Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Институт инновационных технологий
Кафедра «Технология машиностроения»

Методические указания

к выполнению курсовой работы по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению
13.03.03 «Энергетическое машиностроение»

Составитель:
профессор кафедры ТМС Шевченко А.П.

Владимир 2015

Методические указания, содержащие рекомендации по выполнению курсовой работы по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 13.03.03 «Энергетическое машиностроение».

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВО и ОПОП направления подготовки 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», рабочей программы дисциплины «Теоретическая механика». В качестве рекомендаций для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих ВУЗов России.

Рекомендации предназначены для студентов очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании
НМС направления 13.03.03
Протокол № 6 от 11.11.2015 г.

Содержание

1. Введение.

Для углубленного изучения вопросов теоретической механики студенты должны выполнить курсовую работу состоящую из 2-х частей, охватывающих 2 раздела динамики: динамику материальной точки и динамику механической системы.

Отчет по курсовой работе состоит из пояснительной записки, чертежей, подготовленных на компьютере.

Пояснительная записка должна содержать подробную постановку задач и их решение с элементами теории по соответствующему разделу. Работа должна быть распечатана с компьютера на листах формата А4 и подшита под титульный лист, образец которого дан в конце методических указаний.

Можно рекомендовать при выполнении курсовой работы использование компьютерной системы символьных вычислений Maxima.

2. Курсовая работа на тему: «Применение теорем и принципов теоретической механики к исследованию равновесия и движения механических систем»

3. Динамика материальной точки. Краткая теория.

Основное уравнение динамики имеет вид

$$m\overline{W} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum F_i \ , \quad (3.1)$$

где m – масса точки;

$\overline{W}$ – ускорение точки;

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, ...\overline{F}_n$ – силы, действующие на точку (учитываются как активные силы, так и реакции связей, если точка несвободная).

Проектируя обе части векторного равенства (3.1) на координатные оси, получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{1x} + F_{2x} + ...\ F_{nx} = \Sigma F_{ix}; \\ m\ddot{y} &= F_{1y} + F_{2y} + ...\ F_{ny} = \Sigma F_{iy}; \\ m\ddot{z} &= F_{1z} + F_{2z} + ...\ F_{nz} = \Sigma F_{iz}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки; здесь $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения точки на оси декартовой системы координат; $F_{1x}, F_{2x}, ...\ F_{nx}$; $F_{1y}, F_{2y}, ...\ F_{ny}$; $F_{1z}, F_{2z}, ...\ F_{nz}$ – проекции сил на оси декартовой системы координат.

Задачи динамики точки

В динамике точки рассматриваются две основные задачи. Их решение приведем на примере использования декартовой системы координат.

Первая задача динамики

По заданной массе точки m и уравнениям ее движения $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ требуется определить модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Из дифференциальных уравнений (3.2) проекции равнодействующей на координатные оси определяются равенствами

$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma F_{ix} = m\ddot{x}; \\ R_y &= \Sigma F_{iy} = m\ddot{y}; \\ R_z &= \Sigma F_{iz} = m\ddot{z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Масса точки m задана, надо знать $\ddot{x}$, $\ddot{y}$; $\ddot{z}$. Для их определения следует дважды продифференцировать по времени заданные уравнения движения точки. Затем, зная R_x, R_y, R_z, определяют модуль равнодействующей по формуле $R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2}$ и направление по направляющим косинусам

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \cos\gamma = \frac{R_z}{R},$$

где α, β, γ – углы между направлением равнодействующей $\overline{R}$ и положительным направлением осей x, y, z соответственно.

Вторая задача динамики

Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу m, а также начальные условия движения (начальное положение точки и ее начальную скорость), получить уравнения движения точки.

Для решения этой задачи необходимо в левую часть дифференциальных уравнений (3.3) подставить значение массы m, а в правую часть – суммы проекций приложенных сил и полученные уравнения дважды проинтегрировать, а затем по начальным условиям определить постоянные интегрирования (C_1, C_2,... C_6).

4. I часть курсовой работы «Дифференциальные уравнения движения материальной точки».

На участке AB трубы (см. рисунок) на груз D массой m действуют постоянная сила Q, сила тяжести и сила сопротивления R; расстояние от точки A до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в Ньютонах.

Дано: m = 2 кг, Q = 10 Н, $R = \mu v$ Н, μ = 0,4 Н·с/м, V_0 = 5 м/с, l = 2,5 м, $F_x = 6t^2$ Н, f = 0,1.

Определить закон движения груза D на участке BC $x = f(t)$.

Р е ш е н и е

Рассмотрим движение груза на участке AB с целью определения скорости груза в точке B, которая будет начальной для участка BC.

Строим расчетную схему. Для этого на рисунке показываем ось z, направленную вдоль отрезка AB. Начало оси совмещаем с начальным положением точки, т. е. с точкой A. Материальную точку (груз) изображаем в промежуточном положении так, чтобы координаты ее положения были положительными.

Показываем силы, действующие на точку: активные (заданные), силы $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ и нормальную составляющую реакцию трубки $\overline{N}$ (трение отсутствует).

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось z.

$$m\ddot{z} = \Sigma F_{iz} = Q - R = Q - \mu\dot{z}$$

$$\text{или } \ddot{z} = \frac{Q}{m} - \frac{\mu}{m}\dot{z} = a - b\dot{z}, \tag{1}$$

$$\text{где } a = \frac{Q}{m} = 5,\ b = \frac{\mu}{m} = 0{,}2.$$

Заменим в уравнении (1) $\ddot{z}$ на $d\dot{z}/dt$ и, разделив переменные, получим:

$$\frac{d\dot{z}}{a - b\dot{z}} = dt.$$

После интегрирования имеем

$$-\frac{1}{b}\ln|a - b\dot{z}| = t + C_1 \tag{2}$$

По начальным условиям движения определим постоянную интегрирования C_1. При $t = 0$ $\dot{z} = V_0$, тогда $C_1 = -\frac{1}{b}\ln|a - bV_0|$.

После подстановки C_1 в уравнение (2) найдем

$$t = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{a - b\dot{z}}{a - bV_0}\right|.$$

Подставив числовые значения, получаем $\dot{z} = 25 - 20\,e^{-0,2t}$

При $t = 1$ с $\dot{z} = V_B = 25 - 20\,e^{-0,2} = 8,62$ м/с.

Теперь рассмотрим движение груза на участке BC.

Составим дифференциальные уравнения в проекциях на оси x и y.

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{x} = F - F_{\text{тр}} - P\cos 30^\circ; \tag{3}$$

$$m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{y} = N - P\cos 60^\circ. \tag{4}$$

Сила трения скольжения определяется по формуле $F_{\text{тр}} = fN$.

Вдоль оси y точка не перемещается, поэтому $\ddot{y} = 0$ – проекция ускорения точки на ось y. Из уравнения (4) находим $0 = N - P\cos 60^\circ$, откуда $N = P\cos 60^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 60^\circ = fmg\cos 60^\circ = 0,98$ Н.

