
Лекция №6

План лекции

Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Основная часть лекции

Принцип возможных перемещений



Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравниваются. Если $\vec{F}_i$ –

равнодействующая всех активных сил, приложенных к i -й точке, а $\vec{R}_i$ – реакция связей этой точки, то (рис.17.2) $\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$.

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получают перемещения $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3, \dots, \delta s_n$.

Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях.

Так как силы, приложенные к каждой точке, уравновешиваются и $\vec{F}_i = -\vec{R}_i$, то сумма работ этих сил на перемещении δs_i будет равна нулю.

Значит, и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0. \quad (17.1)$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики*.

При равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых сил на всяком возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Конечно, если у системы есть неидеальные связи, например с трением, или упругие, вроде пружины, то в уравнение работ надо добавить возможную работу реакций этих связей.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей $\delta s_i = v_i \delta t$, где время δt – произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (17.1) запишется так: $\sum F_i v_i \delta t \cos \alpha_i = 0$, а, поделив его на δt , получим

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i = 0, \quad (17.2)$$

где α_i – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Равенство (17.2) можно назвать *принципом возможных скоростей*, уравнением мощностей. Оно иногда бывает более удобным, так как используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Этот принцип, общее уравнение статики, позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности находить и неизвестные реакции связей. Естественно, при этом возникает вопрос: как же так, ведь реакции идеальных связей не входят в уравнение работ? Выход прост – надо сделать тело свободным, реакции отнести к

разряду активных сил и затем назначать такие возможные перемещения, чтобы эти неизвестные силы совершали работу.

Общее уравнение статики – довольно эффективный метод и применять его, конечно, надо для исследования равновесия сложных систем; хотя и при решении обычных задач статики он оказывается тоже выгодным.

Пример 17.1. Какую силу F надо приложить к желобу с грузом весом P , чтобы удержать его в равновесии (рис.17.3).

Эту задачу можно решить известными методами статики, составляя уравнения равновесия. Но при этом придется прежде отыскивать усилия в стержнях. Принцип возможных перемещений позволяет найти силу F проще, с помощью общего уравнения статики.

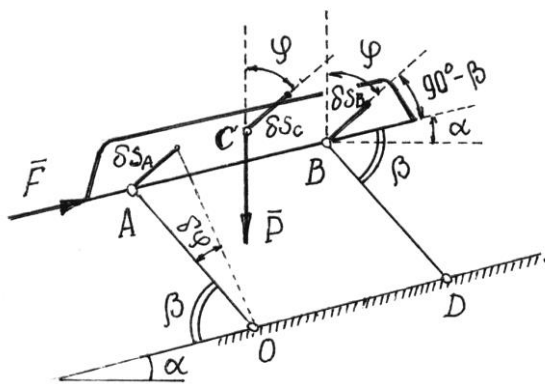


Рис. 17.3

Показываем активные силы $\vec{P}$ и $\vec{F}$. Даем системе возможное перемещение, повернув стержень AO на угол $\delta\varphi$ (см. рис.17.3). Так как желоб совершит поступательное движение, то значит перемещения всех его точек будут одинаковы:

$$\delta s_A = \delta s_B = \delta s_C = AO \cdot \delta\varphi = a \cdot \delta\varphi,$$

$$\text{где } a = AO = BD.$$

Составляем уравнение работ: $F \delta s_A \cos(90^\circ - \beta) - P \delta s_C \cos \beta = 0$. Угол $\varphi = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - \beta) = \beta - \alpha$. Поэтому получим $F a \delta\varphi \cdot \sin \beta - P a \delta\varphi \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$. Отсюда $F = P \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \beta}$.

Пример 17.2. На рис.17.4 изображена конструкция, состоящая из четырех одинаковых Т-образных рам, соединенных шарнирами K, M, Q .

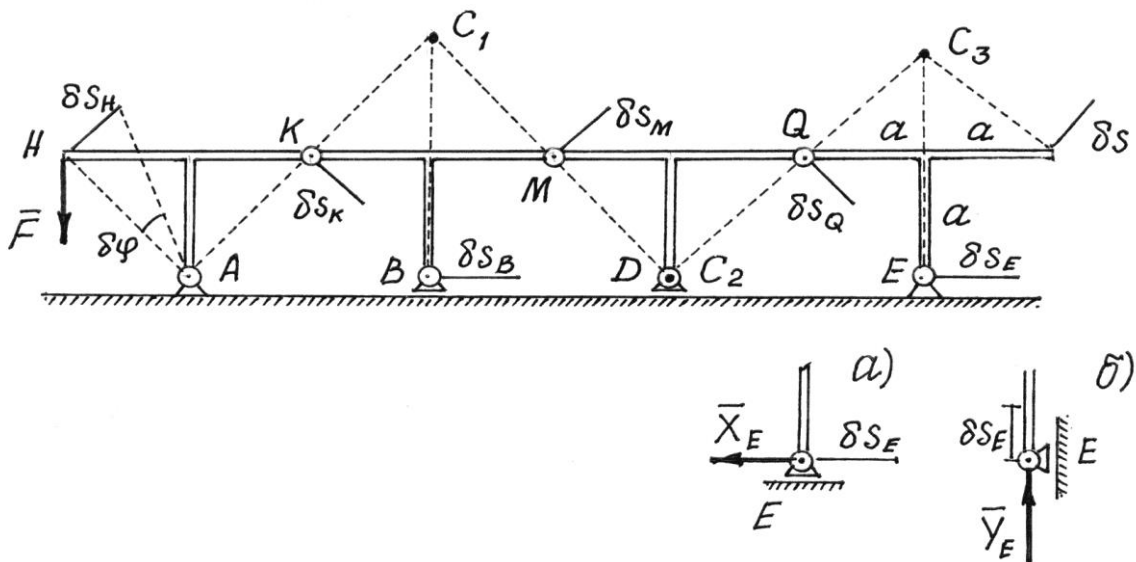


Рис. 17.4

Опоры A и E – шарнирно-неподвижные, B и D – шарнирно-подвижные. Определим горизонтальную составляющую $\vec{O}_E$ реакции опоры E , вызванную силой $\vec{F}$, приложенной к левой раме.

Методы статики дадут довольно сложное и длинное решение, так как придется рассматривать равновесие четырех рам и решать систему из 12 уравнений с 12-ю неизвестными.

Принцип возможных перемещений дает более простое и короткое решение.

Надо изменить конструкцию опоры E . Сделаем ее подвижной, а чтобы система осталась в равновесии, приложим к опоре силу $\vec{X}_E$, ту силу, которую нужно определить (рис.17.4, а).

Даем затем системе возможное перемещение, повернув левую раму вокруг опоры A на угол $\delta\varphi$. С помощью мгновенных центров скоростей C_1 , C_2 и C_3 каждой рамы обнаруживаем,

$$\text{что } \delta s_H = \delta s_K = \delta s_M = \delta s_Q, \text{ а } \frac{\delta s_E}{\delta s_Q} = \frac{EC_3}{QC_3} \text{ или } \delta s_E = \frac{EC_3}{QC_3} \delta s_Q = \frac{2a}{a\sqrt{2}} \delta s_Q = \delta s_Q \cdot \sqrt{2}.$$

Составляем уравнение работ, общее уравнение статики, - $F ds_f \cos 45^\circ - X_E ds_E = 0$ или

$$-F\delta s_H \frac{\sqrt{2}}{2} - X_E \delta s_Q \sqrt{2} = 0. \text{ Отсюда } X_E = -\frac{1}{2}F.$$

Чтобы определить вертикальную составляющую $\vec{Y}_E$ реакции опоры E , ее надо вновь переделать (рис. 17.4, б), дать системе соответствующее возможное перемещение и составить уравнение работ.

Общее уравнение динамики

По принципу Даламбера материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать находящейся в равновесии, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Значит, можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (17.1) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i = 0. \quad (17.3)$$

Или по принципу возможных скоростей (17.2)

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ei}} v_i \cos \beta_i = 0.$$

Эти уравнения называют *общим уравнением динамики*. Оно позволяет решать большой класс задач на исследование движения довольно сложных материальных систем.

Силы инерции точек и твердых тел, составляющих систему, определять уже умеем (см. XVI, §2).

Стоит подчеркнуть еще одно важное достоинство этого метода, общего уравнения динамики, – реакции связей (идеальных) исключаются при исследовании движения системы.

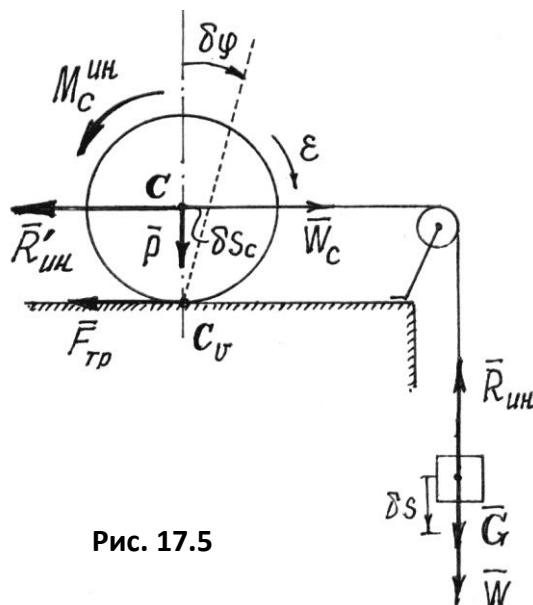


Рис. 17.5

Пример 17.3. Определим ускорение груза G (рис. 17.5). Вес цилиндра – P , радиус – r . Цилиндр катится по плоскости без скольжения.

Показываем задаваемые силы – $\vec{P}$, $\vec{G}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$. Добавляем силы инерции. Сила инерции груза, движущегося поступательно,

$$R_{\text{ин}} = \frac{G}{g} W.$$

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение. Главный вектор сил инерции точек его

$$R'_{\text{ин}} = \frac{P}{g} W_c = \frac{P}{g} W.$$

Главный момент сил инерции относительно центральной оси C

$$M_c^{\text{ин}} = J_c \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \frac{W_c}{r} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r W, \text{ так как } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_c}{r} = \frac{1}{r} \frac{dv_c}{dt} = \frac{W_c}{r}.$$

Даем системе возможное перемещение, сдвинув груз вниз на малую величину δs . Центр цилиндра сместится вправо на величину $\delta s_c = \delta s$, а весь цилиндр повернется вокруг мгновенного центра скоростей C_v на угол

$$\delta \varphi = \frac{\delta s_c}{r} = \frac{\delta s}{r}.$$

Вычисляем работу сил на этих перемещениях и составляем уравнение работ, общее уравнение динамики,

$$G \cdot \delta s - R_{\text{ин}} \cdot \delta s - R'_{\text{ин}} \cdot \delta s_c - M_c^{\text{ин}} \cdot \delta \varphi = 0.$$

Так как $\delta s = \delta s_c = r\delta\varphi$, то, подставив значения и сил инерции, получим уравнение

$$Gr\delta\varphi - \frac{G}{g}Wr \cdot \delta\varphi - \frac{P}{g}Wr \cdot \delta\varphi - \frac{1}{2} \frac{P}{g}Wr \cdot \delta\varphi = 0,$$

из которого находим
$$W = \frac{2G}{2G + 3P}g.$$

Лекция №7

План лекции

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кёнига.
Кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении.

Основная часть лекции

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки – это половина произведения ее массы на квадрат скорости $\frac{1}{2}mv^2$. Кинетическая энергия материальной системы – сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (15.15)$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина, так как $(\vec{v}_i)^2 = v_i^2$. Для твердого тела формула (15.15) принимает более конкретный вид.

1. Кинетическая энергия тела при поступательном движении.

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости $\vec{v}_i = \vec{v}$, то его кинетическая энергия

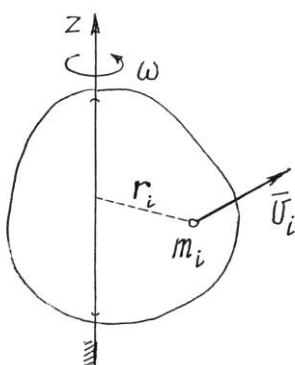


Рис. 15.9

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i v^2}{2} = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} v^2 M \quad \text{или}$$

$$T = \frac{1}{2} M v^2, \quad (15.16)$$

где M – масса тела, v – скорость любой его точки.

2. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

При вращении тела вокруг неподвижной оси скорости его точек $v_i = r_i \omega$ (рис.15.9).

Поэтому кинетическая энергия $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z$ или

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (15.17)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z .

3. Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении.

С помощью мгновенного центра скоростей C_v скорость точки тела определяется как произведение расстояния a_i от точки до C_v на угловую скорость: $v_i = a_i \omega$ (рис.15.10). Поэтому кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i a_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i a_i^2 = \frac{1}{2} J_{C_v} \omega^2,$$

где J_{C_v} – момент инерции тела относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Так как положение C_v на теле меняется, то полученный результат не очень удобен. С помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера (14.4) можно получить более удобное выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} J_{C_v} \omega^2 = \frac{1}{2} (J_c + M a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} M (a \omega)^2$$

или, так как $a \omega = v_C$ (см. рис.15.10),

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (15.18)$$

где v_C – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно центральной оси, оси C , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

4. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

При таком движении скорости точек тела определяются как при вращении вокруг мгновенной оси P : $v_i = h_i \omega$ (рис. 15.11).

Поэтому кинетическая энергия тела

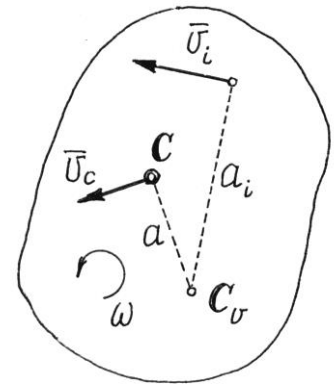


Рис. 15.10

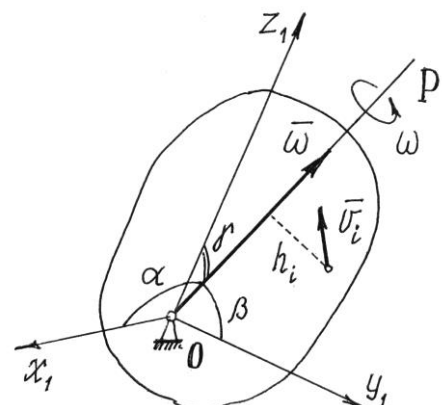


Рис. 15.11

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i h_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i h_i^2$$

$$\text{или} \quad T = \frac{1}{2} J_P \omega^2, \quad (15.19)$$

где J_P – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения P .

Конечно, полученный результат не очень удобен, так как ось P все время меняет свое положение в теле.

Если у тела в точке O можно отыскать главные оси инерции, то по формуле (14.6) получим $J_P = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$. Тогда кинетическая энергия по (15.19) получится такой:

$$T = \frac{1}{2} [J_x (\omega \cos \alpha)^2 + J_y (\omega \cos \beta)^2 + J_z (\omega \cos \gamma)^2]$$

$$\text{или, окончательно,} \quad T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2), \quad (15.20)$$

где J_x, J_y, J_z – моменты инерции тела относительно главных осей инерции x_1, y_1, z_1 в неподвижной точке O ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ на эти оси.

