Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Институт машиностроения и автомобильного транспорта

Кафедра тепловых двигателей и энергетических установок

Журавлев Сергей Александрович

«Газовая динамика»

Конспект лекций
по дисциплине «Газовая динамика» для студентов ВлГУ,
обучающихся по направлению13.03.03 «Энергетическое машиностроение»

Владимир - 2015 г.

Лекционные занятия являются формой группового, теоретического обучения на основе заранее подготовленного материала, охватывающего основные темы изучаемого курса. Во время проведения занятий студенты получают информацию о ключевых понятиях, лежащих в основе изучаемого материала. Благодаря непосредственному взаимодействию с преподавателем во время занятий у студентов есть возможность углубленного изучения тем и вопросов, понимание которых вызывает определенные затруднения. Информация о научных и практических работах, посвященных теме лекции, дает дополнительную возможность углубленного самостоятельного изучения излагаемого материала.

Темы лекций

№ Пп	Тема. Цели лекции	Наименование занятия
1.	**Тема1.** Предмет газовой динамики. Основные свойства газов **Цель:** Получить представление о целях изучения дисциплины, задачах, решаемых в курсе, взаимосвязи дисциплины с другими областями науки и техники. Изучить основные свойства газов и их особенности.	Предмет газовой динамики. Основные свойства газов
2.	**Тема 2.** Кинематика сжимаемой жидкости (газа) **Цель:** Ознакомиться со способами представления движения сплошной среды. методы визуализации и сравнительного анализа полей параметров движущихся жидкостей. Изучить уравнение неразрывности движущегося газа.	Кинематика сжимаемой жидкости (газа)
3	**Тема 3.** Динамика сжимаемой жидкости **Цель:** Изучить уравнения сохранения момента количества движения идеальной сжимаемой жидкости и вязкого газа, уравнение сохранения энергии	Динамика сжимаемой жидкости

	движущегося газа. Получить представление о моделировании турбулентных течений. Изучить особенности течения газа вблизи твердой поверхности.	
4	**Тема 4.** Специальный вид уравнений гидрогазодинамики **Цель:** Получить представление о модификациях системы уравнений газовой динамики для описания некоторых частных случаев течений газа.	Специальный вид уравнений гидрогазодинамики
5	**Тема 5.** Газовые струи. Двухфазные течения. **Цель:** Изучить особенности решения уравнений газовой динамики для струйных течений. Получить представление об особенностях описания двух и многофазных течений.	Газовые струи. Двухфазные течения.
6	**Тема 6.** Математическое моделирование течений жидкости и газа **Цель:** Получить представление о численных методах решения уравнений газовой динамики.	Математическое моделирование моделирование течений жидкости и газа

Тема1. Предмет газовой динамики. Основные свойства газов

При изучении данной темы рекомендуется пользоваться пособиями [3, 5].

Газоди́на́мика (или **га́зовая дина́мика**) — раздел механики, изучающий законы движения газообразной среды и её взаимодействия с движущимися в ней твёрдыми телами.

В разделе гидроаэромеханики изучаются законы движения воздуха и силы, возникающие на поверхности тел, относительно которых происходит его движение. В аэродинамике рассматривают движение с дозвуковыми скоростями, т. е. в нормальных условиях до 340 м/с (1200 км/ч).

Прикладные задачи аэродинамики:

- распределение давления на поверхности тела;
- определение сил и моментов, действующих на обтекаемое газом тело;
- распределение скоростей в воздушном потоке, обтекающем тело;
- расчёт вентиляции;
- расчет пневмотранспорта.

Основатель аэрогидродинамики Николай Егорович Жуковский.

Газовая динамика возникла как дальнейшее развитие аэродинамики и имеет дело с ситуациями, в которых условия существенно отличаются от нормальных.

Возникновение газовой динамики относится к середине и второй половине XIX века и связано с основополагающими работами Х. Допплера, Г. Римана, Э. Маха, У. Дж. Ранкина. Бурное развитие данный раздел механики переживает в XX веке; среди многих имён учёных, внёсших значительный вклад в развитие газовой динамики, следует назвать:

- Николая Егоровича Жуковского – основоположник современной аэродинамики, «отец русской авиации».

Предмет газовая динамика изучает «макродвижение» жидкости и газообразных сред и их взаимодействие с твердыми телами и не рассматривает «микроструктуру» реальной жидкости или газа, т.е. их молекулярное строение, хаотическое тепловое движение молекул и т.д. При этом жидкость и газ представляют собой «сплошные среды» с непрерывным распределением в них основных физических величин (Гипотеза сплошности).

Разница между макроскопическим представлением о жидкости и о твердом теле, которое в этом случае также является сплошной средой, состоит в легкой подвижности жидкости и газа.

Жидкость (газ) сильно противодействует всестороннему сжатию, и в тоже время слабо сопротивляются относительному скольжению частиц, причем силы противодействия этому скольжению (касательные напряжения) исчезают вместе с относительной скоростью взаимного перемещения частиц.

Основными свойствами макромодели жидкости и газа являются непрерывность (сплошность) и легкая подвижность (текучесть).

Классический идеальный газ.

Объём идеального газа линейно зависит от температуры при постоянном давлении.

Свойства идеального газа на основе молекулярно-кинетических представлений определяются исходя из физической модели идеального газа, в которой приняты следующие допущения:

- диаметр молекулы пренебрежимо мал по сравнению со средним расстоянием между ними.

- импульс передается только при соударениях, то есть силы притяжения между молекулами не учитываются, а силы отталкивания возникают только при соударениях.

- потенциальной энергией взаимодействия молекул можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией. Суммарная энергия частиц газа постоянна, если отсутствует теплопередача и газ не совершает работы.

В этом случае частицы газа движутся независимо друг от друга, давление газа на стенку равно полному импульсу, переданному при столкновении частиц со стенкой в единицу времени, внутренняя энергия — сумме энергий частиц газа.

Модель широко применяется для решения задач термодинамики газов и задач аэрогазодинамики. Например, воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре с большой точностью описывается данной моделью.

Свойства идеального газа описываются уравнением Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

R— универсальная газовая постоянная, m – масса, M – молярная масса.

Реальный газ.

Реальный газ — газ, который не описывается уравнением состояния идеального газа Менделеева — Клапейрона.

Зависимости между его параметрами показывают, что молекулы в реальном газе взаимодействуют между собой и занимают определенный объём. Состояние реального газа часто на практике уравнением состояния газа Ван-дер-Ваальса — уравнение, связывающее основные термодинамические величины в модели газа Ван-дер-Ваальса.

Сжимаемость. Число Маха.

Число́ Ма́ха (M) — один из критериев подобия в механике жидкости и газа. Представляет собой отношение скорости течения в данной точке газового потока к местной скорости распространения звука в движущейся среде — назван по имени австрийского учёного Эрнста Маха (нем. E. Mach)

Число Маха

$$\mathsf{M} = \frac{v}{a},$$

где v — скорость потока, а a — местная скорость звука, является мерой влияния сжимаемости среды в потоке данной скорости на его поведение.

Тема 2. Кинематика сжимаемой жидкости (газа)

При изучении данной темы рекомендуется пользоваться пособиями [3, 5].

Газовая динамика имеет дело с потоками движущейся среды – жидкости или газа, и методы теоретической механики здесь не применимы. При этом важнейшее значение играют характеристики потока в каждой точке, в первую очередь - это скорость, а также давление, плотность через которые можно рассчитать потери энергии в потоке и т.д. Жидкость и газ движутся в трехмерном пространстве, при этом в соответствие с гипотезой сплошности, физические величины изменяются в исследуемой области пространства непрерывно.

Здесь мы приходим к понятию поля физической величины. Совокупность скалярных или векторных величин, заданных в некоторой конечной или бесконечной области так, что каждой точке соответствует одно определенное значение скаляра или вектора, образует поле скалярной или векторной величины.

В потоке жидкости (газа) скалярные поля - давления, температуры, а векторное поле – поле скорости, поле силы.

По отношению к изменению во времени, поле может быть стационарным и нестационарным, а по отношению к изменению в пространстве – однородным и неоднородным.