Подставив числовые значения в дифференциальное уравнение (3), получаем:

$$m\ddot{x} = 6t^2 - 0,98 - mg\cos 30^\circ;$$

$$\ddot{x} = \frac{6t^2}{m} - \frac{0,98}{m} - \frac{mg\cos 30^\circ}{m};$$

$$\ddot{x} = 3t^2 - 8,98. \tag{5}$$

Интегрируя дважды уравнение (5), получим:

$$\dot{x} = t^3 - 8,98t + C_2;$$

$$x = \frac{t^4}{4} - \frac{8,98t^2}{2} + C_2 t + C_3. \tag{6}$$

Найдем постоянные интегрирования. Начальные условия при движении груза на участке BC: при $t = 0$ $\dot{x}_0 = v_B = 8,62$ м/с, $x_0 = 0$, $C_2 = v_B = \quad = 8,62$ м/с; $C_3 = 0$. Подставив значения этих постоянных в уравнение (6), получим закон движения груза D на участке BC.

$$x = 0,25t^4 - 4,49t^2 + 8,62t.$$

5. Динамика механической системы.

6. II часть курсовой работы «Исследование динамики механической системы»

6 (а). Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы. Краткая теория.

Кинетическая энергия механической системы определяется как сумма кинетических энергий всех входящих в эту систему материальных точек

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}. \qquad (3.22)$$

Кинетическая энергия твердого тела

Формулы, определяющие кинетическую энергию тела при различных видах движения.

1) Поступательное движение

$$T = \frac{1}{2} M V^2, \qquad (3.23)$$

где M – масса тела; V –скорость тела.

2) Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \qquad (3.24)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

3) Плоскопараллельное движение

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \qquad (3.25)$$

где V_c – скорость центра масс тела;

J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В общем случае движения твердого тела кинетическая энергия определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_p \omega^2. \qquad (3.26)$$

где V_c – скорость его центра масс;

M – масса тела;

J_p – момент инерции тела относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс;

ω – угловая скорость вращения тела относительно мгновенной оси.

Работа сил

1) Работа силы, приложенной к вращающемуся телу:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z(\bar{F}) d\varphi. \tag{3.35}$$

Если $M_z\left(\bar{F}\right) = \text{const}$, то $A = M_z(F)\varphi$, где M_z – момент силы относительно оси; φ – угол поворота тела. Работа положительная, если направление момента совпадает с направлением углового перемещения тела, и отрицательная в противном случае.

2) Работа силы тяжести

$$A_{1,2} = \pm Ph, \tag{3.37}$$

где h – вертикальное перемещение точки приложения силы.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка, а зависит лишь от высоты, на которую опускается или поднимается точка приложения силы тяжести. Работа положительная, если конечное положение точки ниже начального, и работа отрицательная, если конечное положение точки выше начального.

3) Работа силы упругости

$$A = -\frac{c}{2}x^2. \tag{3.39}$$

где c – жесткость пружины, x – ее деформация.

6 (а). Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы.

Дано: m_1 = 3 кг; m_2 = 1 кг; m_3 = 2 кг; $F = 10(2+S)$ Н; S_1 = 0,1 м; f = 0,1; ρ_3 = 0,1 м; M = 1,2 Нм; $R_2 = R_3$ = 0,4 м; $r_3 = \frac{1}{2}R_3$.

Каток 2 - сплошной однородный цилиндр.

Определить V_1 – скорость тела 1 (рис. Д2).

Р е ш е н и е

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^i , \qquad (1)$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях;

$\sum A_i^e$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе;

$\sum A_i^i$ – сумма работ внутренних сил, приложенных к системе.

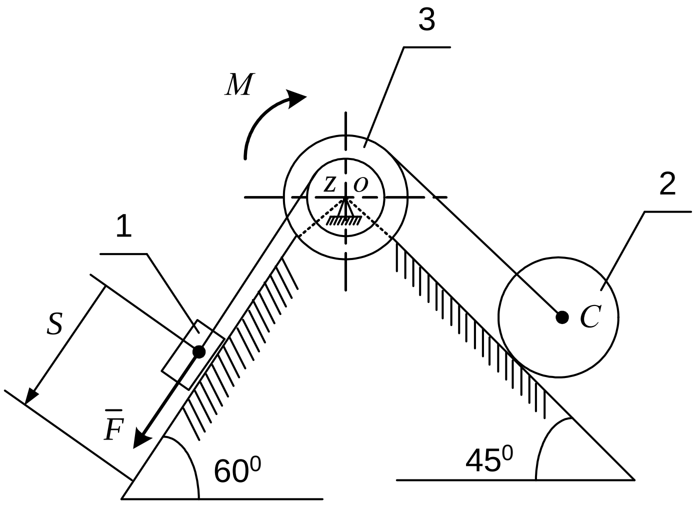


Рис. Д2

Данная система неизменяемая, поэтому $\sum A_i^i = 0.$ Так как в начальный момент система находилась в состоянии покоя, то $T_0 = 0,$ и уравнение (1) примет вид

$$T = \sum A_i^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы T в конечном ее положении.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы равна сумме кинетических энергий тел 1, 2, 3

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия ступенчатого блока 3, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T_3 = \frac{J_z \omega_3^2}{2},$$

где J_z – момент инерции блока относительно оси вращения; $J_z = m_3 \rho_3^2$;

ω_3 – угловая скорость ступенчатого блока.

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение:

$$T_2 = \frac{m_2 V_c^2}{2} + \frac{J_c \omega_2^2}{2},$$

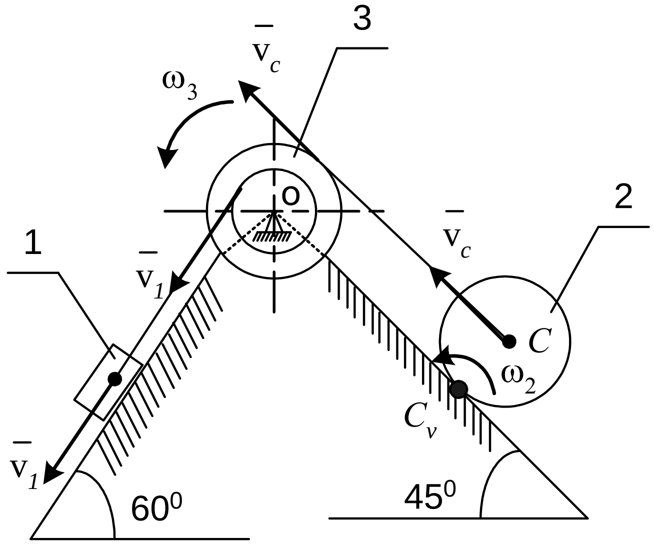
где V_c – скорость центра масс C катка;

J_c – момент инерции катка относительно его центральной оси;

$$J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2};$$

ω_2 – угловая скорость катка.