Для самого общего случая движения материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить *теорема Кенига*.

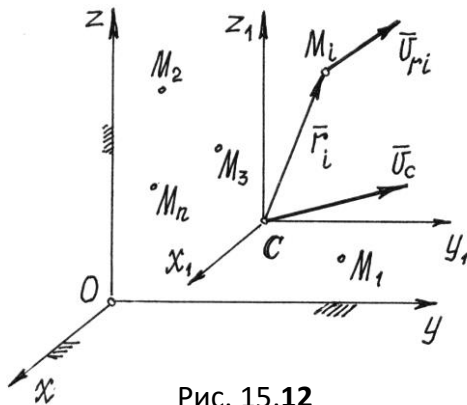


Рис. 15.12

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис. 15.12). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс C и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей x_1, y_1, z_1 . Тогда скорость точек $\vec{v}_i = \vec{v}_{ei} + \vec{v}_{ri}$. Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех

точек равны, равны $\vec{v}_C$. Значит, $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ri}$ и кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{ri})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_C^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{ri} + v_{ri}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i v_C^2 + \sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{ri} + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ri}^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \vec{v}_C \cdot \sum m_i \vec{v}_{ri} + T_r. \end{aligned}$$

По определению центра масс (14.1) его радиус-вектор в подвижной системе $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = 0$ (центр масс находится в начале координат), значит, и $\sum m_i \vec{r}_i = 0$.

Производная по времени от этой суммы также равна нулю

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum m_i \vec{v}_{ri} = 0.$$

Поэтому окончательно кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_r. \quad (15.21)$$

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

Так, при плоскопараллельном движении, по доказанной теореме Кенига, формула (15.18) получается сразу, так как относительное движение есть вращение вокруг центральной оси C .

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс C и относительного – вращения вокруг точки C), по теореме Кенига (15.21) получим

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_P \omega^2 \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2),$$

где J_x, J_y, J_z – главные центральные оси инерции тела.

Лекция №8

План лекции

. Элементы теории силового поля. Силовая функция. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия механической системы

Основная часть лекции

Часть пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от места положения точки, называется *силовым полем*.

Причем, эта сила определяется с помощью силовой функции $u = u(x, y, z)$. Если эта функция не зависит от времени, то такое поле называется *стационарным*. Если во всех точках она одинакова, то поле – *однородное*.

Если же проекции силы на декартовы оси есть частные производные от силовой функции по соответствующим координатам

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (15.11)$$

то такое поле называется *потенциальным*.

Вычислим работу силы потенциального поля при перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 (рис. 15.6).

Элементарная работа по выражению (15.4),

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = du. \quad \text{Это}$$

есть полный дифференциал силовой функции.

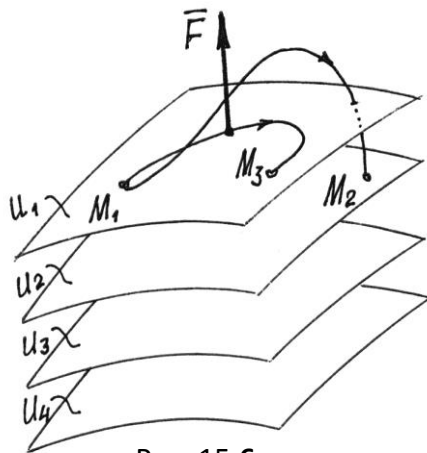


Рис. 15.6

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1, \quad (15.12)$$

где u_2 и u_1 – значения силовой функции в точках M_2 и M_1 .

Следовательно, работа силы потенциального поля не зависит от траектории движения точки, а определяется лишь значениями силовой функции в начальном и конечном положениях точки.

Естественно, если точка вернется в начальное положение, работа силы $\vec{F}$ будет равна нулю. Работа окажется равной нулю и при переходе в другую точку M_3 , если там значение силовой функции будет такое же, как и в начальном положении.

Нетрудно догадаться, что точки с одинаковыми значениями силовой функции будут образовывать целую поверхность. И что силовое поле – это «слоёное пространство», состоящее из таких поверхностей (рис.15.6). Эти поверхности называются *поверхностями уровня* или *эквипотенциальными поверхностями*. Уравнения их: $u(x, y, z) = C$ (C – постоянная, равная значению u в точках этой поверхности). А силовую функцию называют соответственно *потенциалом* поля.

Конечно, эквипотенциальные поверхности не пересекаются. Иначе существовали бы точки поля с неопределенным потенциалом.

Поскольку при перемещении точки по эквипотенциальной поверхности работа силы $\vec{F}$ равна нулю, то вектор силы перпендикулярен поверхности.

Выберем среди этих поверхностей какую-нибудь одну и назовем ее нулевой поверхностью (положим у нее $u = u_0$).

Работа, которую совершит сила $\vec{F}$ при переходе материальной точки из определенного места M на нулевую поверхность, называют потенциальной энергией Π точки в этом определенном месте M .

Следовательно
$$\Pi = A = u_0 - u. \quad (15.13)$$

Заметим, что потенциальная энергия в одной и той же точке поля зависит от выбора нулевой поверхности.

По формуле (15.13) силовая функция $u = u_0 - \Pi$. Поэтому проекции силы на декартовы оси, по (15.11), так как $u_0 = \text{const}$,

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (15.14)$$

и вектор силы
$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) = -\text{grad } \Pi.$$

Рассмотрим несколько потенциальных полей.

1. Поле силы тяжести.

Вблизи поверхности Земли сила тяжести во точках одинакова $\vec{F} = \vec{P}$, равна весу тела. Значит, это силовое поле однородное. Так как при перемещении точки в горизонтальной плоскости работа силы равна нулю, то эквипотенциальными поверхностями будут горизонтальные плоскости (рис. 15.7), а уравнения их: $u = z = C$.

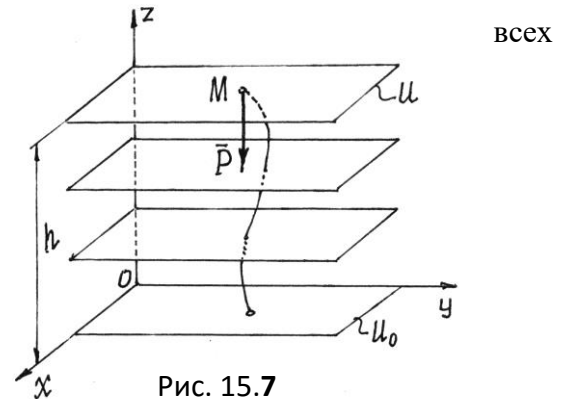


Рис. 15.7

Если нулевой поверхностью назначить плоскость xOy , то потенциальная энергия точки в положении M будет равна работе силы тяжести (15.5):

$$\Pi = A = Ph.$$

2. Поле упругой силы.

При деформации упругого тела, например пружины, появляется сила (см. пример 15.3). То есть около этого тела возникает силовое поле, силы которого пропорциональны деформации тела и направлены в сторону недеформированного состояния. У пружины – в точку M_0 ,

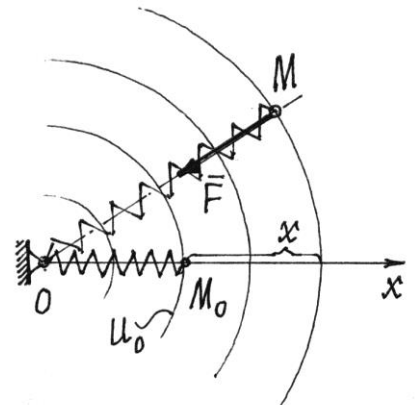


Рис. 15.8

где находится конец недеформированной пружины (рис. 15.8).

Если перемещать конец пружины так, чтобы длина ее не изменялась, то работа упругой силы $\vec{F}$ будет равна нулю. Значит, эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности с центром в точке O .

Назначим нулевой поверхностью сферу, проходящую через точку M_0 , через конец недеформированной пружины. Тогда потенциальная энергия пружины в положении её конца

$$M \quad \Pi = A = \frac{1}{2} cx^2 \text{ по формуле (15.10).}$$

При таком выборе нулевой поверхности потенциальная энергия всегда будет положительной ($\Pi > 0$) и в растянутом, и в сжатом состояниях.

Лекция №9

План лекции

Обобщенные координаты. Обобщенные силы.

Основная часть лекции

Обобщенные координаты

Обобщенными координатами мы будем называть параметры, которые определяют положение материальной системы.

Это могут быть обычные декартовы координаты точек, углы поворота, расстояния, площади, объемы и т.д. Так, на рис.18.1 положение балочки AB и всех ее точек вполне определяется углом φ .

Положение точек кривошипно-шатунного механизма (рис. 18.2) можно задать углом поворота φ кривошипа или расстоянием s , определяющим положение ползуна B (при $0 < \varphi < \pi$).

Положение сферического маятника (рис.

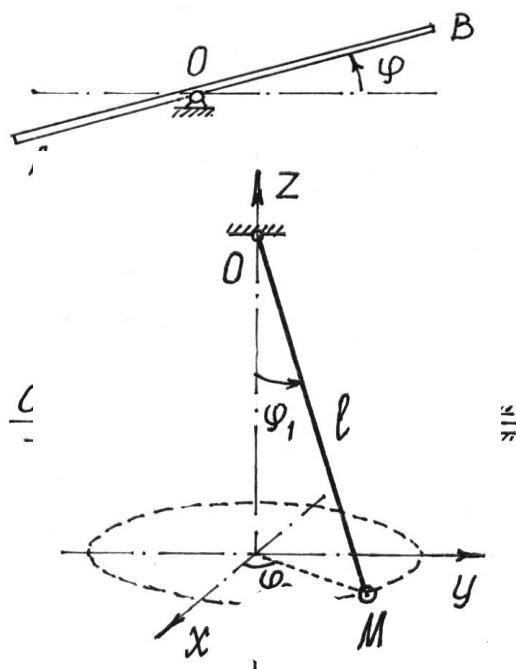


Рис. 18.3

18.3) определяется заданием двух параметров, углов φ_1 и φ_2 .

Минимальное количество независимых друг от друга обобщенных координат, которых достаточно, чтобы полностью и однозначно определить положение всех точек системы, называют *числом степеней свободы* этой системы.

Вообще для любой материальной системы можно назначить несколько обобщенных координат. Например, у кривошипно-шатунного механизма (см. рис. 18.2) указаны две обобщенные координаты φ и s .

Но это не значит, что у механизма две степени свободы, так как одну координату можно

определить через другую: $s = a \cdot \cos \varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}$.

А вот у маятника (рис. 18.3) две степени свободы, так как определяется его положение двумя независимыми обобщенными координатами. Кстати, если длина маятника изменяется, то для определения положения точки M потребуется еще один параметр – обобщенная координата l , длина нити. И у маятника станут три степени свободы.

Обобщенные координаты в общем случае будем обозначать буквой q . Пусть материальная система имеет s степеней свободы. Положение ее определяется обобщенными координатами: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, \dots, q_s$.

Нетрудно убедиться, что декартовы координаты n точек системы можно определить как функции обобщенных координат и времени

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i=1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (18.1)$$

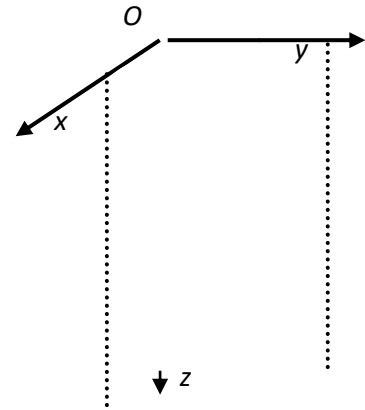
Так, у маятника (см. рис.18.3) координаты точки M

$$\begin{aligned} x_M &= l \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ y_M &= l \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ z_M &= l \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

есть функции координат l, φ_1, φ_2 и времени t , если $l = l(t)$.

Соответственно и радиус-вектор точек системы можно определить как функцию обобщенных координат и времени

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i=1, 2, 3, \dots, n). \quad (18.2)$$



Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате q_k можно вычислить соответствующую ей обобщенную силу Q_k . Вычисление производится по такому правилу.

Чтобы определить обобщенную силу Q_k , соответствующую обобщенной координате q_k , надо дать этой координате приращение δq_k (увеличить координату на эту величину), оставив все другие координаты неизменными, вычислить сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих перемещениях точек и поделить ее на приращение координаты δq_k :

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i, \quad (18.3)$$

где δs_i – перемещение i -й точки системы, полученное за счет изменения k -й обобщенной координаты.

Обобщенная сила определяется с помощью элементарных работ. Поэтому эту силу можно вычислить иначе (см. выражения (15.3) и (15.4)):

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}.$$

И так как $\delta \vec{r}_i$ есть приращение радиуса-вектора $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$ за счет приращения координаты q_k при остальных неизменных координатах и времени t , отношение

$\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}$ можно определять как частную производную $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$. Тогда

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (18.4)$$

где координаты точек – функции обобщенных координат (18.1).

Если система консервативная, то есть движение происходит под действием сил потенциального поля (15.14), проекции которых $X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$, $Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$, $Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}$, где

$\Pi = \Pi(x_i, y_i, z_i)$, а координаты точек – функции обобщенных координат, то

$$Q_k = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (18.5)$$

Обобщенная сила консервативной системы есть частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате со знаком минус.

Конечно, при вычислении этой обобщенной силы потенциальную энергию следует определять как функцию обобщенных координат

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s).$$

Замечания.

Первое. При вычислении обобщенных сил реакции идеальных связей не учитываются.

Второе. Единица измерения обобщенной силы зависит от размерности обобщенной

координаты. Так, если $[q] = \text{метр}$, то единица измерения $[Q] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{НЬЮТОН}$; если $[q] =$

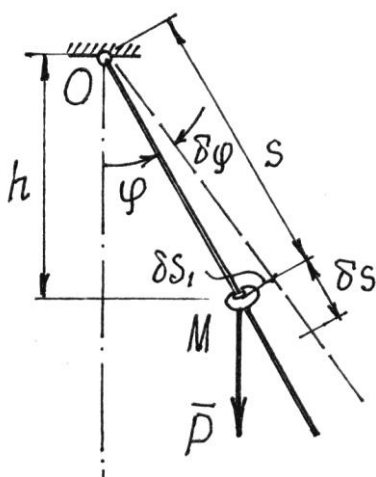
радиан, то $[Q] = \text{Н} \cdot \text{м}$; если $[q] = \text{м}^2$, то $[Q] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ и т.п.

Пример 18.1. По качающемуся в вертикальной плоскости стержню скользит колечко

M весом P (рис. 18.4). Стержень считаем невесомым.

Определим обобщенные силы.