Аналитически, поле некоторой скалярной величины φ или векторной a задается соответственно, скалярной или векторной функцией в какой-либо системе координат (например, в декартовой) и времени:

$$\varphi = \varphi(x, y, z; t)$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z; t)$$

Если поле стационарно, то переменная t – время – отсутствует.

Рассматривая скалярное поле, расслоим пространство, в котором оно задано «поверхностями уровня». Т.е. такими поверхностями вдоль каждой из которых скалярная величина φ сохраняет одинаковое значение. Такими поверхностями являются, например, изотермы, изобары и др.

Возьмем поверхность уровня в поле со значением величины φ на ней Со:

$$\varphi(x, y, z; t) = C_0$$

Эта поверхность делит все поле на две области – внутреннюю, там где величина φ < Со и внешнюю, там где φ > Со. Соответственно, нормаль в любой точке поверхности уровня, направленная во внешнюю область – это внешняя нормаль, а во внутреннюю область – внутренняя.

Для скалярного поля направление наибольшего изменения величины φ совпадает с нормалью к поверхности уровня n (рис1). В любом другом направлении l скорость изменения величины будет всегда меньше.

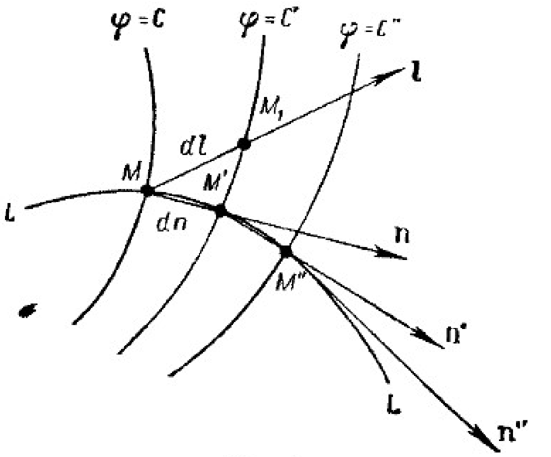


Рис. 1.

Для векторного поля существует понятие «векторная линия поля». Это линия в каждой точке которой, вектор поля направлен по касательной к ней (рис. 2). Обычно через каждую точку поля можно провести только одну векторную линию.

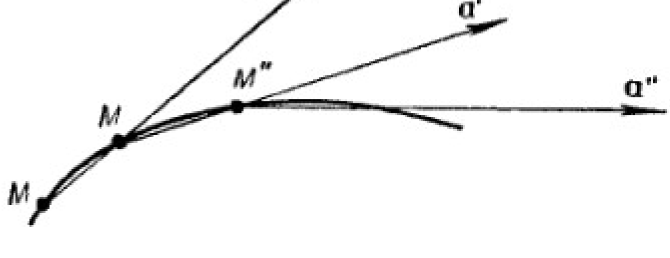


Рис. 2.

Важнейшие характеристики поля:

- градиент;
- дивергенция;
- поток вектора;
- ротор вектора.
- циркуляция вектора.

Градиент является мерой неоднородности скалярного поля.

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \mathbf{n}, \qquad (1)$$

Величина $d\varphi/dn$ – производная скалярной величины φ в направлении n, n – это вектор внешней нормали к поверхности уровня в данной точке. Градиент – вектор.

Неоднородность векторного поля вектора *a* определяется совокупностью девяти величин (производной каждой из трех проекций вектора *a* на каждое из трех направление осей координат – всего 9 величин):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x}, & \frac{\partial a_x}{\partial y}, & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x}, & \frac{\partial a_y}{\partial y}, & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x}, & \frac{\partial a_z}{\partial y}, & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется дифференциальный тензор поля.

Поток векторного поля.

Поток векторного поля через поверхность — поверхностный интеграл по поверхности S. По определению:

$$\Phi_a = \iint_S a \cdot n\, dS$$

a=a(x,y,z,t) – векторное поле, n – единичный вектор положительной нормали к поверхности S, dS - элемент поверхности.

Здесь скалярное произведение *a·n* – это составляющая вектора *a* (а именно, часть длины вектора), которая перпендикулярна поверхности S.

Ротор вектора.

Рассмотрим в данный момент времени поле скорости жидкости в окрестности некоторой точки Mo.

Первая теорема Гельмгольца: всякое движение жидкости или газа в окрестности некоторой точки (полюса) можно разложить на квазитвердое движение, состоящее из поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса, и деформационное движение.

Так полная скорость V с проекциями u, v и w на оси координат, раскладывается:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_{\text{к.т}} + u_{\text{деф}}, \\ v &= v_{\text{к.т}} + v_{\text{деф}}, \\ w &= w_{\text{к.т}} + w_{\text{деф}}. \end{aligned}\right\}$$

Как следует, из первой теоремы Гельмгольца, квазитвердое движением со скоростью Vк.т. состоит из поступательной составляющей и вращательной. Вращательная составляющая определяется вектором угловой скорости ω с проекциями ωx ωy и ωz.

Вектор Ω с проекциями:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_x &= 2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \Omega_y &= 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \Omega_z &= 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\}$$

называется ро́тор, или вихрь — векторный дифференциальный оператор над векторным полем, характеризует вращательную составляющую поля a в каждой точке.

Обозначается: rot a - ротор вектора a

Векторное поле, ротор которого равен нулю в любой точке, называется безвихревым и является потенциальным. Поскольку эти условия являются друг для друга необходимыми и достаточными, оба термина являются практическими синонимами.

Дивергенция.

Деформационная часть поля скорости характеризуется скоростью относительно объемного расширения в данной точке, которую можно определить как предел:

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \frac{d}{dt} (\Delta\tau),$$

где Δτ – малый объем, в котором взята точка. Эта физическая скалярная величина носит название дивергенция (расходимость) скоростного поля и обозначается символом div V, так что можно записать:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \frac{d}{dt} (\Delta\tau).$$

Если выразить изменение элементарного объема за единицу времени, через проекции скорости *a* его движения на оси координат, то получится следующее выражение для дивергенции вектора скорости:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{a}.$$

Дивергенция показывает, насколько расходятся входящий и исходящий поток в окрестности данной точки поля, поэтому, дивергенцию вектора F можно записать:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{\Phi_{\mathbf{F}}}{V}$$

где Φ_F – поток векторного поля F через сферическую поверхность S, ограничивающую объем V точки пространства.

Дивергенция (она же скорость относительного объемного расширения) является критерием для определения сжимаемости жидкости в данном потоке, когда известно поле скорости потока.

Условие постоянства объема несжимаемой жидкости записывается кратко:

$\operatorname{div}\mathbf{v}=0.$

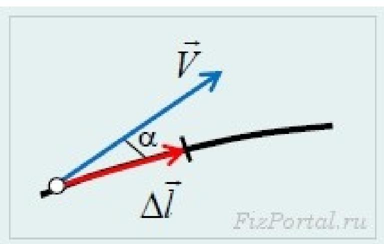
В тех точках, где div v не равна 0 – жидкость претерпевает сжатие или расширение.

Дивергенция очень важное понятие в газовой динамике. Дивергенция вектора скорости численно равна потоку жидкости через поверхность единичного объема. Если жидкость несжимаема, то, естественно, этот поток должен быть равен нулю. Графически последнее интерпретируется как равенство количества входящих и выходящих линий тока для этого объема. Это, в свою очередь, означает, что в окрестности точки, где div v=0, линии тока не прерываются. Поэтому равенство:

div v= 0 - называют *уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости*.

<u>Циркуляция</u> - еще одна характеристика векторного поля, описывающая его вращательную составляющую (или вихревой характер векторного поля в некоторой области).

Рассмотрим произвольную линию, выделим на ней малый участок, определяемый вектором Δl.



Пусть скорость жидкости на этом участке равна V. Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\Delta\Gamma = \vec{V} \cdot \Delta l = V \Delta l \cos\alpha \,,$$

Если просуммировать величину ΔΓ по замкнутой линии и увеличивать количество участков, на которое разбита линия, соответственно величина участка будет уменьшаться, то суммирование заменяется интегралом.

$$\Gamma = \oint_L a \, dl$$

Построенная таким образом математическая конструкция называется циркуляцией вектора скорости по заданному контуру L. Если же выбранный контур лежит в области вихря, то циркуляция вектора скорости будет отлична от нуля. Таким образом, циркуляция определяет присутствие вихревого движения.

