

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)**

Институт инновационных технологий  
Кафедра «Технология машиностроения»

**Конспект лекций**

по дисциплине

**«ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ»**

для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению  
13.03.03 «Энергетическое машиностроение»

Составитель:  
профессор кафедры ТМС Шевченко А.П.

Владимир 2015

Конспект лекций по дисциплине «Теория машин и механизмов» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 13.03.03 «Энергетическое машиностроение».

Настоящий конспект лекций составлен в соответствии с требованиями ФГОС ВО и ОПОП направления подготовки 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», рабочей программы дисциплины «Теория машин и механизмов». В качестве рекомендаций для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих ВУЗов России.

Рекомендации предназначены для студентов очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании  
НМС направления 13.03.03  
Протокол № 6 от 11.11.2015 г.  
**Рукописный фонд кафедры ТМС ВлГУ**

## Предисловие

Настоящий курс лекций разработан на основе теоретической части учебников:

1) Беляев, Борис Александрович. Теория механизмов и машин [Электронный ресурс] : учебное пособие к курсовому проектированию для вузов по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и производств" / Б. А. Беляев, А. П. Шевченко, А. А. Рязанов ; Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (ВлГУ), 2014 .— 124 с.

URL:<http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/3553/1/01321.pdf>

2) Беляев, Борис Александрович. Теория механизмов и машин [Электронный ресурс] : учебное пособие к практическим занятиям для вузов по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и производств" / Б. А. Беляев, А. П. Шевченко ; Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (ВлГУ), 2014 .— 119 с.

URL:<http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/3826/1/01363.pdf>

## ОГЛАВЛЕНИЕ КУРСА ЛЕКЦИЙ

|   | Стр. |
|---|------|
| <i><b>Введение</b></i> .....  | 5    |
| <i><b><u>Лекция №1</u></b></i>  |      |
| Предмет теории механизмов и машин (ТММ). Основные понятия ТММ.....  | 7    |
| <i><b><u>Лекция №2</u></b></i>  |      |
| Структурный синтез механизмов.....  | 11   |
| <i><b><u>Лекция №3</u></b></i>  |      |
| Общие методы кинематического анализа. Аналитические методы кинематического анализа.....   | 14   |
| <i><b><u>Лекция №4,5</u></b></i>  |      |
| Графоаналитический метод кинематического анализа. Кинематическое исследование механизмов методом планов. План скоростей. План ускорений.....                              | 18   |
| <i><b><u>Лекция №6,7</u></b></i>  |      |
| Общие методы динамического анализа. Задачи исследования. Динамические модели механизмов и машин. Общая схема исследования движения механизмов под действием сил.....      | 26   |
| <i><b><u>Лекция №8</u></b></i>  |      |
| Общие методы синтеза механизмов. Силовой расчет механизмов. Примеры силового расчета механизмов методом кинетостатики .....   | 35   |
| <i><b><u>Лекция №9,10</u></b></i>   |      |
| Режимы движения механизмов в машинах. Трение на плоскости, в клиновом пазу. Коэффициент полезного действия при движении по наклонной плоскости .....                      | 38   |
| <i><b><u>Лекция №11</u></b></i>   |      |
| Уравновешивание механизмов. Статическое уравновешивание. Методы заменяющих масс. Уравновешивание силы инерции. Уравновешивание роторов и многоцилиндровых двигателей..... | 44   |
| <i><b><u>Лекция №12</u></b></i>   |      |
| Синтез зубчатых зацеплений. Назначение и виды зубчатых передач. Основная теорема зацепления. Теорема Виллиса. Эвольвента окружности и ее свойства.....                    | 52   |
| <i><b><u>Лекция №13</u></b></i>   |      |

Эвольвентные профили зуба и зубчатого колеса. Передача из цилиндрических прямозубых колес внешнего зацепления.....57

**Лекция №14**

Синтез планетарных механизмов. Планетарные механизмы с цилиндрическими колесами.....60

**Лекция №15**

Планетарный редуктор.....62

**Лекция №16**

Синтез кулачковых механизмов. Плоские кулачковые механизмы. Основные схемы, терминология, кинематические возможности.....65

**Лекция №17**

Угол давления. Угол передачи движения. Связь угла давления с кинематическими характеристиками и размерами кулачковых механизмов.....68

**Лекция №18**

Определение начальных размеров и начального радиуса для механизмов с плоскими толкателями. ....70

**Литература**.....72

**Заключение**.....73

## ВВЕДЕНИЕ.

Дисциплина «Теория машин и механизмов» является значимой для формирования компетенций выпускников технических направлений подготовки. Все основные рабочие процессы в современном народном хозяйстве осуществляются машинами или с применением средств механизации. Современные машины многократно повышают производительность труда человека и решают задачи, порой непосильные человеку.

Конспект лекций подготовлен согласно рабочей программе, разработанной в соответствии с учебным планом подготовки бакалавров направления 13.03.03 «Энергетическое машиностроение» и требованиям ФГОС ВО к реализации основных образовательных программ бакалавриата.

В дисциплине «Теория машин и механизмов» рассматриваются основные виды механизмов, применяемых в технике, их кинематические и динамические свойства, а также динамические явления, возникающие при работе машинного агрегата. Кроме этого, изучаются методы анализа и синтеза механизмов.

Дисциплина «Теория машин и механизмов» посвящена изучению конструкций, теории и расчета отдельных типовых деталей, их комплексов – узлов или сборочных единиц, объединенных общими сборочными операциями и назначением.

Основные задачи:

- а) изучение методов кинематического, динамического, силового анализа и синтеза основных видов механизмов;
- б) изучение конструкций, типажа и критериев работоспособности основных частей машин;
- в) приобретение навыков конструирования и применения справочной литературы и стандартов;
- г) развитие творческих конструкторских способностей;
- д) владение при конструировании современной вычислительной техникой, применение современных графических редакторов и CAD/CAM систем проектирования.

Изучение дисциплины «Теория машин и механизмов», а также практического его приложения в достаточном объеме невозможно без самостоятельной работы студентов.

Самостоятельная работа дает возможность закрепить знания, полученные по рекомендованной литературе в процессе аудиторных занятий и хорошо подготовиться к рейтингу – контролю, устным опросам, к выполнению курсовых работ, а также к экзамену.

## ПЛАН И ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ЛЕКЦИЙ

### Лекция №1

#### План лекции

Введение. Предмет «Теория машин и механизмов» (ТММ). Основные понятия ТММ. Механизм. Машина. Звено механизма. Входные и выходные звенья механизма. Кинематическая пара. Классификация кинематических пар. Низшие и высшие пары. Кинематические цепи и кинематические соединения.

#### Основная часть лекции

##### Введение

Теория механизмов и машин является общеинженерной дисциплиной, играющей роль связующего звена между циклом общенаучных и специальных дисциплин. Вместе с курсом теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин она образует группу предметов, закладывающих фундамент инженерного образования машиностроительного профиля. Значение этих дисциплин не снижается, а растёт.

Курс «*Теории машин и механизмов*» (сокращенно ТММ) иногда называют механикой машин, тем самым, подчеркивая, что это специальный раздел механики, изучающий присущими механике методами системы машин и механизмов.

ТММ изучает общие свойства механизмов и машин, даёт общие методы их проектирования, пригодные для различных областей техники. ТММ обычно ограничивается только схемными решениями, так как именно схемы определяют основные параметры механизма. Никакими конструктивными и технологическими улучшениями нельзя исправить недостатки схемы. Сведения, содержащиеся в курсе ТММ, важны не только для конструкторов, но и для эксплуатационников, так как грамотная эксплуатация возможна только при чётком понимании принципов работы и основных свойств машин.

Все задачи курса ТММ можно условно разделить на две категории: *задачи анализа* и *задачи синтеза*.

*Анализ* состоит в исследовании кинематических и динамических свойств механизма по заданной схеме механизма и заданным размерам. *Задача синтеза* является обратной по отношению к задаче анализа. Однако не всегда существуют методы прямого решения задачи синтеза. Поэтому при проектировании приходится прибегать к многократному

повторению задачи анализа с тем, чтобы выбрать из рассматриваемых вариантов наилучший.

Слово «механика» происходит от древнегреческого слова, которым называлось все искусно придуманное. В русском языке ещё во времена Петра I это слово звучало как «машина».

История машин имеет древние корни. В процессе овладения природой первобытный человек начал проникать вначале бессознательно, интуитивно в её тайны. Около 7 тыс. лет назад возникают первые цивилизации (Нил, Тигр и Евфрат, Инд, Жёлтая река). В 5 - 3 вв. до н. э. появилась водяная мельница - первая машина в мировой истории.

### **Основные определения**

**Машина** – есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или обеспечения физического и умственного труда человека.

Машина осуществляет свой рабочий процесс посредством выполнения закономерных механических движений.носителем этих движений является механизм.

**Механизм** – есть система твердых тел, подвижно связанных путем соприкосновения и движущихся определенным, требуемым образом относительно одного из них, принятого за неподвижное.

**Звенья** – твердые тела, образующие механизм. Могут быть абсолютно твердые и деформируемые. Название звену можно дать по конструктивному признаку (коленчатый вал, зубчатое колесо) или по характеру движения (шатун, ползун, коромысло). Неподвижное звено механизма называют стойкой.

**Кинематическая пара** – соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Постоянство соприкосновения обеспечивается геометрическим или силовым замыканием.

### **Классификация кинематических пар.**

В настоящее время в зависимости от решаемой задачи используется две классификации: по характеру контакта и по числу подвижностей (или по числу связей, что равнозначно).

Если контакт звеньев осуществляется по поверхности – пара называется низшей, если по линии или в точке – высшей.



В зависимости от числа наложенных связей различают пять классов к.п.:

1<sup>ый</sup> класс - одна связь, пятиподвижная пара,

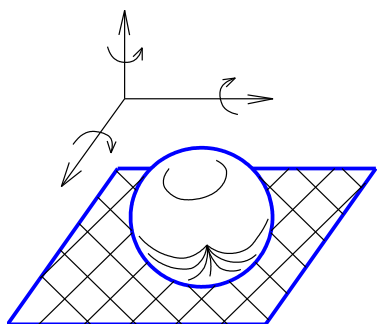
2<sup>ой</sup> класс - две связи, четырехподвижная пара,

3<sup>ий</sup> класс - три связи, трехподвижная пара,

4<sup>ый</sup> класс - четыре связи, двухподвижная пара,

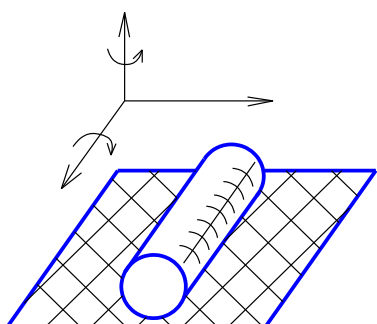
5<sup>ый</sup> класс - пять связей, одноподвижная пара.

Примеры:



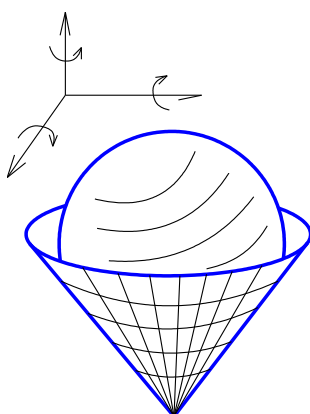
Шар-плоскость: 1 связь, 5 ст. свободы - 1ый класс

**(пятиподвижная)**

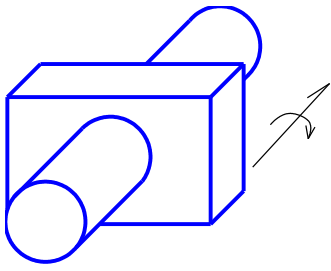


Цилиндр-плоскость: 2 связи, 4 ст. свободы - 2ой класс

**(4х-подвижная)**

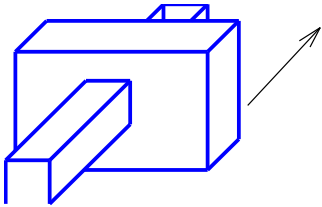


Сферическая: 2 связи, 3 ст. свободы –

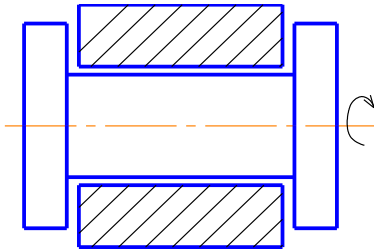


**Цилиндрическая:**

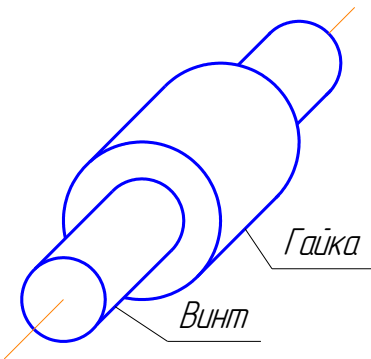
3ий класс ( 3х-подвижная)  
связи, 2 ст. свободы - 4ый  
класс (2х-подвижная)



**Поступательная:** 5 связей, 1 ст. свободы - 5ый класс (одноподвижная)



**Вращательная:** 5 связей, 1 ст. свободы - 5ый класс (одноподвижная)



**Винтовая:** 5 связей, 1 ст. свободы - 5ый класс (одноподвижная)

Независимое движение можно задать только одно (например, вращение гайки) второе движение (в данном случае, осевое перемещение гайки по винту) определится геометрией резьбы - ее шагом.

## Лекция №2

### План лекции

Структурный синтез механизмов. Число степеней свободы механизма. Проектирование структурной схемы механизма (структурный синтез механизмов). Начальные звенья. Образование плоских и пространственных механизмов путём наложения структурных групп (групп Ассура). Классификация групп Ассура. Избыточные связи.

## Основная часть лекции

### Классификация механизмов.

Классифицировать механизмы можно по различным признакам. В настоящем разделе мы упомянем только, что по характеру траекторий точек звеньев различают механизмы плоские и пространственные. У первых все подвижные точки движутся в параллельных плоскостях. Если же траектории не плоские кривые или лежат в пересекающихся плоскостях, то механизм называют пространственным.

По виду кинематических пар различают: механизмы с низшими парами и механизмы, в которых кроме низших используются и высшие пары.

Примеры: Кривошипно-ползунный механизм ДВС – плоский с низшими парами.

Главная передача ведущего моста а/м – пространственный механизм с высшей парой (коническая или гипоидная передача)

### Структурные формулы механизмов.

Общие закономерности в строении механизмов, связывающие число степеней свободы  $W$  механизма с числом звеньев и числом и видом его кинематических пар отражаются структурной формулой. Числом ст.свободы или подвижностью механизма называют число обобщенных координат, определяющие положение звеньев механизма относительно стойки.

Для пространственных механизмов используется формула Малышева, которая м.б. получена из следующих рассуждений:

-если механизм содержит  $n$  подвижных звеньев, то если бы на них не было положено связей, то они обладали бы числом степеней свободы  $6n$ ;

связи, которые наложены к.п. уменьшают это число:

пара одноподвижная – на 5 и если их число =  $p_1$ , то на  $5p_1$ ,

пара двухподвижная – на 4 и если их число =  $p_2$ , то на  $4p_2$  и т.д.

Общее число связей определяется суммой:

$$5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5$$

Но некоторое их количество  $q$  может повторяться. Эти связи называются избыточными, их наличие не изменяет подвижности механизма. Поэтому

$$W = 6n - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - q) \text{ – формула Малышева}$$

Для плоских механизмов используется формула Чебышева, которая может быть получена аналогичным образом, с учётом того, что не плоскости положение звена определяется 3-мя координатами, низшие пары вносят по две связи, а высшие – по одной:

$$W_{nl} = 3n - (2p_n + p_v - q_{nl}) \text{ – формула Чебышева}$$

Избыточные связи не изменяют подвижности механизма, но сборка и движение звеньев становятся возможными лишь при деформации звеньев. Более подробно см. [1] стр. 35-59

### Структура плоских механизмов с низшими парами

Установлено, что такие механизмы могут быть построены из двух типов элементарных структур: начального механизма и структурных групп Ассура.

1) **Начальным механизмом** 1-го класса 1-го порядка названа структура, состоящая из стойки и начального звена, соединённых низшей парой, т.е.

стойка и кривошип



или

стойка и ползун



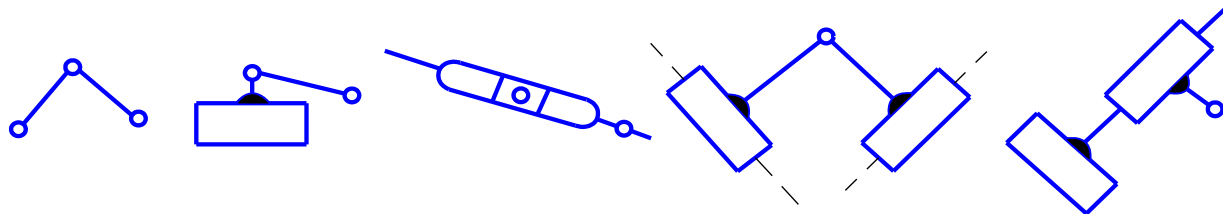
2) **Структурной группой Ассура** называют кинематическую цепь, подвижность которой равна нулю, если эту цепь внешними парами присоединить к стойке.

Используя формулу Чебышева, можно записать:  $0 = 3n - 2p_n - p_v$

Поскольку речь идёт о механизмах с низшими парами, т.е.  $p_v = 0$ , то получим:

$p_n = \frac{3}{2}R$ . Отсюда следует, что  $n$  должно быть чётным и самое простое сочетание в структурной группе.

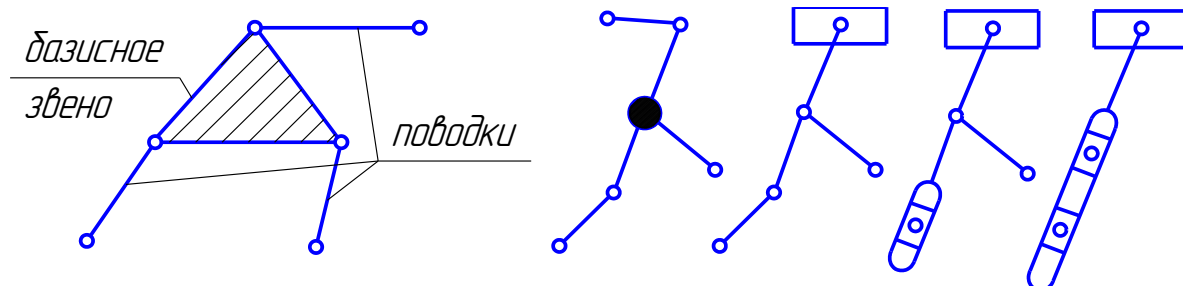
$n=2$   $p_n=3$  – такую структуру называли группой 2-го кл. 2-го порядка, и в зависимости от того, как скомбинированы вращательные и поступательные пары различают 5 разновидностей:



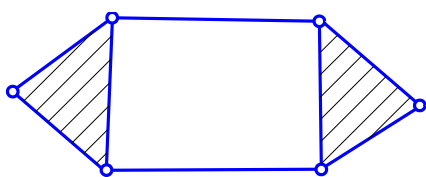
Следующее сочетание  $n=4$   $pn=6$  позволяет построить структурную группу двумя способами:

а) группа 3-го класса 3-го порядка

Разновидностей здесь гораздо больше. На рис. приведены некоторые из них.



б) группа 4-го класса 2-го порядка



Класс структурной группы определяется контуром, который образует внутренние пары, а порядок – числом внешних пар.

Из рассмотренных элементарных структур механизм строится следующим образом: к начальному механизму присоединяется структурная группа – одной внешней парой к начальному звену, другими – к стойке. Полученный таким образом механизм может быть усложнён присоединением последующих групп, которые своими внешними парами присоединяются к любым звеньям уже существующего (но нельзя все внешние пары новой группы присоединять к одному и тому же звену).

Умение различать механизм на элементарные структуры необходимо потому, что последовательность образования механизма однозначно определяет последовательность дальнейшего исследования – кинематического и силового.

При разложении надо иметь в виду, что число начальных звеньев равно числу степеней свободы механизма и за начальное звено принимается то, закон движения которого считается заданным.

### Лекция №3

#### План лекции

Общие методы кинематического анализа. Задачи кинематического анализа механизмов. Система линейных уравнений для определения положений звеньев незамкнутой кинематической цепи. Уравнения преобразования координат для низших пар.

## Основная часть лекции

### Кинематический анализ механизмов

**Цель анализа:** Определение кинематических характеристик механизмов, к которым относятся:

- перемещение звеньев и траектории точек как функции времени;
- их скорости и ускорения (  $1^{ые}$  и  $2^{ые}$  производные от этих функций по времени);
- функция положения (зависимость координат выходных звеньев от обобщенных координат);
- передаточные функции скорости и ускорения (  $1^{я}$  и  $2^{ая}$  производные от функции положения по обобщенной координате), нередко их называют аналогом скорости и аналогом ускорения ( линейных или угловых).

### Методы анализа

1. Аналитические ( метод преобразования координат, векторных и др.)
2. Графические ( метод кинематических диаграмм)
3. Графоаналитические ( метод планов)

Первая группа методов предполагает использование ЭВМ и позволяет получить результат с любой ( в пределах разумного) точностью, но без готового программного обеспечения являются весьма трудоемким.

Вторая группа методов отличается наименьшей из всех трудоёмкостью, но даёт весьма низкую точность и может быть использована лишь для предварительной оценки кинематических характеристик.

Третий метод – несколько более трудоёмкий по сравнению со вторым , но позволяет определить кинематические характеристики с точностью, которая во многих случаях вполне достаточна.

### Аналитические методы

Аналитические методы определения кинематических характеристик механизма сводятся к определению функции положения механизма, как зависимости координат выходных звеньев от обобщенных координат. И если известна зависимость последних от времени, то можно определить все кинематические характеристики механизма. Рассмотрим это на примере механизма с одной степенью подвижности.

