КУРС ЛЕКЦИЙ

Для изучения дисциплины «Обработка экспериментальных данных» во 2 семестре на кафедре разработано учебные пособия

1. Гоц А.Н., Горнушкин Ю.Г. Погрешности измерений при экспериментальных исследованиях двигателей внутреннего сгорания. Учеб. пособие/ Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 64 с.

В связи с этим, последовательность изложения курса «Обработка экспериментальных данных» на лекциях будет дана блоками и основана на приведенном выше учебном пособии, которое в достаточном количестве имеется в библиотеке ВлГУ (см. «Карта обеспеченности дисциплины «Обработка экспериментальных данных»).

Блок 1 (2 часа).

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТРОЛОГИИ

Метрология – наука о методах измерений, средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Термины и определения основных понятий метрологии нормированы ГОСТ 16263-70 «ГСИ. Метрология. Термины и определения» и приводятся ниже в соответствии с этим документом.

Физическая величина (ФВ) – характеристика одного из свойств физического объекта, общая в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальная для каждого из них.

Значение физической величины – размер этой величины по принятой для нее шкале (например: 15 кг – значение массы тела; 24 кВт – значение мощности двигателя).

Различают *истинное* значение ФВ, идеально отражающее свойство объекта, и *действительное* – найденное экспериментально, достаточно близкое к истинному значению ФВ, которое в практических целях можно использовать вместо последнего.

Измерением называют нахождение действительного значения ФВ с помощью специальных технических средств.

Результат измерения – это значение ФВ, найденное путем ее измерения.

Измерения основаны на некоторой совокупности физических явлений, представляющих собой *принцип измерения* (например, измерять температуру можно по величине теплового расширения какого-либо вещества).

Для реализации принципов измерения применяются различные устройства. Техническое устройство, используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические характеристики, называется *средством измерения* (СИ). Совокупность правил, определяющих принципы измерения и соответствующие СИ, называется *методом измерения*.

Средства измерений подразделяются на измерительные преобразователи, измерительные приборы, измерительные системы, измерительно-вычислительные комплексы, информационно-измерительные системы.

Измерительным преобразователем называется СИ, предназначенное для получения сигнала измерительной информации в форме, удобной для дальнейшей обработки, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателем. *Измерительный преобразователь*, на который действует непосредственно измеряемая величина, называется *первичным измерительным преобразователем.* Часто вместо последнего наименования употребляется тождественный ему термин «датчик», причем в этом случае добавляют наименование той физической величины, для восприятия которой предназначен данный преобразователь (например: датчик частоты вращения, датчик температуры и т.п.). Датчики самостоятельного значения для проведения измерений не имеют, а являются составными частями измерительных приборов, установок и систем.

Измерительным прибором (ИП) называется СИ, предназначенное для получения сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем.

Измерительные приборы подразделяются на *аналоговые* и *цифровые.* У аналогового прибора показания являются непрерывной функцией измеряемой величины; у цифрового показания представлены в цифровой форме, которая является результатом аналого-дискретного преобразования сигнала измерительной информации.

Измерительные приборы могут быть показывающими и регистрирующими. У показывающих приборов результаты измерений считываются наблюдателем со шкалы или с цифрового табло. У регистрирующих приборов предусмотрена регистрация показаний в виде записи на диаграммной бумаге либо путем печати в цифровой форме, либо иным способом.

Измерительной системой (ИС) называют совокупность СИ и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами связи, и предназначенных для автоматических измерений в нескольких точках исследуемого объекта. Как правило, измерительные системы могут производить обработку информации по заданным алгоритмам. Если в состав измерительной системы входит свободно программируемая ЭВМ, такую систему обычно называют *измерительно-вычислительным комплексом* (ИВК).

Измерительные приборы и системы в самом общем виде включают в себя следующие составляющие: датчики; коммутаторы; измерительно-преобразовательное устройство, включающее в себя измерительные цепи, усилители, преобразователи, вычислительные процессоры, базы данных, источники электропитания и др.; а также регистрирующее устройство.

Для обеспечения единства и достоверности измерений в России существует единая метрологическая служба. Деятельность ее определена системой соответствующих государственных стандартов.

Задачи метрологической службы многообразны. Одна из главных – поверка СИ, контроль за их состоянием и применением.

Поверка СИ – важнейшая форма государственного надзора за измерительной техникой. Под поверкой понимается экспериментальное определение погрешности СИ и установление их пригодности к применению. На средства измерений, признанные в результате проверки годными к применению, наносят поверительные клейма или выписывают соответствующие свидетельства.

2. *ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ*

В зависимости от того, каким способом находят числовое значение искомой величины, измерения подразделяются на два вида – прямые и косвенные.

При прямых измерениях результат получают с помощью СИ, градуированных в соответствующих единицах. К прямым измерениям относят, например, измерения температуры термометром, давления – манометром, длины предмета – линейкой.

При косвенных измерениях значение величины не находят непосредственно средством измерения, а вычисляют по результатам измерения одной или нескольких других величин, связанных с искомой величиной известной зависимостью. К косвенным измерениям прибегают в тех случаях, когда интересующую нас величину невозможно или затруднительно измерить прямым путем.

Пример. Мощность двигателя при испытании его на тормозном стенде, как правило, определяют косвенно по измеренным значениям крутящего момента и частоты вращения коленчатого вала с использованием известного соотношения:

$$N_e = \frac{M_e n}{9550}, \tag{2.1}$$

где N_e – эффективная мощность, кВт; M_e – эффективный крутящий момент, Н·м; n – частота вращения, мин$^{-1}$.

3. *ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОГРЕШНОСТЯХ*

Даже при самом тщательном измерении какой-либо ФВ нет возможности получить абсолютно свободный от искажений результат. Искажениями обусловлена так называемая погрешность измерения – отклонение результатов от истинного значения измеряемой величины.

Согласно известному негаэнтропийному принципу информации бесконечно малая погрешность измерения означает бесконечно большое возрастание информации, что принципиально невозможно. В соответствии с этим нельзя провести измерение без погрешности (с нулевой погрешностью).

Принципиальная неустранимость погрешностей требует считать их обязательным элементом процесса измерения. Поэтому в задачу измерения *всегда входит не только нахождение значения самой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности.*

Погрешности измерений *по способу их числового выражения* подразделяют на абсолютные, выраженные в единицах измеряемой величины, и относительные, выраженные в долях этой величины.

Если измеренное значение ФВ равно x, а истинное есть $x_и$, то *под абсолютной погрешностью* понимают разность $x - x_и$. Поскольку истинное значение $x_и$ неизвестно, то и величину погрешности, строго говоря, определить не представляется возможным.