Поскольку, ротор вектора и циркуляция вектора, оба характеризуют вращательный (вихревой) характер векторного поля, то между ними существует прямая связь, описываемая формулой Стокса:

$$\oint_L \mathbf{a} \, d\mathbf{l} = \iint_S \mathrm{rot}\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS,$$

Эта формула связывает линейный (по контуру L) и поверхностный (по поверхности S) интегралы.

<u>Задание движения сплошной среды методом Лагранжа и методом Эйлера.</u>

При задании движения сплошной среды методом Лагранжа, задается положение индивидуальной частицы жидкости в виде функции ее координат (x, y и z) от времени t и начального положения x_0 , y_0 и z_0 частицы:

$$x = f_1(t;\ x_0,\ y_0,\ z_0);$$
$$y = f_2(t;\ x_0,\ y_0,\ z_0);$$
$$z = f_3(t;\ x_0,\ y_0,\ z_0);$$

Зная функции f_1, f_2 и f_3, можно найти скорость V и ускорение $\dot{V}$ частицы жидкости:

$$V_x = u = \frac{dx}{dt};$$
$$V_y = v = \frac{dy}{dt},$$
$$V_z = w = \frac{dz}{dt};$$

$$\dot{V}_x = \frac{du}{dt}$$
$$\dot{V}_y = \frac{dv}{dt}$$
$$\dot{V}_z = \frac{dw}{dt}$$

Производную по времени, вычисляемую по методу Лагранжа для индивидуальной частицы жидкости, называют *индивидуальной* или *субстанциональной* (относящейся к определенной частице субстанции).

Более широкое распространение для задач газовой динамики получил метод Эйлера, заключающийся в задании скоростей частиц в функции от времени и координат x, y и z точек пространства, т.е. в задании поля скоростей. Движение сплошной среды методом Эйлера задается так:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,\ y,\ z;\ t), \\ v &= v(x,\ y,\ z;\ t), \\ w &= w(x,\ y,\ z;\ t). \end{aligned}\right\}$$

Изменение скорости в методе Эйлера складывается из двух составляющих:

1. Локального – (местного) изменения происходящего из-за изменения скорости в данной точке вследствие нестационарности и равного:
$$(d\mathbf{V})_{\text{лок}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\,dt,$$

2. Конвективного, являющегося следствием неоднородности поля скоростей, в котором вдоль по траектории переместилась за время dt рассматриваемая частица жидкости. Это изменение будет равно:

$$(d\mathbf{V})_{\text{конв}} = \frac{d\mathbf{V}}{ds}\,ds = \frac{d\mathbf{V}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\,dt = V\frac{d\mathbf{V}}{ds}\,dt,$$

где ds – дифференциал дуги траектории.

Можно записать через оператор набла:

$$(d\mathbf{V})_{\text{конв}} = V\left(\frac{\mathbf{V}}{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}\,dt = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}\,dt.$$

Полное ускорение:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{(d\mathbf{V})_{\text{лок}} + (d\mathbf{V})_{\text{конв}}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}.$$

В проекциях на оси координат:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{V}_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},\\
\dot{V}_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},\\
\dot{V}_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}$$

Если обозначить дифференциальный тензор поля через D, то можно записать полное ускорение в виде:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}D$$

Векторные линии поля скоростей, т.е. такие линии, в каждой точке которых скорость в данный момент времени направлена по касательной к ним, называются *линиями тока*.

Траектория – это пространственный след движущейся частицы. По самому определению, линия тока и траектория в общем случае не совпадают, исключение представляет случай стационарного поля.

Линией отмеченных частиц - называют линию, соединяющую в определенный момент времени все частицы, прошедшие через определенную точку в области движения.

<u>Уравнение неразрывности сжимаемой жидкости</u>.

При течении газов, особенно при больших скоростях, их плотность может заметно меняться во времени и в пространстве. При этом, объем втекающей жидкости может не быть равным объему вытекающей жидкости через замкнутую поверхность. Если такого равенства нет, то масса газа внутри объема (а с ней и плотность) будут со временем меняться. Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости div v= 0 в этом случае становится несправедливым. <u>Уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости</u> базируется на балансе массы газа:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Тема 3. Динамика сжимаемой жидкости (газа)

При изучении данной темы рекомендуется пользоваться пособиями [3, 5, 11].

<u>Стационарное одномерное течение несжимаемой жидкости. Уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости.</u>

Рассмотрим напряжения, возникающие в жидкости, находящейся в поле тяжести или в поле сил инерции, когда сосуд с жидкостью может двигаться с ускорением. Пусть к кубическому элементу жидкости объемом dV=dxdydz приложена внешняя сила FdV (F - сила, приложенная к единице объема жидкости, (рис. 3.1). В результате возникающих внутренних напряжений на нижнюю грань кубика с координатой x и площадью dy*dz в положительном направлении оси x действует сила давления величиной p(x,y,z)dydz, а на верхнюю грань - p(x+dx,y,z)dydz.

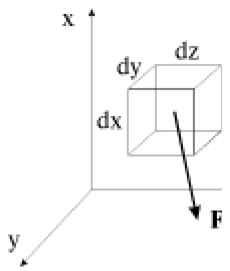


Рис. 3.1.

При равновесии кубика, очевидно, необходимо, чтобы сумма всех сил в проекции на оси координат была = 0:

p(x,y,z)dydz - p(x+dx,y,z)dydz + Fxdxdydz = 0

p(x,y,z)dxdz - p(x,y+dy,z)dxdz + Fydxdydz = 0

p(x,y,z)dxdy - p(x,y,z+dz)dxdy + Fzdxdydz = 0

Разделив левые и правые части записанных выше равенств на объем элемента, и учитывая, что
$$\frac{\mathrm{p(x,y,z)dydz - p(x+dx,y,z)dydz}}{dxdydz} = \frac{\mathrm{p(x,y,z) - p(x+dx,y,z)}}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x},$$

получаем условия равновесия в виде дифференциальных уравнений:
$$-\frac{\partial p}{\partial x} + F_x = 0; -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y = 0; -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z = 0.$$

Если ввести вектор градиента давления grad p, то в более компактном векторном виде уравнение равновесия покоящейся жидкости примет вид:

-grad p + F = 0

Найдем количественную связь между скоростью и давлением. При прямолинейном течении частиц воды вдоль осевой трубки тока сумма сил, приложенных к единице объема, обеспечивают его ускорение, что в соответствии со 2-м законом Ньютона можно записать:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x,$$

где $\rho \frac{dv_x}{dt}$ – полное ускорение элемента жидкости.

Полное ускорение складывается из локальной и конвективной составляющей: $dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx,$

Таким образом, приходим к уравнению Эйлера описывающее одномерное течение несжимаемой невязкой жидкости:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x$$

Для трехмерного течения жидкости уравнение Эйлера:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \mathrm{grad} \right] v = F - \mathrm{grad}\, p$$

Если эти уравнения дополнить условием неразрывности div V = 0 ,то мы получаем полную систему уравнений с четырьмя неизвестными функциями координат и времени (v_x, v_y, v_z и p). Полученные уравнения называются уравнениями Эйлера и позволяют, в принципе, рассчитать динамику жидкости (исследовать движение жидкости под действием сил).

Уравнения Эйлера для сжимаемой жидкости.

Уравнение неразрывности сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (3.1)$$

Динамика сжимаемой жидкости базируется также на 2-м законе Ньютона, записанном для единицы массы жидкости. Равнодействующая сил давления и внешних сил создает ускорение единицы массы, поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \mathrm{grad} \right) v = -\frac{1}{\rho} \mathrm{grad} p + F, \qquad (3.2)$$

, где F - внешняя сила, действующая на единицу массы, v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости на оси X, Y, Z. Для определения 5-ти неизвестных величин (v_x, v_y, v_z, p и ρ) необходимо дополнить уравнением, связывающим плотность и давление:

$$p = p(\rho). \qquad (3.3)$$

Система (3.1) - (3.3) носит название уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости. Если речь идет о потоке газа, то при его быстром сжатии (увеличение плотности) газ будет нагреваться. Из-за плохой теплопроводности газа тепло не будет успевать уходить из нагретых областей. Поэтому для установления материальной связи между p и ρ, можно воспользуемся адиабатическим приближением:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma},$$

где γ - показатель адиабаты.