Пусть обобщенной координатой механизма является положение начального звена  $q_1$  и функция положения  $i^{того}$  выходного звена  $q_i$  определяется уравнением

$$q_i = q_i(q_1) \quad (1)$$

При этом известна зависимость обобщенной координаты  $q_1$  от времени:

$$q_i = q_1(t) \quad (2)$$

Тогда закон движения выходного звена от времени получим подстановкой функции (2) в уравнение (1) и, дважды дифференцируя её по времени, получим:

а) уравнение скорости выходного звена

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i(q_1)}{dq_1} \frac{dq_1}{dt} \quad (3)$$

$\frac{dq_1}{dt}$  - первая производная обобщенной координаты по времени, т.е. скорость начального звена (скорость звена 1).

$\frac{dq_i}{dq_1}$  - первая производная функции положения  $i^{\text{того}}$  выходного звена по обобщенной координате, называемая аналогом скорости или передаточной функцией скорости (аналог скорости).

б) уравнение ускорения выходного звена

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} \left( \frac{dq_1}{dt} \right)^2 + \frac{dq_i}{dq_1} \frac{d^2 q_1}{dt^2} \quad (4)$$

$\frac{d^2 q_1}{dt^2}$  - вторая производная обобщенной координаты по времени, т.е. ускорение начального звена ( ускорения зв. 1 );

$\frac{d^2 q_i}{dq_1^2}$  - вторая производная перемещения выходного звена по обобщенной координате, называемая аналогом ускорения или передаточной функцией ускорения ( аналог ускорения).

$\left( \frac{dq_1}{dt} \right)^2$  - скорость звена 1.

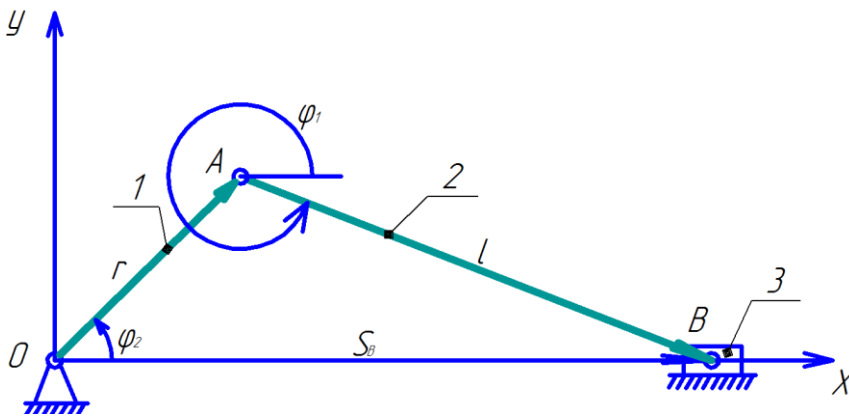
$\frac{dq_i}{dq_1}$  - аналог скорости.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{dq_i}{dq_1} \frac{dq_1}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dq_i}{dq_1} \right] \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_i}{dq_1} \frac{d}{dt} \left[ \frac{dq_1}{dt} \right] = \left[ \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} \frac{dq_1}{dt} \right] \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_i}{dq_1} \frac{d^2 q_1}{dt^2} = \\ &= \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} \left( \frac{dq_1}{dt} \right)^2 + \frac{dq_i}{dq_1} \frac{d^2 q_1}{dt^2} \end{aligned}$$

Таким образом при известной функции положения  $q_i = q_i(q_1)$  и закона движения начального звена  $q_1 = q_1(t)$  определены все кинематические характеристики механизма.



Рассмотрим пример аналитического определения кинематических характеристик механизма.



Если обозначить  $l/r = \lambda$ , то из второго уравнения получим :

$$\sin \varphi_2 = \frac{(-\sin \varphi_1)}{\lambda} \text{ или } \varphi_2 = -\arcsin\left(\frac{\sin \varphi_1}{\lambda}\right)$$

Тогда уравнение для определения перемещения можно записать:

$$S_B = r\left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{\lambda} \cos(\arcsin(\sin \varphi_1/\lambda))\right)$$

Дважды дифференцируя это выражение по  $\varphi_1$  получаем уравнения для определения аналога скорости точки В ( первую передаточную функцию или передаточную функцию скорости )-  $dS_B/d\varphi_1$  и аналога ускорения ( вторую передаточную функцию или передаточную функцию ускорения ) -  $d^2S_B/d\varphi_1^2$ . Тогда в соответствии с ускорениями (3) и (4) можно написать скорость точки В:

$$V_B = \frac{dS_B}{dt} = \frac{dS_B}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{dS_B}{d\varphi_1} \omega_1 \quad (5), \text{ где } \omega_1 - \text{угловая скорость звена 1.}$$

Ускорение точки В ( используя 4) :

$$a_B = \frac{d^2S_B}{dt^2} = \frac{d^2S_B}{d\varphi_1^2} \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \frac{dS_B}{d\varphi_1} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2S_B}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{dS_B}{d\varphi_1} \varepsilon_1$$

где  $\varepsilon_1$ - угловое ускорение звена 1.

Чтобы выполнить кинематическое исследование этого механизма полностью, необходимо составить уравнения для определения углового положения шатуна и его центра масс и выполнять с ними те же операции.

### Графический метод решения той же задачи ( метод кинематических диаграмм).

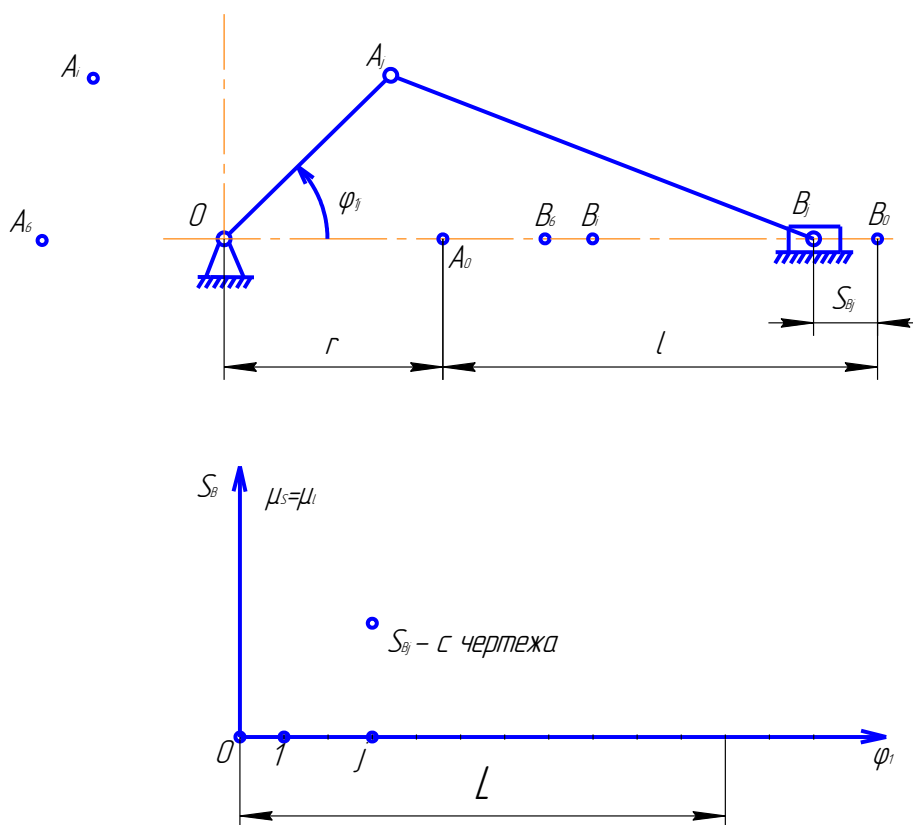
Строим в масштабе совмещенные планы механизма, задавая положения начального звена ( допустим, через  $30^\circ$  ) и на чертеже замеряем значения  $S_B$ . Отсчет перемещений в этом случае удобнее производить от одного из крайних положений. По результатам замеров строим зависимость  $S_B = S_B(\varphi_1)$  и дважды графически дифференцируем по углу поворота начального звена. Получаем графики аналогов скорости и ускорения.

Масштаб схемы

$$\mu_l = l_{OA} [\text{мм}] / OA [\text{мм}]$$

$l_{OA}$  - натуральная длина [мм]

$OA$  -отрезок чертежа [мм]



### Лекция №4,5

#### План лекции

Кинематический анализ механизмов по методу преобразования координат.

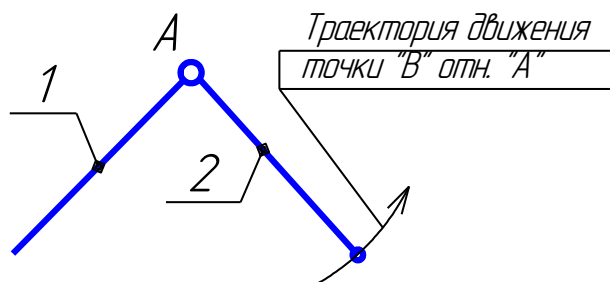
Определение положения звеньев плоских многозвенных механизмов. Системы линейных уравнений для определения скоростей и ускорений звеньев плоских механизмов. Планы скоростей и ускорений плоских механизмов.

## Основная часть лекции

### Метод планов при кинематическом анализе плоских механизмов с низшими парами.

План скоростей ( ускорений) это графическое решение соответствующих векторных уравнений. При составлении таких уравнений используется разложение движения на переносное и относительное. Параметры переносного движения должны быть известны заранее, а для относительного движения должно быть известно его направление. Только в этом случае можно получить уравнения, которые могут быть решены. В зависимости от характера связи между звеньями используются два способа разложения движения точки на переносное и относительное:

#### а) звенья связаны вращательной парой



траектория движения точки « В » относительно « А ».

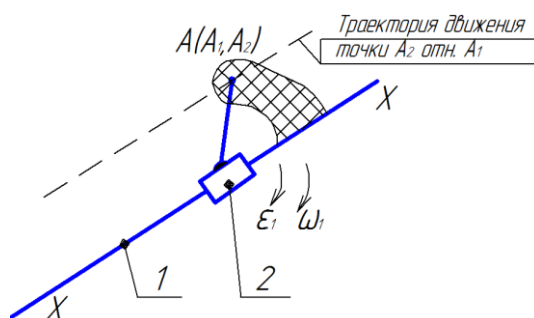
$\vec{V}_{BA} \perp AB$  справедливо для любой точки звена 2.

Должны быть известны параметры переносного движения  $\vec{V}_A$  и  $\vec{a}_A$ , тогда движение точки В можно описать следующим векторными уравнениями

-скорость:  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ , где вектор  $\vec{V}_{BA}$  направлен  $\perp AB$ .

-ускорение:  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$ , где вектор  $\vec{a}_{BA}^n$  направлен от В к А и численно равен  $a_{BA}^n = V_{BA}^2 / l_{AB}$ , а вектор  $\vec{a}_{BA}^t$  направлен  $\perp AB$ .

#### б) звенья связаны поступательной парой.



Траектория движения точки  $A_2$  относительно  $A_1$  || оси поступательной пары  $x-x$ .  $\bar{V}_{A_1A_2}$  || оси  $x-x$  - это справедливо лишь для совмещенных точек.

Должны быть известны параметры переносного движения:

- линейная скорость и ускорения звена  $A_1$  -  $\bar{V}_{A_1}$   $\bar{a}_{A_1}$  ;

-угловые скорость и ускорение звена 1 -  $\omega_1$  и  $\varepsilon_2$  .

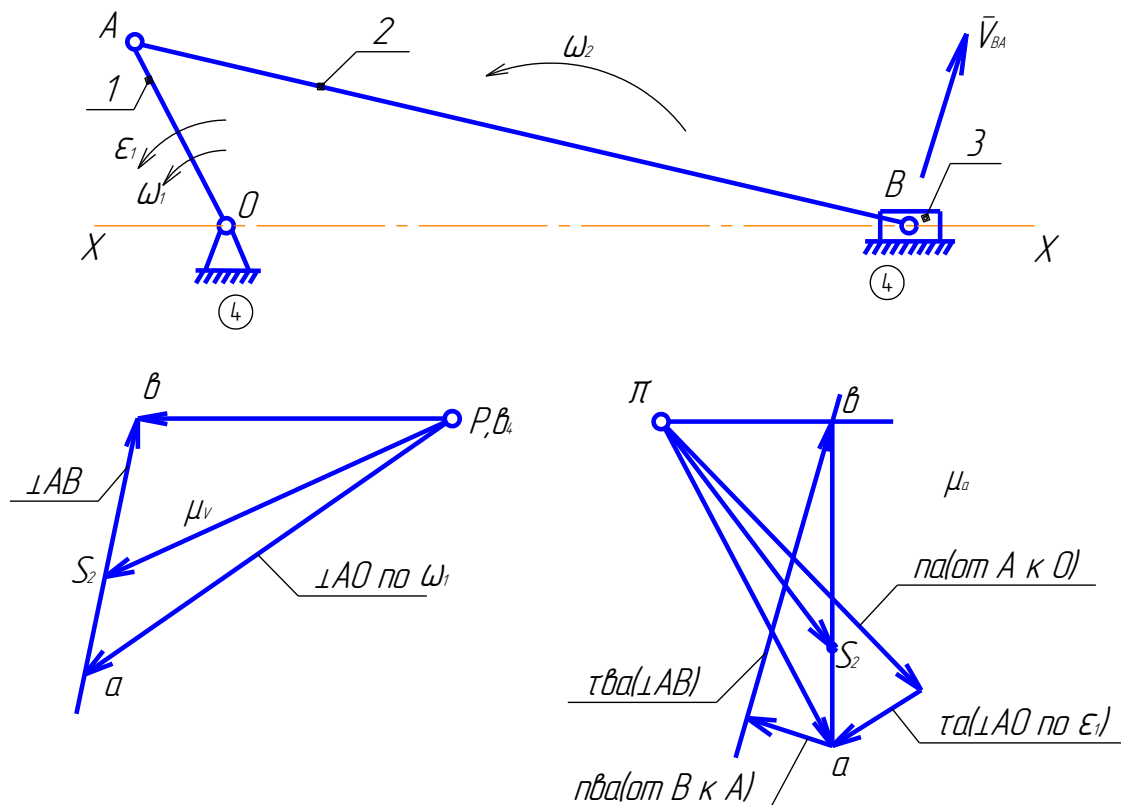
Тогда для совмещенной точки  $A_2$  :

- скорость  $\bar{V}_{A_2} = \bar{V}_{A_1} + \bar{V}_{A_2A_1}$  , где  $\bar{V}_{A_2A_1}$  || оси  $x-x$ .

- ускорение  $\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}_{A_2A_1}^k + \bar{a}_{A_2A_1}^r$  , где вектор  $\bar{a}_{A_2A_1}^k$  численно равен  $2\omega_1 V_{A_2A_1}$  его направление определяется поворотом относительной скорости  $\bar{V}_{A_2A_1}$  на  $90^\circ$  по  $\omega_1$  , а вектор  $\bar{a}_{A_2A_1}^r$  направлен || оси  $x-x$ .

В каждом из приведенных уравнений содержится по три неизвестных и они не могут быть решены. Но можно принять за переносное движение других точек и получить системы из двух векторных уравнений с четырьмя неизвестными, из которых можно определить искомые величины.

**Пример определения кинематических характеристик кривошипно-шатунного механизма методом планов.**



### Построение плана скоростей.

1. Определяем скорость точки А :  $V_A = \omega_1 l_{OA} \text{ [M/c]}$
2. Выбираем отрезок “ра” ( произвольно), которым изобразим  $\bar{V}_A$  на построении и определяем масштаб плана скоростей  $\mu_V = \frac{V_A \text{ [M/c]}}{pa \text{ [мм]}}$
3. Составляем векторное уравнение для скорости точки В, приняв за переносное – движение точки А :

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$$

- приняв за переносное- движение совмещенной точки В<sub>4</sub> (неподвижна)

$$\bar{V}_B = \bar{V}_{B_4} + \bar{V}_{BB_4}$$

В этих уравнениях :  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_{B_4}$  - определены полностью (величина и направление)

$V_{BA}$ - направлен  $\perp$  АВ ,  $V_{BB_4}$ - направлен  $\parallel$  оси  $x-x$ .

Т.о. в системе из 2<sup>х</sup> векторных уравнений содержится 4 неизвестных и эта система м.б. решена используя правило сложения векторов, строим план скоростей.

4. Используя отрезки плана скоростей и масштаб, определяем скорости:

$$V_B = pb * \mu_V \text{ [M/c]}$$

$$V_{BA} = ba * \mu_V \text{ [M/c]}$$

Угловая скорость шатуна :  $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}}$  , направление  $\omega_2$  получим переносом вектора

относительно скорости  $\bar{V}_{BA}$  в соответствующую точку механизма.

5. Определяем аналоги скоростей :  $\frac{dS_B}{d\varphi_1} = \frac{V_B}{\omega_1}$  ( см. предыдущую лекцию), по согл. пунктам

1 и 2 можно записать :  $\omega_1 = \frac{V_A}{l_{AO}} = pa * \mu_V / l_{AO}$  ,

$$\text{тогда : } \frac{dS_B}{d\varphi_1} = \frac{V_B}{\omega_1} = \frac{pb * \mu_V}{pa * \mu_V / l_{AO}} = \frac{pb}{pa} l_{AO}$$

Аналогично опр. аналог угловой скорости шатуна :

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{V_{AB}/l_{AB}}{V_A/l_{AO}} = \frac{ab}{pa} \frac{l_{AO}}{l_{AB}}$$

Т.о. аналог скорости можно получить не зная  $\omega_1$  , построив план возможных скоростей.

### Построение плана ускорений.

1. Определяем ускорение точки А в соответствии с векторным уравнением:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau, \text{ где}$$

- нормальное ускорение направлено от А к О (центру кривизны траектории), а величина

определяется уравнением:  $a_A^n = V_A^2 / l_{AO} [\text{м/с}^2]$

- тангенциальная составляющая направлена  $\perp AB$  по  $\varepsilon_1$ , величина определяется уравнением  $a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{AO} [\text{м/с}^2]$

2. Выбираем масштаб плана ускорений  $\mu_a$ , для чего задаётся произвольным образом

отрезком  $na$  [мм] и подсчитываем  $\mu_a = a_A^n / na \left[ \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right]$

В выбранном масштабе вектор  $a_A^\tau$  на плане изобразим отрезком  $ta$ , который определим

по уравнению:  $ta = a_A^\tau / \mu_a [\text{мм}]$

3. Строим отрезок  $pa$  (выбрав произвольно полюс построения  $\pi$ ) как векторную сумму отрезков  $na$  и  $ta$  согласно уравнению в пункте 1.

4. Составим векторные уравнения для определения ускорения точки В:

- приняв за переносное – движение точки А:  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ ;

- приняв за переносное – движение совмещенной точки В4:  $\vec{a}_B = \vec{a}_{B4} + \vec{a}_{BB4}^k + \vec{a}_{BB4}^r$

Укажем направление векторов, подсчитаем величины (если это возможно) и отрезки, которыми они будут изображены на плане:

$a_{BA}^n = V_{BA}^2 / l_{AB} = (ab \cdot \mu_v)^2 / l_{AB}$  - направлен от В к А, на плане его изобразим отрезком

$nba = a_{BA}^n / \mu_a [\text{мм}]$

$a_{BA}^\tau$  - величина неизвестна, а направлен  $\perp AB$

$a_{B4} = 0$ , т.к. звено 4 является неподвижным

$a_{BB4}^k = 2\omega_4 \cdot V_{BB4} = 0$ , т.к.  $\omega_4 = 0$

$a_{BB4}^r$  - направлен  $\parallel$  оси х-х, величина неизвестна

Т.к. в системе из 2-х векторных уравнений содержится 4 неизвестных ( $a_B$  - величина и

направление;  $a_{BA}^\tau$  и  $a_{BB4}^r$ ) и эта система м.б. решена. Графическое решение и называют

планом  $a$ .

## 5. Результаты построения.

Ускорение точки В:  $a_B = \pi b \cdot \mu_a [м/с^2]$

Угловое ускорение шатуна 2:  $\varepsilon_2 = a_{BA}^r / l_{AB} = \tau b a \cdot \mu_a / l_{AB}$  - направление определим

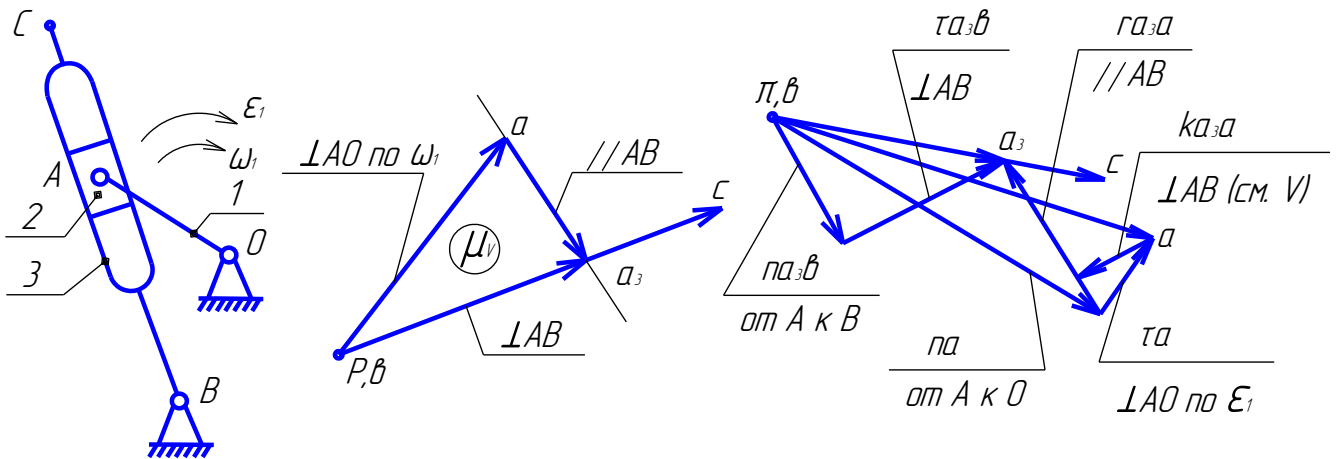
переносом вектора  $\overline{a_{BA}^r}$  в соответствующую точку схемы механизма.