Поэтому вводится понятие *предельной абсолютной погрешности* Δx, определяемой неравенством

$$\Delta x \geq \left| x - x_{\text{и}} \right|. \quad (3.1)$$

При этом истинное значение $x_{\text{и}}$ оказывается внутри интервала $\{x - \Delta x; x + \Delta x\}$. Практически под $x_{\text{и}}$ понимают значения величины x, найденные измерением с помощью СИ и методов высшей точности.

Относительная погрешность измерения определяется как отношение абсолютной погрешности к измеренному значению величины. Так как истинное значение величины $x_{\text{и}}$ неизвестно, то пользуются понятием *предельной относительной погрешности* δ_x, которую выражают в долях или процентах от измеренного значения:

$$\delta_x = \left| \Delta x / x \right| \quad (3.2)$$

или

$$\delta_x = \left| \Delta x / x \right| \cdot 100\ \%. \quad (3.3)$$

Как сказано выше, абсолютную и относительную погрешности измерения принципиально невозможно вычислить точно; можно лишь оценить их предельные значения. Имея это в виду, слово «предельная» обычно опускают и погрешности, оцениваемые по формулам (3.1) - (3.3), называют просто *абсолютной* либо *относительной погрешностью*.

Погрешности вычисляются для оценки точности измерения или для последующего введения поправок в результат. Точностью измерения называется качество измерения, отражающее степень близости их результатов к действительному значению измеряемой величины. Обычно степень точности измерений характеризуют величиной предельной относительной погрешности. Например, если утверждают, что точность измерения некоторой величины составляет 1,5 %, то это означает, что относительная погрешность измерения данной величины не превосходит $\pm$ 1,5 % (но может быть и меньше).

Блок 2 (2 часа).

3.1. Типы погрешностей

Погрешности измерений *по характеру их проявления* подразделяют на систематические, случайные и грубые. Составляющая общей погрешности, остающаяся постоянной или изменяющаяся по определенному закону при повторных измерениях одной и той же величины, называется *систематической погрешностью измерения*. Причинами появления систематических погрешностей могут быть неисправность измерительной аппаратуры, отступление от нормальных условий ее работы, индивидуальные особенности оператора, несовершенство метода измерения и др. Систематические погрешности в принципе могут быть выявлены и устранены, для чего требуется тщательный анализ возможных источников погрешностей в каждом конкретном случае.

Составляющая погрешности измерения, изменяющаяся непредсказуемым образом при повторных измерениях одной и той же величины, называется *случайной погрешностью измерения*. Случайные погрешности, не определенные и не постоянные по величине и знаку, возникают в результате совокупного действия различных случайных причин. Чтобы обнаружить случайную погрешность, необходимо провести серию повторных измерений одной и той же величины в одинаковых условиях и, конечно, с помощью одних и тех же измерительных средств. Если результат каждого измерения будет отличаться от других, то имеют место случайные погрешности. Случайные погрешности невозможно учесть или устранить введением каких-либо поправок; их оценка может быть проведена только по результатам многократных измерений методами теории вероятностей и математической статистики.

Чтобы проиллюстрировать различие между названными видами погрешностей, рассмотрим несколько примеров. Предположим сначала, что испытатель измеряет продолжительность одного оборота равномерно вращающегося диска. Одним из источников погрешностей будет время собственной реакции испытателя при пуске и остановке секундомера. Если бы время реакции всегда было одинаковым, то оба запаздывания, обусловленные реакцией, компенсировали бы друг друга. Фактически время реакции испытателя изменяется. Он может промедлить при пуске и таким образом недооценить время оборота или же больше задержаться при остановке секундомера и в этом случае переоценить время. Так как обе возможности равновероятны, то знак эффекта *случаен*. При многократном повторении измерения испытатель иногда будет переоценивать время, а иногда – недооценивать. Таким образом, переменное время реакции проявится в различии полученных результатов. Анализируя разброс результатов методами статистики, мы можем получить вполне достоверную оценку погрешности этого типа.

С другой стороны, если при измерениях секундомер постоянно отстает, то все измеренные значения времени будут недооценены и никакое количество повторений (с тем же секундомером) не обнаружит этого источника погрешностей. Погрешность такого типа называется *систематической*, поскольку она всегда смещает результат измерений в одну сторону (если секундомер отстает, то всегда недооцениваем время, если спешит — всегда переоцениваем). Систематические ошибки нельзя обнаружить статистическими методами.

В качестве второго примера проявления случайных и систематических погрешностей рассмотрим измерение длины стержня с помощью линейки. Один из источников погрешности — необходимость в интерполяции между отметками шкалы, и эта погрешность, очевидно, случайна (при интерполяции с равной вероятностью как переоцениваем, так и недооцениваем результат). Но имеется также вероятность того, что линейка дефектна, а этот источник погрешности будет, вероятно, приводить к систематической ошибке. Например, если линейка имеет начальную кривизну, то, проведя измерения с вогнутой стороны, испытатель всегда недооценивает результат. Подобно этим двум примерам почти все измерения подвержены как случайным, так и систематическим погрешностям. Типичные источники случайных погрешностей — это незначительные ошибки наблюдателя (как в случае интерполяции); небольшие помехи, воздействующие на аппаратуру (например механические вибрации); проблемы определения истинного значения некоторой величины и др. Возможно, наиболее очевидная причина систематической погрешности – это нарушение калибровки приборов (подобно отстающему секундомеру или стрелочному прибору, стрелка которого до начала измерений не была установлена на нуль).

Различие между случайными и систематическими погрешностями не всегда можно четко определить. Так при изменении положения глаза наблюдателя по отношению к шкале стрелочного прибора (например, обычным часам) результаты считывания будут изменяться. Этот эффект называется *параллаксом*, и он приводит к тому, что правильное считывание со шкалы возможно только в случае, когда глаз наблюдателя расположен точно перед стрелкой (рис. 1). Даже очень аккуратный экспериментатор не сможет расположить глаз *точно* перед стрелкой; следовательно, все измерения будут содержать малые погрешности, связанные с параллаксом, и эта погрешность будет, вероятно, случайной. С другой стороны, неосторожный экспериментатор, который поставит стрелочный прибор сбоку от себя и забудет о влиянии параллакса, внесет в измерения систематическую погрешность. Таким образом, один и тот же эффект, *параллакс*, может привести к случайным погрешностям в одном случае и систематическим – в другом (рис. 2).