Движение вязкой жидкости. Закон вязкого трения Ньютона.

Ньютон установил опытным путем, что при скольжении друг относительно друга двух параллельных плоскостей, пространство между которыми заполнено жидкостью, силы вязкого трения препятствуют этому скольжению. Так, при движении со скоростью v верхней плоскости с площадью S относительно нижней, возникает сила вязкого трения, направленная против движения и равная:

$$F_{\tau} = \mu S \frac{v}{h}$$

Эта сила пропорциональна площади S и изменению скорости на единицу длины в поперечном направлении v/h (градиенту скорости в направлении перпендикулярном движению) и зависит также от вязкости жидкости μ.

Ньютоновская жи́дкость (названная так в честь Исаака Ньютона) — вязкая жидкость, подчиняющаяся в своём течении закону вязкого трения Ньютона, то есть в такой жидкости касательное напряжение линейно зависит от градиента скорости. Коэффициент пропорциональности между этими величинами называется вязкость.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

где:

- τ — касательное напряжение, вызываемое жидкостью, Па;
- μ — динамический коэффициент вязкости — коэффициент пропорциональности, Па·с;
- $\frac{\partial u}{\partial y}$ — производная модуля скорости в направлении, перпендикулярном направлению сдвига, $с^{-1}$.

Течение вязкой жидкости. Уравнение Навье-Стокса.

Для анализа течения вязкой жидкости в правую часть уравнения Эйлера движения жидкости (3.2) необходимо добавить силу вязкого трения, приложенную к единице объема жидкости.

При трехмерном течении жидкости сила вязкого трения имеет три компоненты $f_{\tau} = \{f_{\tau_x}, f_{\tau_y}, f_{\tau_z}\}$, где

$$f_{\tau_x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = \mu\Delta v_x$$
$$f_{\tau_y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) = \mu\Delta v_y \qquad (3.4)$$
$$f_{\tau_z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) = \mu\Delta v_z$$

В (3.4) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Если теперь компоненты силы трения (3.4) подставить в правые части уравнений (3.2) для соответствующих компонент скоростей, то мы получим систему уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Эти три уравнения могут быть записаны в виде одного векторного уравнения

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\right]\mathbf{v} = \mathbf{F} - \mathrm{grad}\,p + \mu\Delta\mathbf{v} \qquad (3.5)$$

Уравнение (3.5) называется уравнением Навье-Стокса и является основным при расчете движения вязкой несжимаемой жидкости. Однако в общем случае оно не решается методами современной математики, и на практике приходится ограничиваться решением лишь частных задач.

Ламинарное и турбулентное течение.

Обратимся к вопросу об устойчивости течения жидкости по трубам. С этой целью поставим следующий эксперимент. Пусть жидкость вытекает из сосуда через горизонтальную стеклянную трубку (рис. 3.2). Для контроля за характером течения будем при помощи капилляра впускать ту же, но окрашенную жидкость во входное сечение трубки.

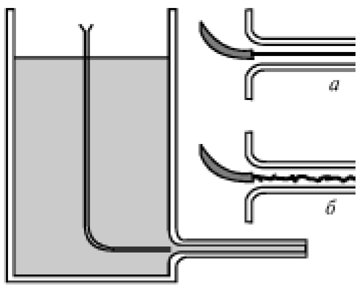


Рис. 3.2.

В случае малого поперечного сечения трубы и не очень большой скорости течения окрашенная струйка движется прямолинейно строго вдоль оси трубы (на рис. 3.2а). При большем сечении или при удвоении скорости появляется нерегулярное движение, когда струйка разбивается на множество извилистых струек (рис. 3.2б). В первом случае движение называется слоистым, или ламинарным, а во втором случае - турбулентным. При ламинарном течении силы вязкости сглаживают боковые движения жидкости, возникающие вследствие различных неровностей стенок трубы. Инерция жидкости стремится сохранить боковые движения жидкости, способствуя тем самым турбулентности. Переход от ламинарного к турбулентному течению происходит при некотором числе Рейнольдса, получившего название критического:

$$\mathrm{Re} = \left(\frac{\rho v R}{\mu}\right)_{\text{кр}}. \quad (3.6)$$

Его значение сильно зависит от формы входной части трубы. Область критических чисел Re $_{\text{кр}}$ лежит между значениями 1200 (незакругленный вход) и 20000 (закругленный вход).

При стационарном турбулентном течении:

- Скорость в данной точке случайным образом меняется во времени, однако среднее значение вектора скорости <v> направлено вдоль оси трубы.

- Средняя скорость остается постоянной по сечению трубы, и только в очень тонком пограничном слое спадает до нуля у стенок трубы.

При турбулентном течении падение давления на участке трубы пропорционально квадрату скорости, а при ламинарном течении - скорости в первой степени.

Лобовое сопротивление. Пограничный слой

Поток реальной жидкости газа действует с некоторой силой на тело, помещенное в этот поток. Силу, действующую на тело со стороны потока жидкости, можно разложить на две составляющие: в направлении потока F_{II} и перпендикулярную потоку $F\perp$.

Сила F_{II} называется силой лобового сопротивления, а $F\perp$ - подъемной силой.

Сила лобового сопротивления складывается из двух различных сил – силы разности давлений на переднюю и заднюю поверхности тела и из вязких сил трения.

На рис. 3.3. изображена сила лобового сопротивления как функция числа Рейнольдса.

Участок I. При малых скоростях движения, когда $\mathrm{Re} \le 10^2, F_{||} \sim v$. Это происходит потому, что на шарик действуют силы вязкости, возникающие из-за существования тонкого пограничного слоя вблизи поверхности шара. При таких скоростях в слое происходит ламинарное (слоистое) течение жидкости.

Пограничный слой – это область течения близи стенки, где скорость меньше, чем скорость основного потока.

В конце линейного участка кривой (рис. 4.21), где Re$\cong$102, толщина пограничного слоя с ламинарным течением на порядок меньше радиуса шара. Вне этого слоя реальная жидкость течет так же, как и идеальная, симметрично спереди и сзади обтекая шар. (рис. 4.21б). Давление в т.А = давлению в т.А' , т.к. скорости потока v в этих точках равны по модулю. Согласно уравнению Бернулли для трубки тока огибающей поверхность шара: p0+ρv02/2= p+ρv2/2 . Здесь p0 и p статическое давление в точках А и А' (они равны между собой), а ρv02/2 и ρv2/2 – динамическое давление в этих точках соответственно. Если равны скорости газа v и v0 на поверхности шара в точках А и А', то равны и полные давления.

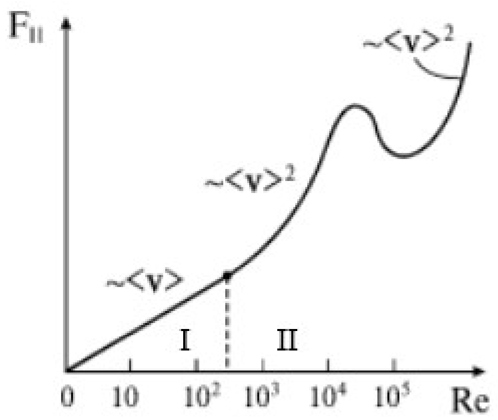


Рис. 3.3

Участок II. При скоростях потока, когда Re>102 симметрия обтекания нарушается - позади шара происходит отрыв линий тока. При таких скоростях пограничный слой становится очень тонким, а поперечные градиенты скорости в нем - большими. Силы вязкости, которые при этом возрастают, тормозят движение частиц воздуха, движущихся вдоль поверхности шара, а также с учетом сил инерции набегающего воздушного потока, трубки тока не в состоянии обогнуть полностью шар с обратной стороны. Это явление называется отрывом пограничного слоя.

На практике силу лобового сопротивления записывают в виде

$$F_{||} = C_X \cdot S\frac{\rho v^2}{2}, \qquad (3.7)$$

где C_X - коэффициент лобового сопротивления тела данной формы.