### Определение скорости и ускорения центра масс шатуна 2.

Если известны скорости (ускорения) двух точек звена (к нашему примеру – точек А и В), то скорость (ускорение) любой другой м.б. определена по теореме подобия: концы векторов абсолютных скоростей (ускорений) на плане образуют фигуру, подобную той, которую точки образуют на звене, и сходственно с ней расположенную (т.е. буквы на плане и схеме при одинаковом направлении обхода читаются в одинаковой последовательности). В нашем случае – точка S2 на плане будет делить отрезки ab в той же пропорции что точка S2 делит расстояние между точками А и В на схеме (частный случай – все точки лежат на одной прямой). Результат получаем:  $V_{S2} = p s_2 \cdot \mu_v$  и

$$a_{S2} = \pi s_2 \cdot \mu_a$$

### Пример построения планов скоростей и ускорений для кулисного механизма



### План скоростей:

1. Определить скорость точки А:  $V_A = \omega_1 \cdot l_{O4} [м/с]$  – напр.  $\perp AO$  по  $\omega_1$
2. Масштаб плана скоростей:  $\mu_v = V_A / pa [\frac{м/с}{мм}]$ , где "pa" – произвольно выбранный отрезок, изображающий VA на плане.
3. Векторные уравнения для определения скорости совмещенной точки АЗ

- приняв за переносное – движение точка А:  $\overline{V_{A3}} = \overline{V_A} + \overline{V_{A3A}}$

- приняв за переносное – движение точки В:  $\bar{V}_{A3} = \bar{V}_B + \bar{V}_{A3B}$

В этих уравнениях  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$  определим полностью ( $V_B = 0$ ), а относительные скорости известны по направлению:  $\bar{V}_{A3} \perp AB$  и  $\bar{V}_{A3A} \parallel AB$ . Решаем систему векторных уравнений графически, т.е. строим план скоростей.

4. Отрезок, изображающий скорость точки С определим из пропорции (это частный случай метода подобия):  $pc = pa_3 \cdot BC / AB$ . Направление совпадает с направлением  $pa_3$ , т.к. точки С и АЗ лежат на одной линии с точкой В.

5. По результатам построения определяем:

- скорость точки АЗ :  $V_{A3} = pa_3 \cdot \mu_v [м/с]$

- относительную скорость точки АЗ относительно А:  $V_{A3A} = a_3a \cdot \mu_v [м/с]$

- скорость точки С:  $V_C = pc \cdot \mu_v [м/с]$

- угловую скорость кулисы 3:  $\omega_3 = V_C / l_{BC} [1/с]$

### План ускорений.

1. Ускорение точки А:  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$ , где  $a_A^n = V_A^2 / l_{AO}$  и направлено от А к О;  $a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}$   
-  $\perp AO$ .

2. Масштаб  $\mu_a = a_A^n / \pi a$ , где  $\pi a$  - произвольно выбранный отрезок, изображающий вектор  $\bar{a}_A^n$ , тогда отрезок, изображающий вектор  $\bar{a}_A^\tau$  определится величиной  $\pi a = a_A^\tau / \mu_a [мм]$ . Сложив графически векторы  $\pi a$  и  $\tau a$  получим отрезок  $\pi a$ , изображающий полное ускорение точки А (здесь точка  $\pi$  - полюс плана ускорений).

3. Векторные уравнения для определения ускорения совмещенной точки АЗ :

- переносным является движение точки А  $\rightarrow \bar{a}_{A3} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A3A}^k + \bar{a}_{A3A}^\tau$

- переносным является движение точки В  $\rightarrow \bar{a}_{A3} = \bar{a}_B + \bar{a}_{A3B}^n + \bar{a}_{A3B}^\tau$

В этих уравнениях :  $\bar{a}_A$  и  $\bar{a}_B$  определены полностью ( $\bar{a}_B = 0$ );

$\bar{a}_{A3A}^k = 2\omega_3 \cdot V_{A3A}$ , направление определяется поворотом  $\bar{V}_{A3A}$  на  $90^\circ$  по  $\omega_3$ , а отрезок на плане, изображающий этот вектор  $ka_3a = a_{A3A}^k / \mu_a [мм]$

Вектор  $\bar{a}_{A3A}^\tau$  направлен  $\parallel AB$ , величина неизвестна;



Величина вектора  $a_{A3B}^n = V_{A3}^n / l_{AB}$ , направлен от А к В, отрезок на плане

$$na_3b = a_{A3B}^n / \mu$$

Вектор  $\overline{a_{A3B}^{-\tau}}$  направлен  $\perp AB$ , величина неизвестна. Т.о. число неизвестных (4) соответствует числу векторных уравнений (2) и все оси м.б. определены. Что и делаем графически, построив план ускорений.

4. Отрезок, изображающий ускорение точки С определяется из пропорции:

$$\pi_C = \pi_{A3} \cdot BC / AB [мм]$$

5. Результаты:  $a_{A3} = \pi_{A3} \cdot \mu_a$ ;  $a_C = \pi_C \cdot \mu_a$  ;  $a_{A3B}^{\tau} = \pi a_3 b \cdot \mu_a$  ;  $\varepsilon_3 = a_{A3B}^{\tau} / l_{AB}$  -

направление углового ускорения определяем переносом вектора  $\overline{a_{A3B}^{-\tau}}$  в соответствующую точку механизма (в точку А).

## Лекция №6,7

### План лекции

Общие методы динамического анализа механизмов. Приведенные моменты сил и приведенные моменты инерции. Динамическая модель. Анализ движения механизма при постоянном моменте инерции и силах зависящих от скорости. Анализ при силах и моменте инерции зависящих только от положения механизма. Режимы движения машинного агрегата. Диаграмма энергомасс. Метод Виттенбауэра.

### Основная часть лекции

#### Исследование движения машинного агрегата под действием заданных сил.

Машинный агрегат - это комплекс, состоящий из двигателя, передаточного механизма и рабочей машины.

#### Основные задачи исследования

**Прямая задача**- при известных размерах и массах звеньев определить закон движения ( угловую скорость, коэфф. Неравномерности хода, время срабатывания и т.д. ) при известных силах и моментах, действующих на звенья.

**Обратная задача**- определение некоторых параметров машинного агрегата, при которых будет реализован заданный закон движения.

#### Силы, действующие в машинах.

Так как причиной движения являются силы, действующие на звенья механизма, а мерой их влияния – совершаемая ими работа, то в зависимости от этого различают:

- **силы движущие**- за время действия ( за цикл) совершают положительную работу  $A > 0$

-**силы сопротивления**- за время действия (цикл) совершают отрицательную работу  $A < 0$ . Различают силы полезного сопротивления ( сила резания в металлообрабатывающих станках, сила сопротивления деформации материала в прессах и штампах, сопротивление качения колес автомобиля и его аэродинамическое сопротивление и т.д. ) и силы вредного сопротивления ( трение в кинематических парах).

-**силы тяжести и упругости пружины** – за время цикла работа этих сил равна нулю, но на различных участках цикла может быть как положительной так и отрицательной.

-**силы, приложенные к стойке извне** – работы не совершают.

**-силы в кинематических парах-** нормальные составляющие работу не совершают, касательные составляющие ( это силы трения) совершают отрицательную работу и являются силами вредного сопротивления.

Силы могут быть постоянными (например, силы тяжести) или зависеть от различных параметров (от положения, времени, скорости и т.д.)

### Теоретические основы исследования

Основой исследования является теорема об изменении кинетической энергии, которая м.б. записана в двух формах:

- в дифференциальной :  $dT = dA$  (1)

- в интегральной  $\sum A = \sum T_i - \sum T_{i0}$  (2),

где  $A = \sum A_i$  - сумма работ всех сил и моментов, приложенных к звеньям механизма.

$T = \sum T_i$  - сумма кинетических энергий звеньев механизма.

В свою очередь каждая составляющая определяется уравнениями:

- энергия  $i^{\text{того}}$  звена  $T_i = m_i \frac{V_{Si}^2}{2} + J_{Si} \frac{\omega_i^2}{2}$ , где  $V_{Si}$  - ск.ц. масс,  $\omega_{Si}$  -угл. скорость.

- работа силы  $F_i$ , приложенной к  $i^{\text{тому}}$  звену :  $A_{Fi} = \int_{S_0}^S \bar{F}_i \overline{dS}_i$

- работа момента  $M_i$ , приложенной к  $i^{\text{тому}}$  звену :  $A_{Mi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_i d\varphi_i$ .

Отсюда видно, что использование уравнений (1) и (2) в общем виде весьма трудоемко. Эту трудоёмкость можно уменьшить введением понятий «приведенный момент инерции» ( $J_{np}$ ) и «приведённый момент сил» ( $M_{np}$ ) и заменой реального механизма его динамической моделью.

Её построение основано на двух положениях теоретической механики:

- движение механической системы не изменяется, если массу ( момент инерции) одного звена заменить массой (моментом инерции) другого, при условии сохранения кинетической энергии;

-движение механической системы не изменяется, если вместо силы ( момента) , приложенной к одному звену, приложить силу или момент к другому, при условии равенства их элементарных работ или мощностей.

**Приведенным моментом инерции**  $J_{np}$  называют расчетный момент инерции, обладая которым, звено приведения будет иметь кинетическую энергию, равную сумме кинетических энергий всех звеньев механизма.

Согласно определению:  $\frac{J_{np} \omega_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{m_i V_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2} \right]$ , где

$m_i$  и  $J_{Si}$  - масса и центральный момент инерции  $i^{\text{того}}$  звена,

$V_{Si}$  - скорость центра масс  $i^{\text{того}}$  звена,  $\omega_i$  - угловая скорость  $i^{\text{того}}$  звена.

Из этого уравнения получаем:  $J_{np} = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{V_{Si}}{\omega_1} \right)^2 + J_{Si} \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right]$

В этом выражении величины  $\frac{V_{Si}}{\omega_1}$  и  $\frac{\omega_i}{\omega_1}$  не что иное, как аналоги скоростей, которые (

см. лекцию 2) зависят только от обобщенной координаты, т.е. от положения. Поэтому  $J_{np}$  в общем случае тоже является функцией положения.

**Приведенный момент сил  $M_{np}$**  - это расчетный момент, приложенный к звену приведения, элементарная работа или мощность которого равна сумме элементарных работ или мощностей всех сил и моменты приложенных к звеньям механизма.

Согласно определению:  $M_{np} \omega_1 = \sum [\bar{F}_i \bar{V}_i + M_i \omega_i]$   $M_{np} \omega_1$  -

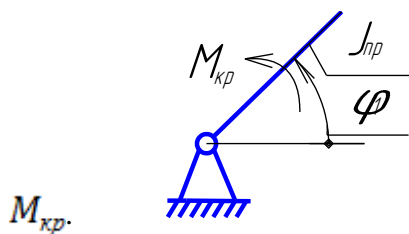
мощность  $M_{np}$ ,  $\bar{F}_i \bar{V}_i$  - мощность силы  $F_i$ ,  $M_i \omega_i$  - мощность момента  $M_i$ .

Отсюда получим, имея в виду, что  $\bar{F}_i \bar{V}_i = F_i V_i \cos(F_i V_i)$

$$M_{кр} = \sum \left[ F_i \left( \frac{V_i}{\omega_1} \right) \cos(F_i V_i) + M_i \left( \frac{\omega_i}{\omega_1} \right) \right]$$

Из полученного уравнения видим, что  $M_{кр}$  является функцией не только положения (как  $J_{np}$ ), но и тех параметров, от которых зависят силы и моменты, приложенные к звеньям механизма.

**Динамическая модель механизма** - это стойка и звено приведения, которое обладает моментом инерции  $J_{np}$  и движется под действием момента



Величины  $J_{np}$  и  $M_{кр}$  называют параметрами динамической модели.

**Уравнения движения звена приведения.**

Согласно определениям понятий  $J_{np}$  и  $M_{kp}$  для динамической модели механизма

можно записать :

$$\sum A_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{kp} d\varphi$$

$$\Delta T = \sum T_i - \sum T_{i0} = J_{np} \frac{\omega_1^2}{2} - J_{np0} \frac{\omega_{10}^2}{2}$$

Используя уравнение  $\Delta T = \sum A_i$ , получим уравнение движения механизма в интегральной форме:

$$J_{np} \frac{\omega_1^2}{2} - J_{np0} \frac{\omega_{10}^2}{2} = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} M_{kp} d\varphi_1, \text{ отсюда :}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{J_{np}} \left[ \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} M_{kp} d\varphi_1 + J_{np0} \frac{\omega_{10}^2}{2} \right]}$$

Используя уравнения  $dA = dT$ , получим уравнение движения механизма в дифференциальной форме:

$$dA = M_{kp} d\varphi_1 \text{ и } dT = d \left[ J_{np} \frac{\omega_1^2}{2} \right], \text{ приравнявая } M_{kp} d\varphi = d \left[ J_{np} \frac{\omega_1^2}{2} \right] \text{ или}$$

$$\begin{aligned} M_{kp} &= \frac{d}{d\varphi_1} \left[ J_{np} \frac{\omega_1^2}{2} \right] = \frac{dJ_{np}}{d\varphi} \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{J_{np}}{2} 2\omega_1 \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} = \frac{dJ_{np}}{d\varphi} \frac{\omega_1^2}{2} + J_{np} \frac{d\varphi_T}{dt} \frac{d\omega_1}{d\varphi_T} \\ &= \frac{dJ_{np}}{d\varphi_1} \frac{\omega_1^2}{2} + J_{np} \frac{d\omega_1}{dt} \end{aligned}$$

Окончательно:

$$M_{kp} = \frac{dJ_{np}}{d\varphi_1} \frac{\omega_1^2}{2} + J_{np} \varepsilon_1$$

указать на невозможность получить аналитическое

решение в общем случае.

**Анализ движения механизма при постоянном моменте инерции и силах, зависящих только от скорости.**

Это весьма распространенный в технике класс машинных агрегатов, например : турбина-генератор, электродвигатель -центробежный насос ( или другая роторная рабочая машина), грузоподъемное устройство с электроприводом и т.д.



Пусть приведение выполнено к валу двигателя и заданы:

$$J_{np} = J = const; M_{кр} = M(\omega_1); \text{ начальные условия: } t = t_0, \omega_1 = \omega_{10}$$

Определить: законы изменения  $\omega_1$

Используем уравнение движения в дифференциальной форме :

$$M(\omega_1) = \frac{dJ_{np}}{d\varphi_1} \frac{\omega_1^2}{2} + J_{np} \frac{d\omega_1}{dt}, \text{ т.к. } \frac{dJ_{np}}{d\varphi_1} = 0, \text{ получим: } M(\omega_1) = J \frac{d\omega_1}{dt}, \text{ разделим}$$

переменные:  $dt = J \frac{d\omega_1}{M(\omega_1)}$ ; интегрируем, используя начальные условия.

$$\boxed{t - t_0 = J \int_{\omega_{10}}^{\omega_1} \frac{d\omega_1}{M(\omega_1)}} \quad *)$$

Пример: рабочая машина ( генератор) и двигатель ( турбина ) имеют линейные механические характеристики.



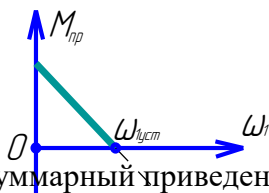
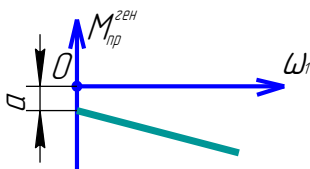
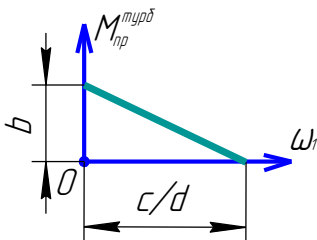
Приведение выполнено к валу 1 и заданы:

$$M_{np}^{турб} = C - d\omega_1; M_{np}^{ген} = -(a + b\omega_1); J_{np} = J = const$$

Начальные условия :  $t = 0, \omega_1 = 0$

Определить: закон движения  $\omega_1 = \omega_1(t)$

Решение.



Суммарный приведенный к валу 1 момент сил.

$$M_{np} = M(\omega_1) = M_{np}^{турб} + M_{np}^{ген} = C - d\omega_1 - a - b\omega_1 = (c - a) - (b + d)\omega_1$$

Обозначим:  $c - a = A$  и  $b + d + B$ , получим  $M_{np} = M(\omega_1) = A - B\omega_1$  \*\*)

подставим в \*)

$$\boxed{t = J \int_0^{\omega_1} \frac{d\omega_1}{A - B\omega_1}}$$
 решение при заданных начальных условиях

Это табличный интеграл. После интегрирования и преобразований получаем :

$$\boxed{\omega_1 = \frac{A}{B} \left( 1 - e^{-\frac{B}{J}t} \right)}$$
 \*\*\*)

Т.к. при установившемся движении  $M_{np} = 0$  и  $\omega_1 = \omega_{1уст}$ , из уравнения \*\*)

получим:

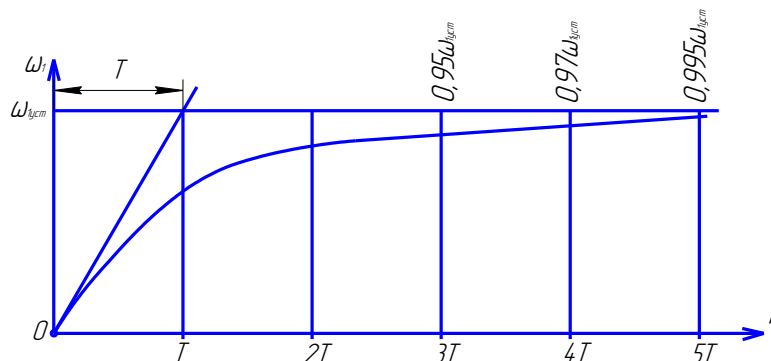
$$M_{np} = 0 = A - B\omega_1 \rightarrow \omega_{1уст} = A/B$$

Величину «  $J / B$  » называют постоянной времени машинного агрегата, обозначают

«  $T$  ». после установки в уравнение \*\*\*) получаем :

$$\boxed{\omega_1 = \omega_{1уст} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)}$$
, где  $T = J / B$

Ниже приводится график полученной функции, который является применимым для различных машинных агрегатов с линейными механическими характеристиками.



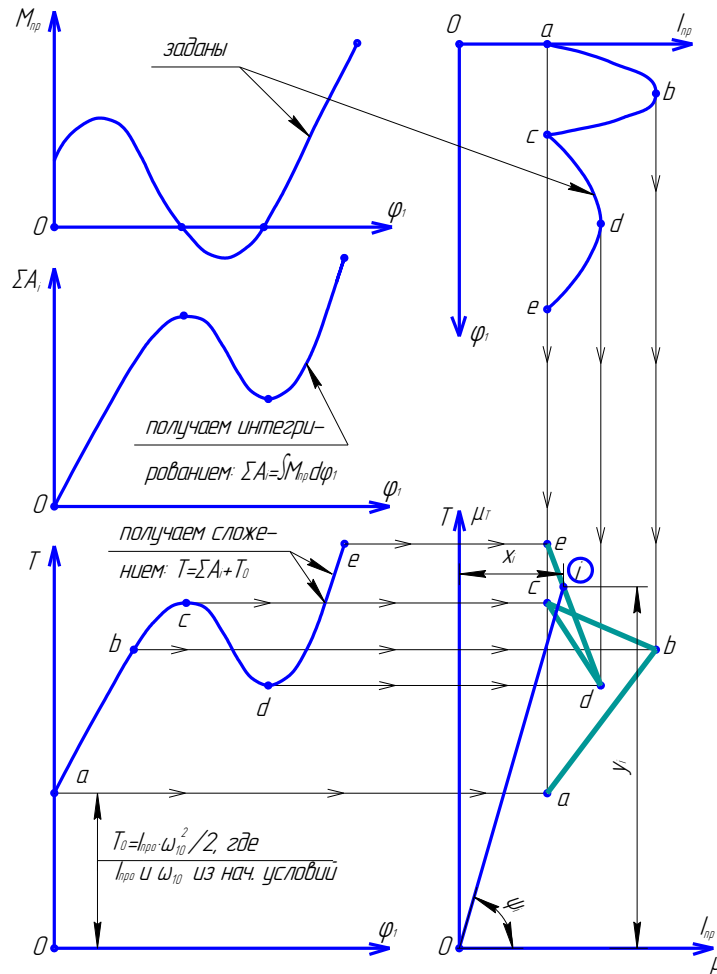
Теоретический процесс разгона длится бесконечно долго. При инженерных расчетах принимают, что он заканчивается за время  $t=5T$ . Используя это можно определить параметры системы  $(J, A, B)$  по заданному времени срабатывания  $t_{ср\text{абат}}$ , т.е. решать задачу синтеза.

**Анализ движения при силах и моменте инерции, зависящих только от положения.**

Дано: 1. Параметры динамической модели  $J_{np} = J_{np}(\varphi_1)$ ,  $M_{кр} = M_{кр}(\varphi_1)$ ;

2. Начальные условия  $\varphi_1 = \varphi_{10}$  и  $\omega_1 = \omega_{10}$

Опр.: закон движения  $\omega_1 = \omega_1(\varphi_1)$



Решение.