Учет случайных погрешностей совершенно отличен от учета систематических. Статистические методы дают достоверную оценку случайных погрешностей и указывают на точно определенный способ их уменьшения. С другой стороны, систематические погрешности трудно оценить, и даже обнаружить. Опытный экспериментатор должен уметь предвидеть источники систематических погрешностей и проводить экспериментальные исследования так, чтобы при измерениях все оставшиеся систематические ошибки были значительно меньше требуемой точности. Для этого потребуется, например, поверка стрелочных приборов по принятым стандартам, их

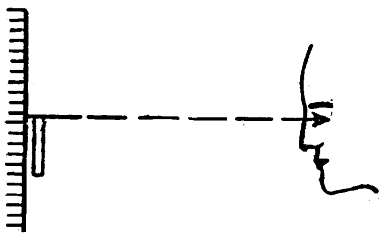

Рис. 1. Правильное положение глаза при отсчете делений шкалы

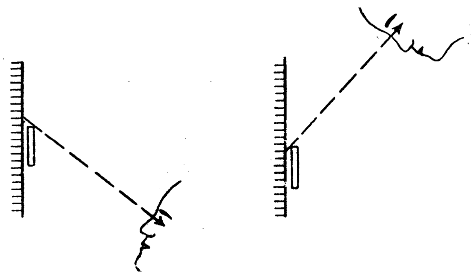

Рис. 2. Ошибка параллакса при отсчете делений шкалы

исправление или даже, если необходимо, замена приборов на другие.

Погрешность измерения, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях, называется *грубой погрешностью*. Грубые погрешности сильно искажают результаты измерений. Они обычно связаны с резким нарушением условий измерений. Причиной могут быть неисправность аппаратуры, неправильные действия наблюдателя, непредвиденное постороннее вмешательство и т. п. Результаты измерений, содержащие грубые погрешности, должны быть отброшены как недостоверные. Для выявления грубых погрешностей разработаны специальные приемы.

3.2. Систематические погрешности. Причины возникновения и способы устранения

Природа систематических погрешностей обычно обусловлена спецификой конкретного эксперимента, особенностями применяемых средств и методов измерений. Вместе с тем существуют некоторые общие причины появления систематических погрешностей, в соответствии с которыми их подразделяют на методические, инструментальные и субъективные.

Методические погрешности появляются от несовершенства метода измерения, недостаточно правомерного использования упрощающих предположений и допущений, применения неточных эмпирических формул, влияния измерительного прибора на объект измерения. Например, результат измерения температуры с помощью термопары может содержать методическую погрешность по причине искажения температурного поля исследуемого объекта из-за отвода теплоты по электродам термопары.

Инструментальные погрешности зависят от погрешностей применяемых СИ. Конструктивное несовершенство измерительных приборов, их неисправность или неправильная градуировка, отклонение от нормальных условий их эксплуатации – все это причины инструментальных погрешностей.

Примеры систематической погрешности. Температура измеряется термометром со смещенной (сдвинутой) шкалой. Если шкала сдвинута, например, на 2 ^{0}С, то систематическая погрешность (в данном случае инструментальная) равна двум градусам и постоянна по величине и знаку.

Возможен случай, когда величина погрешности периодически меняется с изменением измеряемой величины. Например, такое явление будет наблюдаться, если пользоваться секундомером, у которого центр циферблата не совпадает с осью вращения стрелки.

Поскольку систематические погрешности в конкретных измерениях имеют вполне определенные значения и знак, они могут быть учтены введением поправок. Поправкой называется значение величины, прибавляемое к полученному при измерении значению с целью исключения систематической погрешности. Для определения величины поправки требуется, как правило, тщательный анализ метода измерения.

В некоторых случаях используют поправочный множитель-число, на который умножают результат измерения для исключения систематической погрешности.

Поправка, или поправочный множитель, определяется при помощи поверки средства измерения; применяются также расчетные способы нахождения поправок.

Существуют специальные методические приемы организации измерений, устраняющие систематические погрешности, такие, например, как метод замещения и метод компенсации погрешности по знаку.

При проведении автоматических измерений широко используют схемные методы коррекции систематических погрешностей, например: компенсационное включение преобразователей, введение температурной коррекции и др.

Большие возможности в технике измерений дает использование измерительных средств, содержащих микропроцессорные системы. С помощью последних удается производить исключение или коррекцию многих видов систематических погрешностей, что позволяет существенно повысить точность измерений.

Субъективные погрешности чаще всего вызываются неправильными отсчетами показаний прибора человеком (оператором). Это может случиться, например, из-за неправильного направления взгляда при наблюдении за показаниями стрелочного прибора (погрешность от параллакса). Использование цифровых приборов и автоматических методов измерения позволяет исключить погрешности такого рода.

Существует также особый вид систематических погрешностей измерений – так называемые *динамические погрешности*. Они проявляются при измерении физических величин, изменяющихся во времени, а причина их возникновения – несоответствие инерционных свойств измерительных приборов скорости изменения измеряемой величины. Динамические погрешности могут достигать 100 %, а в некоторых случаях – и более высоких значений. Динамические погрешности отличают от инструментальных, поскольку они связаны не столько с самими средствами измерений, сколько с условиями, при которых они работают. Динамические погрешности устраняют иными способами, нежели инструментальные.

Блок 3 (2 часа)

4. *МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ*

4.1. Основные понятия и определения

У любого измерительного прибора (за исключением приборов с цифровым отсчетом) имеются указатель и шкала. Конструктивное их решение может быть различным.

Чувствительность прибора – это его способность реагировать на изменение измеряемой величины. Количественно чувствительность оценивается отношением перемещения указателя к вызвавшему его изменению измеряемой величины. Например, если изменение электрического напряжения на 2 В вызвало перемещение стрелки по шкале вольтметра на 6 мм, то его чувствительность составляет 6/2 = 3 мм/В.

Порог чувствительности прибора – изменение измеряемой величины, вызывающее наименьшее изменение показаний, обнаруживаемое наблюдателем при нормальном для данного прибора способе отсчета.

Вариация показаний – это наибольшая разность показаний прибора при одном и том же значении измеряемой величины и неизменных внешних условиях. Вариацию определяют при плавном подводе указателя к испытуемой точке шкалы сначала при движении его от начальной, а затем от конечной отметок шкалы.

4.2. Погрешности средств измерений

Основной показатель точности измерительного прибора – так называемая *приведенная погрешность* $\delta_{\text{п}}$. Приведенная погрешность – это относительная погрешность, при вычислении которой абсолютная погрешность прибора отнесена к условно принятому значению A_N, постоянному во всем диапазоне измерений:

$$\delta_{\text{п}} = \frac{\Delta A}{A_N} \cdot 100\ \%.$$

Значение A_N условно принято называть нормирующим. Чаще всего за него принимают верхний предел измерений данного измерительного прибора.

Погрешность приборов зависит от условий их работы. Условия, при которых градуируют приборы на заводе-изготовителе, называют нормальными, а наибольшую приведенную погрешность прибора при работе его в этих условиях – основной погрешностью. Так как измерительные приборы используются не всегда только в *нормальных* условиях эксплуатации, то для каждого прибора обычно устанавливаются границы его применения, в пределах которых возникающая *дополнительная* (сверх основной) погрешность нормируется.

Для приборов, предназначенных для обычной эксплуатации в лабораторных помещениях, под нормальными часто понимают условия, когда температура равна (20 ± 5) °С, атмосферное давление - (750 ± 30) мм рт.ст., относительная влажность воздуха не превышает 80 %.