Область квадратичной зависимости силы $F_{||}$ от скорости v простирается вплоть до чисел Рейнольдса Re~10^5. При больших скоростях постепенно турбулизируется пограничный слой и при Re=3*10^5 пограничный слой полностью турбулентен. В области постепенной турбулизации пограничного слоя сила сопротивления с ростом скорости даже уменьшается, поскольку сокращается область срыва потока. Однако затем квадратичная зависимость (3.7) опять восстанавливается, но с несколько меньшим коэффициентом C_X.

Модели турбулентности.

В настоящий момент создано большое количество разнообразных моделей для расчёта турбулентных течений. Они отличаются друг от друга сложностью решения и точностью описания течения.

Ниже перечислены модели по возрастанию сложности. Основная идея моделей сводится к предположению о существовании средней скорости потока и среднего отклонения от нее (или пульсационная составляющая): $u = \bar{u} + u'$.

При этом, реальное турбулентное течение можно условно разделить на две части: установившееся (со слоистой структурой) наподобие ламинарного течения; пульсационное (определяемое перемещением «обломков ламинарного течения» - турбулентных вихрей), которое происходит произвольным образом в пространстве (это подход Рейнольдса к исследованию турбулентных течений).

В ламинарном течении под действием вязких напряжений, обусловленных молекулярной вязкостью, кинетическая энергия среднего течения превращается непосредственно во внутреннюю тепловую энергию(диссипация). В турбулентном течении вихри отбирают энергию из среднего течения и сохраняют ее некоторое время,

пока она не перейдет к мелким диссипативным вихрям. Кинетическая энергия турбулентности, приходящаяся на единицу объема 1/2ú(u2 +v2 +w2), сосредоточена в вихрях, создающих турбулентные напряжения, и распределена прямо пропорционально создаваемым напряжениям.

После упрощения уравнений Навье — Стокса, в них помимо неизвестных средних скоростей появляются произведения средних отклонений. Различные модели по-разному их моделируют. Перечисленные ниже модели применяются в различных инженерных расчётах в зависимости от необходимой точности. Практически все они реализованы в современных программах расчёта гидродинамических течений, таких как Autodesk Simulation CFD, Fluent, CFX или OpenFOAM.

* Модель Буссинеска (Boussinesq).

* k-e модель турбелентности. Для описания турбулентных величин в ней используется система двух уравнений - для массовой плотности турбулентной энергии k и скорости диссипации (диссипация – рассеивание, переход энергии упорядоченных процессов, например, кинетической энергии движущегося тела в энергию неупорядоченных процессов, в конечном итоге – в тепло) турбулентной

энергии ε. Наиболее часто используемая модель при решении реальных инженерных задач.

* Модель напряжений Рейнольдса.

* Метод крупных вихрей (LES, large eddy simulation).

* Прямое численное моделирование (DNS, direct numerical simulation) Дополнительных уравнений нет. Решаются нестационарные уравнения Навье — Стокса с очень мелким шагом по времени, на мелкой пространственной сетке. Данный подход, по сути, не является моделью – это прямое моделирование турбулентного течения. Требует очень больших вычислительных ресурсов (суперкомпьютеры).

Области применения, для которых получены постоянные в моделях на основе сравнения результатов расчёта с экспериментами, ограничены.

Тема 4. Специальный вид уравнений гидрогазодинамики.

При изучении данной темы рекомендуется пользоваться пособиями [3, 5].

Уравнение (3.5) называется уравнением Навье-Стокса и является основным при расчете движения вязкой несжимаемой жидкости. Однако в общем случае оно не решается методами современной математики, и на практике приходится ограничиваться решением лишь частных задач.

Основные свойства системы Навье — Стокса:

1. При превышении числа Рейнольдса некоторой критической величины аналитическое точное решение для пространственного или плоского потока даёт хаотический вид течения (так называемая турбулентность). При уменьшении числа Рейнольдса ниже критического решение опять дает нехаотический вид течения.

2. Исключительная чувствительность к изменению коэффициентов уравнения при турбулентном режиме: при изменении числа Re на 0,05 % решения совершенно отличаются друг от друга.

Некоторые точные решения уравнения Навье-Стокса:

1. Течение невязкой несжимаемой жидкости, подчиняющееся уравнению Бернулли.
2. Течение Пуазейля.
3. Течение Куэтта.

Закон (уравнение) Бернулли является следствием закона сохранения энергии для стационарного потока идеальной (то есть без внутреннего трения) несжимаемой жидкости:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \mathrm{const}$$

Здесь

ρ — плотность жидкости,

v — скорость потока,

h — высота, на которой находится рассматриваемый элемент жидкости,

p — давление в точке пространства, где расположен центр массы рассматриваемого элемента жидкости,

g — ускорение свободного падения.

Течение Пуазейля — ламинарное течение жидкости через каналы в виде прямого кругового цилиндра или слоя между параллельными плоскостями, описывается законом Пуазейля (Хагена — Пуазейля).

Рассматривается установившееся течение несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью в тонкой цилиндрической трубке круглого сечения под действием постоянной разности давлений. Если предположить, что течение будет ламинарным и одномерным (иметь только компоненту скорости, направленную вдоль канала), то уравнение решается аналитически, и для скорости получается параболический профиль (часто называемый профилем Пуазейля) — распределение скорости в зависимости от расстояния до оси канала:

$$v\left(r\right) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2),$$

где

v — скорость жидкости вдоль трубопровода;

r — расстояние от оси трубопровода;

R — радиус трубопровода;

$p_1 - p_2$ — разность давлений на входе и на выходе из трубы;

η — вязкость жидкости;

L — длина трубы.

Такой же профиль в соответствующих обозначениях имеет скорость при течении между двумя бесконечными параллельными плоскостями. Такое течение также называют течением Пуазёйля.

Уравнение или закон Пуазейля — закон, определяющий расход жидкости при установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости в тонкой цилиндрической трубе круглого сечения. Согласно закону, секундный объёмный расход жидкости пропорционален перепаду давления на единицу длины трубки (градиенту давления в трубе) и четвёртой степени радиуса (диаметра) трубы:

$$Q = \int_S v\,(r)\,dS = 2\pi \int_0^R v\,(r)\,rdr = \frac{\pi D^4(p_1 - p_2)}{128\eta L} = \frac{\pi R^4(p_1 - p_2)}{8\eta L},$$

где

Q — расход жидкости в трубопроводе;

D — диаметр трубопровода;

Закон Пуазейля работает только при ламинарном течении и при условии, что длина трубки превышает так называемую длину начального участка, необходимую для развития ламинарного течения в трубке.

Свойства течения Пуазейля:

1. Течение Пуазейля характеризуется параболическим распределением скорости по радиусу трубки.

2. В каждом поперечном сечении трубки средняя скорость вдвое меньше максимальной скорости в этом сечении.

Течение Куэтта — ламинарное течение вязкой жидкости между двумя параллельными стенками (не обязательно прямолинейными), одна из которых двигается относительно другой. Течение происходит под действием сил вязкого трения, действующих на жидкость и сдвигового напряжения, параллельного стенкам.

Рассмотрим две параллельные прямолинейные стенки, расположенные на расстоянии h друг от друга. Пусть движется одна из них, например верхняя, и скорость движения u_0 — постоянна, движение происходит в плоскости стенки. Если принять давление в жидкости постоянным (градиент давления отсутствует), то из уравнений Навье-Стокса следует соотношение:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

где y — поперечная направлению течения пространственная координата и u (y) — скорость жидкости. Уравнение получено в предположении, что возникающее в рассматриваемом случае течение является одномерным — отлична от нуля только одна (продольная) компонента скорости из трёх (u, v, w). Если начало координат находится на нижней стенке, то граничные условия для этой компоненты принимают вид u(0) = 0 и u(h) = u0.

Точное решение вышеприведенного уравнения движения с учётом граничных условий есть:

$$u(y) = u_0 \frac{y}{h}$$

Важной особенностью этой модели является постоянство касательного напряжения во всей области, занимаемой жидкостью.

Тема 5. Газовые струи. Двухфазные течения.

При изучении данной темы рекомендуется пользоваться пособиями [3, 5, 6].

Во многих случаях движения жидкости и газа возникают так называемые поверхности тангенциального разрыва. Течение жидкости по обе стороны такой поверхности называются струями. В зависимости от относительного направления движения струи могут быть спутными или встречными. Тангенциальный разрыв терпят такие параметры, как скорость, температура, концентрация примеси, распределение статического давления остается непрерывным.