1. График работ получим интегрированием приведённого момента сил:

$$\sum A_i = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} M_{кр}(\varphi_1) d\varphi_1$$

2. Используя начальные условия получаем график кинетической энергии:

$$T = \sum A_i + T_0, \text{ где } T_0 = J_{пр} \frac{\omega_{10}^2}{2}$$

3. Исключением  $\varphi_1$  из графиков  $T = T(\varphi_1)$  и  $J_{пр} = J_{пр}(\varphi_1)$  получаем диаграмму

энергомасс  $T = T(J_{пр})$

4. Из определения понятия  $J_{пр}$  можно записать для  $i^{\text{того}}$  положения:

$$\omega_{1i} = \sqrt{\frac{2T_i}{J_{прi}}} = \sqrt{\frac{2\mu_m y_i}{\mu_j x_i}}, \text{ или окончательно:}$$



$$\omega_{1i} = \sqrt{\frac{2\mu_m}{\mu_J}} \sqrt{tg\psi_i}, \text{ где } \psi_i - \text{ угол между осью абсцисс и лучом, проведенным из}$$

$i$ -той точки диаграммы в начало координат, однозначно определяет угловую скорость звена привода.

### Режимы движения машинного агрегата.

Процесс движения машинного агрегата в общем случае состоит из трех фаз : разгон, установившееся движение и выбег ( торможение ).

При разгоне угловая скорость начального звена и кинематическая энергия возрастают, т.к. сумма работ сил положительна :  $\Delta T = \sum A_i > 0$ .

При установившемся движении угловая скорость и энергия изменяются по периодическому закону и за один период ( за цикл)  $\Delta T = \sum A_i < 0$

В процессе работы агрегата установившихся режимов может быть сколь угодно много. Они разделены фазами разгона и торможения ( ДВС транспортного средства).

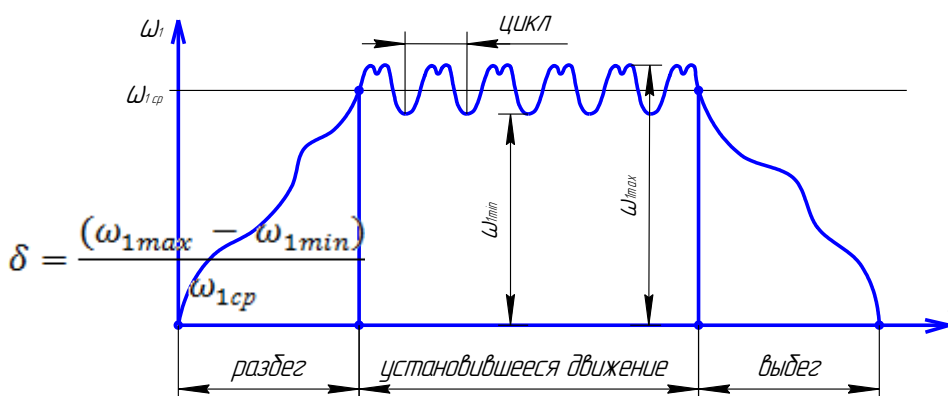
При установившемся движении угловая скорость нач. звена колеблется около среднего значения  $\omega_{1cp}$  в пределах от  $\omega_{1max}$  до  $\omega_{1min}$ , численно этот диапазон

оценивается коэффициентом неравномерности хода

$$\delta = \frac{(\omega_{1max} - \omega_{1min})}{\omega_{1cp}}$$

, который характеризует качество работы агрегата ( точность и качество для станка, устойчивость работы ДВС и т.д.).

Поэтому проектировщик должен располагать методикой, которая позволяет получать требуемое значение этого параметра.

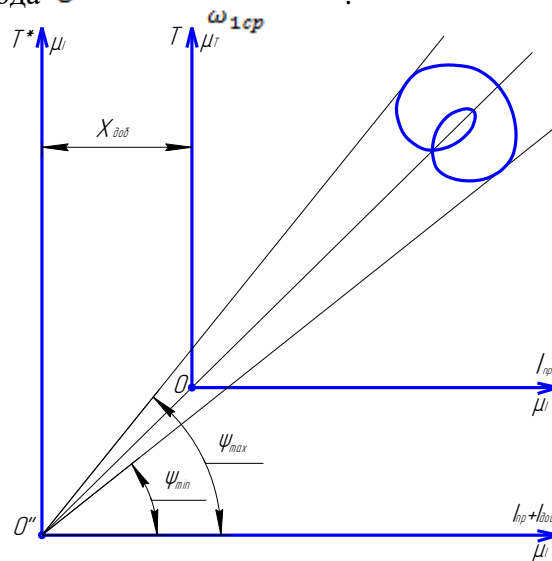


### Возможности регулирования хода машин с помощью маховика.

При установившемся движении диаграмма энергомасс является замкнутой кривой. Максимум угловой скорости будет соответствовать на ней угол  $\psi_{max}$

Который образован касательной к верху этой кривой, проведенной из начала координат, с осью абсцисс. Минимум - такая же касательная к нижней части диаграммы (угол  $\psi_{min}$ ). Среднему значению  $\omega_1$  будет соответствовать угол  $\psi_{ср}$ .

Если в агрегат ввести добавочную инерционность ( в виде маховика с моментом инерции  $J_{доб}$  ), то это увеличивает кинематическую энергию системы, но не изменяет средней угловой скорости. Поэтому начало координат диаграммы энергомасс сместится по линии, соответствующей средней угловой скорости , в точку  $O''$ . Угол между касательными к кривой, проведенных из этой точки будет меньше, чем между максимумом и минимумом угловой скорости и уменьшится коэффициент неравномерности хода  $\delta = \frac{(\omega_{1max} - \omega_{1min})}{\omega_{1ср}}$ .



### Определение момента инерции маховика ( метод Виттенбауэра)

Дано: диаграмма  $T = T(I_{пр}), \omega_{1ср}, \delta$ .

Опр.: добавочный момент инерции  $J_{доб}$ .

#### Решение.

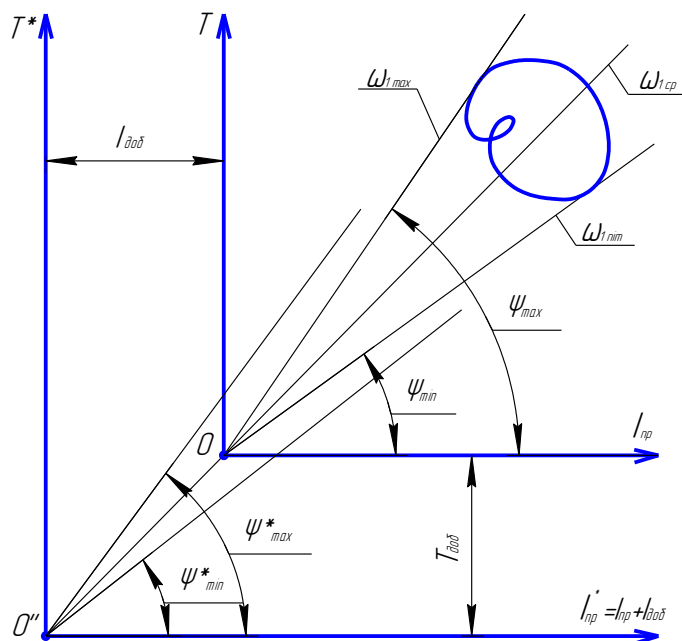
1. Максимальная и минимальная угловые скорости при заданном значении  $\delta$

$$\omega_{1max} = \omega_{1ср} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right).$$

2. Углы  $\psi_{max}$  и  $\psi_{min}$  на диаграмме энергомасс, соответствующие этим значениям

$$tg\psi_{max} = \frac{\mu_J}{2\mu_m} \omega_{1max}^2 \quad \text{и} \quad tg\psi_{min} = \frac{\mu_J}{2\mu_m} \omega_{1min}^2$$

3. К диаграмме энергомасс проводим касательные: снизу под углом  $\psi_{min}$ , сверху под углом  $\psi_{max}$ , находим точку их пересечения  $O''$ .



4. Замеряем отрезок « $X_{доб}$ » и через масштаб подсчитываем величину добавочного момента инерции :

$$J_{доб} = X_{доб} \mu_j \text{ [кгм}^2 \text{]}$$

## Лекция №8

### План лекции

Задачи силового анализа механизмов. Планы сил для плоских механизмов. Силы трения. Определение приведённых сил и пар сил по теореме Жуковского. Силы инерции звеньев плоских механизмов. Ведущие и ведомые звенья механизмов. КПД механизма.

### Основная часть лекции

#### 1. Задачи и метод силового расчета

Задача – определить реакции в кинематических парах механизма и один внешний силовой фактор, при котором выполняется заданный закон движения.

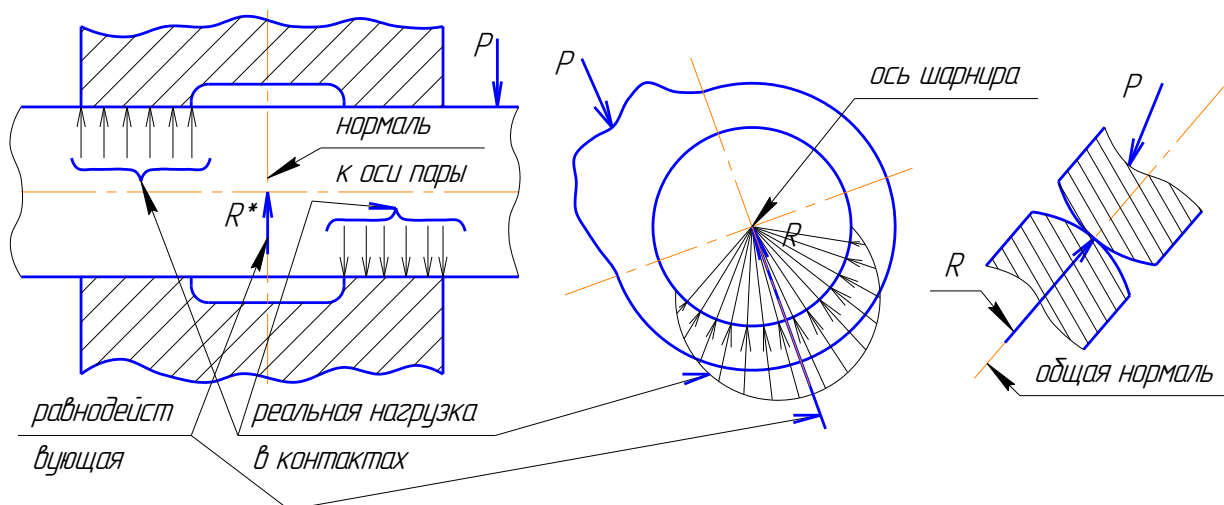
Метод – основан на принципе Даламбера, который гласит: если к системе кроме внешних сил и реакций связей приложены силы инерции, то система будет находиться в равновесии и к ней применимы уравнения статики. Метод называется кинетостатическим.

#### 2. Принимаемые допущения :

- а) расчет ведётся без учета трения и упругости звеньев
- б) реакции в кинематических парах представляют собой сосредоточение силы. При этом : в поступательной паре известно направление реакции, подлежат определению величины и точка приложения ; во вращательной паре при принятых допущениях

известна точка приложения подлежат определенно величине и направлению; в высшей паре – известны точка приложения и направления, неизвестна лишь величина реакции.

На рисунках показана замена реальных, распределенных по контактам нагрузок равнодействующими.



Таким образом, с учетом принятых допущений, можно констатировать, что каждая низшая пара при силовом расчете вносит два неизвестных, а высшая – одну неизвестную.

### **3. Статическая определимость структурных групп.**

Докажем, что в структурных группах число независимых уравнений равновесия соответствует числу неизвестных, т.е. эти группы статически определимы:

- если система содержит «n» звеньев, то для плоской схемы можно составить «3n» независимых уравнений равновесия;

- если система содержит «r<sub>n</sub>» низших передач, то это означает, что подлежат определению. «2r<sub>n</sub>» параметров;

- условие стат. определимости – их равенство, т.е.  $3n = 2r_n$  или

$3n - 2r_n = 0$  – этому условию соответствуют структурные группы ( группа Ассура), что показано в лекции 1.

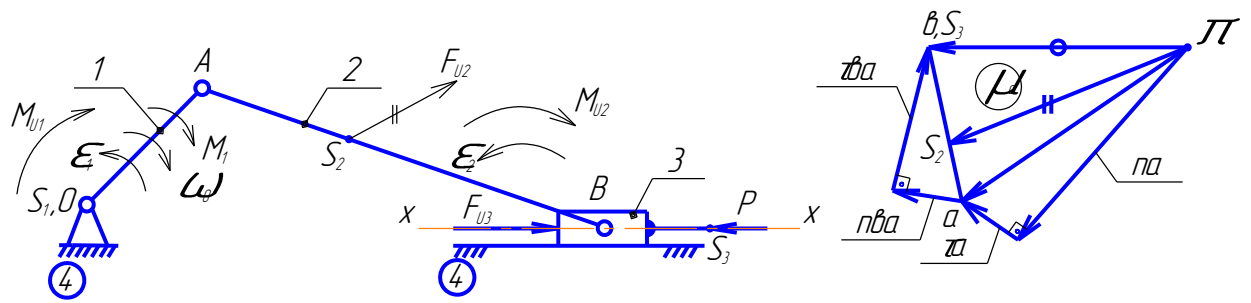
### **4. Последовательность силового расчета на примере кривошипноползунного механизма.**

Дано: 1. Схема, размеры, массы и моменты инерции звеньев

2. Закон движения ( план ускорений)

3. Внешняя сила P

Определить: реакции в кинематических парах и момент на начальном звене  $M_1$



### I. Определение сил инерции

В общем случае для  $i^{\text{того}}$  звена:

-сила инерции  $F_{ui} = m_i a_{si}$ , приложена в центре масс и направлена противоположно его ускорению  $\bar{a}_{si}$ ;

-момент сил инерции  $M_{ui} = J_{si} \epsilon_i$ , направлен противоположно  $\epsilon_i$ .

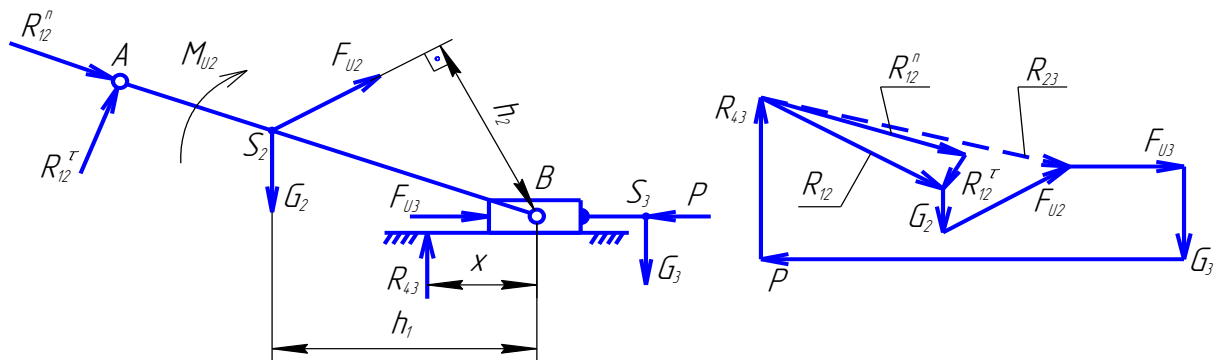
Для исследуемого механизма:

-звено 1 :  $F_{u1} = 0, M_{u1} = J_{s1} \epsilon_1$

-звено 2:  $F_{u2} = m_2 a_{s2}, M_{u2} = J_{s2} \epsilon_2$

-звено 3 :  $F_{u3} = m_3 a_{s3}, M_{u3} = 0$

### II. Расчет структурной группы из звеньев 2 и 3.



1. Уравнение моментов сил относительно точки В для звена 2 :

$$-R_{12}^{\tau} l_{AG} + G_2 h_1 - F_{u2} h_2 - M_{u2} = 0$$

Отсюда  $R_{12}^{\tau} = \frac{G_2 h_1 - F_{u2} h_2 - M_{u2}}{l_{AB}}$  примечание : а) плечи измерить и перевести в [М]

б) если  $R_{12}^{\tau}$  отриц. В дальн. построениях направить её противоположно.

2. Векторное ур-е сил для группы

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{P} + \bar{R}_{43} = 0$$

В ур-е 2 неизвестных, решаем его графически и опр.  $R_{12} = n, R_{43} = n.$

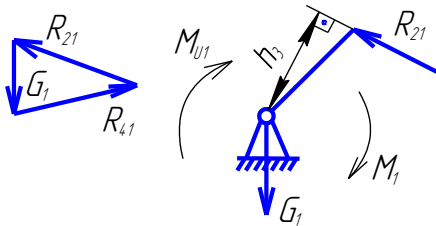
3. Уравнение моментов сил относительно точки В для звена 3:

$$-R_{43}x - G_2 l_{BS_3} = 0, \text{ отсюда : } x = -\frac{G_2 l_{BS_3}}{R_{43}}, \text{ знак «-» говорит, что реакция}$$

лежит по другую сторону от «В».

4. Векторное ур-е сил для звена 2 :  $\bar{R}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u2} + \bar{R}_{32} = 0$  . В ур- ии два неизвестных решаем его графически и опр.  $R_{32} = \text{н.}$

### III. Расчет начального механизма.



1. Уравнение моментов сил относительно точки О для звена 1:

$$R_{21}h_3 - M_1 - M_{u1} = 0, \text{ отсюда } M_1 = R_{21}h_3 - M_{u1}$$

1. Векторное уравнение сил для звена 1 :  $\bar{R}_{21} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{41} = 0$  . В уравнении два неизвестных, решаем его графически и опр.  $R_{41} = \text{н.}$

## Лекция №9,10

### План лекции

Режимы движения механизмов в машинах. Трение на плоскости, в клиновом пазу.

Коэффициент полезного действия при движении по наклонной плоскости

### Основная часть лекции

#### Механический коэффициент полезного действия агрегата ( далее КПД)

Механизмы предназначены для передачи энергии от источника к потребителю. Этот процесс сопровождается потерями энергии и для установившегося движения количественно характеризуется КПД. Это отношение работы сил или целое их число, взятое по модулю:

$$\eta = \left| \frac{A_n}{A_{\partial s}} \right|$$

Так как работа сил движущих расходуется на преодоление сил полезного и вредного (трения) сопротивления, можно записать :  $A_{\partial\epsilon} = |A_n + A_B|$ . После подстановки получим новую форму записи

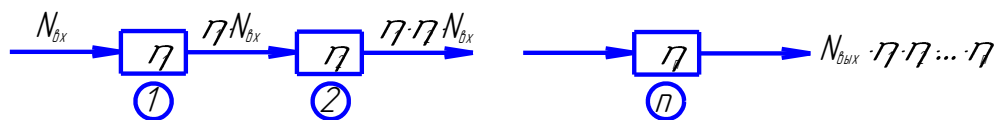
$$\eta = \frac{A_{\partial\epsilon} - |A_B|}{A_{\partial\epsilon}} = 1 - \left| \frac{A_{\epsilon}}{A_{\partial\epsilon}} \right| = 1 - \varphi \quad ;$$

$\left| \frac{A_{\epsilon}}{A_{\partial\epsilon}} \right|$  и  $\varphi$  – коэффициент потерь

### КПД системы агрегатов

Машинные агрегаты могут объединяться в системы, которые бывают с последовательным или смешанным включением. Последние после преобразования можно привести к одной из двух предыдущих схем.

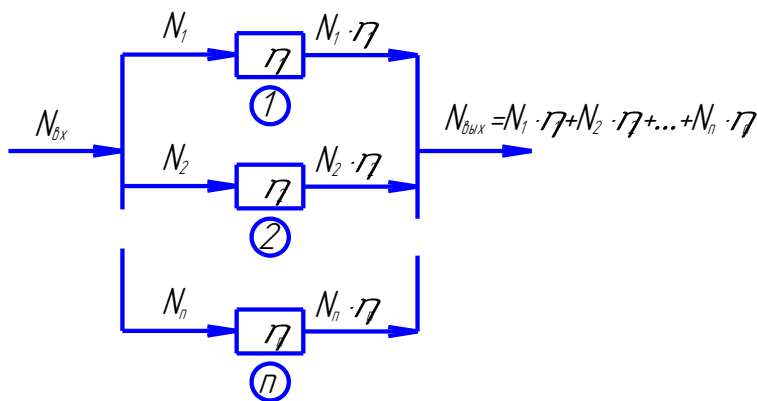
#### Последовательное соединение агрегатов



$$\eta_{общ} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$$

Т.е. общий КПД зависит только от КПД каждого агрегата

#### Параллельное соединение



$$\eta_{общ} = \frac{N_{вых}}{N_{вх}} = \frac{N_1 \eta_1 + N_2 \eta_2 + \dots + N_n \eta_n}{\sum_{i=1}^n N_i}$$

В этом случае общий КПД зависит не только от КПД каждого агрегата, но и от распределения входной мощности по ним.

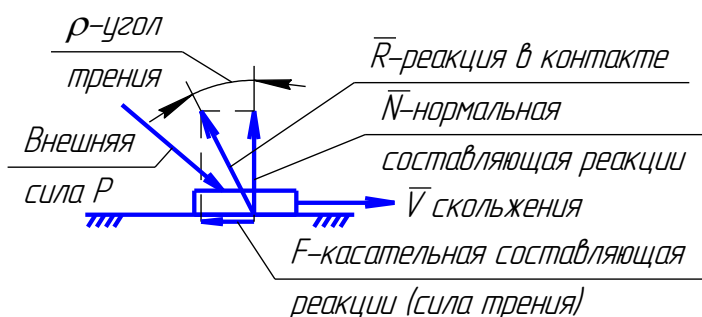
### Трение в машинах

В работающих машинах различают два вида трения: трение качения и трение скольжения. В неработающих машинах имеет место трение покоя. О нём в настоящем курсе речи не будет.

Большую долю в потерях энергии даёт трение скольжения, поэтому вспомним некоторые сведения об этом явлении.

Примечание: всё нижесказанное можно распространить и на трение качения, если оперировать приведённым коэффициентом трения, о чём будет изложено несколько позже.