Выразим скорость V_c, угловые скорости ω_2, ω_3 через скорость V_1 груза 1 (рис. Д2а).



7.

Рис. Д2 а

Скорость точек обода ступенчатого блока равна скорости движения сходящей с барабана нити (нить нерастяжима). Следовательно, $\omega_3 = \frac{V_1}{r_3}$; $V_c = \omega_3 R_3$; $V_c = \frac{V_1 R_3}{r_3}$.

Так как каток 2 катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей катка C_V находится в точке соприкосновения его с неподвижной поверхностью. Поэтому $\omega_2 = \dfrac{V_c}{CC_V} = \dfrac{V_c}{R_2}$; $\omega_2 = \dfrac{V_1 R_3}{r_3 R_2}$.

При подстановке найденных зависимостей в уравнения кинетических энергий тел получим

$$T_3 = \frac{m_3 \rho_3^2 V_1^2}{2 r_3^2} = \frac{2 \cdot 0{,}1^2}{2 \cdot 0{,}2^2} V_1^2 = 0{,}25 V_1^2;$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \frac{V_1^2 R_3^2}{r_3^2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 R_2^2}{2} \frac{V_1^2 R_3^2}{r_3^2 R_2^2} = \frac{3}{4} m_2 \frac{V_1^2 R_3^2}{r_3^2} = \frac{3}{4} 1 \frac{0{,}4^2}{0{,}2^2} V_1^2 = 3 V_1^2;$$

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{3}{2} V_1^2 = 1{,}5 V_1^2;$$

$$T = 1{,}5 V_1^2 + 0{,}25 V_1^2 + 3 V_1^2 = 4{,}75 V_1^2.$$

Найдем сумму работ всех сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении (рис. Д2 б)

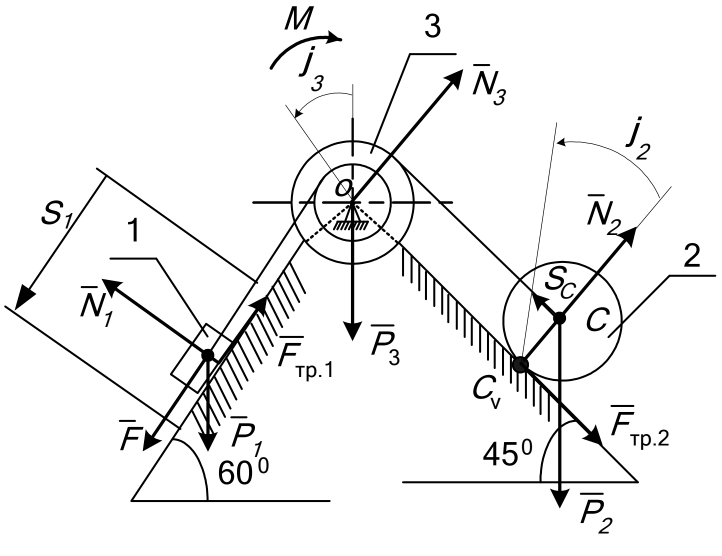


Рис. Д2 б

На груз 1 действуют силы: вес $\overline{P_1}$; нормальная реакция $\overline{N_1}$; сила трения $\overline{F}_{TP_1}$, направленная противоположно скорости груза 1; сила $\overline{F}$.

Силами, действующими на ступенчатый блок 3, являются вес $\overline{P_3}$; реакция подшипников в точке *0* – $\overline{N_3}$ и момент сил сопротивления *M*. К катку 2 приложены силы: вес катка $\overline{P_2}$; сила трения $\overline{F}_{TP_2}$, препятствующая скольжению катка; нормальная реакция $\overline{N}_2$.

Работа силы P_1

$$A(\overline{P}_1) = P_1 S_1 \sin 60^\circ = m_1 g S_1 \sin 60^\circ.$$

Работа силы $\overline{F}$

$$A(\overline{F}) = \int_0^{S_1} F dS = \int_0^{S_1} 10(2+S) dS = 20S_1 + 5S_1^2.$$

Работа силы $F_{\text{тр}_1}$

$$A(\overline{F}_{\text{тр}_1}) = -F_{\text{тр}} S_1;\ F_{\text{тр}_1} = fN_1.$$

Для определения N_1 составим дифференциальное уравнение движения груза 1 в проекции на ось y: $m_1\ddot{y} = N_1 - P_1\cos 60^\circ;$ учитывая, что проекция ускорения груза 1 $\ddot{y} = 0,$ получим:

$$0 = N_1 - P_1\cos 60^\circ; \quad N_1 = F_1 \cos 60^\circ = m_1 g \cos 60^\circ,$$

тогда

$$F_{\text{тр}} = fmg\cos 60^\circ \text{ и } A(\overline{F}_{\text{тр}\,1}) = -fm_1 g S_1 \cos 60^\circ.$$

Работа момента *M* сил сопротивления

$$A(M) = -M\varphi_3.$$

Здесь φ_3 – угловое перемещение ступенчатого блока 3. Выразим угол поворота φ_3 через перемещение S_1 груза 1 $\varphi_3 = \dfrac{S_1}{r_3},$ тогда $A(M) = -M\dfrac{S_1}{r_3}.$

Работа силы тяжести катка *D*

$$A(\overline{P}_2) = -P_2 S_C \sin 45^\circ.$$

Перемещение S_C также выразим через перемещение S_1.

$$S_C = \varphi_3 R_3 = \frac{S_1 R_3}{r_3};$$

$$A\left(\overline{P}_2\right) = -m_2 g \frac{R_3}{r_3} S_1 \sin 45^\circ.$$

$A\left(\overline{N}_1\right) = 0,$ т. к. угол между силой N_1 и перемещением точки ее приложения равен 90°, а $\cos 90^\circ = 0.$

$A\left(\overline{P}_3\right) = 0;$ $A\left(\overline{N}_3\right) = 0,$ т. к. они приложены к неподвижной точке.

$A\left(\overline{N}_2\right) = 0,$ $A\left(\overline{F}_{\text{тр}_2}\right) = 0,$ т. к. эти силы приложены к мгновенному центру скоростей.

Сумма работ всех сил, приложенных к рассматриваемой системе:

$$\sum A_i^e = A\left(\overline{P}_1\right) + A\left(\overline{F}\right) + A\left(\overline{F}_{\text{тр}}\right) + A(M) + A\left(\overline{P}_2\right),$$

$$\sum A_i^e = 0{,}256 + 2{,}05 - 0{,}147 - 0{,}6 - 1{,}386 = 0{,}173 \text{ Дж.}$$

Приравнивая значения T и $\sum A_i^e$, получим:

$$4{,}75 V_1^2 = 0{,}173,$$

откуда

$$V_1 = \sqrt{\frac{0{,}173}{4{,}75}} = 0{,}19 \text{ м/с.}$$

Ответ: V_1 = 0,19м/с.