Другое определение струи – струей называют поток жидкости, не ограниченный стенками, движущийся в массе такой же или другой жидкости. Если движение происходит в массе такой же жидкости, то струя называется – затопленная, а если в массе другой жидкости (или газе), то – двухфазная.

Поверхность тангенциального разрыва неустойчива, в связи с этим, на ней возникают вихри, беспорядочно движущиеся вдоль и поперек потока. Вследствие этого между соседними струями происходит обмен конечными массами (молями), т.е. поперечный перенос количества движения, тепла и примесей. В результате, на границе двух струй сформировывается область конечной толщины с непрерывным распределением скорости, температуры и концентрации примесей. Эта область называется струйным турбулентным пограничным слоем.

Наиболее изученным видом турбулентной струи является затопленная струя.

Схема затопленной струи представлена на рис. 5.1.

Потенциальное ядро струи – область струи, где скорость постоянна и равна начальной скорости потока u_0 на выходе из отверстия. Ядро потенциальное, т.к. вектор скорости постоянный (поле скорости однородное).

Начальный участок струи – участок, содержащий ядро струи. После него идет небольшой по протяженности переходный участок, а затем основной участок струи. На начальном участке скорость постоянна и равна начальной скорости, а на основном участке – она убывает вдоль оси струи.

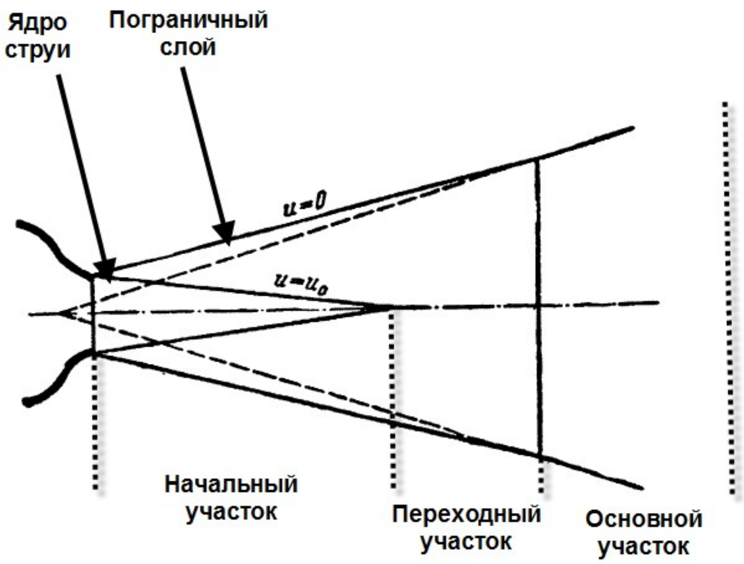


Рис. 5.1

Иногда переходный участок струи не рассматривают.

С внешней стороны пограничный слой струи соприкасается с неподвижной жидкостью, причем под внешней границей понимают поверхность, во всех точках которой составляющая скорости по оси x равна нулю (u=0). С внутренней стороны пограничный слой переходит в ядро струи постоянной скорости, поэтому, на внутренней границе пограничного слоя скорость потока равна скорости истечения ($u=u_0$).

Вид двухфазной струи зависит от свойств жидкости (вязкость, плотность, сила поверхностного натяжения), а также от скорости ее истечения.

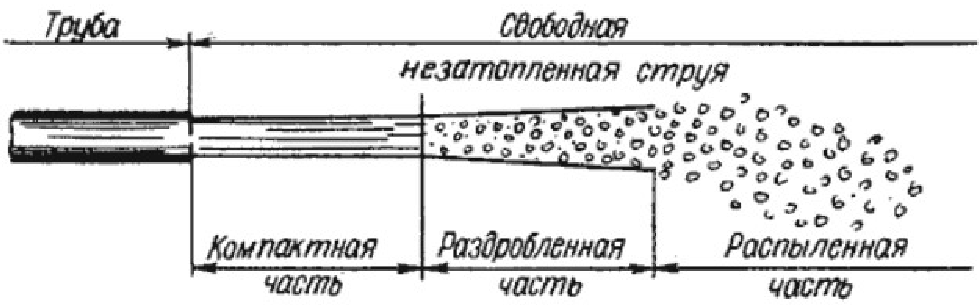


Рис. 5.2

Составные части свободной струи жидкости, истекающей в атмосферу представлены на рис. 5.2.

В общем случае, струя может быть разбита на три характерные части: компактную, раздробленную и распыленную. В пределах компактной части сохраняется цилиндрическая форма струи без нарушения сплошности движения. В пределах раздробленной части сплошность потока нарушается, причем струя постепенно расширяется. Наконец, в пределах распыленной части струи происходит окончательный распад потока на отдельные капли.

Если вытекающая из отверстия или насадка струя попадает на неподвижную стенку, то она с определенным давлением воздействует на нее. Основное уравнение, по которому вычисляется давление струи на площадку, имеет вид

$$P = \frac{\gamma}{g} Q \upsilon$$

Здесь $\gamma = \rho g$, - удельный вес жидкости (Н/м^3), где ρ — плотность вещества, g — ускорение свободного падения.

В процессе истечения струй запас потенциальной энергии, которым обладает жидкость, находящаяся в резервуаре, превращается в кинетическую энергию струи. Основными величинами, которыми оценивается процесс истечения, являются скорость струи, расход жидкости, коэффициент сжатия струи, коэффициент расхода и коэффициент сопротивления.

Коэффициентом сжатия струи:

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_o} = \left(\frac{d_c}{d_o}\right)^2$$

где Sc и So - площади поперечного сечения струи и отверстия соответственно; dc и do - диаметры струи и отверстия соответственно.

Скорость истечения жидкости через отверстие:

$$\upsilon = \varphi\sqrt{2gH}$$

где H - напор жидкости, определяется как

$$H = H_0 + \frac{P_0 - P_1}{\rho g}$$

φ- коэффициент скорости

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$$

где α - коэффициент Кориолиса;

ζ- коэффициент сопротивления отверстия.

Коэффициент Кориолиса характеризует неравномерность распределения скорости по сечению потока. Обычно, α = 1,03 … 1,10. Если скорость по сечению потока не меняется, то α = 1.

Расход жидкости определяется как произведение действительной скорости истечения на фактическую площадь сечения:

$$Q = S_c \upsilon = \underbrace{\varepsilon S_o}_{S_c} \underbrace{\varphi\sqrt{2gH}}_{\upsilon}$$

Произведение ε и φ принято обозначать буквой μ и называть коэффициентом расхода, т.е. $\mu = \varepsilon\varphi$.

В итоге получаем расход

$$Q = \mu S_o \sqrt{2gH} = \mu S_o \sqrt{2\frac{\Delta P}{\rho}}$$

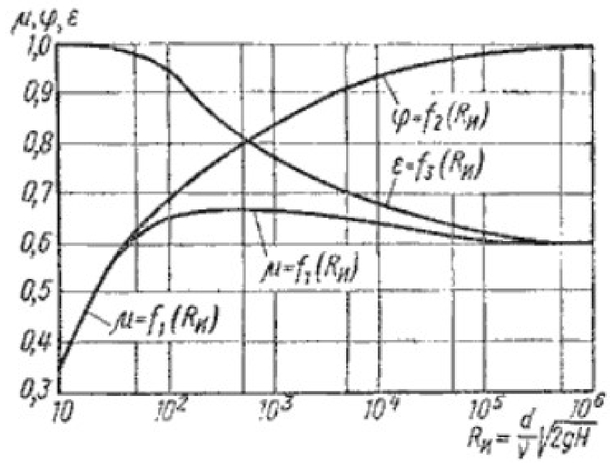
где ΔP - расчетная разность давлений, под действием которой происходит истечение.

При помощи этого выражения решается основная задача - определяется расход.

Значение коэффициента сжатия ε, сопротивления ζ, скорости φ и расхода μ для круглого отверстия можно определить по эмпирически построенным зависимостям. На рис.5.3 показаны зависимости коэффициентов ε, ζ и μ от числа Рейнольдса, подсчитанного для идеальной скорости

$$\mathrm{Re}_u = \frac{d\sqrt{2gH}}{\nu}$$

где ν - кинематическая вязкость.