### Трение на плоскости



Связь между нормальной составляющей и силой трения устанавливает закон Кулона :

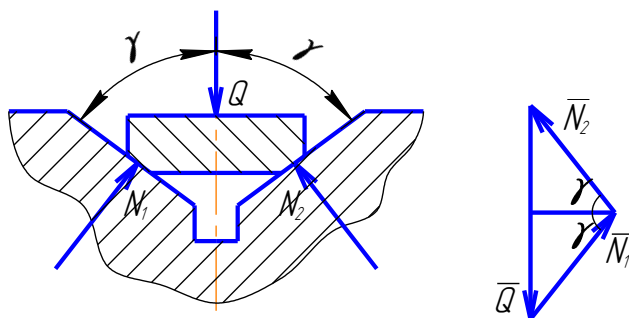
$$F = f N$$

Где  $f$  - коэффициент трения скольжения. Величина коэффициента трения скольжения зависит от многих факторов: от материалов, чистоты поверхностей, от смазки, температуры. Может быть определен только экспериментально. Из закона Кулона можно записать:

$$f = \frac{F}{N}$$

А из рисунка видно, что  $\frac{F}{N} = \operatorname{tg} \varrho$ , поэтому  $\varrho = \operatorname{arctg} f$ . Угол « $\varrho$ » называют углом трения. Этот угол, на который реакция отклоняется от нормали при наличии трения.

### Трение в клиновом пазу.



Внешняя сила  $Q$  вызывает появление в контактах нормальных реакций  $N_1$  и  $N_2$ . Их величину определим из векторного уравнения:  $\bar{Q} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 0$

Решим его графически и из построения можем записать :  $N_1 = N_2 = \frac{Q}{2 \sin \gamma}$

Если заставить тело скользить вдоль паза, то в контактах появляются силы трения скольжения  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ . Суммарная сила трения  $F = F_1 + F_2$ . Где



$F_1 = f N_1$  и  $F_2 = f N_2$ , подставив значения  $N_1$  и  $N_2$  получим  $F = Q \frac{f}{\sin \gamma}$ . Величину

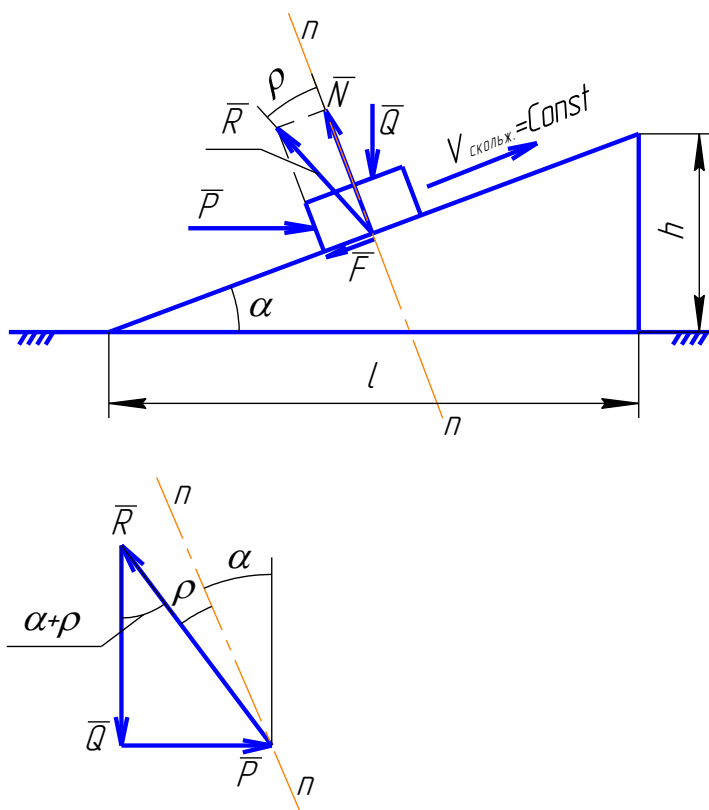
$\frac{f}{\sin \gamma}$  называют приведённым коэффициентом трения и обозначают  $f'$ . Ему соответствует

приведенный угол трения  $\varrho' = \arctg f'$ . Приведенный коэффициент трения связывает силу трения с внешней нагрузкой, которая вызывает появление нормальных реакций в контактах.

### КПД при движении тела по наклонной плоскости.

На тело действуют две внешних силы- одна из них направлена параллельно основанию (сила  $\bar{P}$ ), другая – вертикально вниз ( сила  $\bar{Q}$  ). В зависимости от их состояния тело может двигаться либо вверх, либо вниз. Поскольку КПД является характеристикой установившегося движения, рассмотрим движение тела с постоянной скоростью.

#### а) Движение тела вверх



Условие равномерного движения  $\bar{Q} + \bar{P} + \bar{R} = 0$

На рисунке дано графическое решение этого уравнения, из которого получаем соотношение сил при равномерном движении вверх:

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$$

Сила  $\bar{P}$  является движущей. Её работа при подъеме на высоту «h» :

$$A_{\partial\delta} = Pl = Q l \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$$

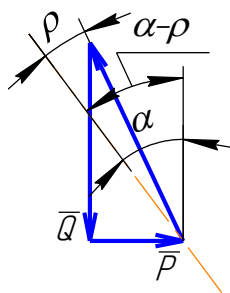
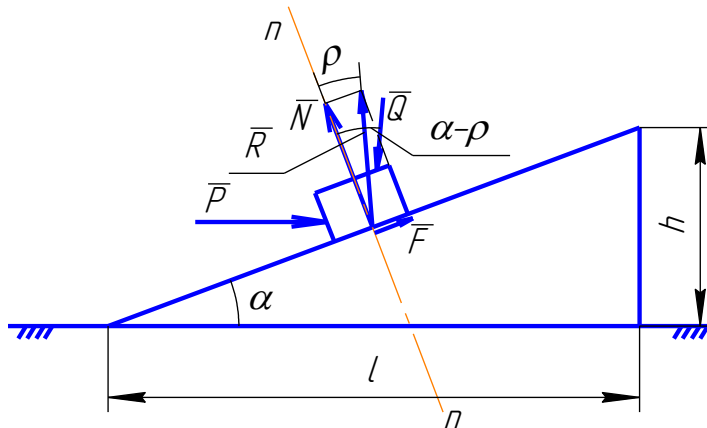
Сила  $\bar{Q}$  является силой полезного сопротивления. Её работа за то же время:

$$A_n = Q h$$

$$\eta_{\uparrow} = \frac{A_n}{A_{\partial\delta}} = \frac{Q h}{Q l \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)} = \frac{h/l}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}$$

б) движение тела вниз

Решение уравнения равновесия для этого случая:



Из построения  $P = Q \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)$ . Сила  $\bar{Q}$  в этом случае является движущей. Её работа при спускании с высоты «h»:

$$A_{\partial\delta} = Q h$$

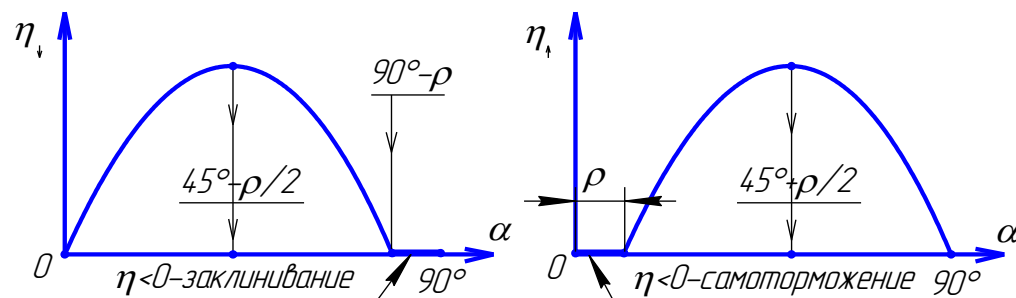
Сила  $\bar{P}$  играет роль силы полезного сопротивления. Её работа (по модулю) за то же время:

$$A_n = Pl = Q l \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)$$

КПД при отпуске определяется уравнением:

$$\eta_{\downarrow} = \frac{A_n}{A_{\partial\delta}} = \frac{Q l \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)}{Q h} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varrho)}{h/l} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varrho)}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Полученным уравнениям соответствуют приведённые ниже графики :



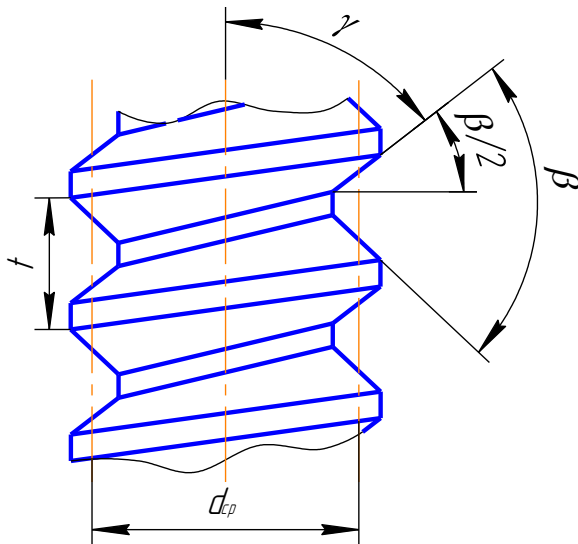
### Аналоги наклонной плоскости в технике.

Тот же принцип преобразования движения используется в винтовых механизмах и червячных передачах. Элементарную площадку контакта винта и гайки можно рассматривать как плоскость. Углом подъема здесь считается угол подъема винтовой линии на среднем диаметре резьбы, который определяется уравнением:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{t z}{\pi d_{cp}},$$

где  $t$  - шаг резьбы,  $z$  - число заходов и  $d_{cp}$  - средний диаметр.

Две элементарных площадки контакта, расположенных диаметрально противоположно можно считать аналогом опорных поверхностей клинового паза, т.е. движение звеньев с точки зрения потерь на трение здесь аналогично движению тела по наклонному клиновому пазу.



В этих механизмах различают прямой и обратный ход, которые соответствуют движению по наклонной плоскости в первом случае вверх, во втором - вниз.

Прямым ходом в винтовых механизмах ( пример домкрат) считается движение выходного звена в направлении противоположном приложенной к нему осевой нагрузке, а момент, приложенный к выходному направлен по его вращению. В червячных передачах при прямом ходе

червячное колесо вращается противоположно приложенному к нему моменту.

$$\eta_{np} = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg}(\lambda + \varrho')}$$

и

$$\eta_{обр} = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \varrho')}{\operatorname{tg} \lambda}$$

где  $\varrho'$  - приведенный угол трения, определяемый уравнением  $\varrho' = \operatorname{arctg} \frac{f}{\cos^{\beta/2}}$ .

## Лекция №11

### План лекции

Уравновешивание вращающихся звеньев механизма. Приближённое статическое уравновешивание плоских механизмов.

### Основная часть лекции

#### Уравновешивание механизмов

При силовом расчёте были определены реакции в кинематических парах механизма, в том числе в парах, которые образуют подвижные звенья со стойкой. Стойка механизма связана с основанием, на которое монтируется агрегат (фундамент, шасси автомобиля и т.д.) и передаёт на это основание воздействие, определяемое реакциями в её кинематических парах. Это воздействие имеет динамические составляющие. При установившемся движении эти составляющие изменяются циклически. Т.е. машина оказывает на своё основание периодические возмущающие воздействия, которые вызывают его вибрацию. Мероприятия по устранению таких вредных воздействий или их уменьшению называются уравновешиванием механизма.

Причиной динамического воздействия стойки механизма на основание является движение звеньев с ускорениями и количественно определяется главным вектором сил инерции  $\bar{F}_{ин\Sigma} = \Sigma \bar{F}_{инi}$  и главным моментом сил инерции  $\bar{M}_{ин\Sigma} = \Sigma \bar{M}_{инi} + \Sigma M_A(\bar{F}_{инi})$ , если приведение сил инерции выполняются к некоторой точке стойки А.

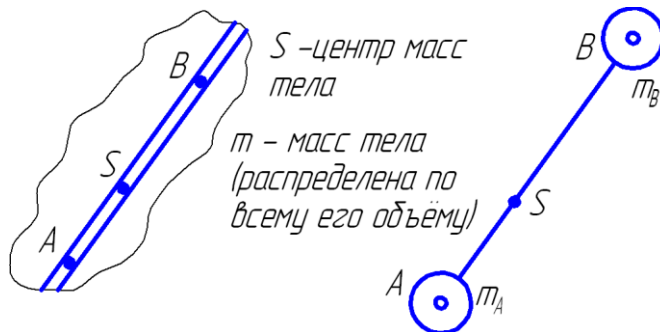
#### Статическое уравновешивание механизмов

Статическим уравновешиванием называют мероприятия при проектировании механизма с целью выполнить условие  $\bar{F}_{ин\Sigma} = 0$ , т.к. при этом не ставится задача достичь  $\bar{M}_{ин\Sigma} = 0$ , то такой механизм будет оказывать воздействие на основание в виде момента.

Из теоретической механики известно, что  $\bar{F}_{ин\Sigma} = -m_\Sigma \cdot \bar{a}_\Sigma$ , где  $m_\Sigma$  - масса всех подвижных звеньев,  $\bar{a}_\Sigma$  – ускорение общего центра масс системы звеньев. Отсюда следует условие статической уравновешенности механизма  $\bar{a}_\Sigma = 0$ , что возможно лишь при неподвижном центре масс.

Поэтому можно сказать, что статическое уравновешивание- это система мер для того, чтобы сделать центр масс работающего механизма неподвижным. Достичь этого можно используя :

**Метод заменяющих масс.**



$m_A$  - масса сосредоточенная в точке А.

$m_B$  - масса, сосредоточенная в точке В.

при этом :

$$m_A + m_B = m \quad *)$$

и общий центр масс заменяющей системы совпадает с центром масс реального объекта:

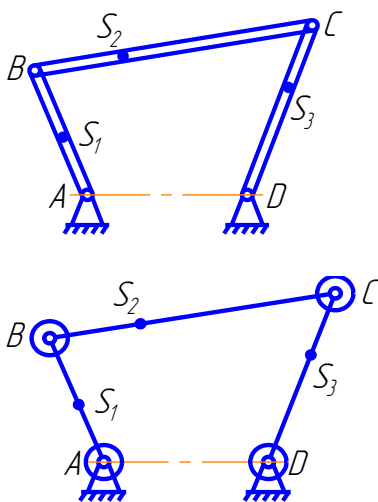
$$m_A \cdot l_{AS} = m_B \cdot l_{BS} \quad **)$$

Из \*) и \*\*) получаем:  $m_A = m \cdot l_{BS} / l_{AB}$  и  $m_B = m \cdot l_{AS} / l_{AB}$

**Статическое уравнивание шарнирного четырёхзвенника.**

Массы звеньев  $m_1, m_2$  и  $m_3$  распределены по объемам звеньев

$S_1, S_2, S_3$  - центры масс звеньев.



Приведём массы звеньев к точкам А,В, С, D ( массы звеньев сосредоточены в точках А,В, С, D) :

$$m_A = m_{A1} = m_1 \cdot l_{BS1} / l_{AB}$$

$$m_B = m_{B1} + m_{B2} = m_1 \cdot l_{AS1}/l_{AB} + m_2 \cdot l_{CS2}/l_{BC}$$

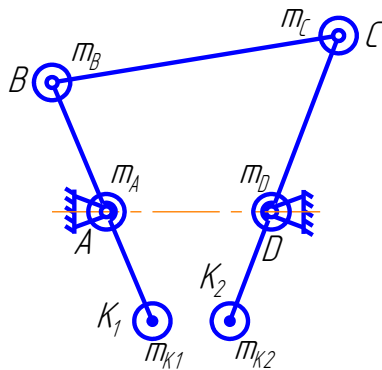
$$m_C = m_{C2} + m_{C3} = m_2 \cdot l_{BS2}/l_{BC} + m_3 \cdot l_{DS2}/l_{CD}$$

$$m_D = m_{D3} = m_3 \cdot l_{CS3}/l_{CD}$$

На звеньях 1 и 3 расположим корректирующие массы (противовесы)  $m_{K1} = m_{K2}$

на расстояниях  $l_{AK1}$  и  $l_{DK2}$ , так чтобы :

$$m_{K1} \cdot l_{AK1} = m_B \cdot l_{AB} \quad \text{и} \quad m_{K2} \cdot l_{DK2} = m_C \cdot l_{CD}$$



Массы звеньев станут равны:

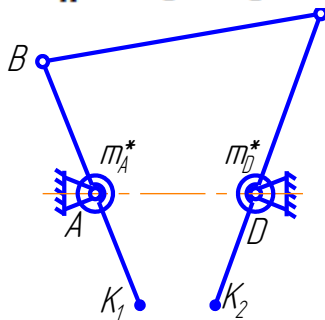
$$m_1^* = m_A + m_B + m_{K1};$$

$$m_2^* = 0; \quad m_3^* = m_{K2} + m_C + m_D$$

Приведём массы звеньев 1 и 3 к точкам A и D :

Заменяем массы звеньев 1 и 3 общими массами сосредоточенными в точках A и D :

$$m_A^* = m_1^* \quad \text{и} \quad m_D^* = m_3^*$$

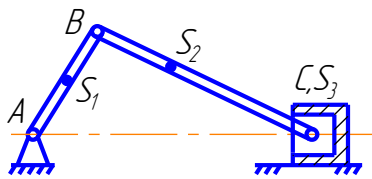


Т.к. точки A и D неподвижны, то неподвижен и общий центр масс, сосредоточенных в этих точках.

Т.о. расположение противовесов на звеньях 1 и 3, рассчитанных по рассмотренной методике позволяет сделать центр масс механизма неподвижным, т.е. уравновесить механизм статически.

### Статическое уравновешивание кривошипно-ползунного механизма.

Приведём массы звеньев к точкам А, В и С:



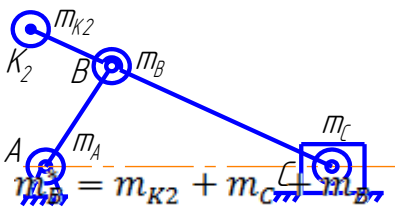
$$m_A = m_{A1} = m_1 \cdot l_{BS1}/l_{AB}$$

$$m_B = m_{B1} + m_{B2} = m_1 \cdot l_{AS1}/l_{AB} + m_2 \cdot l_{CS2}/l_{BC}$$

$$m_C = m_{C2} + m_3 = m_2 \cdot l_{BS2}/l_{BC} + m_3$$

Разместим на шатуне в точке  $K_2$  противовес массой  $m_{K2}$ , выполнив

$m_{K2} \cdot l_{BK2} = m_C \cdot l_{BC}$  и массы, расположенные на звене 2 приведём к точке В:

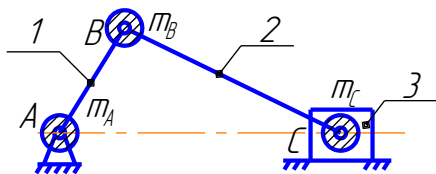


Получим новую систему расположения замещающих масс; одна неподвижна, другая ( $m_B^*$ ) движется по окружности, создавая центробежную силу инерции. Если на продолжении кривошипа ВА разместить в противовес

$m_{п1} = m_B^* \cdot \frac{l_{AB}}{l_{AK1}}$  и затем привести массы  $m_{п1}$  и  $m_B^*$  к точке «А», то заменяющая

система будет состоять из одной неподвижной массы. Т.е. механизм уравновешен статически.

### Частичное статическое уравновешивание того же механизма



Если после статического замещения масс на кривошипе разместить противовес

$m_{п1} = m_B \cdot \frac{l_{AB}}{l_{AK1}}$  и после этого привести  $m_{п1}$  и

$m_B$  к точке «А», то получим замещающую систему из двух масс, одна из которых неподвижна, а другая движется поступательно вдоль от ползуна, создавая силу инерции, линия действия которой постоянна.

### Определение силы инерции, действующей на массу, размещённую на звене 3.

В разделе «Кинематика» аналитически была определена функция положения и выведен алгоритм определения ускорения ползуна при известном законе движения кривошипа. При этом функция положения получилась достаточно сложной и необходимость дважды её дифференцировать ещё более усложнит решение. Оно значительно упрощается, если функцию положения разложить в тригонометрический ряд. Для инженерных расчётов для аналога ускорений достаточно учитывать только два первых члена бесконечного ряда. Тогда ускорение ползуна 3 определяется (при  $\omega_1 = const$ ) уравнением:

$$a_B = r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\varphi_1 + \frac{r}{\omega_1^2 \cdot \cos 2\varphi_1} + \dots$$

Поэтому силу инерции можно представить в виде суммы

$$F = m_{\text{пост}} \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\varphi_1 + \frac{r}{l \cdot \omega_1^2 \cdot \cos 2\varphi_1 \cdot m_{\text{пост}}}$$

Первое слагаемое называют силой инерции  $\Gamma^0$  порядка

$$F_I = m_{\text{пост}} \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\varphi_1$$

Второе – силой инерции  $\Pi^{\text{го}}$  порядка

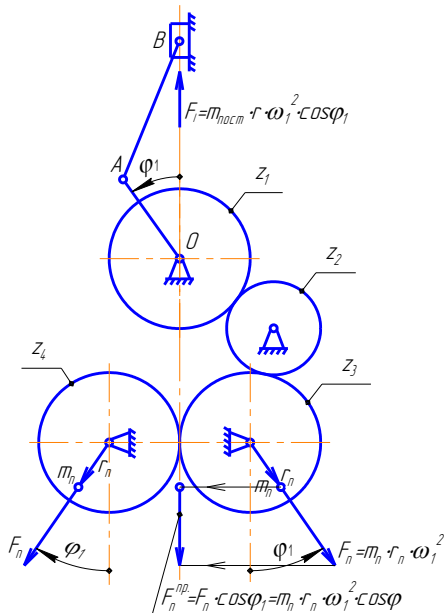
$$F_{II} = m_{\text{пост}} \cdot \omega_1^2 \cdot \cos 2\varphi_1$$

Такое представление силы инерции позволяет создать уравновешивающие механизмы и методики уравновешивания многоцилиндровых двигателей.