В зависимости от величины основной погрешности приборы подразделяют по классам точности. Обычно класс точности обозначает величину основной погрешности, отнесенную к верхнему пределу измерения. Так, например, если амперметр с диапазоном измерения от 0 до 300 А имеет класс точности 1,5, то это означает следующее: при нормальных условиях работы погрешность измерения этим прибором не превосходит 1,5 % от 300 А, т.е. 4,5 А в любой точке шкалы. Следовательно, если этим амперметром измеряется ток силой около 300 А, то предельная относительная погрешность составит 4,5·100/300=1,5 %, если же измерять ток силой около 15 А, то погрешность может достигать величины 4,5·100/15=30 %.

Отсюда вытекает общее правило: диапазон измерительных приборов должен выбираться с таким расчетом, чтобы их работа происходила по возможности на последней трети шкалы. При использовании для измерений начального участка шкалы прибора неизбежно значительное снижение точности измерений. Указанное правило неприменимо для приборов с цифровым отсчетом.

Так как измерительные приборы используются не всегда только в нормальных условиях эксплуатации, то для каждого прибора обычно устанавливаются границы его применения, в пределах которых возникающая дополнительная (сверх основной) погрешность нормируется. Данные о величине дополнительной погрешности приводятся в техническом паспорте прибора.

Погрешность *сложных* средств измерений зависит от погрешностей отдельных их элементов, которые суммируются по определенным правилам.

Пусть, например, измерительное средство состоит из m блоков, каждый из которых обладает *независимыми* друг от друга погрешностями. При этом известны относительные погрешности δ_i каждого блока.

Арифметическое суммирование $\sum_{i=1}^{i=m}\delta_i$ предполагает одновременно максимальное значение погрешностей всех блоков прибора, что крайне маловероятно. Поэтому, согласно теории вероятностей, более правильным считается определение результирующей погрешности сложением по квадратичному закону:

$$\delta_\Sigma = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{i=m}\delta_i^2}.$$

Суммирование двух *зависимых* друг от друга погрешностей, т.е. погрешностей, имеющих взаимную корреляционную связь, осуществляется по формуле

$$\delta_\Sigma = \pm\sqrt{\delta_1^2 + 2r\delta_1\delta_2 + \delta_2^2},$$

где r – коэффициент корреляции; δ_1 и δ_2 – относительные погрешности.

По степени коррелированности погрешности обычно подразделяют на два вида: сильнокоррелированные (коэффициент корреляции $r = 1 \div 0{,}7$) и слабокоррелированные ($r = 0 \div 0{,}7$).

Зависимыми сильнокоррелированными обычно оказываются погрешности, обусловленные общей причиной. Например, если в измерительном устройстве имеется несколько измерительных электронных усилителей, которые питаются от общего нестабилизированного источника электроэнергии, то при увеличении напряжения источника коэффициент усиления у всех усилителей будет вырастать, а при уменьшении - снижаться. Возникающие при этом погрешности отдельных усилителей сильно коррелированны.

На практике обычно пользуются двумя крайними случаями. При сильной корреляции случайных величин принимают $r = +1$ или $r = -1$; в этом случае $\delta_\Sigma = \delta_1 + \delta_2$, т.е. погрешности суммируются алгебраически. Если погрешности слабо коррелированны (или независимы), то $r \approx 0$ и $\delta_\Sigma = \pm\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, т.е. суммирование производится геометрически. Такой же подход справедлив и для большего числа составляющих коррелированных погрешностей.

5. *ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*

При косвенных измерениях значение интересующей нас величины вычисляется по результатам прямых измерений одной или нескольких других величин. Поэтому необходимо рассмотреть вопрос об определении погрешности искомой величины. Эта задача математически сводится к определению погрешности функции по известным значениям погрешностей независимых переменных; способы решения ее хорошо разработаны. Если имеется функция

$$Y = f(x_1; x_2; x_3; ...; x_n),$$

где $x_1; x_2; x_3;$ … x_n – независимые переменные, то относительная погрешность δ_Y этой функции определяется выражением:

$$\delta_Y = \pm \frac{1}{Y} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}.$$

Эта формула является общей, по ней можно вычислить погрешность функции при любом виде зависимости. Знаки плюс и минус ставятся перед формулой потому, что действительный знак погрешности нам неизвестен. В табл. 1 приведены некоторые часто встречающиеся функции и соответствующие формулы для определения их относительных погрешностей. В этой таблице буквами $A, \alpha, \beta, \gamma, l$ обозначены численные коэффициенты; буквами x, y, z, v - величины, непосредственно измеряемые в эксперименте; δ_W - относительная погрешность искомой функции. Относительные погрешности могут быть выражены в долях единицы или в процентах.

Таблица 1

Формулы для вычисления погрешностей функций

Функция	Формула для определения относительной погрешности
$W = Axyz$	$\delta_W = \pm\sqrt{\delta_x{}^2 + \delta_y{}^2 + \delta_z{}^2}$
$W = \frac{xy}{zv} A$	$\delta_W = \pm\sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 + \delta_v^2}$
$W = x^\alpha y^\beta \frac{1}{z\gamma}$	$\delta_W = \pm\sqrt{(\alpha\delta_x)^2 + (\beta\delta_y)^2 + (\gamma\delta_z)^2}$
$W = x \pm y \pm z$	$\delta_W = \pm\sqrt{\left(\frac{x\delta_x}{W}\right)^2 + \left(\frac{y\delta_y}{W}\right)^2 + \left(\frac{z\delta_z}{W}\right)^2}$
$W = Al^{\alpha x}$	$\delta_W = \pm x\delta_x$
$W = A\ln x$	$\delta_W = \pm\frac{\delta_x}{\ln x}$

Пример. Пусть при испытании двигателя на стенде расход топлива измеряется массовым способом. Формула для вычисления часового расхода имеет вид

$$G_T = 3{,}6\frac{\Delta G_T}{\tau_T},$$

где G_T – расход топлива, кг/ч; ΔG_T – мерная доза топлива, г; τ_T – время ее расходования, с.

Допустим, что топливо взвешивается с погрешностью не более ±1 % ($\delta_T = \pm 1{,}0$ %), а время измеряется секундомером с погрешностью не более ±0,5 %. Воспользовавшись данными табл. 1, получим:

$$\delta_{G_\text{т}} = \pm\sqrt{\delta_\text{т}{}^2 + \delta_\tau{}^2} = \pm\sqrt{1{,}0^2 + 0{,}5^2} = \pm 1{,}12\ \%.$$

Таким образом, относительная погрешность измерения часового расхода топлива не превысит ±1,12 %.