6 (б). Принцип Даламбера. Краткая теория.

Для рассмотрения движения систем Даламбер предложил специальный принцип, получивший название принципа Даламбера.

Принцип Даламбера для материальной точки эквивалентен основному закону динамики. Уравнение движения материальной точки массой m относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и реакций связей имеет вид

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{R}, \tag{3.40}$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая активных сил;

$\overline{R}$ – равнодействующая реакций связей;

$\overline{W}$ – ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета.

Представим (3.40) в виде $\overline{F} + \overline{R} - m\overline{W} = 0,$ введем обозначение $\overline{F}^{\text{ин}} = -m\overline{W}$ – сила инерции материальной точки, тогда получим

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{F}^{ин} = 0. \tag{3.41}$$

Таким образом, *при движении материальной точки активные силы, реакции связей вместе с силой инерции точки образуют уравновешенную систему сил.*

Уравнение (3.41) выражает принцип Даламбера для точки.

Рассмотрим систему n материальных точек. К каждой точке системы приложены равнодействующая активных сил и равнодействующая реакций связей. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получим:

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i^{i} + \overline{F}_i^{\text{ин}} = 0, \tag{3.42}$$

где нижний индекс $i = 1, 2, ..., n;$

$\overline{F}_{\text{i}}^{\text{ин}} = -m_i \overline{W}_i$ – сила инерции i-й точки.

Условие (3.42) можно представить в эквивалентной форме

$$\left\{\overline{F}_i, \overline{R}_i, \overline{F}_i^{\text{ин}}\right\} \quad 0; \; i = 1, 2, ..., n. \tag{3.43}$$

n векторных условий (3.42) или (3.43) выражают принцип Даламбера для_системы: *при движении механической системы активные силы и реакция связей вместе с силами инерции составляют уравновешенную систему сил.*

На основании принципа Даламбера для системы в форме (3.43) можно получить шесть уравнений равновесия для сил, действующих на точки системы, включая силы инерции, имеющие пространственное расположение.

Если просуммировать левые части уравнений (3.42) по всем точкам системы, то

$$\sum \overline{F}_i + \sum \overline{R}_i + \sum \overline{F}_i^{\text{ин}} = 0, \tag{3.44}$$

где $\sum \overline{F}_i$ – главный вектор активных сил;

$\sum \overline{R}_i$ – главный вектор реакций связей;

$\sum \overline{F}_i^{\text{ин}}$ – главный вектор сил инерции.

Умножая векторно каждое из соотношений (3.42) слева на радиус- вектор точки $\bar{r}_i$ и суммируя по точкам системы, получаем:

$$\sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{F}_i^e\right)+\sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{R}_i\right)+\sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{F}_i^{\text{ин}}\right)=0. \tag{3.45}$$

Условия (3.44) и (3.45), если выразить их через проекции на координатные оси, дадут шесть условий равновесия, аналогичных условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, в статике.

Здесь $\sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{F}_i\right)$ – сумма моментов активных сил относительно точки *O*. (главный момент активных сил);

$\sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{R}_i\right)$ – сумма моментов реакций связей относительно точки *O* (главный момент реакций связей);

$\sum \overline{\mathrm{M}}_0\left(\overline{F}_i^{\text{ин}}\right)$ – сумма моментов сил инерции относительно точки *O* (главный момент сил инерции).

Приведение сил инерции твердого тела

В общем случае движения твердого тела силы инерции точек его образуют произвольную пространственную систему сил инерции, которую в результате приведения к некоторому центру О можно заменить одной силой $\overline{R}_{\text{ин}}^{/}$, называемой главным вектором сил инерции, приложенной в центре О и парой сил с моментом $\overline{\mathrm{M}}_0^{\text{ин}}$, который является главным моментом сил инерции.

Главный вектор сил инерции не зависит от центра приведения и для любого движения твердого тела равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению

$$\overline{R}'_{\text{ин}} = -M\overline{W}_c,$$

где M – масса тела,

$\overline{W_c}$ – вектор ускорения центра масс.

Для определения главного момента сил инерции рассмотрим несколько частных случаев движения твердого тела.

1) Поступательное движение

Если твердое тело движется поступательно, то ускорения его точек геометрически равны. Силы инерции этих точек составляют систему параллельных сил, равных по величине, направленных в одну сторону. Такая система сил приводится к равнодействующей $\overline{R}_{\text{ин}}$, которая геометрически равна главному вектору сил инерции

$$\overline{R}_{\text{ин}} = \overline{R}'_{\text{ин}} = -\text{M}\overline{W}_c,$$

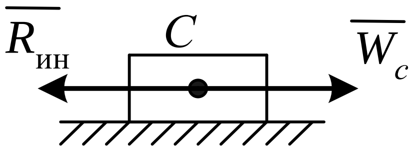


Рис. 3.6

Равнодействующая $\overline{R}_{\text{ин}}$ приложена к центру масс и направлена в противоположную сторону вектора ускорения $\overline{W}_c$ (рис. 3.6).

2) Вращение тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к этой плоскости (рис. 3.7 *а*).

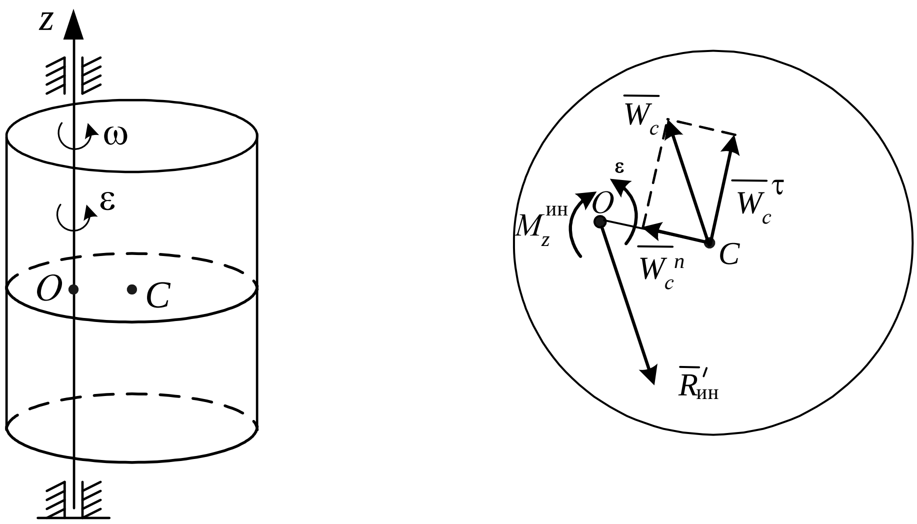
Если ось вращения не проходит через центр масс, то вследствие симметрии приведенные силы – главный вектор сил инерции и пара сил с моментом, равным главному моменту сил инерции, будут лежать в плоскости симметрии.