Система имеет две степени свободы. Назначаем две обобщенные координаты s и φ . Найдем обобщенную силу, соответствующую координате s . Даем приращение δs этой координаты, оставив вторую координату φ неизменной, вычисляя работу единственной активной силы P , получим обобщенную силу



$$Q_s = \frac{1}{\delta s} (P \cdot \delta s \cdot \cos \varphi) = P \cos \varphi.$$

Затем даем приращение $\delta \varphi$ координате φ , полагая $s = \text{const}$. При повороте стержня на угол $\delta \varphi$ точка приложения силы P , колечко M , переместится на $\delta s_1 = s \cdot \delta \varphi$. Обобщенная сила получится такой:

$$Q_\varphi = \frac{1}{\delta \varphi} (-P \cdot \delta s_1 \cdot \sin \varphi) = -\frac{1}{\delta \varphi} P s \delta \varphi \sin \varphi = -Ps \sin \varphi. \quad \text{Так}$$

как система консервативная, обобщенные силы можно найти и с помощью потенциальной

энергии $\Pi = -Ph = -Ps \cdot \cos \varphi$. Получим $Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = P \cos \varphi$ и

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -Ps \cdot \sin \varphi. \text{ Получается гораздо проще.}$$

Лекция №10

План лекции

Уравнения равновесия Лагранжа. Обобщенные силы инерции. Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода

Основная часть лекции

Уравнения равновесия Лагранжа

По определению (18.3) обобщенные силы $Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i$,

при $k = 1, 2, 3, \dots, s$, где s – число степеней свободы.

Если система находится в равновесии, то по принципу возможных перемещений (17.1) $\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$. Здесь δs_i – перемещения, допускаемые связями, возможные перемещения. Поэтому при равновесии материальной системы все её обобщенные силы равны нулю

$$Q_k = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, s). \quad (18.6)$$

Эти уравнения, *уравнения равновесия в обобщенных координатах* или *уравнения равновесия Лагранжа*, позволяют решать задачи статики еще одним методом.

Если система консервативная, то $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$. Значит, в положении равновесия

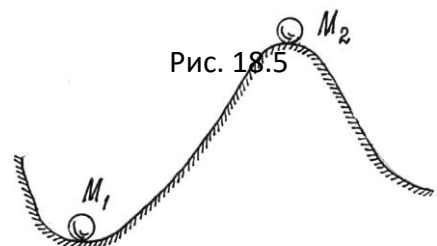
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0. \text{ То есть в положении равновесия такой материальной системы ее потенциальная}$$

энергия либо максимальна, либо минимальна, то есть функция $\Pi(q)$ имеет экстремум.

Это очевидно из анализа простейшего примера (рис. 18.5). Потенциальная энергия шарика в положении M_1 имеет минимум, в положении M_2 – максимум. Можно заметить, что в положении M_1 равновесие будет устойчивым; в положении M_2 – неустойчивым.

Равновесие считается устойчивым, если телу в этом положении сообщить малую скорость или сместить на малое расстояние, то эти отклонения в дальнейшем не увеличатся.

Можно доказать (теорема Лагранжа-Дирихле),



что если в положении равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии, а значит и устойчивости положения равновесия, определяется второй производной, ее значением в положении равновесия,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0. \quad (18.7)$$

Пример 18.2. Стержень OA весом P может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси O (рис.18.6). Найдем положения равновесия и исследуем их устойчивость.

Стержень имеет только одну степень свободы. Обобщенная координата – угол φ . Относительно нижнего, нулевого, положения потенциальная энергия $\Pi = Ph$ или

$$\Pi = P \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi \right) = \frac{1}{2} Pl (1 - \cos \varphi). \quad \text{В положении}$$

$$\text{равновесия должно быть } \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} Pl \sin \varphi = 0.$$

Отсюда имеем два положения, соответствующие углам $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ (положения OA_1 и OA_2).

$$\text{Иследуем их устойчивость. Находим вторую производную } \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl \cos \varphi.$$

Конечно, при $\varphi = \varphi_1 = 0$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl > 0$. Положение равновесия устойчиво. А при $\varphi =$

$$\varphi_2 = \pi, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} Pl < 0. \quad \text{Значит, второе положение равновесия – неустойчиво.}$$

Результаты очевидны.

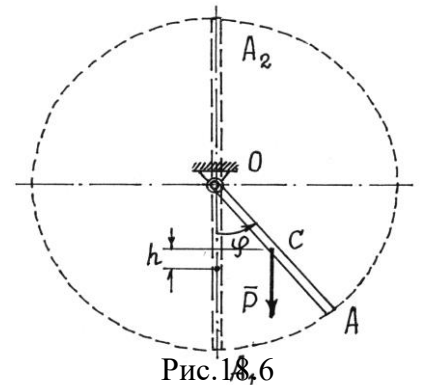


Рис. 18.6

Обобщенные силы инерции

По той же методике (18.4), по которой вычислялись обобщенные силы Q_k , соответствующие активным, задаваемым, силам, определяются и обобщенные силы $Q_k^{\text{èí}}$, соответствующие силам инерции точек системы:

$$Q_k^{\text{èí}} = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{èí}} \delta s_i \cos \beta_i = \frac{1}{\delta q_k} \sum \vec{F}_i^{\text{èí}} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{èí}} \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{èí}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.8a)$$

$$\text{И так как } \vec{F}_i^{\text{èí}} = -m_i \vec{W}_i = -m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}, \text{ то } Q_k^{\text{èí}} = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.8b)$$

Немного математических преобразований.

Очевидно, $\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$. Отсюда

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.9)$$

Так как $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$, а $q_k = q_k(t)$, ($k = 1, 2, 3, \dots, s$), то

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \text{ где } \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Значит, частная производная скорости $\vec{v}_i$ по $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.10)$$

Кроме того, в последнем члене (18.9) можно поменять порядок дифференцирования

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}. \quad (18.11)$$

Подставляя (18.10) и (18.11) в (18.9), а потом (18.9) в (18.8b), получим:

$$Q_k^{\text{èí}} = -\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] = -\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_k} \right].$$

Разделив последнюю сумму на две и, имея в виду, что сумма производных равна производной от суммы, получим:

$$Q_k^{\text{èí}} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (18.12)$$

где $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$ – кинетическая энергия системы, $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ – обобщенная скорость.

Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода

По определению (18.3) и (18.8a) обобщенные силы

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i; \quad Q_k^{\text{éí}} = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{éí}} \delta s_i \cos \beta_i.$$

Сумма их $Q_k + Q_k^{\text{éí}} = \frac{1}{\delta q_k} (\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{éí}} \delta s_i \cos \beta_i)$ или

$$(Q_k + Q_k^{\text{éí}}) \delta q_k = \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{éí}} \delta s_i \cos \beta_i.$$

Но на основании общего уравнения динамики (17.3) правая часть равенства равна нулю. И так как все δq_k ($k = 1, 2, 3, \dots, s$) отличны от нуля, то $Q_k + Q_k^{\text{éí}} = 0$. Подставив значение обобщенной силы инерции (18.12), получим уравнение:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, s). \quad (18.13)$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах, уравнениями Лагранжа второго рода* или просто – *уравнениями Лагранжа*. Количество этих уравнений равно числу степеней свободы материальной системы.

Если система консервативная и движется под действием сил потенциального поля, когда обобщенные силы $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, уравнения Лагранжа можно составить по форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \quad (18.14)$$

или $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, s), \quad (18.15)$

где $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа* (предполагается, что потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей).

Нередко при исследовании движения материальных систем оказывается, что некоторые обобщенные координаты q_j не входят явно в функцию Лагранжа (или в T и Π). Такие координаты называют *циклическими*. Уравнения Лагранжа, соответствующие этим координатам, получаются проще. Так как $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$, то $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0$, ($j = 1, 2, 3, \dots, k$).

Первые интегралы последних уравнений находятся сразу. Они называются циклическими интегралами

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const.} \quad (18.16)$$

Дальнейшие исследования и преобразования уравнений Лагранжа составляют предмет специального раздела теоретической механики – «Аналитическая механика».

Уравнения Лагранжа обладают целым рядом достоинств в сравнении с другими способами исследования движения систем. Основные достоинства: методика составления уравнений одинакова во всех задачах, реакции идеальных связей не учитываются при решении задач.

И еще одно – эти уравнения можно использовать для исследования не только механических, но и других физических систем (электрических, электромагнитных, оптических и др.).

Пример 18.3. Продолжим исследование движения колечка M на качающемся стержне (см. пример 18.1).

Обобщенные координаты

назначены – φ и s (рис.18.7). Обобщенные силы определены: $Q_s = P \cos \varphi$ и

$$Q_\varphi = -Ps \cdot \sin \varphi.$$

Кинетическая энергия колечка $T = \frac{1}{2}mv^2$. Где $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, а $v^2 = v_e^2 + v_r^2$ и

$$v_e = s\omega = s\dot{\varphi}, \quad v_r = \dot{s}. \quad \text{Поэтому } T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (s^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2).$$

Составляем два уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

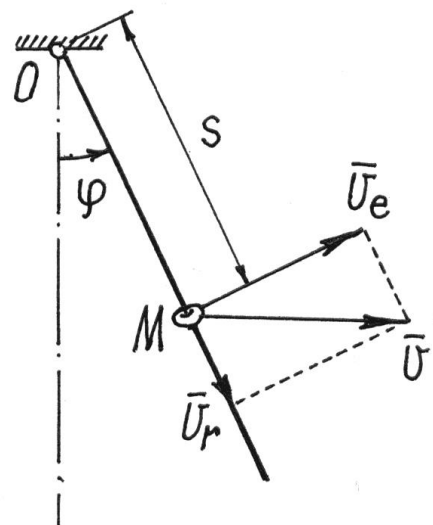
$$\text{Так как } \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \dot{s}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \ddot{s},$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{P}{g} s \dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g} s^2 \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g} (2s\dot{s}\dot{\varphi} + s^2\ddot{\varphi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

то уравнения получаются такими:

$$\frac{P}{g} \ddot{s} - \frac{P}{g} s \dot{\varphi}^2 = P \cos \varphi,$$



$$\frac{P}{g}(2\dot{s}\ddot{\phi} + s\ddot{\phi})s = -Ps \cdot \sin \varphi$$

Рис. 18.7

или
$$\left. \begin{aligned} \ddot{s} - s\dot{\phi}^2 - g \cdot \cos \varphi &= 0, \\ \ddot{s}\phi + 2\dot{s}\dot{\phi} + g \cdot \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$$
 Получили два нелинейных дифференциальных уравнения

второго порядка, для решения которых нужны специальные методы.

Пример 18.4. Составим дифференциальное уравнение движения балочки AB , которая перекатывается без скольжения по цилиндрической поверхности (рис.18.8).

Длина балочки $AB = l$, вес $-P$.

В положении равновесия балочка располагалась горизонтально и центр тяжести находился на верхней точке цилиндра. Балочка имеет одну степень свободы. Положение этой балочки определяется обобщенной координатой – углом φ .

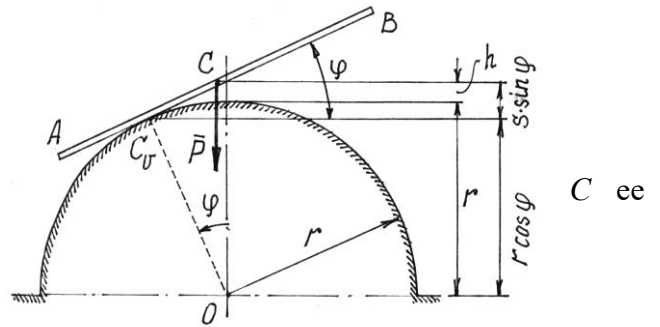


Рис. 18.8

Система консервативная. Поэтому уравнение Лагранжа составим с помощью потенциальной энергии $\Pi = mgh$, вычисленной относительно горизонтального положения. В точке касания находится мгновенный центр скоростей и $CC_v = s = r\varphi$ (CC_v равно длине дуги окружности с углом φ). Поэтому $h = r \cdot \cos \varphi + s \cdot \sin \varphi - r$ (см. рис. 18.8) и $\Pi = mgr(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1)$.

Кинетическая энергия (балка совершает плоскопараллельное движение)

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}ms^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\dot{\phi}^2.$$

Находим необходимые производные для уравнения
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = 0 :$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\dot{\phi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m \left[2r^2\varphi\dot{\phi}^2 + (r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\phi} \right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = mr^2\varphi\dot{\phi}^2; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = mgr(-\sin \varphi + \sin \varphi + \varphi \cos \varphi) = mgr\varphi \cos \varphi.$$

Составляем уравнение

$$m \left[2r^2\varphi\dot{\phi}^2 + (r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\phi} \right] - mr^2\varphi\dot{\phi}^2 + mgr\varphi \cos \varphi = 0$$

Окончательно получаем

$$(r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + gr\dot{\varphi}\cos\varphi = 0.$$

Курс лекций

Лекция №11

План лекции

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Закон сохранения механической энергии.

Основная часть лекции

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Так как ускорение i -тых точек материальной системы $\vec{W}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$, то основные уравнения динамики для этих точек будут $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$, где $\vec{F}_i$ – равнодействующая сил, приложенных к i -й точке. Умножим скалярно левую и правую части этого равенства на $\vec{v}_i$:

$$\vec{v}_i \cdot m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \text{ и введем слева вектор } \vec{v}_i \text{ под знак дифференциала, а справа учтем, что } \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}. \text{ Получим } m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) = \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}. \text{ Или окончательно } d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = dA_i.$$

Сложив такие равенства, составленные для всех точек системы, получим:

$$d \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum dA_i \text{ или } dT = \sum dA_i. \text{ Проинтегрируем затем на переходе системы из}$$

$$\text{одного положения в другое: } \int_{T_1}^{T_2} dT = \sum \int_{S_i} dA_i. \text{ Получим } T_2 - T_1 = \sum A_i. \text{ Запишем}$$

результат в виде

$$T_2 - T_1 = A. \quad (15.22)$$

Это значит, *изменение кинетической энергии движущейся материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно сумме работ сил, приложенных к системе, на этом переходе.*

Замечания к теореме.

1. Нетрудно убедиться, что реакции связей без трения работу не совершают. Поэтому при использовании теоремы в этом случае учитываются только активные, задаваемые, силы (см. XIV, §1).

2. Внутренние силы, вообще говоря, учитывать надо, несмотря на то, что сумма их равна нулю. Простой пример: две точки, соединенные пружиной. При изменении расстояния между точками упругие силы, приложенные к точкам, будут совершать работу. Но если система состоит из абсолютно твердых тел и связи между ними неизменяемые, неупругие, идеальные, то работа внутренних сил будет равна нулю и их можно не учитывать и вообще не показывать на расчетной схеме.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

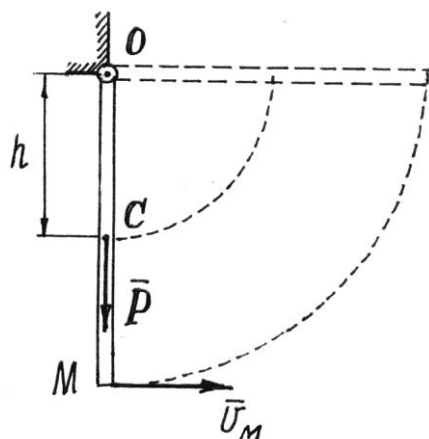


Рис. 15.13

Пример 15.4. Какую скорость надо сообщить точке M стержня, прикрепленного верхним концом с помощью шарнира O к неподвижной поверхности (рис.15.13), чтобы стержень совершил четверть оборота?