Можно вычислить и абсолютную погрешность. Если измеренное значение расхода топлива равно, например, 15 кг/ч, то абсолютная погрешность составит $\Delta G_\text{т} = \pm 15 \cdot 1{,}12 / 100 = 0{,}168$ кг/ч. Окончательный результат измерения следует записать так:

$$G_\text{т} = 15 \text{ кг/ч} \pm 1{,}12\ \% \text{ или } G_\text{т} = (15 \pm 0{,}168) \text{ кг/ч}.$$

Таким образом, на основании данного измерения можно утверждать, что действительное значение часового расхода топлива на этом режиме находится в интервале от 14,832 до 15,168 кг/ч, однако совершенно точное его значение не определено.

Блок 4 (2 часа)

6. *ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ*

Оценить погрешность принятого метода измерения возможно и необходимо еще до проведения экспериментов в процессе создания испытательной установки. Такая оценка позволит выбрать наиболее целесообразные измерительные приборы и устройства.

Для определения погрешности метода следует, пользуясь уравнением для вычисления искомой величины, построить соответствующую расчетную формулу для относительной погрешности функции; воспользовавшись данными табл. 1, подставить в нее вместо погрешностей независимых переменных паспортные показатели точности приборов, а вместо измеряемых величин – их приблизительные значения.

Пример. При испытании на стенде двигателя ВАЗ-2108 предполагается измерять его мощность при различной частоте вращения коленчатого вала и известному значению крутящего момента (см. (2.1)). Требуется оценить относительную погрешность измерения указанной величины.

В формуле (2.1) мощность N_e (кВт) выражена через частоту вращения вала n (мин$^{-1}$) и крутящий момент M_e (Н·м).

Пользуясь табл. 1, запишем выражение для относительной погрешности величины N_e:

$$\delta_N = \pm\sqrt{\delta_n^2 + \delta_M^2}.$$

Основная погрешность динамометра (измерителя момента) согласно его паспортным данным $\delta_M = \pm 0{,}25\ \%$. Погрешность прибора для измерения частоты вращения (тоже паспортные данные) $\delta_n = \pm\, 0{,}2\ \%$.

Следовательно, относительная погрешность измерения мощности данным методом не превысит ±0,32 %. Если измерением на этой установке получено, что мощность двигателя на некотором режиме равна 52,3 кВт, то результат должен быть записан так:

$$N_e = 52{,}3 \text{ кВт} \pm 0{,}32 \ \% \text{ или } N_e = 52{,}3 \pm 0{,}17 \ \text{ кВт}.$$

7. *НЕОБХОДИМАЯ ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ*

Точность обработки числового экспериментального материала обязательно должна быть согласована с точностью измерений. Вычисления, выполненные с излишним числом десятичных знаков, создают ложное представление о высокой точности измерений. Разумеется, не следует и ухудшать данные эксперимента слишком грубыми приемами вычислений.

При вычислениях рекомендуется придерживаться следующего правила. *Погрешность, полученная в результате вычислений, должна быть примерно в 10 раз меньше суммарной погрешности измерений.* При этом можно быть уверенными, что в результате выполнения вычислительных операций мы существенно не исказим результата.

Пример. При испытании двигателя получены следующие результаты: расход топлива $G_\text{т} = 5{,}7$ кг/ч и расход воздуха $G_\text{в} = 96{,}2$ кг/ч. Погрешность измерения каждой из этих величин пусть составляет ±1,0 %. Требуется найти средний коэффициент избытка воздуха α, полагая, что теоретическое количество воздуха l_0, необходимое для сгорания 1 кг топлива, равно 15,1 кг:

$$\alpha = \frac{G_\text{в}}{l_0 G_\text{т}}.$$

Подставив исходные данные и сделав вычисления на 8-разрядном калькуляторе, получим:

$$\alpha = \frac{96{,}2}{15{,}1 \cdot 5{,}7} = 1{,}1176948.$$

Но $G_\text{т}$ и $G_\text{в}$ известны лишь с точностью ±1 %, поэтому погрешность определения α больше 1 %. Следовательно, вычисления целесообразно делать не далее как до третьего знака, и результат следует записать в виде $\alpha = 1{,}12$, отбросив лишние цифры и округлив остаток.

Блок 4 (2 часа)

8. *ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА И ВЫБОР НЕОБХОДИМОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ*

Точность измерений в эксперименте оценивается следующим образом:

- задают необходимую точность измерения (т.е. предельную погрешность результата), выбирают метод измерения и измерительные приборы;

- пользуясь паспортными данными приборов, находят предельную погрешность метода;

- если погрешность метода меньше заданной погрешности результата или равна ей, то метод достаточно точен, если больше - следует выявить звенья, вносящие наибольшие погрешности в результат, и внести в метод необходимые коррективы (например, заменить один из приборов на другой более высокого класса точности);

- необходимое число измерений устанавливают, как правило, опытным путем. Если при нескольких последовательных измерениях одной и той же величины разброс данных оказывается незначительным и не превышает заданной предельной погрешности измерения, то ясно, что преобладают систематические погрешности метода, и при проведении эксперимента можно ограничиться однократным измерением данной величины; точность такого однократного измерения оценивают по предельной погрешности.

Если разброс данных значителен и превышает заданную предельную погрешность, то в результатах преобладают случайные погрешности и для получения необходимой точности измерения следует проводить многократно. Точность многократного измерения оценивается средней квадратичной ошибкой результата.

9. *НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ*

9.1. Понятие о случайной величине

В практике экспериментальных исследований часто встречаются случаи, когда какая-либо величина измеряется много раз при одинаковых условиях. В результате каждого измерения получается некоторое число. Иногда возможно предсказать, какое именно число получится при выполнении следующего измерения. Но значительно чаще это сделать невозможно. Небольшие отклонения от начальных условий, которые экспериментатор не в силах заметить и проконтролировать, делают безнадежными любые попытки предсказать результат очередного измерения.

В этом случае, когда результат эксперимента может меняться от одного наблюдения к другому непредсказуемым образом и все попытки предсказания результата не оправдываются, говорят, что имеют дело с последовательностью случайных экспериментов, а о результатах измерений – как о *случайных величинах.*

Случайная величина может быть дискретной (например, число броуновских частиц в поле зрения микроскопа) или непрерывной (например, результаты измерения толщины пластинки микрометром).

По своей природе многие величины являются вполне определенными, неслучайными, например толщина пластинки, время между двумя событиями и т. д. Однако из-за влияния различных случайных факторов в процессе измерения результаты измерения этих величин – случайные величины.

Однако имеются и такие величины, которые уже по своей природе случайны (например, параметры, описывающие явления в газах и др.). Радиоактивный распад и другие статистические явления микромира также описываются случайными величинами.

Пример. Рассмотрим две последовательности А и Б троек чисел:

002, 003, 004,   004, 009, 016,   008, 027, 064, …… (А);

123, 234, 564,   987, 324, 453,   654, 786, 876, ……..(Б).

В случае последовательности А легко угадывается закономерность: последующие три числа после первых – результат возведения их в квадрат, куб и т. д. Последовательность же Б является случайной, и не существует способа предсказать последующие числа.