Если выбрать за центр приведения точку O плоскости симметрии, лежащую на оси вращения, то главный вектор сил инерции будет приложен к этой точке и направлен противоположно ускорению центра масс тела (рис. 3.7 *б*), который определяется по известной формуле

$$\overline{R}'_{\text{ин}} = -\text{M}\overline{W}_c.$$

Модуль главного вектора определяется зависимостью

$$R'_{\text{ин}} = \mathrm{M}W_c.$$



а) б)

Рис. 3.7

Главный момент сил инерции определим относительно оси z

$$\mathrm{M}_z^{\text{ин}} = -J_z\varepsilon,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ε – угловое ускорение тела.

Главный момент сил инерции $\mathrm{M}_z^{\text{ин}}$ направлен противоположно угловому ускорению.

Если ось вращения проходит через центр масс, то $\overline{R}'_{\text{ин}} = 0$, т. к. $\overline{W}_c = 0$

3) Плоскопараллельное движение твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии (рис. 3.8).

Выберем за центр приведения сил инерции центр масс. Тогда вследствие симметрии получим расположенные в плоскости симметрии главный вектор сил инерции, приложенный в центре масс, и пару сил с моментом, равным главному моменту сил инерции. Главный вектор сил инерции найдем по уже известной формуле

$$\overline{R}'_{\text{ин}} = -\mathrm{M}\overline{W}_c.$$

Главный момент сил инерции определим

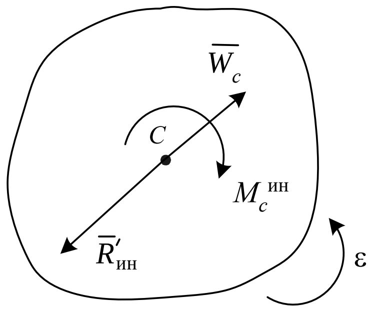


Рис. 3.8

относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости движения тела, по формуле:

$$\text{M}_c^{\text{ин}} = -J_c \varepsilon,$$

где J_c – момент инерции тела относительно названной оси.

Главный момент сил инерции направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

6 (б). Применение принципа Даламбера к определению реакций связей.

Тема работы: «Исследование движения механической системы при помощью принципа Даламбера(Д4)».

Срок выполнения: выдача 13 неделя – защита 16 неделя.

Методическое пособие:

Практикум по дисциплине «Теоретическая механика» / А.П. Шевченко, А.В. Крылов, Л.Ф. Метлина, А.О. Веселов. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2007. http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1041/3/00513.pdf

Методические указания к выполнению пункта работы 6 (б):

Дано: $m_1 = 3$ кг; $m_2 = 1$ кг; $m_3 = 2$ кг; $F = 10$ Н; $\rho_3 = 0{,}1$ м; $M = 1{,}2$ Нм; $R_2 = R_3 = 0{,}4$ м; $r_3 = \frac{1}{2} R_3$.

Определить: W_1 – ускорение первого тела, а также натяжение нитей на всех участках.

Р е ш е н и е

Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера.

Построим расчетную схему (рис. Д4), на которой покажем активные силы, реакции связей и приведенные силы инерции. На груз 1 действуют сила $\overline{F}$, сила тяжести $\overline{P}_1$, реакция поверхности $\overline{N}_1$ и равнодействующая сил инерции $\overline{R}_{\text{ин}_1} = -\text{M}\overline{W}_c$, Вектор $\overline{R}_{\text{ин}_1}$ направлен в противоположную сторону вектора $\overline{W}_1$.

На ступенчатый блок 3 действуют сила тяжести $\overline{P}_3$, реакции $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ в шарнире *O*, пара сил M и главный момент сил инерции $\text{M}_0^{\text{ин}} = -J_0 \varepsilon_3$; J_0 – момент инерции ступенчатого блока относительно оси вращения, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка

$$J_0 = m_3 \rho_3^2.$$

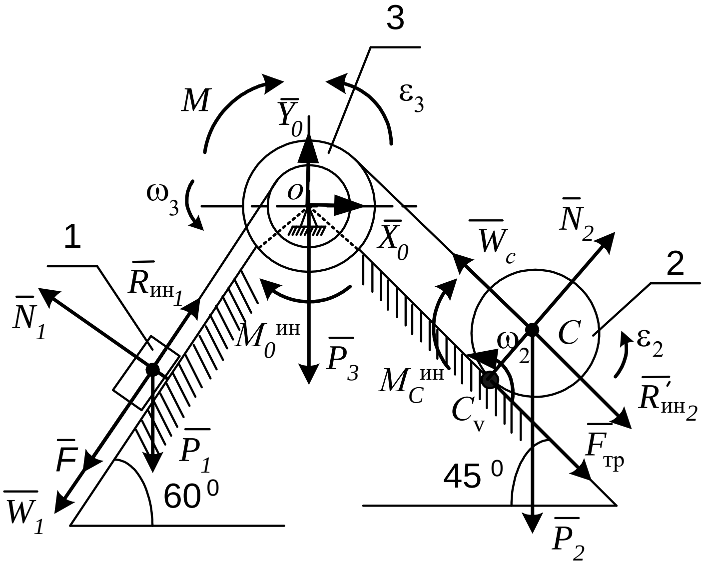


Рис. Д4

Выразим угловое ускорение ступенчатого блока 3 через ускорение первого груза. Зависимость скоростей $\omega_3 = \frac{v_1}{r_3}$, продифференцируем эту формулу по времени $\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{1}{r_3}\frac{dv_1}{dt}$; $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$; $\frac{dv_1}{dt} = W_1$. Получим $\varepsilon_3 = \frac{W_1}{r_3}$. Подставив значение J_0 и ε_3 в уравнение главного момента сил инерции, получим:

$$M_0^{ин} = m_3\rho_3^2\frac{W_1}{r_3}.$$

Главный момент сил инерции направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ступенчатого блока.

На каток 2 действует сила тяжести $\overline{P}_2$, реакция связи $\overline{N}_2$, сила трения $\overline{F}_{TP}$, главный вектор сил инерции $\overline{R}'_{ин2} = -m_2\overline{W}_c$ и главный момент сил инерции $M_c^{ин} = J_c\varepsilon_2$; J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости движения.

Выразим W_c и ε_2 через W_1. Запишем формулы зависимости скоростей тел 1 и 2 (см. задачу Д2).

$$V_c = \frac{V_1R_3}{r_3};\ \omega_2 = \frac{V_1R_3}{r_3R_2}.$$

Дифференцируя эти зависимости по времени, получим:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{R_3dV_1}{r_3dt},\quad W_c = \frac{R_3}{r_3}W_1;$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{R_3 dV_1}{r_3 R_2 dt}; \;\; \varepsilon_2 = \frac{R_3}{r_3 R_2} W_1; \;\; J_c = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Тогда имеем

$$R'_{\text{ин}_2} = m_2 \frac{R_3}{r_3} W_1;$$

$$\text{M}_c^{\text{ин}} = \frac{m_2 R_2^2}{2} \frac{R_3 W_1}{r_3 R_2} = \frac{m_2 R_2 R_3}{2 r_3} W_1.$$

Для определения реакций нитей рассмотрим динамическое равновесие отдельных тел, входящих в систему.