В этих уравнениях :  $r$  – радиус кривошипа.

$\lambda = l/r$  относительная длина шатуна.

### Механизм для уравновешивания силы инерции $\Gamma^0$ порядка





Из рисунка видно, что при  $Z_1 = Z_3 = Z_4$  эти венцы будут поворачиваться на одинаковые углы и можно так задать значения  $m_{\text{п}}$  и  $r_{\text{п}}$ , что будет выполняться условие :

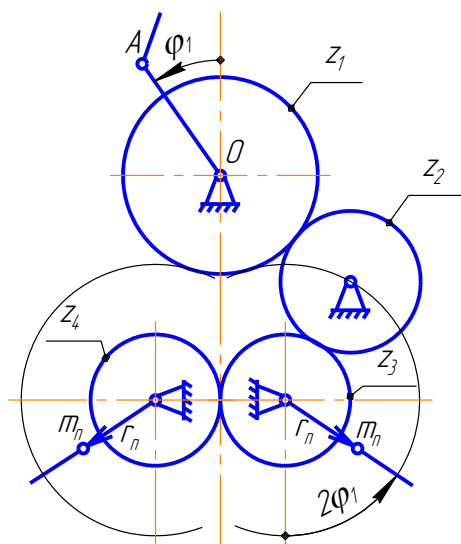
$$F_I = 2F_{\text{п}} \text{ проекция на ось ползуна}$$

$$\text{или} \quad m_{\text{пост}} \cdot r \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\varphi_1 = 2m_{\text{п}} \cdot r_{\text{п}} \cdot \omega_1^2 \cdot \cos\varphi_1$$

$$\text{или} \quad m_{\text{пост}} \cdot r = 2m_{\text{п}} \cdot r_{\text{п}}$$

### Уравновешивание силы инерции II<sup>го</sup> порядка

Используется иное сочетание чисел зубьев:  $Z_3 = Z_4 = \frac{Z_1}{2}$  при этом венцы 3 и 4 поворачиваются на угол вдвое больше, чем венец  $Z_1$ .



### Уравновешивание роторов

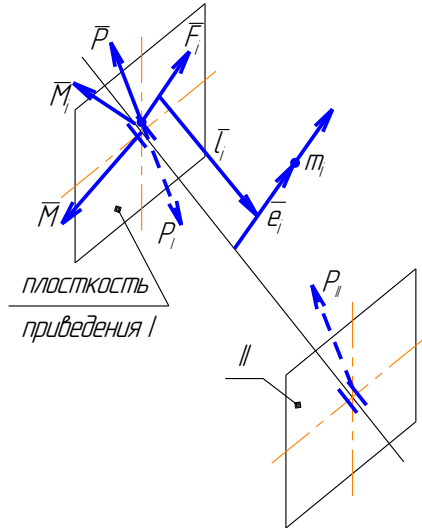
**Ротор** – это тело, вращающееся в неподвижных опорах - коленчатый и карданный валы, автомобильное колесо, шлифованный круг - список можете продолжить сами.

При его вращении на опоры могут действовать силы, причиной появления которых являются силы инерции, действующие на каждую элементарную

$i$ -тую массу  $m_i$ . Масса ротора распределена по его объёму. Поэтому нагрузка на ротор представляет собой систему элементарных сил  $\bar{F}_i$ , распределённых по его объёму. Выберем плоскость I, которая перпендикулярна оси ротора и приведём эти элементарные к этой плоскости. При этом в этой плоскости получим два пучка векторов элементарных сил  $\bar{F}_i$  и пучок векторов элементарных моментов сил  $\bar{M}_i = \bar{F}_i \times \bar{l}_i$ , где  $\bar{l}_i$  - осевая координата элементарности массы до плоскости приведения I. Суммируя, получим главный вектор сил инерции  $\bar{M}$ . их величины:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{e}_i \cdot \omega_1^2$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum \vec{F}_i = \sum m_i \cdot \vec{e}_i \cdot \omega_1^2 \\ \vec{M} &= \sum \vec{F}_i \times \vec{l}_i = \sum m_i \cdot \vec{e}_i \cdot \omega_1^2 \times \vec{l}_i \end{aligned}$$



Условием уравновешенности является равенство нулю каждого из этих значений.

Учитывая что для всех масс значение  $\omega$  одинаково, вынесем его за диски сумм:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \omega^2 \cdot \sum m_i \cdot \vec{e}_i \\ \vec{M} &= \omega^2 \cdot \sum m_i \cdot \vec{e}_i \times \vec{l}_i \end{aligned}$$

Приравняв к нулю и сократив  $\omega$  получим условие уравновешивания в виде геометрии масс

$$\begin{aligned} \sum m_i \cdot \vec{e}_i &= 0 \\ \sum m_i \cdot \vec{e}_i \times \vec{l}_i &= 0 \end{aligned}$$

Векторную величину  $m_i \cdot \vec{e}_i$  в балансировочной технике называют дисбалансом и обозначают  $\vec{D}_i$ . Поэтому можно записать :

$$\sum \vec{D}_i = 0 \text{ и } \sum \vec{D}_i \times \vec{l}_i = 0$$

$$\sum \vec{D}_i = 0 \text{ — сумма дисбалансов}$$

$$\sum \vec{D}_i \times \vec{l}_i = 0 \text{ — сумма моментов дисбалансов}$$

$$\sum \bar{D}_i = 0 \text{ и (или) } \sum \bar{M}_{Di} = 0$$

Докажем возможность уравнивания ротора с помощью двух противовесов. Для этого введём ещё одну плоскость приведения II, которая параллельна I и заменим главный момент  $\bar{M}$  парой сил  $\bar{P}_I$  и  $\bar{P}_{II}$ , то получим так называемый «крест сил», то есть две перекрещивающихся силы. Они лежат в параллельных плоскостях. Их можно представить как силы, создаваемые дисбалансами массы  $m_I$  и  $m_{II}$  и чтобы их уравновесить, надо диаметрально противоположно разместить противовесы с такими же дисбалансами.

### **Виды неуравновешенности роторов**

$\sum \bar{D}_i \neq 0$  и  $\sum \bar{M}_{Di} = 0$  статическая ;

$\sum \bar{D}_i = 0$  и  $\sum \bar{M}_{Di} \neq 0$  моментная ;

$\sum \bar{D}_i \neq 0$  и  $\sum \bar{M}_{Di} \neq 0$  динамическая.

### **Уравнивание многоцилиндровых двигателей**

В этом случае надо учитывать тот факт, что оси цилиндров смещены друг относительно друга вдоль оси коленвала и силы инерции будут создавать моменты, которые вызовут динамическое воздействие на основание. Моменты, создаваемые силами инерции второго порядка невелики и их практических расчётов не учитывают. Поэтому главный момент сил инерции есть суммарный момент сил инерции первого порядка относительно плоскости приведения.

В зависимости от схемы двигателя приведённая ниже таблица показывает факторы, требующие уравнивания.

В столбце «главный момент» величина « $a$ »- это расстояние между осями соседних цилиндров

| схема | Главные векторы                                |   | Главный момент                                   |
|-------|--|---|--|
|       | Первого порядка                                | Второго порядка   |  |
|       | $m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi$ | $m_B \cdot \frac{r}{\lambda} \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\varphi$  | 0  |
|       | 0  | $2m_B \cdot \frac{r}{\lambda} \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\varphi$ | $m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi$   |
|       | 0  | 0   | $a m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi$ |
|       | 0  | $4m_B \cdot \frac{r}{\lambda} \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\varphi$ | 0  |

## Лекция №12

### План лекции

Синтез зубчатых зацеплений. Основная теорема зацепления. Графический метод синтеза сопряжённых профилей.

### Основная часть лекции

#### Зубчатые передачи

##### 1. Назначение и виды зубчатых передач

Предназначены для преобразования вращательного движения входного звена во вращательное (иногда – поступательное) движение выходного. Классифицируется по различным признакам:

- по расположению осей колёс: передачи с параллельными, пересекающимися и с перекрещивающимися осями;

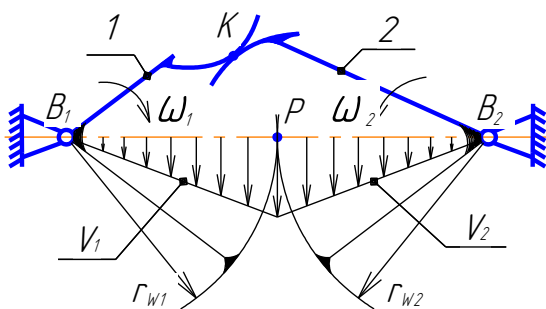
- по числу звеньев: простые и сложные (многоступенчатые); простые содержат два зубчатых колеса, входящих в зацепление, каждое из которых образует со стойкой вращательную пару; сложные представляют собой последовательное соединение ряда простых передач.

- по ходу движения осей колёс: с неподвижными осями и планетарные.

##### 2. Простая зубчатая передача с параллельными осями колёс.

Этот механизм можно представить как совокупность кулачков на одном звене и сопряжённых с ними вращающихся толкателей – на втором; и те и другие выполнены в виде зубьев. При этом для непрерывности передачи движения необходимо, чтобы при выходе из контакта одной пары зубьев в контакт уже вошла другая пара. Это явление называется перекрыванием. Поверхности, обеспечивающие заданный закон движения называется сопряжёнными, а их торцевые сечения – сопряжёнными профилями зубьев.

##### 3. Центроиды в относительном движении колёс.



$V_1$  - закон распределения скоростей на звене 1.

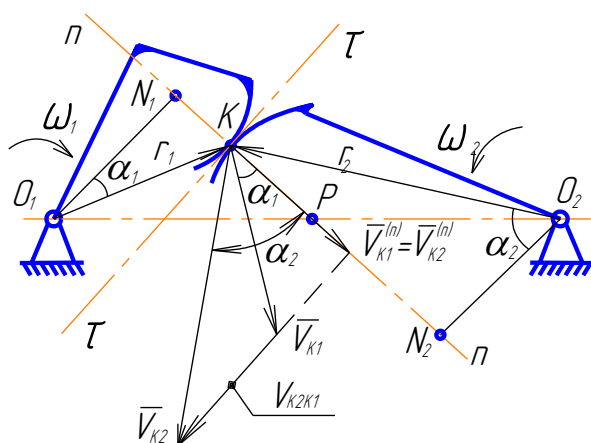
$V_2$  - закон распределения скоростей на звене 2.

В точке «Р» эти скорости совпадают и по величине и по направлению. Это мгновенный центр скоростей, который называется полусом зацепления, а геометрическое место точек Р на колёсах центроидами или

начальными кривыми. Эти кривые касаются друг друга и в процессе вращения колёс катятся друг по другу без скольжения, т.к. в точке их касания скорости совпадают по величине и направлению.

Если передаточное отношение  $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = const$ , то это окружности. В теории зубчатых передач их называют начальными и обозначают  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ .

#### **4. Основная теорема зацепления ( теорема Виллиса) :**



Общая нормаль в точке контакта сопряженных профилей делит межосевое расстояние на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям ( т.е. проходит через полное зацепление «Р» )

#### **Доказательство:**

а) построим план скоростей для контактных точек:

$$\bar{V}_{K2} = \bar{V}_{K1} + \bar{V}_{K2K1}$$

$$\perp O_2K \quad \perp O_1K \quad \parallel \text{оси } \tau - \tau$$

б) спроектируем скорости на ось  $n-n$  :

$$V_{K1}^{(n)} = V_{K1} \cdot \cos \alpha = r_1 \omega_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$V_{K2}^{(n)} = V_{K2} \cdot \cos \alpha = r_2 \omega_2 \cdot \cos \alpha_2$$

в) т.к. тела твёрдые, то эти проекции равны, иначе поверхности разойдутся или внедрятся одна в другую. Т.е. можно записать:

$$O_1K \cdot \cos \alpha_1 \cdot \omega_1 = O_2K \cdot \cos \alpha_2 \cdot \omega_2, \quad \text{но} \quad O_1K \cdot \cos \alpha_1 = O_1N_1 \quad \text{и}$$

$$O_2K \cdot \cos \alpha_2 = O_2N_2$$

Тогда:  $O_1N_1 \cdot \omega_1 = O_2N_2 \cdot \omega_2$  или  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2}$ , из подобия треугольника

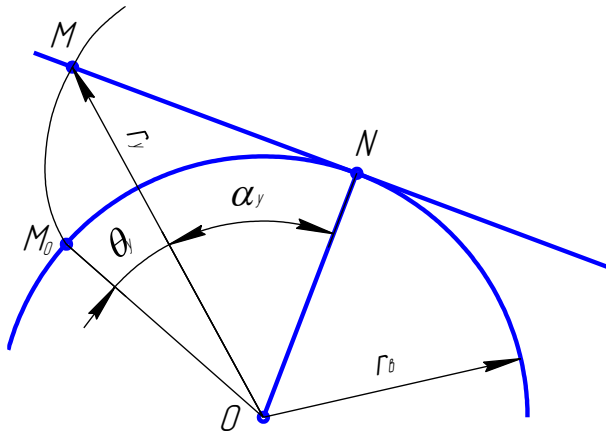
$$\frac{O_2N_2}{O_1N_1} = \frac{O_2P}{O_1P}$$

Поэтому :

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}}$$

что и требовалось доказать.

## 5. Эвольвента окружности и её свойства.



Эвольвента окружности – траектория точки касательной при перекатывании её без скольжения по этой окружности.

Этот процесс называется развёрткой окружности. Так же называют иногда и эвольвенту – развёртка окружности. Окружность называют основной, её радиус обозначают  $r_\epsilon$ .

Координатами текущей точки «М» эвольвенты являются радиус «г» и координатный угол « $\theta$ ». Определим же величины через радиус основной окружности  $r_\epsilon$  и угол профиля  $\alpha$ .

$$\text{Из прямоугольного треугольника OMN: } r_y = r_\epsilon / \cos \alpha_y \quad (1)$$

Т.к. касательная в процессе образования эвольвенты катится по окружности без скольжения, то дуга  $\overset{\cup}{M_0N} = MN = r_\epsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha_y$  и угол  $M_0ON = \overset{\cup}{M_0N} / r$

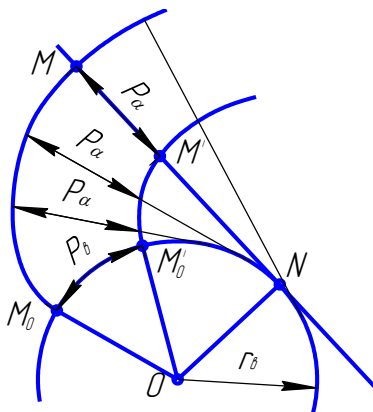
Но этот угол равен  $\theta_y + \alpha_y$ , или  $\theta_y + \alpha_y = r_\epsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha_y / r_\epsilon = \operatorname{tg} \alpha_y$ , окончательно

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y \quad (2)$$

Угол  $\theta_y$  называют эвольвентным углом, он является функцией угла профиля  $\alpha_y$ . Эту функцию называют инвольтой профиля и обозначают « $\operatorname{inv} \alpha_y$ »

Поэтому уравнение эвольвенты в параметрической форме можно записать согласно (1), (2) и учётом последнего обозначения эвольвентного угла:

$$\begin{cases} r_y = r_\epsilon / \cos \alpha_y \\ \operatorname{inv} \alpha_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y \end{cases}$$



Из способа образования эвольвенты следует её свойства:

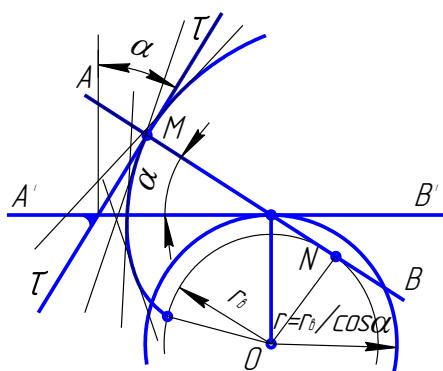
1. Эвольвента не имеет точек внутри основной окружности
2. Нормаль к эвольвенте в любой точке М касается

основной окружности, а точка касания  $N$  – центр кривизны эвольвенты в точке  $M$ .  
 Отрезок  $MN$  – радиус кривизны

3. Длина отрезка нормали между  $M$  и  $N$  ( радиус кривизны ) равна длине дуги основной окружности между началом эвольвенты  $M_0$  и  $N$ .

4. Две эвольвенты одной и той же основной окружности при одинаковом направлении развёртки эквидистантны .

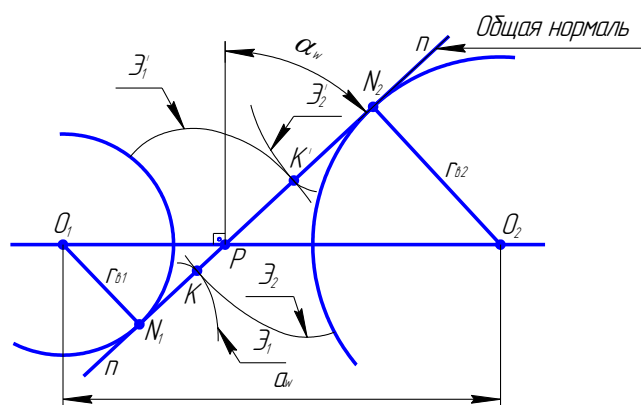
### Второй способ образования эвольвенты.



Если с прямой  $\tau - \tau$  связать перпендикуляр к ней  $AB$  и обкатывать его без скольжения по основной окружности, то огибающая множества положений прямой  $\tau - \tau$  будет совершать, если её связать с другой прямой  $A'B'$ , которая составляет с  $AB$  угол  $\alpha$  и обкатывать эту прямую ( $A'B'$ ) то окружности радиуса  $r = r_0 / \cos \alpha$  ( то без

скольжения). Этот способ образования эвольвентного профиля используется при нарезании зубьев.

### Внешнее эвольвентное зацепление.



Особенности :

1. Передаточное отношение постоянно при любом положении точки контакта  $K$ .
2. Оно не меняется с изменением межосевого расстояния:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{r_{02}}{r_{01}}$$



3. При вращении колёс точка контакта перемещается по линии  $N_1N_2$ . Траектория её в неподвижной системе координат называется линией зацепления. Касание эвольвент возможно лишь в пределах  $N_1N_2$ , вне

4. Увеличение радиуса основной окружности одного из колёс до бесконечности приводит к вырождению эвольвенты в прямую и колесо превращается в зубчатую рейку с прямолинейным профилем боковой поверхности зуба. Это позволяет изготавливать эвольвентные зубчатые колёса инструментом с технологичным профилем режущей части, чем и объясняется широкое распространение эвольвентных зубчатых передач.

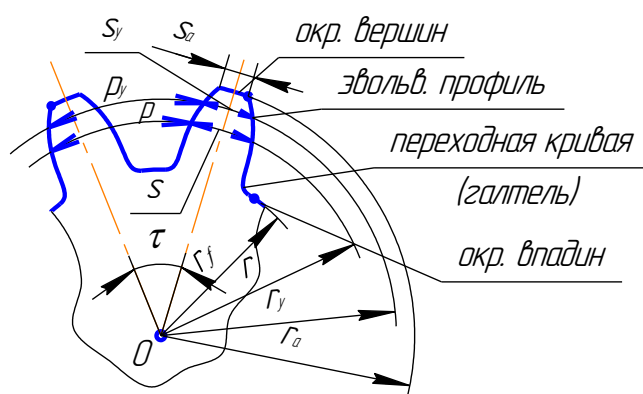
## Лекция №13

### План лекции

Эвольвента окружности. Эвольвентное зацепление. Реечное зацепление. Передача Новикова.

### Основная часть лекции

#### Профили зуба и зубчатого колеса (термины и обозначения)



Окружности :

вершин -  $r_a$

впадин -  $r_f$

делительная -  $r$

произвольная -  $r_y$

Шаги:

делительный -  $p$

угловой -  $\alpha$

на произвольной окружности -  $p_y$

Толщина зуба:

делительная -  $S$

на окр. вершин -  $S_a$

на произв. окр. -  $S_y$

$$\text{Модуль } t = \frac{p}{\pi} \text{ [мм]}$$

Делительная окружность- это базовая окружность колеса.

Шаг – расстояние по дуге окружности между сходственными точками соседних.

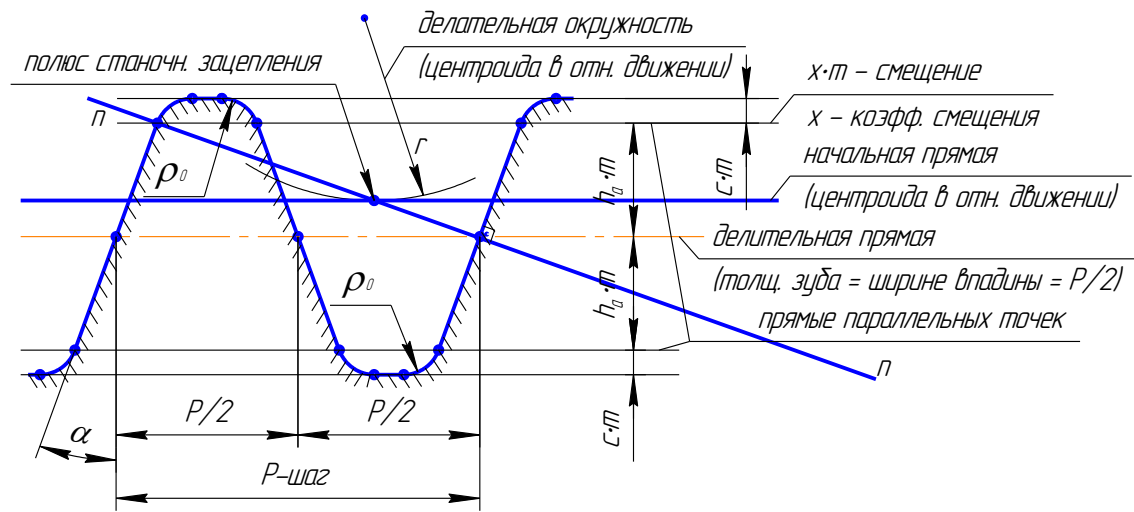
Модуль зубчатого колеса - это отношение делительного шага к числу « $\pi$ ».