9.2. Вероятность. Достоверные и недостоверные события

Степенью возможной реализации случайного события является вероятность. Если опыт сводится к схеме случаев, то под вероятностью $P(A)$ события A понимают отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n всех несовместимых единственно возможных и равновозможных случаев:

$$P(A) = m / n . \tag{9.1}$$

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

- вероятность достоверного события равна единице, каждый возможный случай является благоприятным ($m = n$);
- вероятность невозможного события равна нулю, т. е. нет ни одного случая, благоприятного событию ($m = 0$);
- вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей ($0< m< n$).

В большинстве случаев вероятность события не может быть найдена аналитическим путем и оценивается на основании результатов опыта с помощью накопленной *частости* случайного события, являющейся статистическим аналогом вероятности.

Пусть производится n опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A. В результате указанных опытов событие A появилось i раз (число наблюдений), тогда накопленная частость события A определится отношением

$$W(A) = i / n . \tag{9.2}$$

Повторяя серию из n опытов многократно, будем получать для накопленной частости случайного события A различные значения. Однако они будут колебаться около одного и того же числа, являющегося вероятностью события, причем так, что значительные отклонения от этого числа будут редкими. При возрастании числа опытов в соответствии с законом больших чисел указанные отклонения будут встречаться все реже и реже.

Таким образом, можно считать, что при большом объеме испытаний в большинстве случаев накопленные *частость* и *вероятность* случайного события приблизительно равны между собой.

9.3. Понятие о функции плотности и функции распределения. Гистограмма

Пусть ξ – некоторая непрерывная случайная величина, например, результат измерений толщины пластинки микрометром. Допустим, выполнено очень много таких измерений. Тогда можно ответить на вопрос, какова вероятность того, что величина ξ окажется в определенном интервале $x_i \dots x_k$. Эта вероятность будет пропорциональна ширине интервала $\Delta x = x_k - x_i$. Коэффициент пропорциональности, естественно, может зависеть от x.

Иначе говоря, со случайной величиной ξ связана некоторая функция $f(x)$, называемая функцией *плотности*, такая, что величина $f(x)dx$ пропорциональна вероятности события, состоящего в том, что величина ξ заключена в интервале $x \dots x+dx$.

Условно последнее обстоятельство обозначается следующим образом:

$$f(x)dx = P(x \le \xi \le x + dx), \tag{9.3}$$

где символ P обозначает событие, а запись в скобках – в чем оно состоит.

Наглядное представление о функции плотности распределения непрерывной случайной величины можно получить, если имеющийся набор значений этой величины представить в виде *гистограммы*, которая строится следующим образом. Имеющиеся значения случайных чисел располагаем в виде *вариационного ряда*

$$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_i, \dots, \le x_n.$$

По полученным экспериментальным данным находим размах варьирования R:

$$R = x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}}.$$

Теперь следует выбрать число интервалов ν. Для того чтобы вариационный ряд не был слишком громоздким, обычно число интервалов берут от 7 до 11. Для более точного определения величины частичного интервала можно воспользоваться формулой Стерджеса

$$h = (x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}})/(1 + 3{,}322 \lg n). \tag{9.4}$$

Если окажется, что h – дробное число, то за длину частичного интервала следует брать либо ближайшее целое число, либо ближайшую простую дробь. За начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{\text{нач}} = x_{\text{наим}} - 0{,}5h$, а конец последнего интервала должен удовлетворять условию $x_{\text{кон}} - h \le x_{\text{наиб}}$. Промежуточные интервалы получают прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h.

Затем вписываем последовательно один под другим эти интервалы в первый столбец таблицы и определяем, в какой интервал попадает каждое значение случайной величины, и ставим во второй столбец середину интервала, а в третий столбец, соответствующий найденному интервалу, – число попаданий случайной величины n_i, т.е. частоту m_i. Далее определяем частость:

$$\bar{p}_i = m_i / \sum_{i=1}^{\nu} m_i. \tag{9.5}$$

Полученное значение частости $\bar{p}_i$ записываем в четвертый столбец таблицы. Выборочным аналогом функции $f(x)$ можно считать функцию

$$\bar{f}(x) = \bar{p}_i / h.$$

Полученное значение $\bar{f}(x)$ записываем в пятый столбец таблицы. Если теперь по оси абсцисс отложить принятые интервалы и над каждым из них нарисовать прямоугольник, высота которого равна p_i, то полученная система прямоугольников и образует гистограмму. Если теперь на середине каждого интервала отложить значение $\bar{f}(x)$ и провести плавную кривую, то получим график ее изменения.

Пример. При измерении диаметра 200 валиков после обработки получен вариационный ряд, в котором размах варьирования $R = x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}} = 6{,}83 - 6{,}68 = 0{,}15.$ Длину интервала определим по формуле (9.4):

$$h = 0{,}15/(1 + 3{,}322\lg 200) \approx 0{,}0174 \approx 0{,}02.$$

За начало первого интервала примем величину $x_{\text{нач}} = 6{,}68$ - - 0,5·0,02=6,67. Результаты измерений заносим в табл. 2.

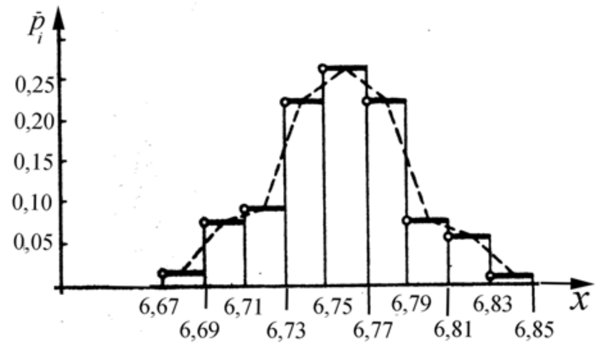

Рис. 3. Гистограмма распределения диаметров валика

Построим по данным табл. 2 гистограмму в соответствии с формулой (9.5) и вышеприведенными правилами (рис. 3). Система прямоугольников на рис. 3 и является гистограммой для набора случайных величин – диаметра валика после обработки.

Очевидно, что если взять малое число интервалов (например, один), то гистограмма не даст детального представления о плотности вероятности. С другой стороны, если интервалов очень много (например равно числу значений случайной величины), то в каждом интервале окажется одно-два значения, что также лишает гистограмму наглядности. Число интервалов выбирают таким образом, чтобы в каждом из них было не менее десяти случаев.