Для каждого тела составим расчетные схемы (рис. Д4 а, б, в).

Задача сводится к определению реакций нити $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ и ускорения первого тела $\overline{W}_1$. Для трех неизвестных величин надо составить три уравнения равновесия.

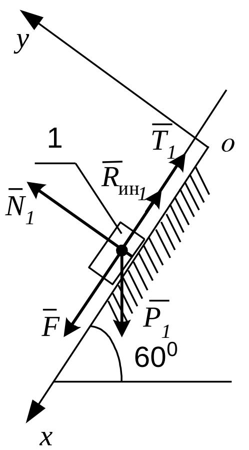


Рис. Д4а

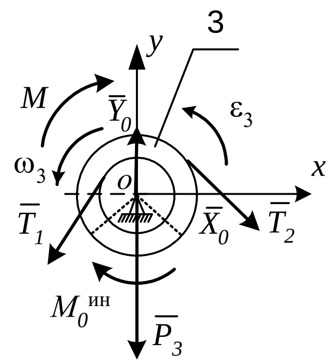


Рис. Д4б

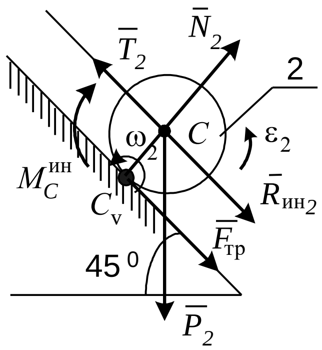


Рис. Д4в

Для тела 1 (рис. Д4 а) составим уравнение $\sum F_{xi} = 0$

$$F + P_1 \cos 30^\circ - R_{\text{ин}_1} - T_1 = 0. \tag{1}$$

Для тела 3 (рис. Д4 б) составим уравнение $\sum \text{M}_0(\overline{F}_i) = 0$

$$T_1 r_3 - T_2 R_3 - M - M_0^{\text{ин}} = 0. \tag{2}$$

Для тела 2 (рис. Д4 в) составим уравнение $\sum M_{CV}(\overline{F}_i) = 0$

$$T_2 R_2 - M_c^{\text{ин}} - R'_{\text{ин}_2} R_2 - P_2 R_2 \cos 45^\circ = 0. \tag{3}$$

Подставив в уравнения (1), (2) и (3) значения приведенных сил инерции, получим:

$$F + m_1 g \cos 30^\circ - m_1 W_1 - T_1 = 0\,,$$

$$T_1 r_3 - T_2 R_3 - M - m_3 \rho_3^2 \frac{W_1}{r_3} = 0\,, \qquad (4)$$

$$T_2 R_2 - \frac{m_2 R_2 R_3}{2r_3} W_1 - m_2 R_2 \frac{R_3}{r_3} W_1 - m_2 g R_2 \cos 45^\circ = 0.$$

Подставив в уравнения (4) все численные значения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 35{,}46 - 3W_1 - T_1 = 0; \\ 0{,}2T_1 - 0{,}4T_2 - 1{,}2 - 0{,}1W_1 = 0; \\ T_2 - 3W_1 - 6{,}93 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, определим W_1, T_1, T_2:

$W_1 = 1{,}642$ м/с^2;

$T_1 = 30{,}534$ Н;

$T_2 = 11{,}856$ Н.

Вопросы для защиты курсовой работы на тему: «Применение принципа Даламбера к определению реакций связей».

1. Сформулируйте тему и задачи работы.

2. Какие допущения приняты при решении задач, поставленных в курсовой работе?

3. Сформулируйте принцип Даламбера для механической системы. Запишите соответствующую формулу.

4. По какой формуле находится равнодействующая сил инерции?

5. В каких случаях силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей сил инерции?

6. Как в данной работе находился главный вектор сил инерции?

7. По какой формуле определяется главный момент сил инерции твердого тела?

8. Как зависит главный вектор сил инерций от характера движения твердого тела?

9. При каком движении твердого тела силы инерции точек тела приводятся к главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции?

10. При каком движении твердого тела силы инерции точек тела приводятся к главному моменту сил инерции?

6 (в). Дифференциальные уравнения Лагранжа. Краткая теория.

Самым совершенным методом исследования движения систем с несколькими степенями свободы в теоретической механике являются уравнения Лагранжа. Они позволяют сравнительно просто составить дифференциальные уравнения, описывающие движение таких систем.

Прежде чем начать решать задачи, следует хорошо разобраться в движениях исследуемой системы, прикинуть с помощью каких параметров, *обобщённых координат*, можно определить положение всех деталей этой системы. Минимальное количество этих параметров, которых достаточно чтобы определить положение системы, называется *числом степеней свободы*. Числу степеней свободы s, соответствует число уравнений.

Если координаты обозначить буквой q, то уравнение Лагранжа записывается так: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, где k – номер координаты, k = 1,2,3,…s. В этой формуле $T = T(q_k, \dot{q}_k)$ - знакомая нам кинетическая энергия системы, $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ - обобщённая скорость, соответствующая k-той координате, Q_k - обобщённая сила, соответствующая k-той координате, то есть для каждой координаты вычисляется своя обобщенная сила. Вычисляется она так. Даём приращение данной координате, увеличиваем её на величину δq_k, оставляя все остальные обобщённые координаты неизменными, находим сумму работ всех активных сил на перемещениях, которые получились, и делим её на приращение δq_k: $Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \Sigma F_i \cdot \delta s_i \cdot \cos\alpha_i$.

6 (в). Применение дифференциального уравнения Лагранжа к исследованию движений механической системы.

Дано: Механическая система (рис. Д5) приводится в движение постоянной силой F = 10 Н.

Масса тел соответственно: m_1 = 3 кг, m_2 =1 кг, m_3 = 2 кг, ρ_3 = 0,1 м (радиус инерции третьего тела); M = 1,2 Нм; $R_2 = R_3$ = 0,4 м; $r_3 = \frac{1}{2} R_3$ (см. рис. Д5).

Каток 2 – сплошной однородный цилиндр. Определить ускорение первого тела *W_1*.