В первом, вертикальном, положении кинетическая энергия стержня, начавшего вращаться вокруг оси O :

$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \frac{v_M^2}{l^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{P}{g} v_M^2.$$

Во втором положении, где стержень достигнет горизонтального положения и остановится на мгновение, $T_2 = 0$.

Работу совершит только вес стержня P $A = -Ph = -P \frac{l}{2}$. По теореме получим

уравнение $-\frac{1}{6} \cdot \frac{P}{g} v_M^2 = -P \frac{l}{2}$, из которого следует $v_M = \sqrt{3gl}$.

Закон сохранения энергии

Рассмотрим движение материальной системы в потенциальном поле под действием только сил этого поля. В каком-либо одном положении потенциальная энергия для всех точек системы, по (15.13), $\Pi_1 = u_0 - u_1$. В другом каком-то положении $\Pi_2 = u_0 - u_2$. Разность потенциальных энергий $\Pi_1 - \Pi_2 = u_2 - u_1$, что равно работе A , совершенной силами поля на переходе системы из первого положения во второе. Но эта работа по теореме об изменении кинетической энергии $A = T_2 - T_1$. Значит, $\Pi_1 - \Pi_2 = T_2 - T_1$ или $\Pi_1 + T_1 = \Pi_2 + T_2$.

А так как положения системы выбраны произвольно, можно утверждать, что *при движении системы в потенциальном поле механическая энергия ее (сумма потенциальной и кинетической) все время остается неизменной, постоянной*

$$\Pi + T = \text{const.} \quad (15.23)$$

Это и есть закон сохранения механической энергии.

Такую материальную систему, при движении которой действует этот закон, называют *консервативной системой* (энергия ее как бы законсервирована, не изменяется).

Лекция №12

План лекции

Теорема о движении центра масс механической системы. Следствия. Закон сохранения движения центра масс. Количество движения материальной точки и механической системы. Импульс силы.

Основная часть лекции

Теорема о движении центра масс механической системы

Иногда, чтобы оценить движение материальной системы в целом, достаточно определить движение какой-нибудь одной ее точки. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать, как он будет кувыркаться во время полета, важно установить, попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Оказывается, довольно просто можно определить движение центра масс материальной системы.

Составим для каждой j -й точки материальной системы основное уравнение динамики (12.2), разделив силы, действующие на точки, на внешние и внутренние:

$$m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}. \quad \text{Затем сложим эти уравнения: } \sum m_j \vec{W}_j = \sum \vec{F}_j^{(e)} + \sum \vec{F}_j^{(i)} (*).$$

Вторую сумму в правой части равенства можно отбросить, так как векторная сумма

внутренних сил равна нулю. Левую часть можно записать иначе. Так как радиус-вектор центра масс (см.14.1) $\vec{r}_C = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{M}$, то $\sum m_j \vec{r}_j = M \vec{r}_C$. Взяв вторую производную по времени

(полагая массу постоянной), получим $\sum m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}$ или $\sum m_j \vec{W}_j = M \vec{W}_C$.

Подставив эту сумму в левую часть равенства (*), получим

$$M \vec{W}_C = \sum \vec{F}_j^{(e)}. \quad (19.1)$$

Спроектируем это векторное равенство на оси координат x , y , и z . Вспоминая, что проекции вектора ускорения $\vec{W}_C$ на оси есть вторые производные по времени от координат точки, получим дифференциальные уравнения движения центра масс

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= \sum X_j^{(e)}, \\ M \ddot{y}_C &= \sum Y_j^{(e)}, \\ M \ddot{z}_C &= \sum Z_j^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями движения материальной точки (13.1) и уравнение (19.1) с основным уравнением динамики (12.1), можно сформулировать закон движения центра масс.

Движение центра масс материальной системы определяется так же, как движение материальной точки, масса которой равна массе всей системы, под действием внешних сил, приложенных ко всем точкам системы.

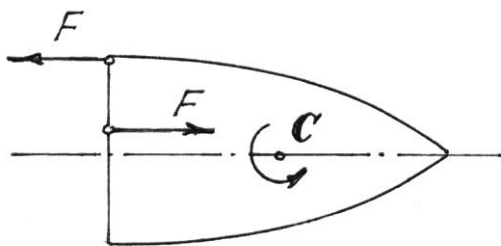
Теорема о движении центра масс позволяет сделать несколько важных замечаний.

Первое. Внутренние силы не могут изменить движение центра масс системы. Они вызывают движение лишь отдельных тел и точек системы.

Так, движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, равных силам трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы тормозные колодки не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его, разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Второе. Если внешние силы на систему не действуют или действуют, но сумма их равна нулю, то центр масс системы будет либо находиться в покое, либо двигаться равномерно и прямолинейно, так как ускорение центра масс равно нулю $\vec{W}_C = 0$.



Например, если на тело начнут действовать две силы, образующие пару сил (рис. 19.1), то центр масс C его будет двигаться по прежней траектории. А само тело будет вращаться

Рис. 19.1

вокруг

центра масс. И неважно, где

приложена пара сил.

Кстати, в статике мы доказывали, что действие пары на тело не зависит от того, где она приложена. Здесь мы показали, что вращение тела будет вокруг центральной оси C .

Пример 19.1. Человек перешел с кормы лодки на нос. Определим перемещение лодки s (рис.19.2). Вес лодки – P_1 , человека – P_2 , длина лодки – l . Сопротивление движению не учитываем. Определим движение центра масс C системы, состоящей из человека и лодки.

Составляем дифференциальное уравнение движения центра масс по оси x (19.2): $M\ddot{x}_C = \sum X_i^{(e)}$. Но так как проекции внешних сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, и $\vec{N}$ на ось x равны нулю, то $\ddot{x}_C = 0$. Проинтегрировав дважды это уравнение, получим $\dot{x}_C = C_1$ и $x_C = C_1 t + C_2$. Но в начале движения система была неподвижна: $v_C = \dot{x}_C = 0$. Значит, $C_1 = 0$ и $x_C = \text{const}$.

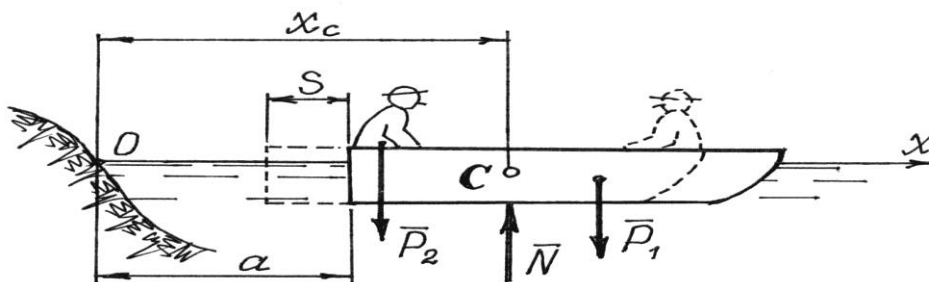


Рис. 19.2

Найдем координату x_C в первом положении системы, когда человек находился на корме, как координату центра тяжести по формулам (14.2):

$$x_C = \frac{P_1(a + 0,5l) + P_2a}{P_1 + P_2} = a + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l.$$

И во втором положении, когда человек перейдет на нос лодки:

$$x_C = \frac{P_1(a - s + 0,5l) + P_2(a - s + l)}{P_1 + P_2} = a - s + \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l.$$

Приравниваем координаты, так как $x_C = \text{const}$,

$$a + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l = a - s + \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l.$$

Из этого равенства находим перемещение лодки

$$s = \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l - \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l = \frac{P_2}{P_1 + P_2} l.$$

Количество движения материальной точки и механической системы

Количеством движения материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость $\vec{k} = m\vec{v}$. Это есть вектор, который направляется как вектор скорости по касательной к траектории (рис. 19.3).

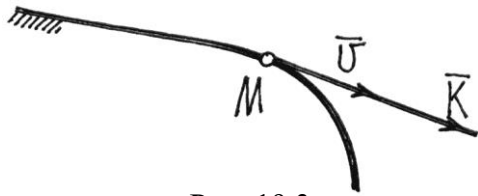


Рис. 19.3

Количеством движения материальной системы будем называть векторную сумму количеств движения всех точек системы

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i. \quad (19.3)$$

Как известно (14.1), радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ или $\sum m_i \vec{r}_i = M\vec{r}_C$.

Найдем производную по времени от этого равенства $\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ или

$\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C$. Значит, по формуле (19.3) количество движения материальной системы при любом ее движении определяется довольно просто как произведение массы системы на скорость ее центра масс

$$\vec{K} = M \vec{v}_C. \quad (19.4)$$

Направляется вектор количества движения так же, как вектор скорости центра масс С. Количество движения точки – связанный вектор, он приложен к этой точке. Поэтому и для вектора количества движения системы можно ввести понятие точки приложения. Правда,

найти ее не всегда просто. Но при поступательном движении твердого тела это сделать несложно.

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные, параллельные векторы скорости, то и векторы количества движения их будут параллельны. Поэтому точку приложения вектора $\vec{K}$ можно определять как центр параллельных векторов $\vec{k}_i$ (см. раздел

«Статика»), радиус-вектор которого $\vec{r} = \frac{\sum k_i \vec{r}_i}{K} = \frac{\sum m_i v_i \vec{r}_i}{M v_c}$. Но $v_i = v_c$, значит

$\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_C$, равен радиусу-вектору центра масс, то есть вектор количества движения

тела при поступательном движении приложен к центру масс. При

других движениях тела определить точку приложения вектора $\vec{K}$ сложнее.

Импульс силы

Введем еще одно понятие – *импульс силы*. Импульсом $\vec{S}$ постоянной силы $\vec{F}$ за время ее действия t называется произведение

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t. \quad (19.5)$$

Если же сила переменна, то определяют сначала элементарный импульс за время dt :

$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$, а потом интегрируют на интервале от t_1 до t_2 :

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt. \quad (19.6)$$

Перейдем теперь к выводу теоремы.

Запишем для каждой j -й точки материальной системы основное уравнение динамики,

разделив силы на внешние и внутренние: $m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$ или

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}.$$

Введем массу m_j под знак дифференциала $\frac{d}{dt}(m_j \vec{v}_j) = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$. Сложим все эти

равенства. Получим $\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n (m_j \vec{v}_j) = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}$ или $\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}$.

Но последняя сумма, векторная сумма внутренних сил, равна нулю. Поэтому

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)}. \quad (19.7)$$

Производная по времени от вектора количества движения материальной системы равна векторной сумме внешних сил, приложенных к точкам системы.

Чтобы получить уравнения, удобные для исследования движения системы, спроектируем векторное равенство (19.7) на оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X_i^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y_i^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum Z_i^{(e)}. \quad (19.8)$$

И ещё. Проинтегрируем уравнение (19.7) за время перехода системы из какого-нибудь одного положения в другое:

$$\int_{\vec{K}_1}^{\vec{K}_2} d\vec{K} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{(e)} \cdot dt.$$

Получим теорему об изменении количества движения, записанную в другой форме:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i^{(e)}. \quad (19.9)$$

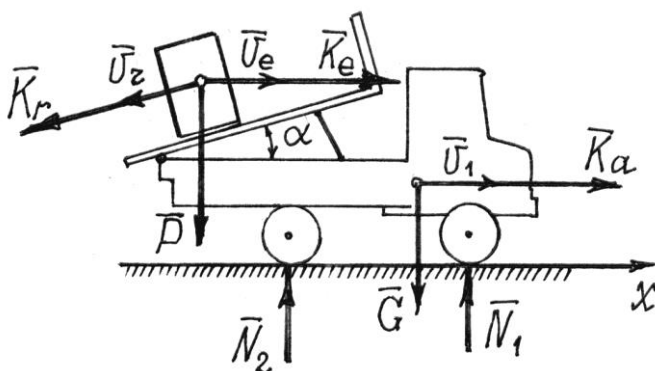
Изменение количества движения материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно векторной сумме импульсов внешних сил за время перехода.

Спроектировав векторное равенство (19.9) на оси, получим скалярные уравнения, которые используются при решении задач:

$$\left. \begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum S_{ix}^{(e)}, \\ K_{2y} - K_{1y} &= \sum S_{iy}^{(e)}, \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum S_{iz}^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

Разность проекций вектора количества движения в конечном и начальном положениях системы на ось равна сумме проекций импульсов внешних сил на эту ось.

Теорему об изменении количества движения обычно используют для решения задач, по условию которых требуется установить зависимость между изменениями массы, перемещением тел системы и их скорости.



Пример 19.2. Груз весом P спускается по кузову автомобиля со скоростью u (рис. 19.4). При этом сам автомобиль начнет движение. Определим его скорость v_1 . Вес

автомобиля – G . Сопротивления движению не учитываем.

Составим уравнение (19.10) для оси x :

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum S_{ix}^{(e)}.$$

В начале движения количество движения всей системы равно нулю $\overrightarrow{K_1} = 0$, система была неподвижна. Во втором положении количество движения системы складывается из количества движения автомобиля $K_a = \frac{G}{g} v_1$ (предполагается, что он движется вправо) и количества движения груза.

Абсолютная скорость груза $\vec{v}_{\text{а\delta}} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Относительная скорость $\vec{v}_r = \vec{u}$, переносная $\vec{v}_e = \vec{v}_1$. Соответственно этим скоростям показываем две составляющие вектора количества движения груза: $\vec{K}_r$ и $\vec{K}_e$.

Все внешние силы (вес $\vec{P}$ и $\vec{G}$, реакции плоскости $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) направлены вертикально, и импульсы их будут вертикальными. Составляем уравнение, проектируя все векторы на ось x :

$$K_a + K_e - K_r \cos \alpha = 0.$$

Подставляем их значения $\frac{G}{g}v_1 + \frac{P}{g}v_1 - \frac{P}{g}u \cdot \cos \alpha = 0$. Отсюда

$$v_1 = \frac{P}{P + G} u \cdot \cos \alpha.$$

Пример 19.3. Определим горизонтальное давление трубы на опору A (рис. 19.5). В трубе движется жидкость со скоростью v . Диаметр трубы – d .

По теореме (19.9) $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i^{(e)}$. Рассмотрим движение жидкости, заключенной между сечениями 1 и 1'. Через время t сечения окажутся в положениях 2 и 2' соответственно (см. рис. 19.5).

В первом положении количество движения $\vec{K}_1$ складывалось из количеств движения объемов I и II:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_I + \vec{K}_{II}.$$

Во втором положении $\vec{K}_2 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III}$. Тогда изменение количества движения

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III} - \vec{K}_I - \vec{K}_{II} = \vec{K}_{III} - \vec{K}_I. \text{ И уравнение (19.9) запишется так:}$$

$$\vec{K}_{III} - \vec{K}_I = \sum \vec{S}_i^{(e)} \quad (*).$$

Единственными внешними силами будут вес жидкости, вес трубы и реакция опоры $\vec{N}$. Проектируются на ось x только вектор импульса реакции $\vec{S} = \vec{N}t$ и вектор $\vec{K}_{III}$.