Все линейные размеры колёс выражаются в долях этого отношения, поэтому оно получило специальное обозначение, хотя никакого физического объяснения за этим названием нет и измерить его непосредственно на колеса нельзя.

Значения модуля стандартизованы.

Ранее было доказано, что эвольвентный профиль на колесе можно получить инструментом с прямолинейным профилем режущей кромки (второй способ получения эвольвенты). Теоретический ( расчётный) профиль этого инструмента называют исх. производящим контуром (ИПК). Названия элементов этого контура и их величины стандартизованы.

### Исходный производящий расчетный контур и станочное зацепление.



1.Шаг- расстояние между сходств. точками соседних профилей

2.Модуль – величина в « $\pi$ » раз меньшая шага ( $т = p/\pi$ )

3.Делительная прямая- прямая, на которой толщина зуба рейки равна ширине вст.= $p/2$

4. Начальная прямая – центроида инструмента ( катится по центроиде колеса без скольжения)

5.Угол профиля инструмента  $\alpha$  (для станд.  $\alpha = 20^\circ$  )

6.Делительная скорость – центроида колеса в ст.зацеплении ( катится без скольжения по прямой, т.е. скорости точек этой окр. Равны скорости инстр.  $V_{инстр.}$ , что обеспечивается настройкой станка), её радиус

$$r = mz/2 = z \cdot p/\pi/2$$

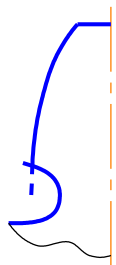
7. Смещение – расстояние по нормали между делительной окружностью и делительной прямой. Положительно, если эти линии не пересекаются и отрицательно при пересечении. Обозначается как произведение коэффициентов сцепления  $X$  на модуль ( $X \cdot m$ )

8. Коэффициент высоты зуба  $h_a^*$  ( для станд.  $h_a^* = 1$ )

9. Коэффициент радиального зазора  $C^*$  ( для станд.  $C^*=0,25$  )

10. Радиус скругления  $\rho_0 \simeq 0,4 m$

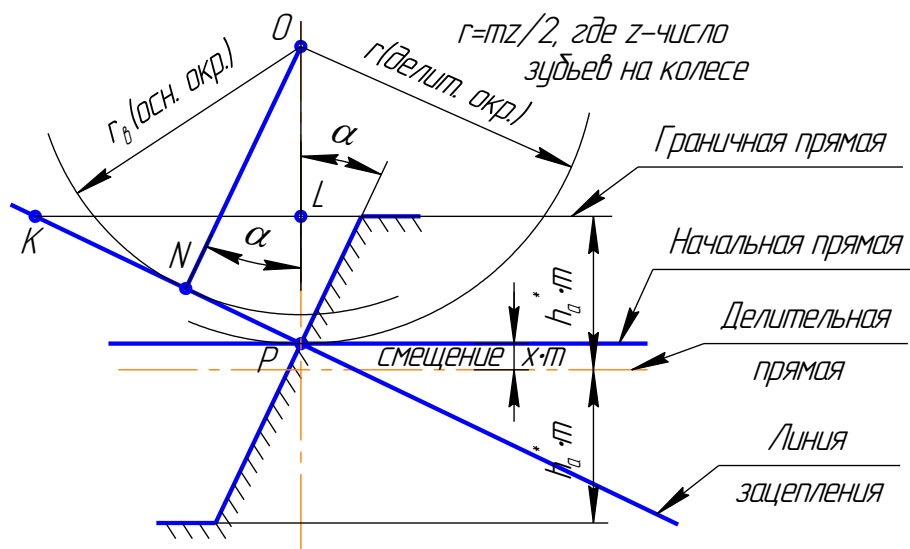
### Подрез зубьев реечным инструментом и его устранение.



Это явление, когда переходная кривая у основания зуба пересекает его эвольвентный профиль. Появляется тогда, когда в станочном зацеплении граничная прямая пересекает линию зацепления за точкой  $N$ .

При этом толщина зуба у основания уменьшается, чем снижается его изгибная прочность. Кроме того, уменьшается рабочий участок боковой поверхности

зуба, что приводит к уменьшению коэффициента торцевого перекрытия ( см. далее)



### Условие отсутствия подреза

Равнозначно условию касания эквивалент:

$$PN \geq PK, \text{ где } PK = \frac{PL}{\sin \alpha} = \frac{h_a^* \cdot m - xm}{\sin \alpha} \quad (1)$$

$$PN = r \cdot \sin \alpha = \frac{mz}{2} \sin \alpha \quad (2)$$

После подстановки:  $\frac{mz}{2} \sin \alpha \geq \frac{m(h_a^* - x)}{\sin \alpha}$  или

$\frac{z \sin^2 \alpha}{2} \geq h_a^* - x$ , откуда получим условие отсутствия подреза :

$$x \geq h_a^* - \frac{\sin^2 \alpha \cdot z}{2}$$

Для стандартного инструмента (при  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$ ):

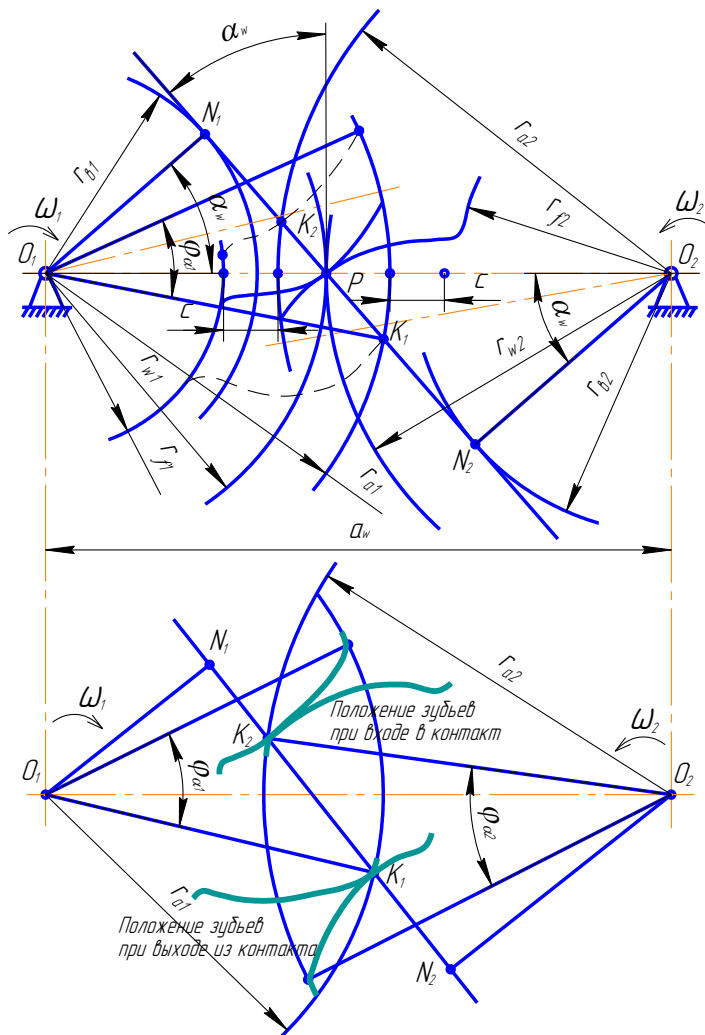
$$x \geq (17 - z)/17$$

## Лекция №14

### План лекции

Передача из цилиндрических колёс внешнего и внутреннего зацепления.

### Основная часть лекции



### Передача из цилиндрических прямоугольных колёс внешнего зацепления.

#### Элементы передачи

$a_w$  - межосевое расстояние

$\alpha_w$  - угол зацепления

$P$  - зацепления

$r_{w1}, r_{w2}$  - ном. радиусы

$K_1K_2$  - активная линия зацепления

$$r_w = r / \cos \alpha_\alpha$$

$$r_\alpha = r \cdot \cos \alpha$$

$$r = mz/2$$

$K_1K_2$  - активная линия зацепления

геом. место точек контакта зубьев.

$J_{\alpha 1}, J_{\alpha 2}$ - углы торцевого перекрытия ( для кол.1 и кол.2)

Для непрерывности передачи движения необходимо, чтобы этот угол был больше углового шага ( $\delta_1$  или  $\delta_2$ )

Качественные показатели передачи.

а) коэффициент торцевого перекрытия – отношение угла торцевого перекрытия к угловому шагу

$\varepsilon_{\alpha} = J_{\alpha 1}/\tau_1 = J_{\alpha 2}/\tau_2$  характеризуется плавность работы передачи.

б) коэффициент скольжения- отношение скорости скольжения профилей к скорости перемещения точки контакта по профилю

$$\lambda_1 = V_{CK}/V_{K1K}$$

$$\lambda_2 = V_{CK}/V_{K2K}$$

в) коэффициент удельного давления  $G = m/\rho$ , где  $\rho$  - приведённый радиус кривизны профилей в точке контакта :  $1/\rho = 1/\rho_1 + 1/\rho_2$ , совместно с коэффициентом

скольжения характеризуется износ зубьев

более подробно о качественных показателях см [1], стр. 377-381

Способы записи передаточного отношения простой зубчатой передачи:

для внутреннего зацепления

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{O_2P}{O_1P} = \pm \frac{r_{\epsilon 2}}{r_{\epsilon 1}} = \pm \frac{r_2 \cos \alpha}{r_1 \cos \alpha} = \pm \frac{wz_2/2}{wz_1/2} = \pm \frac{z_2}{z_1}$$

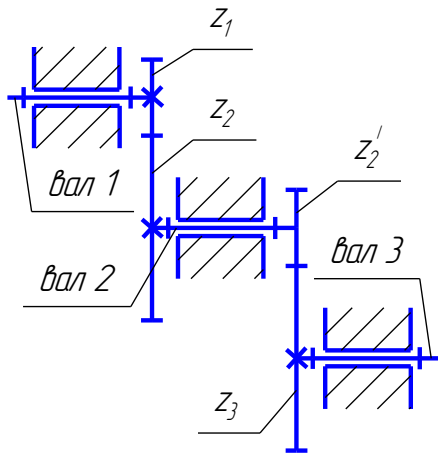
$\frac{\omega_1}{\omega_2}$  - алгебраические величины

«+»- для внутреннего зацепления

«-» - для внешнего зацепления

В простой зубчатой передаче можно получить  $u_{12}$  не более ,чем 5, при конструктивно приемлемых размерах ( речь идёт о силовых передачах, а в приборных может быть больше). При больших значениях используют многоступенчатые и планетарные.

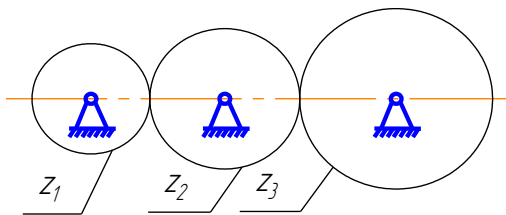
Многоступенчатые



$$U_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = U_{12} \cdot U_{23}$$

Т.е. общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений всех ступеней.

### Рядные передачи.



Это частный случай многоступенчатой. Используют при больших межосевых расстояниях и для зацепления направления вращения.

$$U_{13} = U_{12} \cdot U_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{z_3}{z_1}$$

В общем случае при «n» колёсах  $U_{1n} = \frac{z_n}{z_1} (-1)^p$

Где «p»- число внешних зацеплений

## Лекция №15

### План лекции

Синтез планетарных механизмов. Аналитические и графические методы определения КПД планетарного механизма. Выбор схемы планетарной передачи. Выбор чисел зубьев и числа сателлитов в планетарных передачах.

### Основная часть лекции

#### Планетарные механизмы с цилиндрическими колёсами.

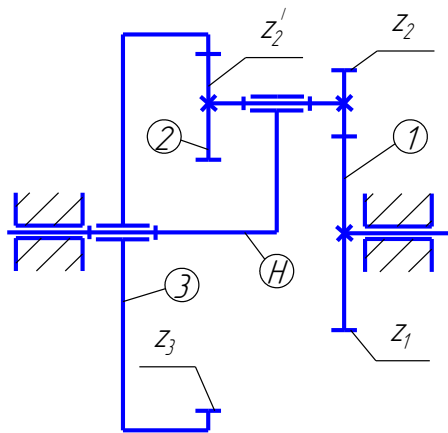
Механизмы, в которых имеются колёса с подвижными осями называются планетарными. Звено, на котором расположена эта ось называется водитом (обозначается «Н»).

Если  $W > 1$ , механизмы называют дифференциалом;

Если в дифференциале центральные колёса связаны зубчатой передачей с неподвижными осями и  $W = 1$ , механизм называют замкнутым дифференциалом;

Если в дифференциале одно центральное колесо сделать неподвижным ( $W=1$ ), то получают планетарный редуктор.

### 1. Дифференциальный механизм.



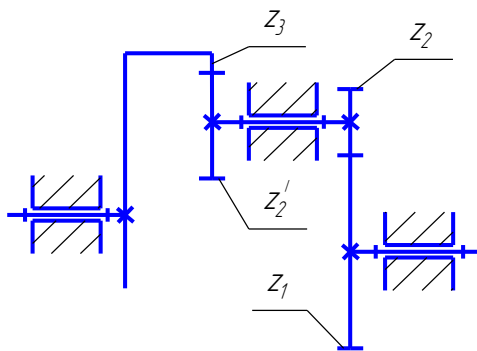
$H$  - водило

1 и 3 – центральные колёса

2 – сателлит

$$W = 3n - 2P_H - P_B = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$$

Связь между угловыми скоростями звеньев и числами зубьев на венцах колёс можно установить, используя метод обращения движения: всем звеньям механизма сообщается дополнительно вращение с угловой скоростью, равной скорости водила  $\omega_H$ , противоположно направленной. Угловые скорости звеньев при этом будут равны:  $\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$ ;  $\omega_2^H = \omega_2 - \omega_H$ ;  $\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H$  и  $\omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0$ , т.е. водило остановилось и планетарный механизм превратился в передачу с неподвижными осями колёс. Такой механизм называют обращённым. его схема.



Найдём передаточное отношение от одного центрального колеса обращенного механизма к другому:

а) через угловые скорости в обращённом движении

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}$$

б) через передаточные отношения ступеней и числа зубьев колёс:

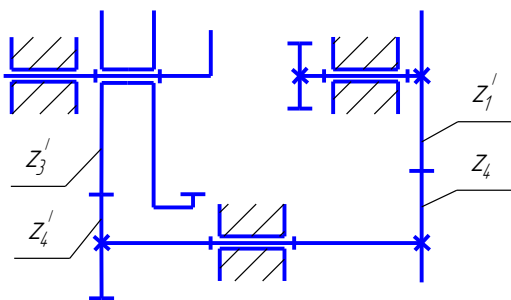
$$u_{13}^H = u_{12}^H \cdot u_{23}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right)$$

Приравняем выражения а и б:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = u_{13}^H = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2}$$

\*) формула Виллиса. Устанавливает связь угловых скоростей звеньев с передаточным отношением обращённого механизма.

## 2.Замкнутый дифференциал.



Из зацепления колёс замыкающей части:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1^1 \cdot z_4^1}{z_4 \cdot z_3^1} \quad **)\omega_3 = \omega_1 \frac{z_1^1 \cdot z_4^1}{z_4 \cdot z_3^1}$$

Разделим числитель и знаменатель левой части уравнения \*) на  $\omega_H$  и подставим  $\omega_3$  согласно \*\*):

$$\frac{\omega_1/\omega_H - 1}{\frac{\omega_1}{\omega_H} \cdot \frac{z_1^1 \cdot z_4^1}{z_4 \cdot z_3^1} - 1} = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2^1}$$

,т.к  $\frac{\omega_1}{\omega_H} = u_{1H}$ , то

$$\boxed{\frac{u_{1H} - 1}{u_{1H} \cdot \frac{z_1^1 \cdot z_4^1}{z_4 \cdot z_3^1} - 1} = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2^1}}$$

Уравнение позволяет определить передаточное отношение от центрального колеса замкнутого дифференциала к водилу.

## 3.Планетарный редуктор.

Если в схеме 1 одно центральное колеса ( например 3) сделать неподвижным, то получим пл.редуктор. Используя уравнение \*) при  $\omega_3 = 0$ , получим:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2^1} \quad \text{следует} \quad -\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1 = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2^1} \quad \text{следовательно} \quad \boxed{u_{1H} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2^1}}$$

Получить универсальное уравнение для определения передаточного отношения планетарного редуктора через числа зубьев нельзя. Для каждой схемы будет своё уравнение. Но с использованием передаточного отношения обращенного механизма это сделать можно:  $u_{1H} = u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)}$ , где  $u_{13}^{(H)}$

- раскрывается через числа зубьев конкретной схемы.

Конструкция и расчёт планетарных механизмов более сложны, чем многоступенчатых, но они дают более широкие кинематические возможности – диапазон передаточных отношений очень широк (до 1000, КПД при этом падает). Позволяет передавать большие мощности при меньших габаритах благодаря использованию нескольких сателлитов (до 8 - 12)



## Геометрический синтез планетарных редукторов

Как для любой другой зубчатой передачи состоит в определении числа зубьев колёс для обеспечения заданного передаточного отношения, при этом требуется выполнить ряд дополнительных условий:

- а) условие соосности
- б) условие соседства
- в) условие сборки

### Лекция №16

#### План лекции

Синтез кулачковых механизмов. Виды кулачковых механизмов.

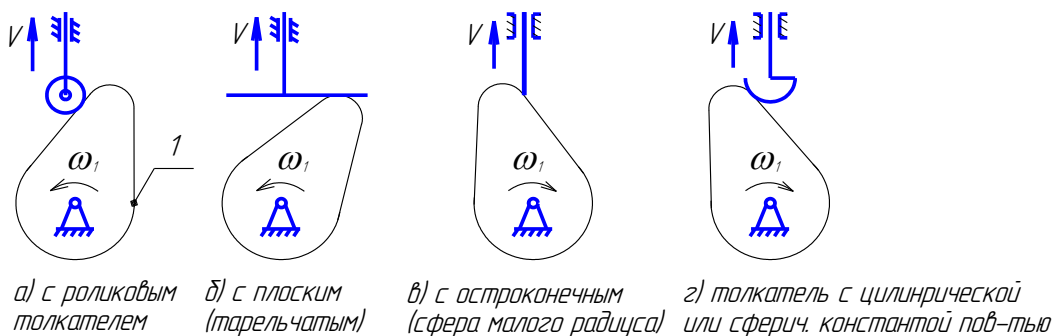
#### Основная часть лекции

### Плоские кулачковые механизмы.

#### 1. Основные схемы. Терминология. Кинематические возможности.

Кулачковые механизмы содержат высшую пару, которая образована входным звеном (кулачком) и выходным (толкателем, коромыслом). Кулачок очерчен поверхностью переменной кривизны, в поверхность толкатель-плоскость, цилиндр (реже - сфера). На рис. приведены основные схемы плоских кулачковых механизмов.

а) с поступательно движущимся толкателем.

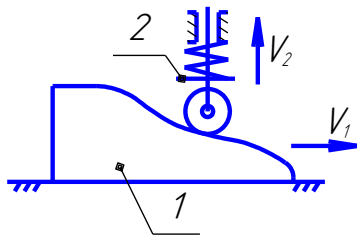


Преобразование вращения входного звена (непрерывно) в возвратно-поступательное движении выходного звена.

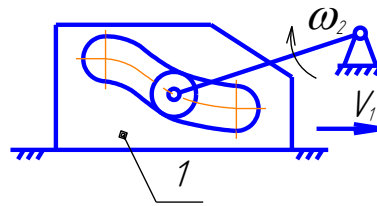


коромысла. Поверхности контакта толкателя варьируются как и в механизмах с постоянным движением толкателя.

Механизмы с поступательно движущимся кулачком.



С силовым замыканием



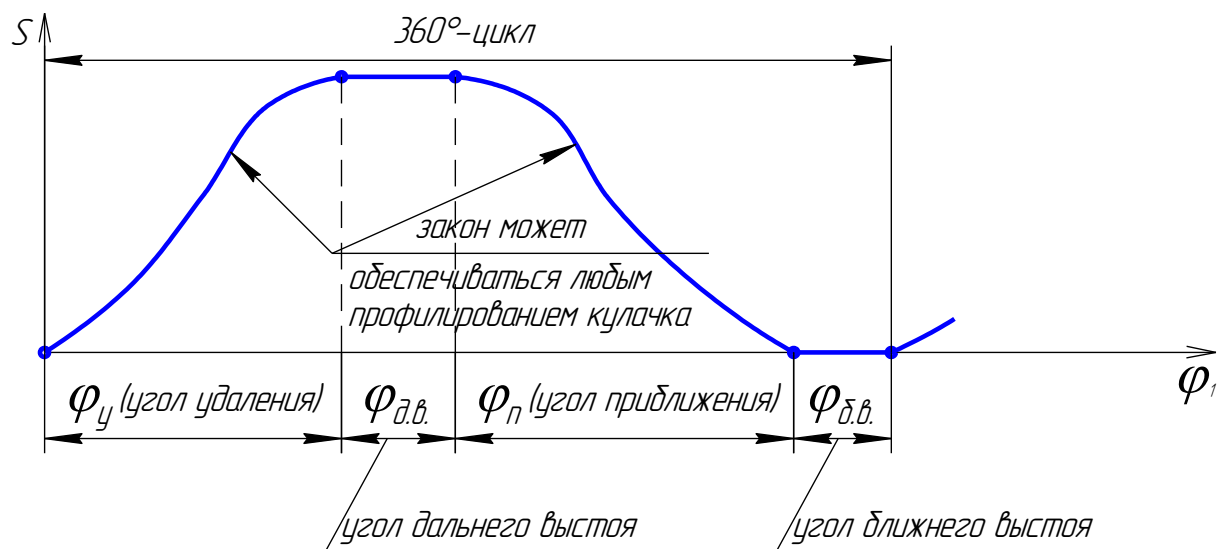
С геометрическим замыканием

Преобразование поступательного движения в поступательное или вращательное.