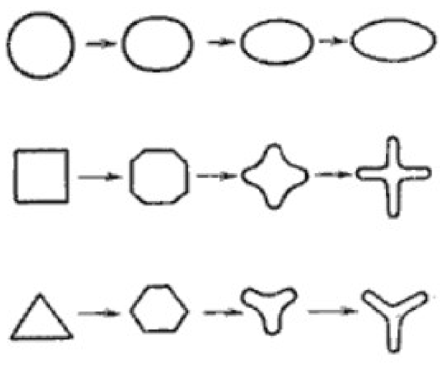


Рис. 5.3. Зависимость ε, φ и от числа Reu

Рис. 5.4. Инверсия струй

При истечении струи в атмосферу из малого отверстия в тонкой стенке происходит изменение формы струи по ее длине, называемое инверсией струи (рис.5.4). Обуславливается это явление в основном действием сил поверхностного натяжения на вытекающие криволинейные струйки и различными условиями сжатия по периметру отверстия. Инверсия больше всего проявляется при истечении из некруглых отверстий.

Тема 6. Математическое моделирование течений жидкости и газа.

При изучении данной темы рекомендуется пользоваться пособиями [3, 4, 5, 7, 8, 12, 13].

Течение газа в практических задачах газовой динамики сопровождается сложными явлениями: нестационарностью и пространственной неоднородностью, резким изменением параметров газа в скачках уплотнения, изменением свойств газа и т. д.

Сложность физических явлений и происходящих процессов в газе определяет и сложную математическую модель — систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими дополнительными (начальными и граничными) условиями.

Аналитические методы исследования уравнений газовой динамики развиваются давно, но несмотря на это существует ограниченное число задач, которые могут быть решены аналитически. Круг решаемых задач значительно расширился в связи с применением электронных вычислительных машин (ЭВМ) и развитием численных методов исследования, которые позволяют получить решение с заданной степенью точности и обладают большей универсальностью, чем аналитические методы. Аналитические решения, получаемые обычно для упрощенного варианта задачи, позволяют понять физическую сущность явления и его зависимость от характерных параметров, а кроме того, выполняют роль тестов при отработке численного алгоритма на ЭВМ. Точность аналитических и численных методов проверяется путем сопоставления решений с результатами экспериментов. Таким образом, в газовой динамике численные, аналитические и экспериментальные методы должны разумным образом сочетаться и дополнять друг друга.

Программы:

Специальные для газогидродинамики – Flow Vision, CFD

Универсальные (расчеты на прочность, электромагнитные расчеты, газовая динамика и др.) – ANSYS, ABAQUS и др.

Приложения к СФВ системам – Flow Works, EFD.Flow – разработаны в России, но не имеют русскоязычной документации.

В результате аналитического решения находится непрерывная искомая функция (например, функция скорости от координат и времени v=f(x,y,z,t) в расчетной области), а в результате численного решения – дискретный набор значений этой функции (с определенной точностью) в заданных точках расчетной области (или ячейках в зависимости от метода).

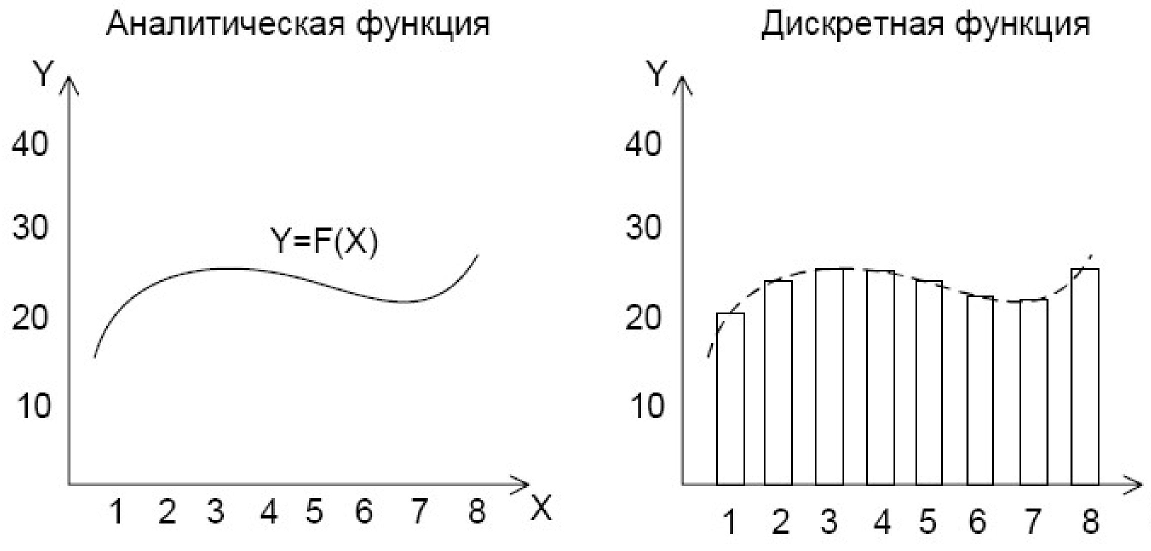


Рис. Аналитическая и дискретная функция

Можно выделить три основных подхода к решению дифференциальных и интегральных уравнений движения и теплообмена текучей среды:

- Метод конечных разностей для решения дифференциальных уравнений, являющийся, по существу, прямым следствием определения производной в используемой системе координат на соответствующей ей координатной расчетной сетке, впервые примененный Эйлером около 240 лет назад и успешно используемый в некоторых приложениях до настоящего времени.
- Метод конечных элементов, разработанный в 40...60-х годах прошлого века для решения интегродифференциальных уравнений напряженно-деформированного состояния твердых материалов в задачах структурной
- Метод конечных объемов, различные варианты которого были впервые разработаны в России в 50...70-х годах (метод Годунова [2,5], интегро-интерполяционные методы [12]) и за рубежом в начале 1970-х годов прошлого века ([25, 27], см. также обзор в [23]), краткое описание которого,

Обычно, для задач течения жидкости и газа используется метод конечных объемов, в котором реализуется подход Эйлера к описанию движения сплошной среды, а для задач расчета на прочность (вычисление напряжений и деформаций в твердом теле) используется метод конечных элементов, в котором используется подход Лагранжа к описанию движения (деформации) сплошного тела.

зуется подход Эйлера, т. е. рассматривается течение в выделенной области пространства, — в отличие от подхода Лагранжа, согласно которому рассматривается движение в пространстве выделенной области (массы) текучей среды (этот подход часто используется для расчета движения инородных частиц в текучей среде).

Метод конечных объемов является частным, причем более простым и быстродействующим, вариантом метода конечных элементов.

При численном моделировании, движение и теплообмен текучей среды моделируется с помощью:

- уравнений Навье-Стокса, описывающих законы сохранения массы, импульса и энергии этой среды;
- уравнений состояния компонентов текучей среды (если в области движется не одна жидкость, а смесь);

- эмпирические зависимости вязкости и теплопроводности компонентов среды от температуры.

<u>Порядок решения методом конечных объемов:</u>

1. Задаются свойства жидкости (газа).

2. Область течения разбивается на большое количество элементарных объемов, их совокупность называется расчетной сеткой. В методе конечных объемов

к способу дискретизации пространства расчетной области никаких особенных требований, за исключением естественного требования достаточного разрешения особенностей течения и геометрии поверхностей твердых тел (особенно в областях их нелинейного изменения), не предъявляется, т. е. расчетная сетка может быть любой:

O *структурированной,* т. е. образованной, как в методе конечных разностей, координатными линиями (система координат может быть любой: декартовой, криволинейной), так что узлы этой сетки могут быть пронумерованы с помощью целочисленных векторов, размерность которых зависит от размерности системы координат;

G *неструктурированной,* т. е. совершенно произвольной, как в методе конечных элементов, например, состоящей из неправильных тетраэдров (пирамид) и/или гексаэдров (6-гранников) в трехмерном случае, система узлов граней которых никак не связана с системой координат, т. е. с координатными линиями, так что узлы этой сетки могут быть пронумерованы лишь с помощью сквозной нумерации (т. е. все подряд).