Проектируя равенство (*) на ось x , получим $K_{III} = Nt$ (**). Так как объем жидкости

$$V_{III} = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi d^2}{4} vt \text{ и плотность ее } \rho, \text{ то } K_{III} = \rho V_{III} \cdot v = \rho \frac{\pi d^2}{4} v^2 t. \text{ Тогда по (**)}$$

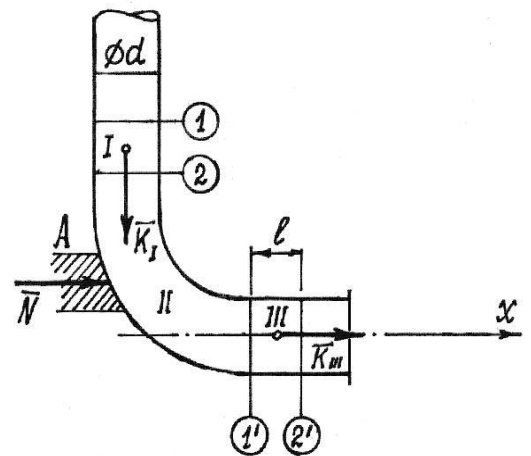


Рис. 19.5

получим уравнение $\rho \frac{\pi d^2}{4} v^2 t = Nt$, из которого $N = \frac{1}{4} \pi d^2 \rho v^2$. Давление на опору равно N , но будет направлено, конечно, в противоположную сторону.

Лекция №13

План лекции

Теорема об изменении количества движения механической системы. Понятия момента количества движения материальной точки и кинетического момента механической системы относительно центра и оси.

Основная часть лекции

Теорема об изменении количества движения механической системы.

Количеством движения материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость $\vec{k} = m\vec{v}$. Это есть вектор, который направляется как вектор скорости по касательной к траектории (рис. 19.3).

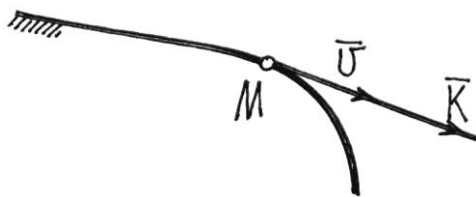


Рис. 19.3

Количеством движения материальной системы будем называть векторную сумму количеств движения всех точек системы

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i. \quad (19.3)$$

Как известно (14.1), радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ или $\sum m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_C$.

Найдем производную по времени от этого равенства $\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ или

$\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C$. Значит, по формуле (19.3) количество движения материальной системы при любом ее движении определяется довольно просто как произведение массы системы на скорость ее центра масс

$$\vec{K} = M \vec{v}_C. \quad (19.4)$$

Направляется вектор количества движения так же, как вектор скорости центра масс C . Количество движения точки – связанный вектор, он приложен к этой точке. Поэтому и для вектора количества движения системы можно ввести понятие точки приложения. Правда,

найти ее не всегда просто. Но при поступательном движении твердого тела это сделать несложно.

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные, параллельные векторы скорости, то и векторы количества движения их будут параллельны. Поэтому точку приложения вектора $\vec{K}$ можно определять как центр параллельных векторов $\vec{k}_i$ (см. раздел «Статика»), радиус-вектор которого $\vec{r} = \frac{\sum k_i \vec{r}_i}{K} = \frac{\sum m_i v_i \vec{r}_i}{M v_c}$. Но $v_i = v_c$, значит

$\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_C$, равен радиусу-вектору центра масс, то есть вектор количества движения тела при поступательном движении приложен к центру масс. При

других движениях тела определить точку приложения вектора $\vec{K}$ сложнее.

Введем еще одно понятие – *импульс силы*. Импульсом $\vec{S}$ постоянной силы $\vec{F}$ за время ее действия t называется произведение

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t. \quad (19.5)$$

Если же сила переменна, то определяют сначала элементарный импульс за время dt :

$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$, а потом интегрируют на интервале от t_1 до t_2 :

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt. \quad (19.6)$$

Перейдем теперь к выводу теоремы.

Запишем для каждой j -й точки материальной системы основное уравнение динамики, разделив силы на внешние и внутренние: $m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$ или

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}.$$

Введем массу m_j под знак дифференциала $\frac{d}{dt}(m_j \vec{v}_j) = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$. Сложим все эти

равенства. Получим $\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n (m_j \vec{v}_j) = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}$ или $\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}$.

Но последняя сумма, векторная сумма внутренних сил, равна нулю. Поэтому

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)}. \quad (19.7)$$

Производная по времени от вектора количества движения материальной системы равна векторной сумме внешних сил, приложенных к точкам системы.

Чтобы получить уравнения, удобные для исследования движения системы, спроектируем векторное равенство (19.7) на оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X_i^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y_i^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum Z_i^{(e)}. \quad (19.8)$$

И ещё. Проинтегрируем уравнение (19.7) за время перехода системы из какого-нибудь одного положения в другое:

$$\int_{\vec{K}_1}^{\vec{K}_2} d\vec{K} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{(e)} \cdot dt.$$

Получим теорему об изменении количества движения, записанную в другой форме:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i^{(e)}. \quad (19.9)$$

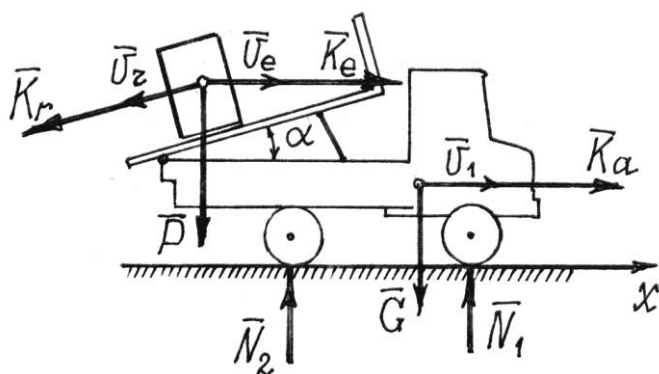
Изменение количества движения материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно векторной сумме импульсов внешних сил за время перехода.

Спроектировав векторное равенство (19.9) на оси, получим скалярные уравнения, которые используются при решении задач:

$$\left. \begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum S_{ix}^{(e)}, \\ K_{2y} - K_{1y} &= \sum S_{iy}^{(e)}, \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum S_{iz}^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

Разность проекций вектора количества движения в конечном и начальном положениях системы на ось равна сумме проекций импульсов внешних сил на эту ось.

Теорему об изменении количества движения обычно используют для решения задач, по условию которых требуется установить зависимость между изменениями массы, перемещением тел системы и их скорости.



Пример 19.2. Груз весом P спускается по кузову автомобиля со скоростью u (рис. 19.4). При этом сам автомобиль начнет движение. Определим его скорость v_1 . Вес автомобиля – G . Сопротивления движению не учитываем.

Составим уравнение (19.10) для оси x :

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum S_{ix}^{(e)}.$$

В начале движения количество движения всей системы равно нулю $\vec{K}_1 = 0$, система была неподвижна. Во втором положении количество движения системы складывается из количества движения автомобиля $K_a = \frac{G}{g}v_1$ (предполагается, что он движется вправо) и количества движения груза.

Абсолютная скорость груза $\vec{v}_{\text{аб}} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Относительная скорость $\vec{v}_r = \vec{u}$, переносная $\vec{v}_e = \vec{v}_1$. Соответственно этим скоростям показываем две составляющие вектора количества движения груза: $\vec{K}_r$ и $\vec{K}_e$.

Все внешние силы (вес $\vec{P}$ и $\vec{G}$, реакции плоскости $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) направлены вертикально, и импульсы их будут вертикальными. Составляем уравнение, проектируя все векторы на ось x :

$$K_a + K_e - K_r \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Подставляем их значения } \frac{G}{g}v_1 + \frac{P}{g}v_1 - \frac{P}{g}u \cdot \cos \alpha = 0. \text{ Отсюда}$$

$$v_1 = \frac{P}{P + G}u \cdot \cos \alpha.$$

Пример 19.3. Определим горизонтальное давление трубы на опору A (рис. 19.5). В трубе движется жидкость со скоростью v . Диаметр трубы – d .

По теореме (19.9) $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i^{(e)}$. Рассмотрим движение жидкости, заключенной между сечениями 1 и 1'. Через время t сечения окажутся в положениях 2 и 2' соответственно (см. рис. 19.5).

В первом положении количество движения $\vec{K}_1$ складывалось из количеств движения объемов I и II:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_I + \vec{K}_{II}.$$

Во втором положении $\vec{K}_2 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III}$. Тогда изменение количества движения

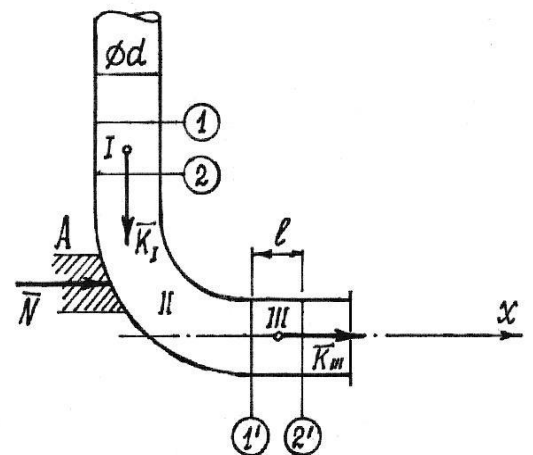


Рис. 19.5

$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III} - \vec{K}_I - \vec{K}_{II} = \vec{K}_{III} - \vec{K}_I$. И уравнение (19.9) запишется так: $\vec{K}_{III} - \vec{K}_I = \sum \vec{S}_i^{(e)}$ (*).

Единственными внешними силами будут вес жидкости, вес трубы и реакция опоры $\vec{N}$. Проектируются на ось x только вектор импульса реакции $\vec{S} = \vec{N}t$ и вектор $\vec{K}_{III}$.

Проектируя равенство (*) на ось x , получим $K_{III} = Nt$ (**). Так как объем жидкости $V_{III} = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi d^2}{4} vt$ и плотность ее ρ , то $K_{III} = \rho V_{III} \cdot v = \rho \frac{\pi d^2}{4} v^2 t$. Тогда по (**) получим уравнение $\rho \frac{\pi d^2}{4} v^2 t = Nt$, из которого $N = \frac{1}{4} \pi d^2 \rho v^2$. Давление на опору равно N , но будет направлено, конечно, в противоположную сторону.

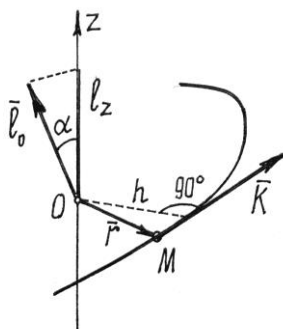
Момент количества движения материальной точки и кинетический момент механической системы относительно центра и оси.

Так как количество движения – вектор, имеющий определенную линию действия (и даже определенную точку приложения), то можно находить момент этого вектора относительно точки и оси так же, как определяли соответствующие моменты силы.

Сначала о моменте количества движения материальной точки.

Ее момент количества движения $\vec{k}$ относительно точки O по величине равен $l_O = kh$, где h – плечо вектора $\vec{k}$ с соответствующим знаком (+) или (–). Как вектор он определяется векторным произведением (рис. 19.6)

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{k}.$$



Момент количества движения l_z относительно оси находится также как находили ранее момент силы.

И зависимость между моментами относительно точки и оси аналогична

$$l_z = l_O \cos \alpha.$$

То есть момент количества движения материальной точки относительно оси равен проекции вектора момента количества движения относительно какой-либо точки O , расположенной на оси, на эту ось.

Рис. 19.6

Для движущейся материальной системы вводится понятие *главного момента количества движения относительно центра O* как векторной суммы моментов количества движения всех точек системы относительно этого центра O

$$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{O_i}. \quad (19.11)$$

Вводится и понятие *главного момента количества движения относительно оси* как алгебраической суммы моментов количества движения точек системы относительно этой оси z $L_z = \sum l_{zi}$. (19.12)

Зависимость между ними аналогична зависимости между соответствующими главными моментами сил

$$L_z = L_O \cos \gamma. \quad (19.13)$$

Главный момент количества движения относительно оси равен проекции вектора главного момента относительно точки, расположенной на оси, на эту ось.

Для твердого тела как материальной системы при некоторых движениях главный момент относительно оси определяется довольно просто.

Так, если тело вращается вокруг неподвижной оси z (рис. 19.7), главный момент количества движения относительно оси вращения

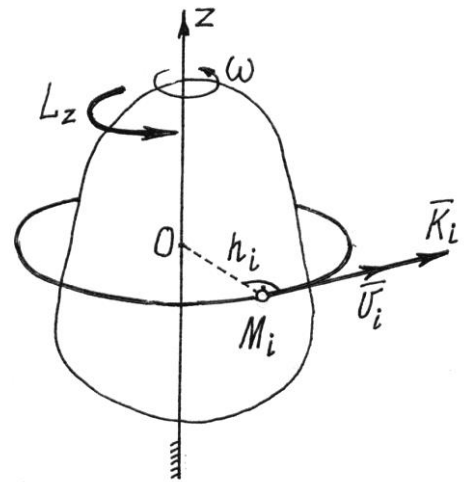


Рис. 19.7

$L_z = \sum l_{zi} = \sum k_i h_i = \sum m_i v_i h_i = \sum m_i h_i \omega \cdot h_i = \omega \sum m_i h_i^2 = \omega \cdot J_z$. То есть, равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость

$$L_z = J_z \omega \quad (19.14)$$

и направлен он по направлению вращения тела.

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, то вектор количества движения тела $\vec{K}$ расположен в этой плоскости на расстоянии h от оси, равном

$$h = OA = \frac{L_z}{K} = \frac{J_z \omega}{M v_c} = \frac{J_z \omega}{M a \omega} = \frac{J_z}{M a}. \quad (19.14a)$$

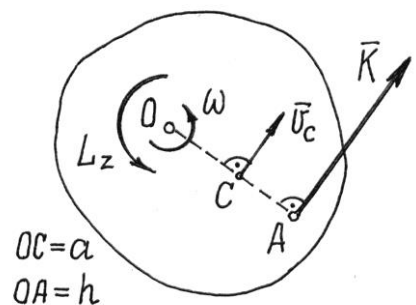


Рис. 19.8

На рис.19.8 показано сечение тела этой плоскостью симметрии и положение вектора количества движения $\vec{K}$. Заметим, что этот вектор приложен к той же точке A , к которой приложена равнодействующая сил инерции точек тела $\vec{R}_{ин}$ (см. 16.1).