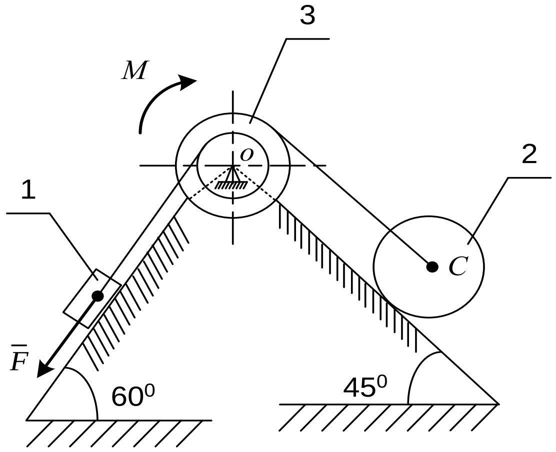


Рис. Д5

Р е ш е н и е

1. Решение задачи с помощью общего уравнения динамики

Построим расчетную схему (рис. Д5а), где покажем задаваемые силы: $\overline{F}$, $\overline{P}_1$ – сила тяжести первого груза, $\overline{P}_2$ – сила тяжести второго груза, $\overline{P}_3$ – сила тяжести третьего груза; реакции внешних связей $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_{тр}$, $\overline{R}_0$; приложим приведенные силы инерции: $\overline{R}_{ин1} = -m_1\overline{W}_1$, $\overline{R}'_{ин2} = -m_2\overline{W}_2$; $M_c^{ин} = -J_c\varepsilon_2$, $M_0^{ин} = -J_c\varepsilon_3$.

Приведенные силы инерции тел зависят от вида их движения тела (см. принцип Даламбера).

Выразим скорости, ускорения, перемещения всех тел через скорость, ускорение и перемещение тела 1.

Угловая скорость третьего тела равна $\omega_3 = \dfrac{V_1}{r_3}$ (нить нерастяжима, все точки нити имеют одинаковые скорости).

Угловое ускорение третьего тела найдем следующим образом:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{1}{r_3}\frac{dV_1}{dt}; \ \frac{dV_1}{dt} = W_1; \ \varepsilon_3 = \frac{W_1}{r_3}.$$

Возможное перемещение $\delta\varphi_3$ блока 3 выразим через возможное перемещение δS_1 первого тела по формуле

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r_3}.$$

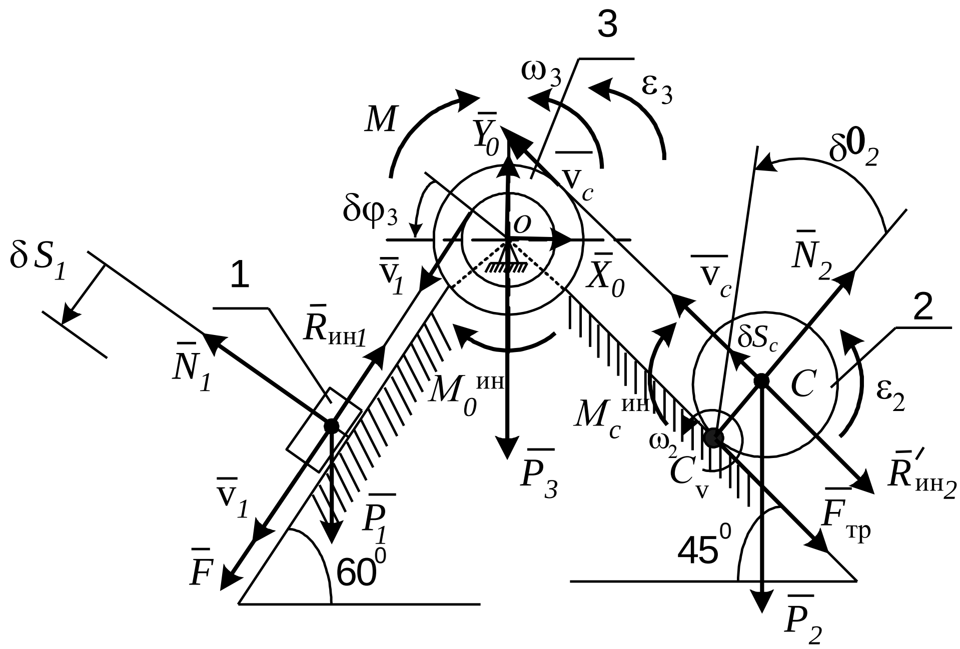


Рис. Д5а

Перейдём ко второму телу

$V_c = \omega_3 R_3;\ V_c = \frac{V_1}{r_3} R_3;\ \frac{dV_c}{dt} = \frac{R_3}{r_3}\frac{dV_1}{dt};\ \frac{dV_c}{dt} = W_c;\ W_c = \frac{R_3}{r_3} W_1,$ где W_c – ускорение центра масс второго тела.

Угловая скорость второго тела $\omega_2 = \frac{V_c}{CC_v} = \frac{V_c}{R_2} = \frac{V_1 R_3}{r_3 R_2}.$

Продифференцировав по времени $\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{R_3}{r_3 R_2}\frac{dV_1}{dt}$, получим:

$$\varepsilon_2 = \frac{R_3}{r_3 R_2} W_1,$$

где ε_2 – угловое ускорение второго тела.

Определим возможное перемещение δS_c центра масс и возможное перемещение $\delta\varphi_2$ катка 2 через возможное перемещение δS_1 первого тела

$$\delta S_c = \delta\varphi_3 R_3 = \frac{\delta S_1 R_3}{r_3}; \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta Sc}{R_2} = \frac{\delta S_1 R_3}{r_3 R_2}.$$

Определим приведенные силы инерции

$$R_{\text{ин}1} = m_1 W_1 = 3W_1 \text{ Н};$$

$$R^{/}_{\text{ин}2} = m_2 W_c = m_2 \frac{R_3}{r_3} W_1 = 2W_1 \text{ Н};$$

$$\text{M}_c^{\text{ин}} = J_c \varepsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \frac{R_3}{r_3 R_2} W_1 = 0{,}4W_1 \text{ Нм}$$

$$\text{M}_0^{\text{ин}} = J_0 \varepsilon_3 = m_3 \rho_3^2 \frac{W_1}{r_3} = 0{,}1W_1 \text{ Нм}$$

Сообщим системе возможное перемещение δS_1 и составим общее уравнение динамики:

$$F\delta S_1 + P_1 \delta S_1 \sin 60^\circ - R_{\text{ин}1}\delta S_1 - \text{M}\delta\varphi_3 - \text{M}_0^{\text{ин}}\delta\varphi_3 - R^{/}_{\text{ин}2}\delta S_2 -$$
$$-\text{M}_c^{\text{ин}}\delta\varphi_2 - P_2 \delta S_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Подставив числовые значения заданных сил и сил инерции, а также значения перемещений, выраженных через δS_1, получим,

$$W_1 = 1{,}655 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $W_1 = 1{,}655$ м/с^2.

2. Решение задачи с помощью уравнения Лагранжа

Данная система имеет одну степень свободы. Поэтому выберем одну обобщенную координату. Так как по условию требуется определить ускорение первого тела, которое совершает поступательное прямолинейное движение, выберем линейную обобщенную координату *x*, следящую за перемещением центра масс этого тела (рис. Д5б).