Преимущество структурированных сеток состоит в том, что с ними легче работать при проведении расчетов, а неструктурированных в том, что они позволяют лучше разрешать (описывать) сложные формы геометрии поверхностей твердых тел, каналов, ограничивающих течение газа и областей нелинейного изменения параметров течения.

где именно определять дискретное решение задачи. В методе конечных объемов возможны два варианта определения местоположения искомого дискретного решения задачи (значений независимых переменных уравнений):

- в узлах расчетной сетки, т. е. как в методе конечных разностей;
- в ячейках расчетной сетки, т. е. как среднее по ячейке, без строгого определения той точки, к которой это решение может быть приписано (для дальнейшего получения непрерывного решения из дискретного с помощью интерполяции, т. е. аналогично тому, как это делается в случае определения дискретного решения в узлах расчетной сетки: полученное дискретное решение приписывают к центру ячейки, что, строго говоря, весьма условно) — этот способ является частным вариантом используемого в методе конечных элементов способа, согласно которому решение внутри ячейки представляется с помощью набора базисных функций от решений в узлах.

3. Задаются начальные и граничные условия в расчетной области.

4.

❐ Для нахождения этого решения используется дискретизация записанных в интегральной форме законов сохранения массы, импульса, энергии текучей среды по поверхности контрольного объема, в качестве которого выбирается:

- если решение дискретизируется по узлам расчетной сетки, — поверхность, "натянутая" на узлы расчетной сетки, лежащие по соседству с рассматриваемым узлом;
- если решение дискретизируется по ячейкам расчетной сетки, — поверхность рассматриваемой ячейки расчетной сетки.

Чтобы привести систему уравнений (2.2.1) к дискретному, т. е. алгебраическому виду, она записывается для контрольных объемов, окружающих местоположения дискретного решения.

При дискретизации интеграл заменяется суммой, а дифференциал заменяется разностной аппроксимацией.

Пример замены дифференциальных уравнений алгебраическими.

Рассмотрим простейшие примеры. Обозначим $\Lambda_x u$ разностную аппроксимацию производной $\partial u/\partial x$. Разностная аппроксимация может быть введена несколькими способами:

$\Lambda_x^+ u = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h}$ — правая разностная производная (производная вперед);

$\Lambda_x^- u = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$ — левая разностная производная (производная назад);

$\Lambda_x^0 u = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ — центральная разностная производная.

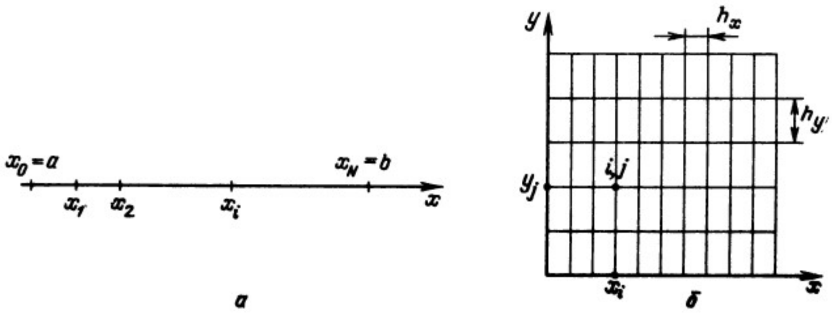


Рис. 14.1. Примеры сеток: *а*) равномерная сетка на отрезке, *б*) равномерная сетка на плоскости

Начальные и граничные условия

Для привязки математической модели к конкретной физической задаче и к области пространства, в которой она решается **необходимо** задать начальные и граничные условия.

Начальные условия – это значения физических параметров в начале расчета:
- параметров текучей среды в расчетной области (поля скорости, давления, температуры, плотности и т.д.);
- параметры твердого тела контактирующего с текучей средой, если рассчитывается теплопередача в твердом теле, а также между жидкостью и телом.

Необходимость задания начальных условий, вытекает из нестационарности используемой

математической модели, т. е. ее основных уравнений (5.1—5.3, 5.10). Если задача нестационарная, и ее решение не является периодическим, то начальные условия, наряду с граничными, определяют решение задачи, т. е. не могут быть произвольными, а должны в точности соответствовать поставленной задаче (в определенном смысле их можно рассматривать как граничное условие во времени). Если задача стационарная или нестационарная, но с периодическим решением, то ее решение считается найденным после его установления во времени — в этом случае в задании начальных условий имеется определенный произвол (степень этого произвола зависит от задачи, но в любом случае начальные условия должны быть физически корректными; некоторые задачи могут иметь несколько стационарных решений, соответствующих разным областям значений начальных условий), так что от начальных условий зависит не решение задачи, а скорость нахождения этого решения (чем ближе начальные условия к решению, тем быстрее это решение будет найдено).

Типичные граничные условия – это:

1. Параметры текучей среды на входных и выходных отверстиях модели:

- массовый или объемный расход, и если отверстие входное, то профиль скорости, температура, параметры турбулентности и пограничного слоя, а также концентрации компонентов многокомпонентной среды;
- скорость, ее профиль, и если отверстие входное, то температура, параметры турбулентности и пограничного слоя, а также концентрации компонентов многокомпонентной среды;
- полное или статическое давление и, на тот случай, если отверстие окажется входным (в отличие от предыдущих двух вариантов, т. е. задания расхода или скорости, при задании давления направление течения не задается, а определяется при решении задачи), температура, параметры турбулентности и пограничного слоя, а также концентрации компонентовмногокомпонентнойсреды;

2.

❐ Параметры поверхностей твердых тел, контактирующих с текучей средой

- шероховатость поверхности (строго говоря, это условие не является граничным, а описывает свойство поверхности);
- температура поверхности;
- удельный (т. е. с единицы поверхности) или суммарный (по указанной поверхности) тепловой поток;
- коэффициент теплоотдачи поверхности текучей среде — в этом случае необходимо также указать способ определения температуры текучей среды (т. к. рассчитывается пограничный слой, то соответствующая этим заданиям температура стенки определяется при решении задачи);
- адиабатическая поверхность, т. е. отсутствие теплообмена текучей среды с поверхностью;
- идеальная поверхность, т. е. отсутствие пограничного слоя на поверхности и теплообмена текучей среды с поверхностью (если теплопередача в твердых телах рассчитывается, то это условие означает теплоизолированную относительно текучей среды поверхность стенки);
- движение поверхности стенки, не изменяющее геометрию проточного тракта модели (вращение или поступательное движение).

Помимо начальных и граничных условий необходимо задать теплофизические свойства текучей среды:

- для газов: молекулярная масса, показатель адиабаты, удельная теплоемкость при постоянном давлении, коэффициент динамической вязкости, коэффициент теплопроводности;
- для жидкостей: плотность, удельная теплоемкость, коэффициент динамической вязкости, коэффициент теплопроводности;
- плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности материалов модели (если рассчитывается теплопередача в твердом теле).

а) ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Драгомиров С.Г. Лабораторный практикум по курсу «Газовая динамика ДВС». – Владимир, 1997.

2. Круглов М.Г., Меднов А.А. Газовая динамика комбинированных ДВС. –М., 1988.

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. –М.: Наука, 1974

4. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике / Алямовский А.А., Собачкин А.А., Одинцов Е.В., Харитонов А.И., Пономарев Н.Б. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 800 с.: ил.

б) ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

5. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. в 2 ч. –М., 1991.

6. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй / Репринтное воспроизведение издания 1960 г. – М.: ЭКОЛИТ, 2011. – 720 с.

7. Алямовский А.А. SolidWorks Simation. Как решать практические задачи. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. - 448 с.: ил.

8. Алямовский А.А. Инженерные расчеты в SolidWorks Simation. М.: ДМК Пресс, 2010. 464 с., ил.

9. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.

10. Бэтчелор Дж., Введение в динамику жидкостей. –М.: Мир, 1973.

11. Методы расчета турбулентных течений: Пер. с англ. / Под ред. В.Колльмана. – М.: Мир, 1984.

12. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. –М.: Энергоатомиздат, 1984.

13. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. –М.: Мир, 1975.

14. Сполдинг Д.Б. Горение и массобмен –М.: Машиностроение, 1985.

15. Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. т.1. Равновесие, движение жидкостей без трения. –Москва.: - ГТТИ. – 1933. -223 с.

16. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. тт 1,2. –М.: Мир, 1991.