Можно найти главный момент количеств движения тела и при плоскопараллельном движении, относительно центральной оси C (рис. 19.9). Скорость произвольно выбранной точки M_i $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}$, а соответствующие скоростям модули векторов количества движения равны $k_{ei} = m_i v_C$

и $k_{ri} = m_i v_{MC} = m_i r_i \omega$. Главный момент количеств движения точек тела относительно оси C , перпендикулярной плоскости движения:

$$L_C = \sum l_{ei} + \sum l_{ri}.$$

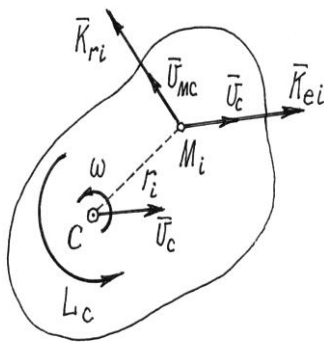


Рис.19.9

Но первая сумма равна нулю, так как по теореме Вариньона эта сумма моментов векторов $\vec{K}_{ei}$ равна моменту «равнодействующей» их, которая приложена к центру масс C , потому что переносное движение при плоскопараллельном движении – поступательное (XIX, §2). Поэтому главный момент количеств движения будет равен

$$L_C = \sum l_{ri} = \sum k_{ri} \chi_i = \sum m_i r_i \omega_i \chi_i = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega \chi \tilde{J}_N.$$

Значит, главный момент количеств движения точек тела при плоскопараллельном движении относительно центральной оси C , перпендикулярной плоскости движения, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость

$$L_C = J_C \omega \quad (19.15)$$

и имеет направление, совпадающее с направлением вращения, с направлением угловой скорости.

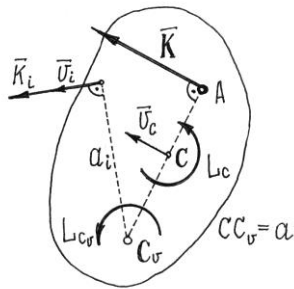
Аналогичный результат получается и для главного момента количеств движения относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей. Действительно, скорость точек тела $v_i = a_i \omega$ (рис.19.10) и главный момент

$$L_{Cv} = \sum l_{Cvi} = \sum k_i a_i = \sum m_i v_i a_i = \sum m_i a_i \omega \cdot a_i = \omega \sum m_i a_i^2 = \omega \cdot J_{Cv}.$$

Итак,
$$L_{Cv} = J_{Cv} \omega, \quad (19.16)$$

где J_{Cv} – момент инерции тела относительно оси C_v , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения.

При плоскопараллельном движении также можно найти положение вектора количества движения $\vec{K}$ (см. рис. 19.10). Он будет направлен параллельно скорости центра масс $\vec{v}_c$ и находиться на расстояниях от центра масс C



$$AC = \frac{L_c}{K} = \frac{J_c \omega}{M v_c} = \frac{J_c \omega}{M a \omega} = \frac{J_c}{M a} \text{ и от мгновенного центра скоростей}$$

$$C_v \quad AC_v = \frac{L_{Cv}}{K} = \frac{J_{Cv} \omega}{M v_c} = \frac{J_{Cv} \omega}{M a \omega} = \frac{J_{Cv}}{M a}.$$

Рис. 19.10

Очень похоже на результат, полученный при вращении тела вокруг неподвижной оси. Но разница в том, что здесь положение точки A меняется, так как меняется положение мгновенного центра скоростей C_v .

Лекция №14

План лекции

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Основная часть лекции

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Рассмотрим движение материальной системы под действием внешних $\vec{F}_j^{(e)}$ и внутренних $\vec{F}_j^{(i)}$ сил ($j = 1, 2, 3, \dots$).

Определим момент количеств движения каждой точки этой системы относительно некоторого неподвижного центра O $\vec{l}_{Oj} = \vec{r}_j \times \vec{k}_j$ и найдем его производную по времени

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_j \times \vec{k}_j) = \frac{d\vec{r}_j}{dt} \times \vec{k}_j + \vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{v}_j \times \vec{k}_j + \vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt}.$$

Первый член равен нулю, так как векторы $\vec{v}_j$ и $\vec{k}_j$ совпадают по направлению. Так

как по (19.7) $\frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$, то второй член

$$\vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{r}_j \times (\vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}) = \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}).$$

Поэтому $\frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)})$. Сложим правые и левые части этих

равенств, составленных для всех точек системы:

$$\sum \frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}).$$

Вторая сумма в правой части равна нулю, так как главный момент внутренних сил относительно любой точки равен нулю. Оставшуюся часть равенства перепишем так:

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{l}_{Oj} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O^{(e)}. \quad (19.17)$$

Производная по времени главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной точки O равна главному моменту внешних сил, приложенных к системе, относительно той же точки O .

Оказывается, точно так же формулируется эта теорема и относительно центра масс произвольно движущейся материальной системы.

Действительно, рассмотрим движение системы как сумму двух движений: переносного – поступательного движения системы осей вместе с центром масс и относительного – относительно этих осей.

В разд. XIII, §3 мы установили, что движение точек, а значит и всей материальной системы относительно движущейся системы координатных осей можно определять так же, как относительно неподвижных, если учесть переносные и кориолисовы силы инерции.

Значит, таким способом можно записать и теорему о моменте количества движения относительно движущегося центра масс C

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)} + \sum \vec{M}_C \left(\vec{F}_{ei}^{\text{ин}} \right) + \sum \vec{M}_C \left(\vec{F}_{\text{кор}.i}^{\text{ин}} \right).$$

Но сумма моментов кориолисовых сил инерции равна нулю, так как при переносном поступательном движении эти силы отсутствуют.

И первая сумма, сумма моментов переносных сил инерции, тоже равна нулю. Потому что по теореме Вариньона она равна моменту равнодействующей $\vec{R}_e^{\text{ин}}$ этих сил, которая при переносном поступательном движении приложена к центру масс (см. XVI, §1).

Поэтому *теорема об изменении количества движения относительно центра масс C движущейся системы записывается так же, как относительно неподвижной точки*

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}. \quad (19.18)$$

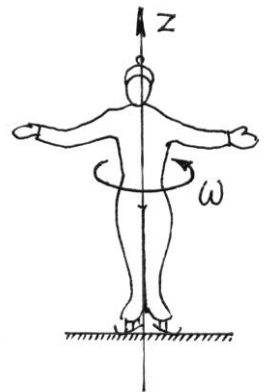
Спроектировав векторные уравнения (19.17) и (19.18) на какую-нибудь ось, проходящую через точку O или точку C , получим уравнения, с помощью которых и решаются задачи динамики:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}, \quad (19.19)$$

$$\frac{dL_C}{dt} = M_C^{(e)}, \quad (19.20)$$

где L_z и L_C – главные моменты количества движения системы относительно неподвижной оси z и оси C , смотри выражение (19.13), а $M_z^{(e)}$ и $M_C^{(e)}$ – главные моменты внешних сил относительно этих осей.

К теореме о моменте количества движения следует сделать очень важные и полезные замечания. Если внешние силы на систему не действуют или действуют, но сумма моментов их относительно неподвижной точки O или центра масс C равна нулю, то по (19.17) и



(19.18) $\vec{L}_O = \text{const}$ и $\vec{L}_C = \text{const}$. То есть главные моменты количества движения относительно этих точек все время остаются постоянными.

Рис. 19.11

То же самое можно сказать и о моментах относительно осей: если главный момент внешних сил относительно какой-нибудь оси z , проходящей через неподвижную точку O , или относительно какой-нибудь оси C , проходящей через центр масс системы, равен нулю,

то главные моменты количеств движения системы относительно этих осей остаются все время постоянными, $L_z = \text{const}$ и $L_c = \text{const}$.

Например, на фигуриста, вращающегося на льду (рис. 19.11) вокруг оси z , действуют внешние силы – вес и реакция гладкого льда.

Моменты их относительно оси z равны нулю. Поэтому $L_z = \text{const}$.

Но $L_z = J_z \omega$, значит $J_z \omega = \text{const}$. Отсюда следует, что если уменьшится момент инерции J_z (фигурист прижмет руки к туловищу), увеличится скорость вращения.

Еще пример. Вертолет, неподвижно висящий в воздухе (рис. 19.12). Лопасті винта вращаются с угловой скоростью ω_θ . Вес вертолета $\vec{P}$ уравнивается подъемной силой $\vec{F}$. Момент их относительно вертикальной оси C равен нулю. Поэтому $L_c = \text{const}$.

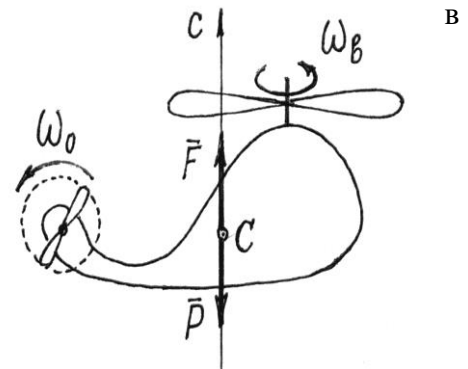


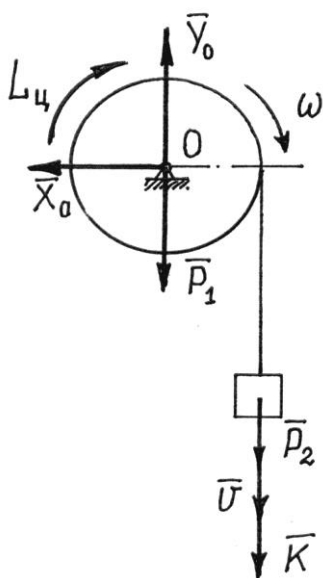
Рис. 19.12

Если изменится скорость вращения винта ω_θ , изменится и момент количества движения винта $L_\theta = J_\theta \omega_\theta$. А чтобы общий

момент количеств движения вертолета остался прежним, начнет вращаться корпус вертолета с угловой скоростью ω_k и так, чтобы обязательно выполнилось условие $L_c = J_\theta \omega_\theta + J_k \omega_k = \text{const}$.

Значит, если винт увеличит угловую скорость, корпус начнет вращаться, но в противоположном направлении; уменьшит – корпус начнет вращаться в том же направлении.

Чтобы не произошло этого нежелательного явления, у некоторых типов вертолетов предусмотрен еще один винт на хвосте, вращающийся в вертикальной плоскости и создающий горизонтальную внешнюю силу. Эта сила и будет ликвидировать вращение корпуса изменением момента L_c .



Несколько примеров на решение задач с помощью этой теоремы.

Пример 19.4. Однородный сплошной цилиндр вращается вокруг горизонтальной оси O под действием намотанной на него нити с грузом на конце (рис. 19.13). Вес цилиндра – P_1 , груза – P_2 . Радиус цилиндра – r .

По теореме (19.19) $\frac{dL_o}{dt} = M_o^{(e)}$, так как

$$L_O = L_{\text{ц}} + L_{\text{гр}} = -J_O \omega - Kr = -\frac{1}{2} \frac{P_1}{g} r^2 \omega -$$

$$-\frac{P_2}{g} vr = -\frac{P_1 + 2P_2}{2g} r^2 \omega, \text{ где } v = r\omega, \text{ то, взяв производную по времени и приравняв ее к}$$

$$M_O^{(e)} = -P_2 r, \text{ получим: } -\frac{P_1 + 2P_2}{2g} r^2 \frac{d\omega}{dt} = -P_2 r. \text{ Отсюда угловое ускорение}$$

$$\varepsilon = \frac{2P_2}{P_1 + 2P_2} \frac{g}{r}, \text{ а ускорение груза } W = r\varepsilon = \frac{2P_2}{P_1 + 2P_2} g.$$

Рис. 19.13

Пример 19.5. Внутри трубки, вращающейся вокруг вертикальной оси (рис. 19.14), движется шарик M . Вначале, когда шарик находился на расстоянии a от оси, угловая скорость трубки была ω_0 . Определим угловую скорость в зависимости от положения шарика, от расстояния s . Вес шарика $-P_1$; трубки $-P_2$, длина ее $-l$.

Главный момент внешних сил (веса, реакций подшипников) относительно оси вращения равен нулю. Значит, $L_z = \text{const}$ или $L_z^{(1)} = L_z^{(2)}$.

В первом положении, в начальном,

$$L_z^{(1)} = L_{\text{трубки}} + L_{\text{шарика}} = J_z \omega_0 + K_e a,$$

где момент инерции трубки относительно оси вращения как стержня

$$J_z = \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2.$$

Количество движения шарика в переносном движении

$$K_e = \frac{P_1}{g} v_e = \frac{P_1}{g} a \omega_0.$$

Поэтому в первом положении

$$L_z^{(1)} = \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2 \omega_0 + \frac{P_1}{g} a^2 \omega_0 =$$

$$= \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 a^2) \omega_0.$$

Во втором положении, на расстоянии s ,

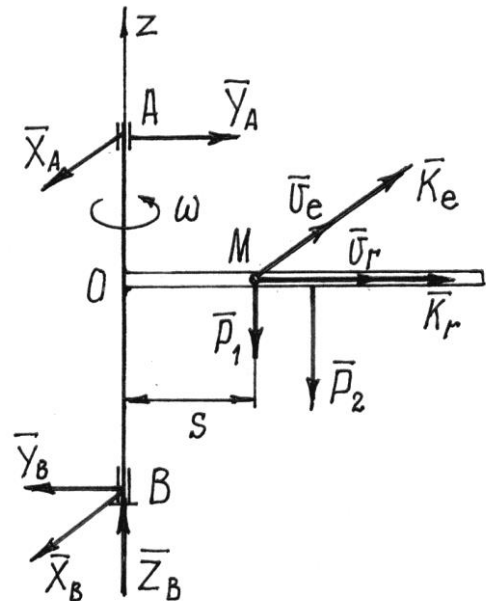


Рис. 19.14

$$L_z^{(2)} = J_z \omega + K_e s = \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2 \omega + \frac{P_1}{g} s^2 \omega = \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 s^2) \omega.$$

(Момент вектора количества движения шарика в относительном движении $\vec{K}_r$ относительно оси вращения равен нулю).

Приравнявая $L_z^{(1)}$ и $L_z^{(2)}$, получим уравнение

$$\frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 a^2) \omega_0 = \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 s^2) \omega,$$

из которого находим
$$\omega = \frac{P_2 l^2 + 3P_1 a^2}{P_2 l^2 + 3P_1 s^2} \omega_0.$$

Скорость вращения трубки будет уменьшаться с увеличением расстояния s .

Понятия свободных колебаний, малые свободные колебания системы. Период и амплитуда колебаний.

Основная часть лекции

Основные определения колебательного движения

Колебательным движением материальной системы называется такое ее движение, при котором она через некоторые промежутки времени постоянно возвращается к определенному положению. Нетрудно обнаружить, что большинство окружающих нас систем совершают колебательное движение.

Если время, за которое все точки системы возвращаются к любому определенному положению с одними и теми же скоростями, постоянно и одинаково, то такое время T называется *периодом колебаний*. А эти колебания – периодическим колебательным движением.