Таблица 2

Результаты измерений диаметра валика

№ п/п	Интервалы диаметров валика, мм	Середина интервала, мм	Частота m_i	Частость $\bar{p}_i$	$\bar{f}(x)$
1	6,67– 6,69	6,68	2	0,010	0,5
2	6,69 – 6,71	6,70	15	0,075	3,75
3	6,71 – 6,73	6,72	17	0,085	4,25
4	6,73 – 6,75	6,74	44	0,220	11,0
5	6,75 – 6,77	6,76	52	0,260	13,0
6	6,77 – 6,79	6,78	44	0,220	11,0
7	6,79 – 6,81	6,80	14	0,070	3,5
8	6,81 – 6,83	6,82	11	0,055	2,75
9	6,83 – 6,85	6,84	1	0,005	0,25
$\sum$			**200**	**1,0**	**-**

Если увеличивать число значений случайной величины, по которым строится гистограмма, и одновременно увеличивать число интервалов (т.е. делать интервалы все более мелкими), а над ними рисовать прямоугольники, высоты которых равны числу случаев попадания в интервал, деленному на полное число случаев и на ширину интервала, то для достаточно большого набора значений полученная гистограмма будет мало отличаться от графика функции плотности распределения случайной величины.

На рис. 4,а,б приведены гистограммы, построенные по результатам 100 и 1000 измерений диаметра оси после обработки соответственно.

После 1000 измерений можно наполовину уменьшить ширину интервала, и гистограмма становится совсем гладкой и регулярной. Эти две гистограммы иллюстрируют важное свойство большинства измерений. С ростом числа измерений до бесконечности их распределение стремится к некоторой определенной непрерывной кривой. Получающаяся кривая называется функцией плотности случайной величины или предельным распределением. С ростом числа измерений случайной величины x гистограмма будет приближаться к предельной кривой $f(x)$ (рис. 4,б).

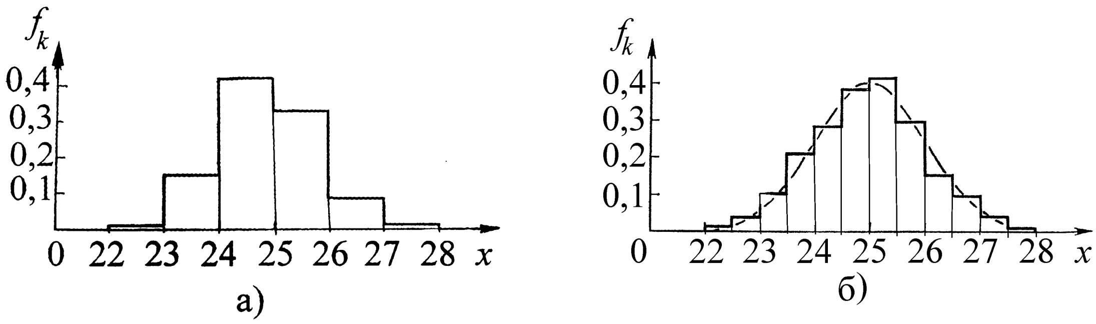

Рис. 4. Гистограммы результатов 100 измерений (а) и 1000 измерений (б)

диаметра оси после обработки

Следовательно, доля измерений, которая попадает в любой малый интервал от x до $x + dx$, будет равна площади $f(x)dx$ заштрихованного участка (рис. 5,а). В общем случае доля измерений, которая попадает в интервал между любыми двумя значениями a и b, равна площади под кривой между $x = a$ и $x = b$ (рис. 5,б).

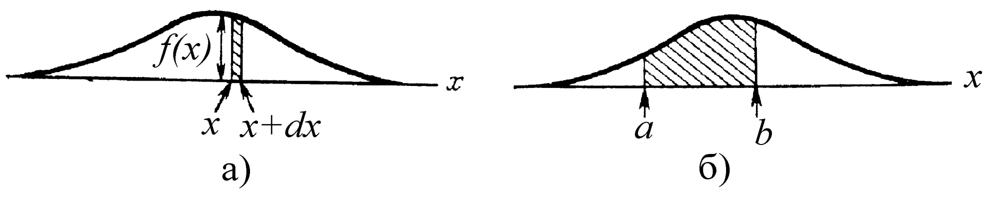

Рис. 5. Функция плотности $f(x)$: а – после множества измерений доля, которая попадает между x и $x + dx$, равна площади $f(x)dx$ узкой полосы; б – доля, которая попадает между $x = a$ и $x = b$, равна заштрихованной площади

Так как полная вероятность получения результата, лежащего между $-\infty$ и $+\infty$, должна быть равна единице, то функция $f(x)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{9.6}$$

Условие (9.6) называется условием *нормировки*. В случае нормированной функции плотности, когда выполняется (9.6), площадь заштрихованной фигуры или величины $f(x)dx$ равна вероятности события, что ξ заключена в интервале $x \ldots\ x + dx$.

Для случайной величины ξ определим также функцию $F(x)$:

$$F(x) = P(\xi \le x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx. \tag{9.7}$$

Функция $F(x)$, определяемая соотношением (9.7), называется интегральной функцией *распределения* величины ξ. Функция распределения в данной точке x равна вероятности того, что случайная величина меньше x. График этой функции – монотонная кривая, возрастающая от 0 до 1.

В случае дискретной случайной величины также можно определить функцию плотности и функцию распределения. Функцию плотности дискретной случайной величины можно представить, если на оси абсцисс отложить возможные дискретные значения случайной величины и от этих точек провести вертикальные линии, длина которых равна вероятностям соответствующих значений.

9.4. Понятие о среднем значении и дисперсии

Часто бывает, что нужно описать функцию распределения некоторой случайной величины в общих чертах с помощью одного-двух параметров. В этом случае прежде всего надо указать типичное значение этой случайной величины.

Наиболее употребительной и наилучшей мерой, характеризующей типичное значение случайной величины, является *среднее значение M(x)*:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \mu, \tag{9.8}$$

где μ – результат вычисления интеграла.

В случае дискретной случайной величины

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i = \mu, \tag{9.9}$$

где P_i – вероятность значения x_i; n – число значений x; μ – результат вычисления суммы.

Если вероятности всех x_i равны, то $P_i = 1/n$.. Тогда (9.9) переходит в следующую формулу:

$$M(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu. \tag{9.10}$$

Кроме среднего значения функцию распределения можно характеризовать еще параметром, показывающим, насколько широко разбросаны значения случайной величины относительно среднего значения.

Наиболее употребительной мерой, характеризующей *рассеяние* случайной величины, является *дисперсия* $D^2(x)$, которая определяется по формуле

$$D^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = M(x^2) - \mu^2 = \sigma^2, \tag{9.11}$$

где σ^2 – дисперсия, полученная в результате вычисления интеграла; $M(x^2)$ – среднее значение квадрата случайной величины, т. е. величина

$$M(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Квадратный корень из дисперсии, т. е. величина σ, называется *среднеквадратичным* или *стандартным отклонением*. Чтобы сравнивать рассеяние различных случайных величин, вычисляют *относительное стандартное отклонение*, т. е. величину

$$E = \sigma/\mu. \tag{9.12}$$

Далее мы будем рассматривать только такие функции распределения, для которых понятия μ и σ^2 имеют смысл.