Способ обеспечения

постоянства контакта кулачка и толкателя называется замыканием ( силовое и геом.). кулачковые механизмы обеспечивают циклическое движение выходного звена и соответствующее профилирование кулачка может обеспечить теоретически любой закон движения толкателя с остановками. Наиболее типичными являются циклограммы с двумя остановками толкателя (выстоями): ближним и дальним (в начале рабочего прямого хода и в конце его). Прямой ход называют фазой удаления, обратный - фазой приближения.

На фазах удаления и приближения может быть промежуточные (при малых  $\omega_1$ )

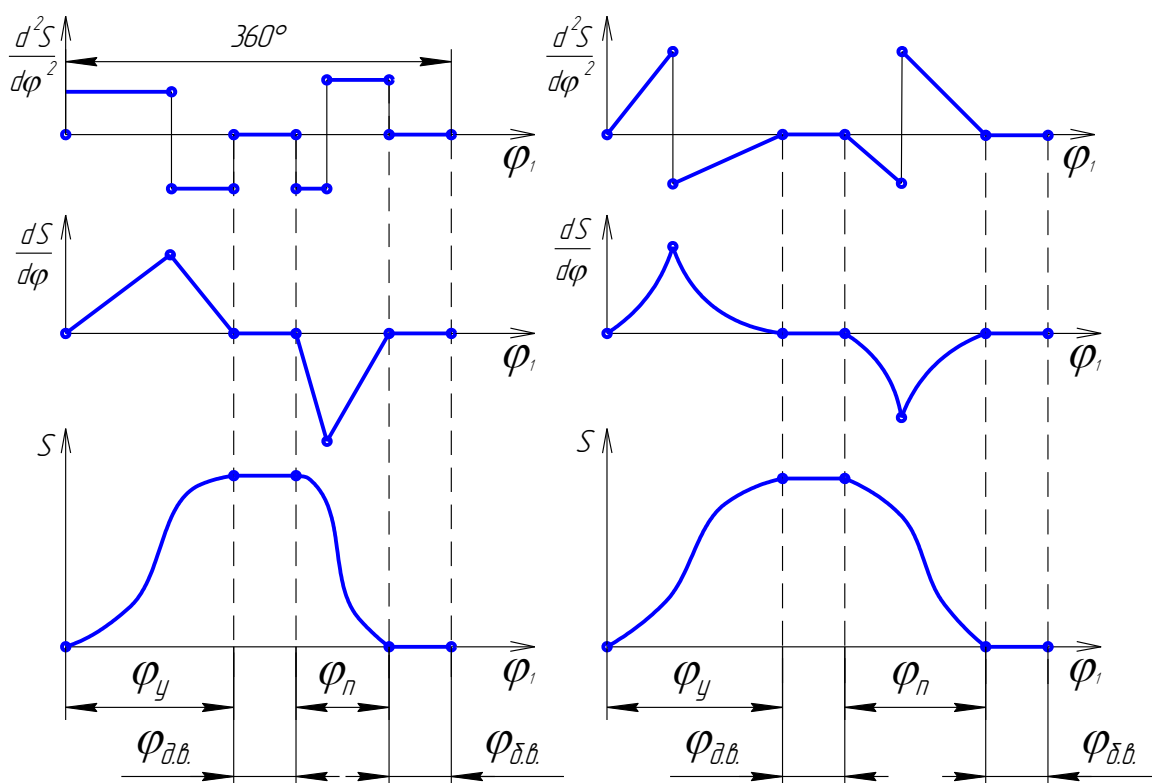


## 2.Закон движения и удары в кулачковых механизмах.

Возможность на практике реализовать тот или иной закон движения толкателя в значительной мере зависит от быстродействия ( скорости вращения кулачка), т.к. толкатель движется с ускорениями. Причиной этих усложнений является сила воздействия кулачка на толкатель. И если профиль кулачка теоретически (по геометрическим параметрам) может обеспечить требуемый закон движения (перемещение), то на практике он будет искажать динамическим воздействием движущихся масс вследствие упругости звеньев.

Это воздействие характеризуется не только величиной ускорений масс, но и характером изменения ускорений ( а значит и сил). Если ускорение мгновенно изменяется по направлению, или на конечную величину, или мгновенно возрастает до бесконечности ( теоретически), то такие явления в движении тела могут быть вызваны только ударом. Поэтому в зависимости от вида графика кинематических характеристик ( разумеется, расчётных, теоретических) различают законы движения с мягкими ударами, с жёсткими ударами и безударные.

Примеры законов движения, обуславливающих мягкий удар: график аналога ускорений имеет разрывы ( ускорение мгновенно изменяется на конечную величину), график аналога скорости- непрерывная функция.



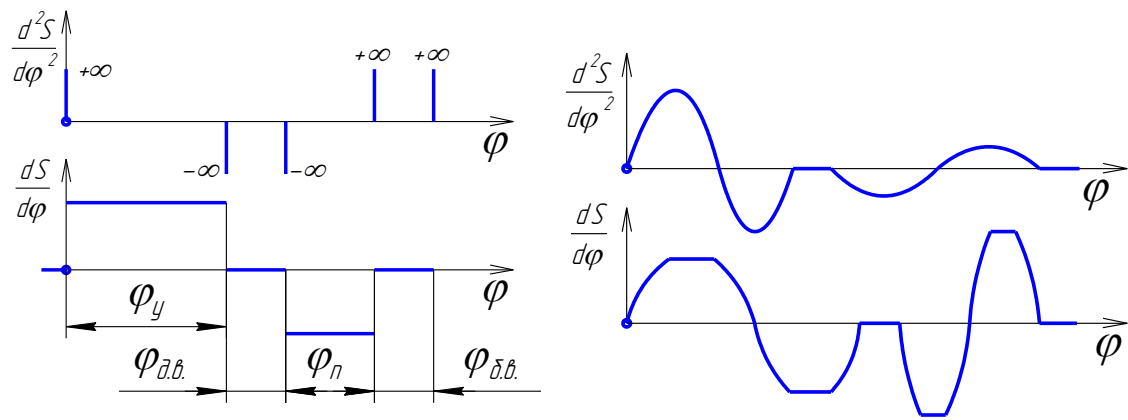
Пример закона с жёсткими ударами

Примеры безударных законов:

синусоиды, трапеция, степенные законы

– непрерывные функции для аналога

ускорения.



## Лекция №17

### План лекции

Этапы синтеза кулачковых механизмов. Выбор допустимого угла давления на ведомое звено кулачкового механизма

### Основная часть лекции

#### Угол давления и его влияние на силы в кинематических парах кулачкового механизма. Угол передачи движения.

Определение: углом давления  $\alpha$  называют острый угол между вектором силы, действующей на толкатель со стороны кулачка и скоростью точки приложения силы (т.е. угол между общей нормалью в точке контакта и скоростью этой точки толкателя)

Углом передачи движения  $\gamma$  называют угол между векторами абсолютной скорости точки контакта толкателя и кулачка. Т.к. второй вектор направлен по общей касательной к профилям в точке контакта, то  $\alpha + \gamma = 90^\circ$

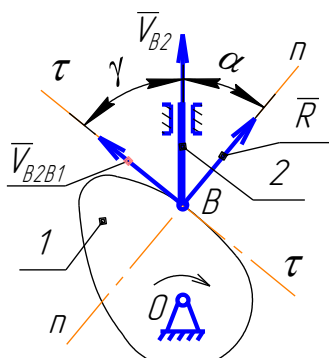


Рис. 1.

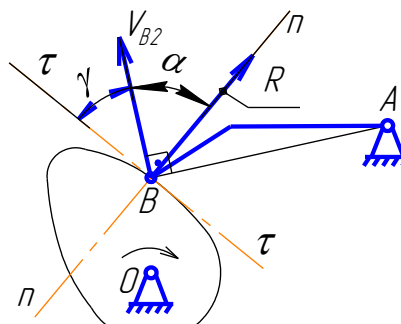
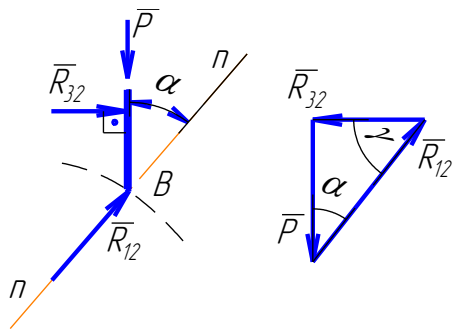


Рис. 2.

Для определения влияния угла давления на силы в к.п. рассмотрим равновесие толкателя в соответствии со схемой 1. Силы трения учитывать не будем. Предполагаем, что толкатель нагружен внешней силой «Р», направленной вдоль его оси вниз.



Условие равновесия:  $\bar{P} + \bar{R}_{12} + \bar{R}_{32} = 0$

Решаем это уравнение графически и определяем  $\bar{R}_{12}$  и  $\bar{R}_{32}$

$R_{12} = P / \cos \alpha$  и  $R_{32} = P / \operatorname{tg} \alpha$

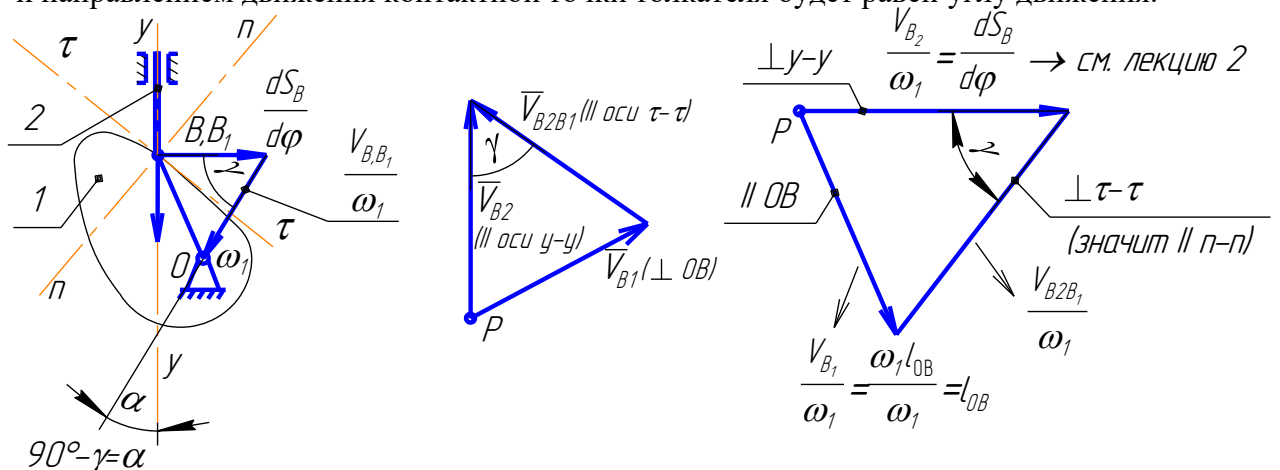
Из уравнений видно, что с ростом угла давления обе реакции возрастают. Т.к.  $R_{32}$  вызывает появление силы трения в поступательной паре, то это приводит к возрастанию осевой силы, соответственной величине  $R_{32}$  и  $R_{12}$  что может привести к заклиниванию.

Поэтому при проектировании к.м. угол давления ограничивают максимально допустимым значением  $\alpha_{\max}$ ) или угол передачи минимальным значением  $\gamma_{\min}$ .

**Связь угла давления с кинематическими характеристиками и размерами кулачковых механизмов.**

Для обоснования методики проектирования к.м. по заданному ограничению угла давления ( угла передачи) установим связь этого угла с кинематическими характеристиками ( перемещением и аналогом скорости толкателя) и размерами механизма на примере с остроконечным поступательно движущимся толкателем:

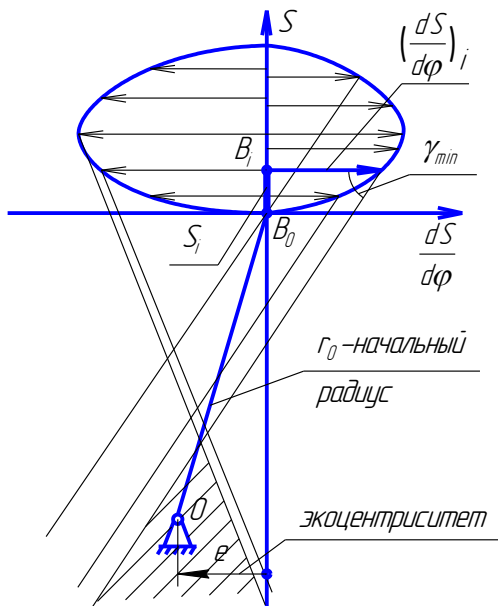
Если в контактной точке построить вектор аналога скорости толкателя, повернуть на  $90^\circ$  на  $\omega_k$ , то угол между линией, соединяющей его конец с центром вращения кулачка и направлением движения контактной точки толкателя будет равен углу движения.



Для доказательства напомним векторное уравнение скорости контактной точки толкателя  $K_2$  и построим план скоростей:

$\bar{V}_{B2} = \bar{V}_{B1} + \bar{V}_{B2B1}$

$\bar{V}_{B2} - \parallel$  оси  $y-y$



$\bar{V}_{B1}$  - направлен  $\perp$   $OB$  по  $\omega_1$  и  $V_{B1} = \omega_1 \cdot l_{OB}$

$\bar{V}_{B2B1}$  -  $\parallel$  оси  $\tau - \tau$ , иначе нарушится контакт.

Обозначим угол передачи  $\gamma$ - между  $\bar{V}_{B2}$  и

$\bar{V}_{B2B1}$ . Разделим каждый вектор на  $\omega_1$  и повернём полученный треугольник на  $90^\circ$  по  $\omega_1$ . Поместим

$\frac{V_{B1}}{\omega_1} = l_{OB}$  и  $\parallel$  этой линии, то конец вектора попадёт

в точку «О»; вектор  $\frac{V_{B2}}{\omega_1} = \frac{dS}{d\varphi}$  и  $\perp$  вектору скорости

контактной точки толкателя; угол между ним и

линией, соединяющей его конец с центром вращения кулачка равен углу  $\gamma$  на плане скоростей между абс. скоростью контактной точки толкателя и отн. скоростью контактных точек, а это согл. определению есть угол передачи движения.

## Лекция №18

### План лекции

Определение основных размеров кулачкового механизма. Выбор закона движения

выходного звена кулачкового механизма.

Динамическая модель кулачкового механизма.

### Основная часть лекции

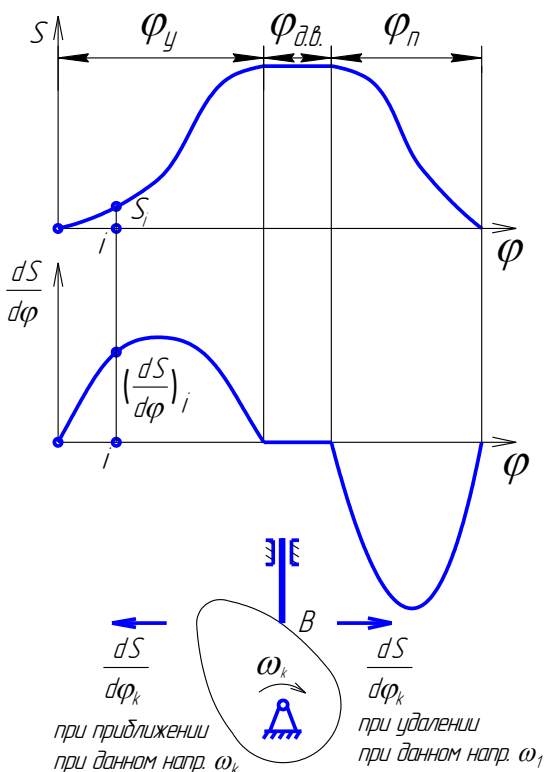
#### Определение начальных размеров

( $r_0$  и  $e$  или  $r_0$  и  $a_w$ ) по заданному закону движения и допустимому углу давления  $\alpha_{max}$  (угл. пер.  $\gamma_{min}$ ) для механизмов с остроконечными или роликовыми толкателем.

закон движения:  $S$  и  $\frac{dS}{d\varphi}$

допустимый угол давления  $\alpha_{max}$

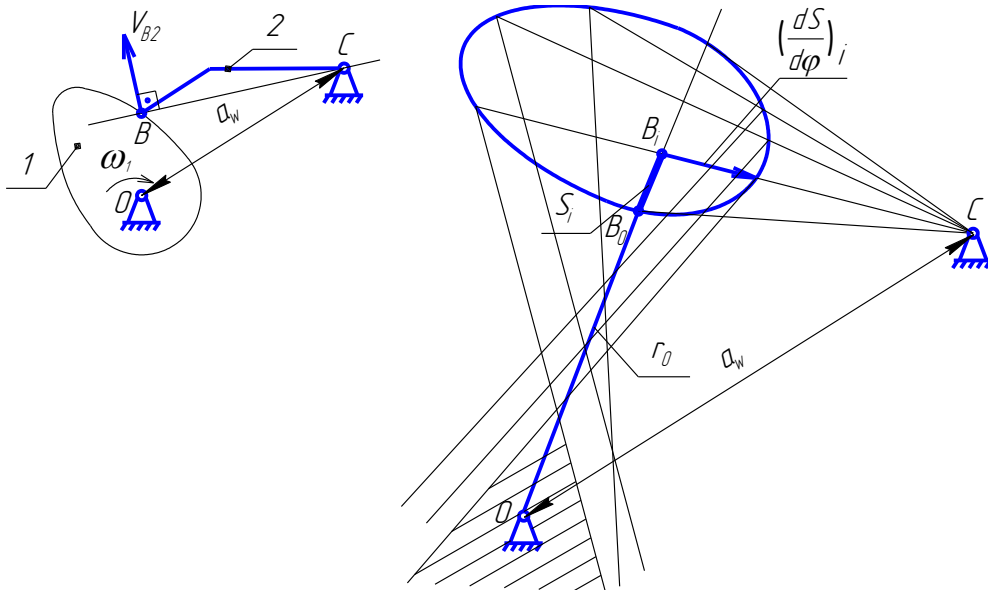
Опр.:  $r_0$  и  $e$  (или  $r_0$  и  $a_w$ )



Дано: схема механизма;

1. Строится диаграмма в координатах траектория  $S$  – аналог скорости  $\frac{dS}{d\varphi}$ .
2. Из концов векторов аналоговых скоростей проводятся лучи под углом  $\gamma_{\min}$ .
3. Выбирается центр «О» ниже линии этой совокупности лучей  $S$  и отр.  $r_o$  и  $e$ .

Принцип построения зоны расположения центра «О» для механизма с качающимися толкателями тот же. Различия в том, что траектория контактной точки толкателя - дуга окружности и аналогом скорости на построении не параллельны (см. эскиз)



#### 4. Определение начального радиуса для механизмов с плоскими толкателями.

Профиль кулачка должен быть выпуклым. Достаточным условием является  $r_o$  больше макс. Величины модуля отрицательного значения аналога ускорения.

$$r_o > \left| \text{наиб. отриц. значение } \frac{d^2S}{d\varphi^2} \right|$$

#### 5. Метод обращения движения при графическом профилировании кулачка и определение координат аналитически методом.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ.**

Изучение дисциплины «Теория машин и механизмов» позволит студенту самостоятельно выполнить курсовую работу, а также решить рекомендованные задачи и успешно сдать экзамен. Полученные знания теоретической механики необходимы для усвоения теоретического материала последующих дисциплин. Приобретенные знания позволят выпускнику в своей профессиональной деятельности уверенно решать поставленные перед ним технические задачи.

«Теория машин и механизмов» базируется на дисциплинах: «Инженерная графика», «Теоретическая механика» и «Математика».

Методами синтеза и анализа производятся расчет отдельных механизмов что позволяет в дальнейшем решать большой круг задач из различных областей науки и техники, причем диапазон исследований постоянно расширяется.



## ЛИТЕРАТУРА

- 1) Техническая механика. Кн. 3. Основы теории механизмов и машин [Электронный ресурс]: учебное пособие / под ред. Д.В. Чернилевского, Я.Т. Киницкий - М.: Машиностроение, 2012. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785942756123.html>
- 2) Теория механизмов и машин. Кинематика, динамика и расчет [Электронный ресурс] / Лачуга Ю. Ф., Воскресенский А. Н., Чернов М. Ю. - М. : КолосС, 2008. - (Учебники и учеб. пособия для студентов высш. учеб. заведений). <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785953205245.html>
- 3) Синтез эвольвентного зубчатого зацепления : учебное пособие / Ю. С. Волюшко [и др.] .— Владимир : Владимирский государственный университет (ВлГУ), 2007 .— 51 с. : ил. — (Для заочного обучения) .— Имеется электронная версия .— Электронная версия 2006 г. изд. — Библиогр.: с. 50. ISBN 5-89368-766-3.
- 4) Беляев, Борис Александрович. Теория механизмов и машин [Электронный ресурс] : учебное пособие к практическим занятиям для вузов по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и производств" / Б. А. Беляев, А. П. Шевченко ; Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (ВлГУ), 2014 .— 119 с. URL:<http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/3826/1/01363.pdf>
- 5) Беляев, Б.А. Теория механизмов и машин : учеб. пособие к курсовому проектированию / Б.А. Беляев, А.П. Шевченко, А.А. Рязанов ; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. – 124с. – ISBN 978-5-9984-0481-8 <http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/3553/1/01321.pdf>