На рис. 20.1 показан пример изменения какой-то обобщенной координаты q при довольно сложном колебательном процессе. А на рис. 20.2 пример более организованных, *периодических колебаний*.

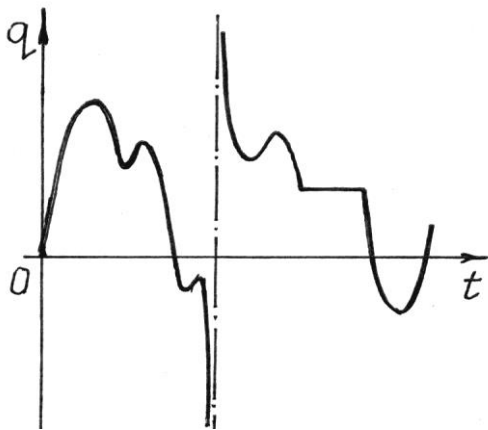


Рис. 20.1

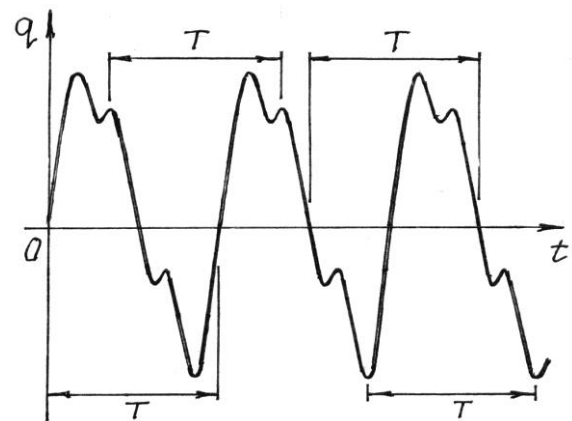


Рис. 20.2

При периодическом процессе значения функции, описывающей движение системы, повторяются через каждый период T , то есть

$$q(t) = q(t + T). \quad (20.1)$$

Если эта функция имеет вид

$$q = a \sin(kt + \beta), \quad (20.2)$$

то такое колебательное движение называется *гармоническим*. График такого движения дан на рис. 20.3.

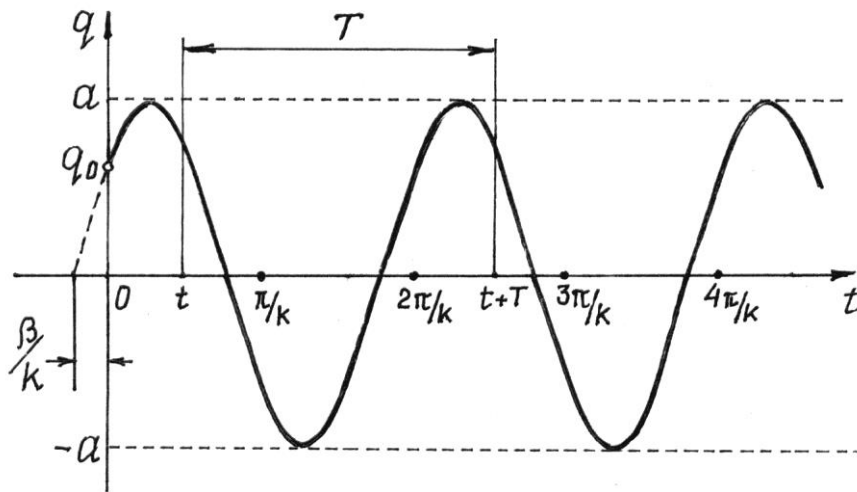


Рис. 20.3

По (20.2) $q_0 = a \sin \beta$ – начальная координата, определяющая положение системы в начале движения (при $t = 0$); a – амплитуда колебаний, имеет размерность обобщенной координаты; $(kt + \beta)$ – фаза колебаний, β – начальная фаза; k – частота колебаний, с^{-1} .

Период колебаний найдем, используя свойство (20.1):

$$a \sin(kt + \beta) = a \sin[k(t + T) + \beta].$$

Отсюда, так как период синуса равен 2π , $kt + \beta = kt + kT + \beta - 2\pi$. Значит, период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (20.3)$$

Вообще существует много всяких типов колебаний. Выделим в первую очередь линейные и нелинейные колебания. Названия их определяются видом дифференциальных уравнений, которые описывают колебательное движение материальной системы.

Исследование нелинейных колебаний значительно усложняется, так как нет общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Но, если рассматривать малые колебания, такие, при которых координата и скорость изменяются на малую величину, то многие нелинейные уравнения станут линейными и исследование движения значительно упростится.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь малые, линейные колебания. И, мало того, колебания системы только с одной степенью свободы. Естественно, колебания системы могут совершаться только около устойчивого положения равновесия.

Если система консервативная, то найти положение равновесия и определить устойчивость его можно с помощью потенциальной энергии. В разд. XVIII, §3 установлено, что в положении равновесия выполняется условие $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$, и если в положении равновесия

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0, \text{ то равновесие будет устойчиво.}$$

Договоримся отсчитывать координату от положения равновесия ($q_0 = 0$), а потенциальную энергию там считать равной нулю ($\Pi_0 = 0$). Тогда, по определению малых колебаний, обобщенная координата q всегда будет малой величиной.

Разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена около положения равновесия

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_{q=0} \cdot q + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=0} \cdot q^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3} \right)_{q=0} \cdot q^3 + \dots$$

Так как $\Pi(0) = 0$ и $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_{q=0} = 0$, и отбросив члены третьего и выше порядка

малости, получим

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (20.4)$$

где коэффициент $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=0} > 0$ по условию устойчивости.

Поэтому потенциальная энергия колебательной системы, отсчитываемая от положения устойчивого равновесия, будет всегда положительной. Кинетическую энергию системы при

малых колебаниях также можно преобразовать. Кинетическая энергия системы $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$, а

так как радиус-вектор точек $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$ и $q = q(t)$, то $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \dot{q}$. Поэтому

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 A(q), \text{ где } A(q) = \sum m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \right)^2. \text{ Эту функцию } A(q) \text{ можно}$$

разложить в ряд Маклорена по степеням q около положения равновесия и учесть только первый член: $A(q) = A(0) + \dots$. Остальные члены можно не учитывать, так как после

подстановки $A(q)$ в кинетическую энергию T они станут величинами третьего и выше порядка.

Обозначив постоянную $A(0) = a$, получим:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (20.5)$$

Коэффициент a называется коэффициентом инерции. Конечно, $a > 0$, так как кинетическая энергия не может быть отрицательной.

Замечание. Практически при исследовании конкретных колебательных систем приходится раскладывать в ряд функции, содержащие, чаще всего, $\sin x$, $\cos x$, e^x . Разложение их с точностью до малых второго порядка известны: $\sin x = x$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2$, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$.

Лекция №16

План лекции

Уравнение малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы.

Понятия свободных колебаний системы с двумя или n -степенями свободы. Обобщенные координаты

Основная часть лекции

Вывод уравнения малых свободных колебаний механической системы.

Свободными колебаниями называется колебательное движение системы, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

Составим уравнение Лагранжа для консервативной системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0.$$

Используя (20.4) и (20.5), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний $a\ddot{q} + cq = 0$ или, обозначив $\frac{c}{a} = k^2$,

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (20.6)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами известно

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (20.7)$$

или, используя другие постоянные $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_1}{C_2}$,

$$q = a \sin(kt + \beta). \quad (20.8)$$

Следовательно, малые свободные колебания – гармонические колебания, причем амплитуда колебаний и начальная фаза определяются начальными условиями (q и $\dot{q}$ при $t = 0$), а частота колебаний k и период T не зависят от начальных условий, определяются только конструкцией системы.

Обычно частоту колебаний находят сравнением полученного дифференциального уравнения с уравнением (20.6).

Пример 20.1. Тело весом P подвешено на нити, перекинутой через блок и прикрепленной к пружине (рис. 20.4). Вес блока G , радиус – r ; жесткость пружины c . Определим период свободных колебаний системы.

Назначим обобщенной координатой смещение z груза по вертикали от положения равновесия, при котором пружина была растянута на величину f .

Тогда потенциальная энергия относительно положения равновесия

$$\Pi = -Pz + \frac{1}{2}c(z + f)^2 - \frac{1}{2}cf^2. \quad \text{Где } (z + f) -$$

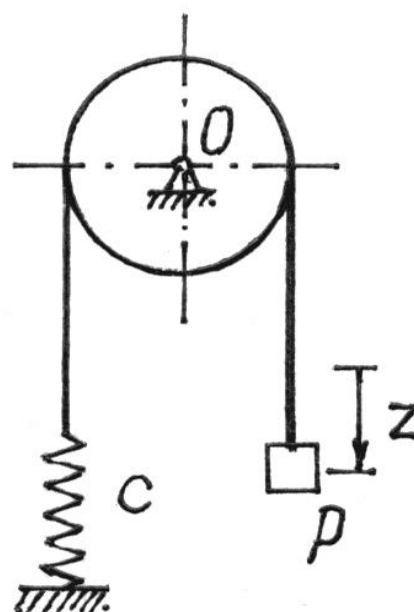
полная деформация пружины, а $\frac{1}{2}cf^2 -$

потенциальная энергия пружины в положении равновесия, которую вычитаем из потенциальной энергии полностью деформированной пружины.

Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf + \frac{1}{2}cf^2 - \frac{1}{2}cf^2 = \\ &= -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf = (-P + cf)z + \frac{1}{2}cz^2. \end{aligned}$$

Рис. 20.4



В положении равновесия должно выполняться условие

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = (-P + cf + cz)_{z=0} = 0. \quad \text{Отсюда } P = cf, \text{ значит, } \Pi = \frac{1}{2} cz^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_O \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \cdot \frac{z^2}{r^2} = \frac{1}{4g} (2P + G) \dot{z}^2.$$

Составив уравнение Лагранжа, получим: $\frac{1}{2g} (2P + G) \ddot{z} + cz = 0$ или

$$\ddot{z} + \frac{2cg}{2P + G} z = 0. \quad \text{Сравнивая с формулой (20.6), находим частоту колебаний}$$

$$k = \sqrt{\frac{2cg}{2P + G}} \text{ и затем период } T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{2P + G}{2cg}}.$$

Пример 20.2. Определим период малых колебаний балочки AB на цилиндрической поверхности (см. пример 18.4).

Потенциальная и кинетическая энергии определены. Разложим их в ряд с точностью до малых величин второго порядка. Для этого достаточно положить $\sin \varphi = \varphi$, а $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$.

Получим $\Pi = mgr(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2 - 1) = \frac{1}{2} mgr \varphi^2$. Кинетическая энергия получится такой, если

$$\text{отбросить член четвертого порядка содержащий произведение } \varphi^2 \dot{\varphi}^2: \quad T = \frac{1}{24} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Составляем уравнение Лагранжа. Определив производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} ml^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} ml^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgr \varphi, \text{ получим уравнение}$$

$$\frac{1}{12} ml^2 \ddot{\varphi} + mgr \varphi = 0. \text{ Приводим его к форме (20.6): } \ddot{\varphi} + 12 \frac{gr}{l^2} \varphi = 0. \text{ Поэтому частота}$$

$$\text{малых колебаний } k = \sqrt{12 \frac{gr}{l^2}} = 2 \frac{\sqrt{3gr}}{l}, \text{ а период } T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi l}{\sqrt{3gr}}.$$

Лекция №17

План лекции

Собственные частоты и коэффициенты формы малых свободных колебаний системы с двумя или n -степенями свободы

Свободные колебания системы с учетом сил сопротивления движению

Известно, что свободные колебания не длятся очень долго. Как правило, они, как говорят, затухают и довольно скоро. Причиной этому является чаще всего сопротивление среды, в которой движутся части колебательной системы.

Обычно считают это сопротивление пропорциональным скорости. Пусть на каждую точку материальной системы действует сила сопротивления $\vec{R}_i = -v_i \vec{v}_i$. Обобщенная сила, соответствующая этим силам:

$$Q' = \frac{1}{\delta q} \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \vec{R}_i \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q} = \sum \vec{R}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}.$$

Скорость точек $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \dot{q}$, так как $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$ – сложная функция,

координата $q = q(t)$. Поэтому $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}$. Значит, $Q' = \sum \vec{R}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} =$

$$= -\sum v_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} = -\sum v_i \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum \frac{1}{2} v_i v_i^2. \quad \text{Обозначим} \quad \sum \frac{1}{2} v_i v_i^2 = \Phi.$$

Тогда обобщенная сила сопротивления $Q' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}.$

Заметим, что по форме эта функция Φ аналогична кинетической энергии T . Поэтому, если разложить ее в ряд Маклорена и учесть члены лишь второго порядка малости, результат получится тоже аналогичным (20.5): $\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$ (коэффициент b также будет положительным). И тогда обобщенная сила сопротивления движению

$$Q' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b \dot{q}. \quad (20.9)$$

Функция Φ называется диссипативной, или функцией рассеивания энергии системы.

После подстановки в уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q'$ получим

дифференциальное уравнение $a\ddot{q} + cq = -b\dot{q}$ или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0, \quad (20.10)$$

где $n = \frac{b}{2a}$ – коэффициент сопротивления, $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ – частота свободных колебаний без сопротивления.

Найдем решение уравнения (20.10). Характеристическое уравнение $z^2 + 2nz + k^2 = 0$. Корни его $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ могут быть и комплексными, и вещественными в зависимости от сопротивления, от величины коэффициента n .

а) *Случай малого сопротивления ($n < k$).*

Корни получаются комплексными $z_{1,2} = -n \pm i\lambda$, где $\lambda = \sqrt{k^2 - n^2}$, $i = \sqrt{-1}$.

Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$q = e^{-nt}(C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t) \quad (20.11)$$

или

$$q = ae^{-nt} \sin(\lambda t + \beta), \quad (20.12)$$

где постоянные C_1 и C_2 или a и β находятся по начальным условиям.

Сравнивая решение (20.12) с (20.2), делаем вывод, что это будут колебания, но не гармонические, так как амплитуда колебаний, равная ae^{-nt} , непостоянная, уменьшается с течением времени. Поэтому такие колебания и называются *затухающими*.

График таких колебаний дан на рис. 20.5.