Запишем уравнение Лагранжа для данной системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

где *T* – кинетическая энергия системы; x – обобщённая координата; $\dot{x}$ – обобщённая скорость ($\dot{x} = V_1$); $Q_x = \dfrac{\sum \delta A_i^e}{\delta x}$ – обобщённая сила; $\sum \delta A_i^e$ –

сумма элементарных работ внешних сил на приращении δx заданной обобщённой координаты.

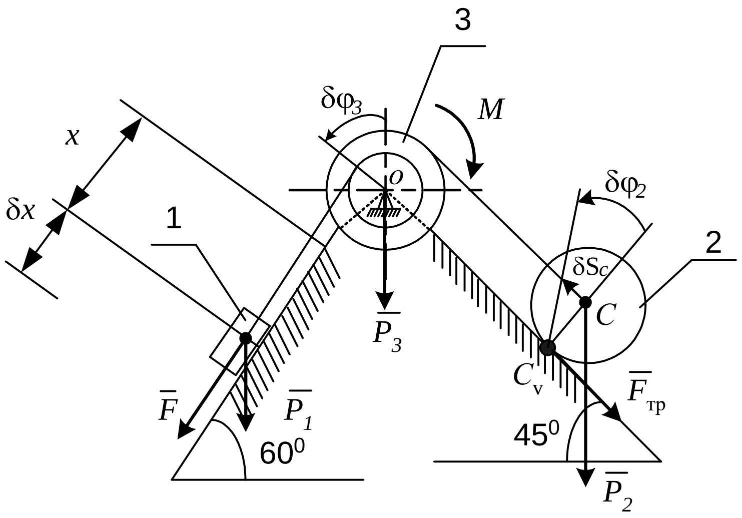


Рис. Д5б

Определяем кинетическую энергию системы, выразив её через обобщенную скорость $\dot{x}$:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1, T_2, T_3 – соответственно кинетические энергии первого, второго и третьего тел. Первое тело совершает поступательное движение, его кинетическая энергия определяется по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2;$$

$$T_1 = 1{,}5\dot{x}^2.$$

Второе тело совершает плоскопараллельное движение

$$T_2 = \frac{1}{2} J_c \omega_2^2 + m_2 V_c^2, \; J_c = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Зависимости скоростей точек системы мы рассматривали выше, когда выполняли это задание с помощью общего уравнения динамики

$$\omega_2 = \frac{V_1 R_3}{r_3 R_2} = \frac{\dot{x} R_3}{r_3 R_2}; \qquad V_c = \frac{V_1 R_3}{r_3} = \frac{\dot{x} R_3}{r_3}.$$

Подставив численные значения известных величин, получим:

$$\omega_2 = 5\dot{x}; \qquad V_c = 2\dot{x}; \qquad J_c = 0{,}08;$$

$$T_2 = 3\dot{x}^2 .$$

Третье тело совершает вращательное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} J_0 \omega_3^2;$$

$$J_0 = m_3 \rho_3^2 = 2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}02;$$

$$\omega_3 = \frac{V_1}{r_3} = \frac{\dot{x}}{r_3} = 5\dot{x},$$

$$T_3 = 0{,}25\dot{x}^2 .$$

Таким образом, кинематическая энергия системы равна

$$T = 1{,}5\dot{x}^2 + 3\dot{x}^2 + 0{,}25\dot{x}^2 = 4{,}75\dot{x}^2 .$$

Дифференцируем полученные выражения согласно уравнению Лагранжа

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 9{,}5\dot{x}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 9{,}5\ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 .$$

Определим обобщённую силу, для этого покажем на рис. Д5б внешние силы: F, M, $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $P_3 = m_3 g$.

Сообщим приращение δx выбранной обобщённой координате x и определим элементарную работу действующих сил

$$\sum \delta A_i^e = F\delta x + P_1 \sin 60^\circ - M\delta\varphi_3 - P_2 \sin 45^\circ \delta S_c,.$$

Выразим $\delta\varphi_3$ и δS_c через δx (см. общее уравнение динамики).

$$\delta S_c = 2\,\delta x \; ; \; \delta\varphi_3 = \delta x \,/ r_3$$

$$\sum \delta A^e = F\delta x + m_1 g \delta x \sin 60^\circ - \mathrm{M} \cdot \delta x / r_3 - m_2 g \cdot 2\delta x \sin 45^\circ .$$

Подставив численные величины, получим:

$$\sum \delta A_i^e = 15{,}721\delta x;$$

$$Q_x = \frac{15{,}721\delta x}{\delta x} = 15{,}721 \text{ Н}.$$

Найденные значения подставим в уравнение Лагранжа

$$9{,}5\ddot{x} = 15{,}721.$$

Следовательно,

$$W_1 = \ddot{x} = \frac{15{,}721}{9{,}5} = 1{,}655 \text{ м/с}^2.$$

Сравнив результаты определения ускорения первого тела различными способами, делаем вывод: расчёт проведен верно.

Контрольные вопросы

1. Дифференциальные уравнения движения точки.
2. Две задачи динамики.
3. Общие теоремы динамики механической системы.
4. Принцип Даламбера.
5. Принцип возможных перемещений.
6. Общее уравнение динамики.
7. Дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода.

7. Образец титульного листа

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

«Владимирский государственный университет

имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

(ВлГУ)

Кафедра «Технология машиностроения»

КУРСОВАЯ РАБОТА

По дисциплине «Теоретическая механика».

Тема: Применение теорем и принципов теоретической механики к исследованию равновесия и движения механической системы.

I. Часть: «Дифференциальное уравнение движения материальной точки».

II. Часть: «Исследование динамики механической системы».

а) Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы.

б) Применение принципа Даламбера к определению реакций связей.

в) Применение дифференциального уравнения Лагранжа к исследованию движения механической системы.

Выполнил:

ст.гр.

Принял:

Шевченко А.П.

Владимир 20____

8. Литература

1. Новожилов А. И. Краткий курс теоретической механики учеб. пособие для вузов / А. И. Новожилов; под ред. В. Н. Филимонова.— Изд. 2-е, перераб. и доп.— Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ), 2006.— 241с.
http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/2816/1/00328.pdf

2. Новожилов**,** А. И. Задачи по теоретической механике. Методика решения: учеб. пособие для вузов / А. И. Новожилов. — Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ), 2009.— 113с.
http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1356/3/00960.pdf

3. Шевченко А.П. Практикум по дисциплине "Теоретическая механика" / А. П. Шевченко [и др.]; под ред. А. П. Шевченко — Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ); 2007 . -115с.
http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1041/3/00513.pdf

4. Теоретическая механика: методические указания к лабораторным работам, составители: А.П. Шевченко, Л.Ф. Метлина. Владим. гос. ун-т – Владимир, 2010 – 94с.
http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1373/3/00776.pdf