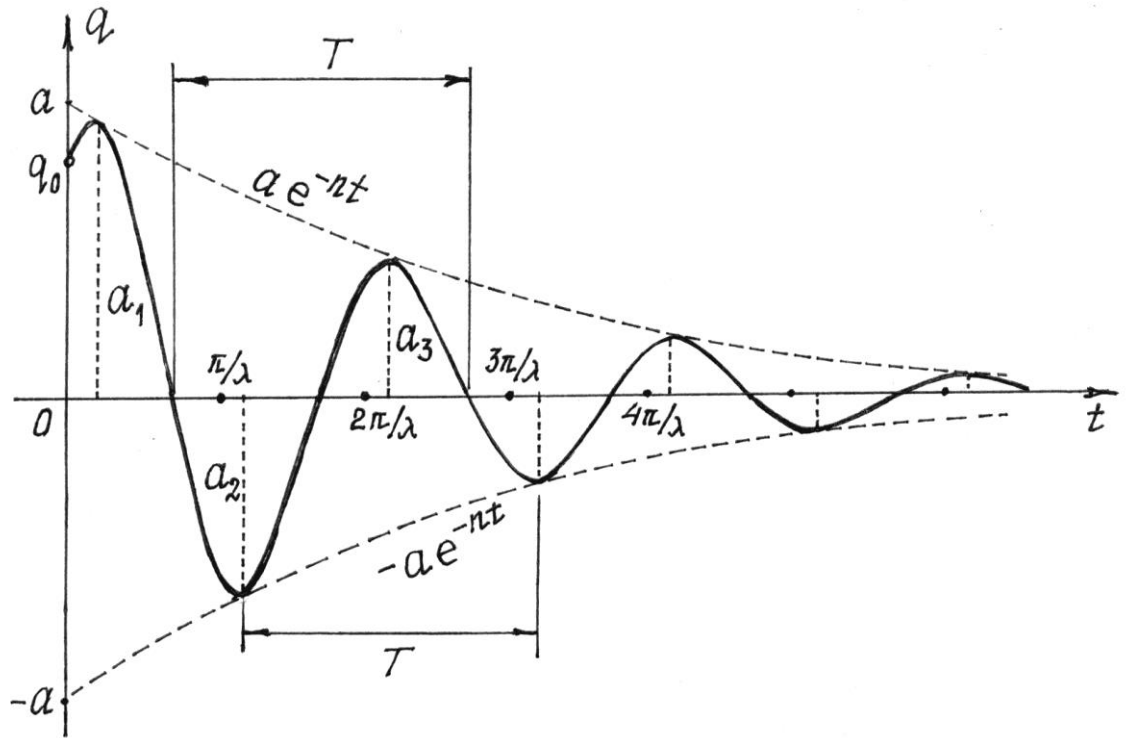


Рис. 20.5

Следует заметить, что колебательный процесс не будет периодическим. Но, так как система проходит через положение равновесия через равное время, все-таки вводят понятие

периода
$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Если сравнить этот период колебаний с периодом колебаний системы без сопротивления (20.3), увидим, что сопротивление увеличивает период колебаний и уменьшает их частоту.

Интересна закономерность изменения амплитуды. Найдем отношение соседних амплитуд (через полпериода $T/2$)

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a e^{-nt}}{a e^{-n(t+T/2)}} = e^{nT/2} = \text{const.}$$

То есть амплитуды уменьшаются по закону геометрической прогрессии, знаменателем которой является величина $e^{nT/2}$. Натуральный логарифм ее, равный $\frac{1}{2} nT$, называется логарифмическим декрементом колебаний.

Конечно, через период амплитуда уменьшится в e^{nT} раз, а через m периодов – в e^{mnT} раз.

б) *Случай большого сопротивления ($n > k$).*

Корни характеристического уравнения получатся вещественными:

$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$. В этом случае, как известно из курса математики, решение дифференциального уравнения (20.10)

$$q = e^{-nt} \left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t} \right). \quad (20.13)$$

Решение явно неколебательное, непериодическое.

Графики таких движений показаны на рис. 20.6. Вид движения зависит от начальных условий и величины коэффициента сопротивления n .

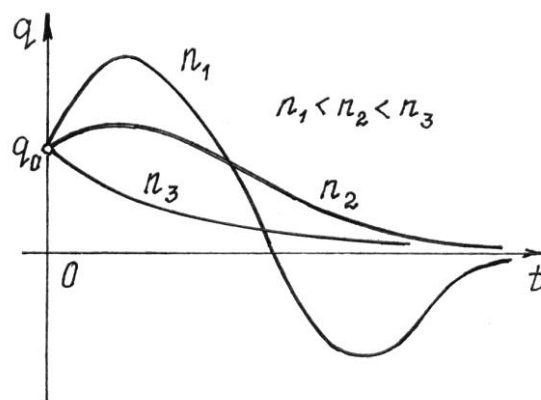
в) *Случай равного сопротивления ($n = k$).*

Корни характеристического

уравнения получаются равными $z_{1,2} = -n$. Поэтому решение дифференциального уравнения

$$q = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (20.14)$$

Движение и в этом случае не будет колебательным.



Лекция №18

План лекции

Вывод уравнений малых свободных колебаний механической системы с двумя или n -степенями свободы

Основная часть лекции

Вынужденные колебания системы

Если сила, которая вывела систему из положения равновесия, продолжает действовать, то такое колебание не будет свободным, будет вынужденным. И эта сила называется *возмущающей силой*.

Рассмотрим колебательное движение под действием обобщенной возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону $Q = Q_0 \sin(pt + \gamma)$, где Q_0 —

максимальная величина возмущающей силы;
 p – частота изменения силы; γ – начальная фаза изменения силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний получится таким:

$$\ddot{q} + k^2 q = Q_0 \sin(pt + \gamma). \quad (20.15)$$

Решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения. Общее решение уже было получено в §2

(см. формулу (20.7) или (20.8)). Частное решение ищем в виде $q_{\text{ч.н}} = A \sin(pt + \gamma)$.

Подставив частное решение в дифференциальное уравнение (20.15), получим $-Ap^2 \sin(pt + \gamma) + k^2 A \sin(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma)$. Отсюда

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2}. \quad (20.16)$$

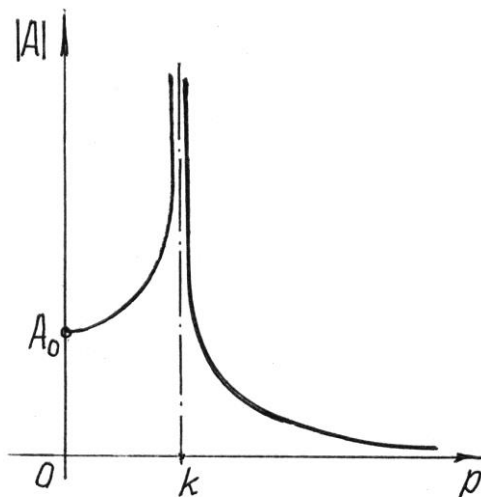
Значит, полное решение уравнения (20.15)

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin(pt + \gamma). \quad (20.17)$$

Так как общее и частное решения совершаются с разными частотами, то вынужденные колебания не будут гармоническими. Но, как нам уже известно, общее решение определяет свободные колебания, которые с течением времени довольно быстро затухают. Поэтому интерес представляют только установившиеся колебания

$$q = \frac{Q_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \gamma). \quad (20.18)$$

Отсюда следует, что установившиеся вынужденные колебания будут гармоническими с частотой p , равной частоте возмущающей силы, и что они не зависят от начальных условий. И самое интересное – амплитуда колебаний A зависит от частоты p возмущающей силы. График этой зависимости дан на рис. 20.7.



Первое, что надо отметить, при $p = k$ (частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний) амплитуда увеличивается до бесконечности. Это явление называется *резонансом*. Как известно из курса высшей математики, при $p = k$ решение (20.17) не будет удовлетворять уравнению (20.15). Частное решение надо искать в другом виде

$$q = Bt \cos(pt + \gamma).$$

Подставив его в уравнение (20.15), получим:

$$-Bp \sin(pt + \gamma) - Bp \sin(pt + \gamma) - Btp^2 \cos(pt + \gamma) + Btp^2 \cos(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma).$$

Отсюда $B = -\frac{Q_0}{2p}$ и частное решение, определяющее вынужденные колебания при

резонансе, получится таким:

$$q = -\frac{Q_0}{2p} t \cos(pt + \gamma). \quad (20.19)$$

Видим, что амплитуда колебаний беспредельно равномерно увеличивается (рис. 20.8). Амплитуда не сразу становится бесконечно большой. И даже малая возмущающая сила может раскачать систему до больших амплитуд и вызвать разрушение конструкции.

Интересен еще один случай, при котором частота p возмущающей силы близка к частоте свободных колебаний, $p \approx k$, но не равна ей.

Воспользуемся решением (20.17), положив для простоты $\gamma = 0$. Пусть в начале движения координата и скорость равнялись нулю (при $t = 0$ $q = 0$ и $\dot{q} = 0$). Подставим эти начальные условия в уравнения $q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin pt$,

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + Ap \cos pt.$$

Получим два уравнения $0 = C_1$ и $0 = C_2 k + Ap$, из которых находим $C_1 = 0$,

$$C_2 = -A \frac{p}{k}. \text{ Тогда уравнение колебаний } q = -A \left(\frac{p}{k} \sin kt - \sin pt \right).$$

Так как $\frac{p}{k} \approx 1$ и $(k^2 - p^2) = (k - p)(k + p) \approx 2p(k - p)$, то по формуле (20.16)

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2} \cong \frac{Q_0}{2p(k - p)}.$$

Кроме того, $(\sin kt - \sin pt) = 2 \cos \frac{k+p}{2} t \cdot \sin \frac{k-p}{2} t \approx 2 \cos pt \cdot \sin \frac{k-p}{2} t$. Уравнение движения получится таким:

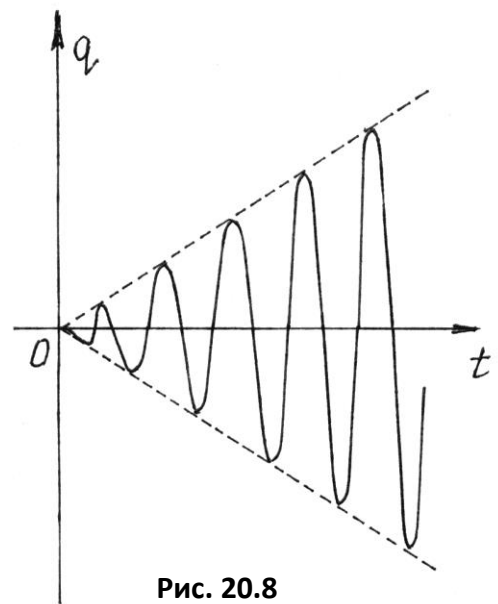


Рис. 20.8

$$q = -\frac{Q_0}{p(k-p)} \sin \frac{k-p}{2} t \cdot \cos pt. \quad (20.20)$$

Рассматривая функцию, стоящую перед $\cos pt$, как амплитуду колебаний, замечаем, что она изменяется по гармоническому закону с периодом $T_A = \frac{4\pi}{k-p}$ от нуля до максимального значения $A_{\max} = \frac{Q_0}{p(k-p)}$

(рис. 20.9). Сами колебания совершаются с частотой p и периодом $T_k = \frac{2\pi}{p}$.

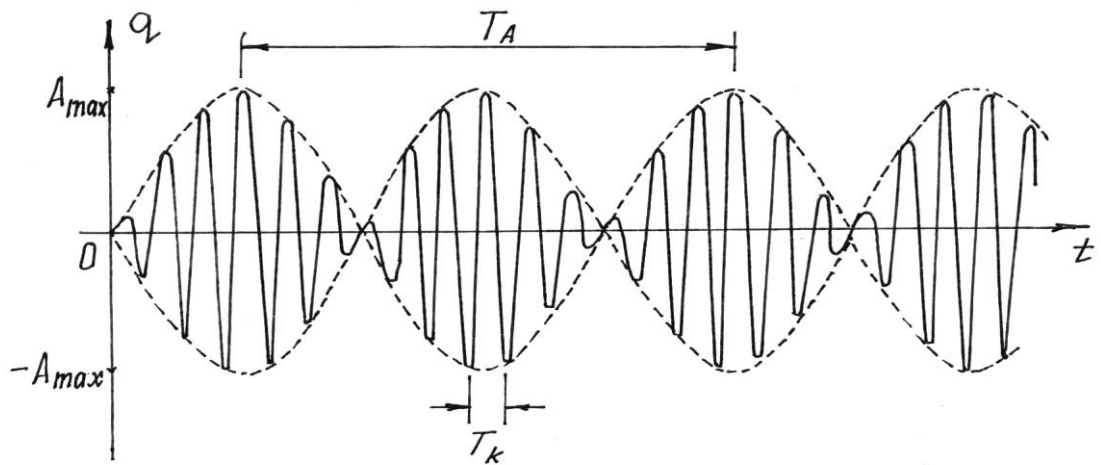


Рис. 20.9

Чем ближе частота возмущающей силы p к частоте k , то есть чем ближе к резонансу, тем больше будет период амплитуды T_A и больше амплитуда $A_{\max}$. И тем больше будет похож график на рис. 20.9 на график на рис. 20.8, изображающий колебания при резонансе. Эти колебания с периодически изменяющейся амплитудой называются *биениями*. Такое явление часто встречается, например, в радиотехнике.

Мы исследовали вынужденные колебания под действием возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону. Но нередко она оказывается более сложной. Приходится использовать специальные математические методы, чтобы получить более-менее точный результат.

Если возмущающая сила периодическая и ее можно разложить в ряд Фурье, то решение может оказаться не очень сложным. Пусть возмущающая сила описывается периодической функцией $Q = Q(t)$ с периодом $T_B = \frac{2\pi}{p}$, p – частота изменения этой функции,

и конструкция её позволяет разложить функцию в ряд Фурье $Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin(jpt + \gamma_j)$,

где Q_j и γ_j – коэффициенты Фурье, определяемые по специальным формулам.

Частное решение дифференциального уравнения (20.15) получится в виде ряда

$$q = A_0 + \sum_{j=1}^s \frac{Q_j}{k^2 - (jp)^2} \sin(jpt + \gamma_j) = \frac{Q_0}{k^2} + \frac{Q_1}{k^2 - p^2} \sin(pt + \gamma_1) + \\ + \frac{Q_2}{k^2 - (2p)^2} \sin(2pt + \gamma_2) + \frac{Q_3}{k^2 - (3p)^2} \sin(3pt + \gamma_3) + \dots$$

Количество s членов этого ряда стараются иметь не очень большим, если ряд хорошо сходится.

Решение получается как сумма нескольких синусоид («гармоник») с кратными частотами. Наименьшая частота p называется основной частотой. Интересно, что в полученном решении возможно несколько резонансов, столько, сколько гармоник: при $p = k$,

$$p = \frac{1}{2}k, \quad p = \frac{1}{3}k \quad \text{и т.д.}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Лекционный курс теоретической механики изложен в достаточном объеме однако, часть тем рекомендована для самостоятельного изучения согласно отведенным часам учебного плана.

Изучение лекционного курса теоретической механики позволит студенту самостоятельно выполнить расчетно-графическую и курсовую работу, а также лабораторные работы, решить рекомендованные задачи. Полученные знания теоретической механики необходимы для усвоения материала последующих дисциплин: сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика и др. Приобретенные знания законов, принципов и методов теоретической механики позволят выпускнику в своей профессиональной деятельности уверенно решать поставленные перед ним технические задачи.

Решение любой задачи механики складывается из двух этапов: этапа построения математической модели и этапа ее решения одним из математических методов. Поэтому при изучении теоретической механики исключительную роль играет математика, в частности такие ее разделы, как векторная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление.

Методами теоретической механики решается большой круг задач из различных областей науки и техники, причем диапазон исследований постоянно расширяется.