9.5. Нормальное распределение

Нормальное распределение, или распределение Гаусса, является предельной формой, в которую могут переходить многие другие виды функций распределения. Приблизительно нормальное распределение имеет случайная величина, характеризующая результат одновременного влияния большого числа случайных факторов, каждый из которых по своему влиянию не превышает заметным образом остальные.

Функция плотности нормального распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{9.13}$$

где среднее значение

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \mu^2 = \sigma^2.$$

На рис. 6 изображена функция плотности нормального распределения, которая в точке $x = \mu$ имеет максимум, а точки $x = \mu \pm \sigma$ являются точками перегиба. Изменение значения μ вызывает только смещение кривой по оси абсцисс без изменения ее формы. Изменение величины σ вызывает изменение масштаба на обеих координатных осях. В одном масштабе кривая с меньшим σ у̇же кривой, для которой σ больше (см. рис. 6, кривые 1 и 1'). Площадь, заключенная между кривой плотности и осью абсцисс, равна единице, т. е. вероятность P того, что случайная величина ξ имеет любое значение, равна единице.

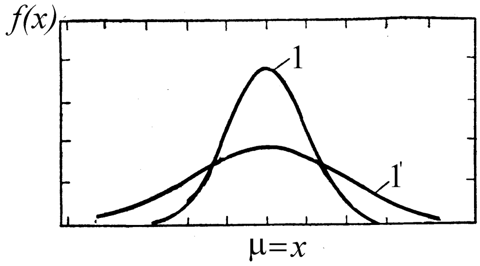

Рис. 6. Функции плотности нормального распределения 1 и 1'

Вероятность P того, что случайная величина ξ, имеющая нормальное распределение, не отличается по модулю от своего среднего значения μ больше чем на $\lambda\sigma$, где λ – некоторое положительное число, а σ – стандартное отклонение, равна, очевидно, площади под кривой плотности на интервале $\mu \pm \lambda\sigma$, т. е.

$$P = P(\mu - \lambda\sigma \le \xi \le \mu + \lambda\sigma) = \int\limits_{\mu-\lambda\sigma}^{\mu+\lambda\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \qquad (9.14)$$

Очевидно, что для каждой вероятности $P = \alpha$ можно определить такое число λ_α, что интеграл в правой части соотношения (9.14) для этого значения λ_α будет равен α. Величину α можно выражать в долях единицы или в процентах. В прил. 1 приведены значения коэффициентов λ_α для разных α.

Блок 5, 6 (4 часа)

10. *НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ*

10.1. Понятие о выборке

Предположим, что нужно измерить некоторую величину l_0, например длину стержня. Можно выполнить одно измерение, два, три и т. д. Так как в результате каждого измерения получается некоторое число, то мы получим некоторый набор чисел x_1, x_2, x_3, …, x_n. Возникает вопрос: какое из полученных чисел или какую функцию этих чисел следует принять за значение величины l_0?

Результат произвольного измерения из-за влияния разных погрешностей измерений является случайной величиной ξ, которая имеет некоторую функцию распределения. Если бы мы знали эту функцию, то могли бы условиться принимать за значение величины l_0 типичное значение случайной величины ξ, например среднее. Однако в реальных условиях эксперимента функция распределения, как правило, не известна. В лучшем случае можно только догадываться о виде функции распределения. Например, могут быть основания предполагать, что ξ имеет нормальное распределение, но параметры нормального распределения μ и σ при этом, как правило, все равно не известны.

Если бы мы могли проводить измерения неограниченное число раз, то в результате получили бы бесконечный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые образовали бы множество (бесконечное) всех возможных значений величины ξ. В этом случае для любого интервала $x \ldots x+dx$ мы могли бы определить частоту и вероятность того, что случайная величина заключена в этом интервале, т. е. определили бы функцию плотности, а следовательно, и среднее значение.

В реальных условиях число измерений конечно. В этом случае из бесконечного множества возможных значений величины ξ мы располагаем только несколькими случайно выбранными ее значениями. Если проделано n измерений (т. е. некоторый случайный эксперимент независимо повторен n раз), мы имеем n наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые будем называть *случайной выборкой* объема из множества всех возможных значений величины ξ. В математической статистике показывается, что по результатам каждой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно оценить величины среднего значения μ и дисперсии σ^2 распределения ξ.

10.2. Выборочные значения

Определим выборочное среднее значение $\overline{x}$ случайной величины ξ :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (10.1)$$

и выборочную дисперсию :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \qquad (10.2)$$

Если данные наблюдений представлены в виде дискретного ряда, где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ – наблюдаемые варианты, а $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ – соответствующие им частоты, причем $\sum_{i=1}^{\nu} m_i = n,$ то по определению

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i m_i}{n}. \qquad (10.3)$$

Вычисленное по формуле (10.3) среднее значение называется *взвешенным*, так как частоты m_i называются *весами*, а операция умножения x_i на m_i – взвешиванием.

Очевидно, что $\bar{x}$ и s^2 – случайные величины, поскольку являются функциями от случайных величин. Если имеется ряд выборок объема n, то соответственно имеется и ряд значений $\bar{x}$ и s^2. Как и всякая случайная величина, каждая из величин $\bar{x}$ и s^2 характеризуется какой-то своей функцией плотности, а также средним значением и дисперсией. Пусть среднее значение и дисперсия случайной величины ξ равны соответственно μ и σ^2. В математической статистике доказывается, что среднее значение и дисперсия случайной величины $\bar{x}$ определяются следующими формулами:

$$M(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu, \qquad (10.4)$$

$$D^2(\bar{x}) = M\left[(\bar{x}-\mu)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \qquad (10.5)$$

Из формул (10.4) и (10.5) следует, что среднее значение случайной величины $\bar{x}$ равно μ, а стандартное отклонение равно $\sigma/\sqrt{n}$ и становится очень малой величиной при больших объемах выборки n. Поэтому на основании уравнения (10.4) можно утверждать, что при достаточно больших n случайная величина $\bar{x}$, определяемая по формуле (10.1), будет как угодно мало (в статистическом смысле) отличаться от среднего значения μ. Это и является основанием для принятия величины $\bar{x}$, определяемой по формуле (10.1), в качестве оценки значения μ.

Рассмотрим теперь среднее значение случайной величины s^2. Оно определяется формулой

$$M(s^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} M\left[(x_i-\bar{x})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = \sigma^2, \qquad (10.6)$$

т. е. среднее значение случайной величины s^2 равно σ^2. Дисперсия же s^2 выражается довольно сложным образом. Однако, если величина ξ имеет нормальное распределение, то дисперсия величины s^2 выражается простой формулой

$$D^2(s^2) = \frac{2}{n}\sigma^4, \qquad (10.7)$$

т. е. стандартное отклонение $(\sqrt{2/n})\sigma^2$ может быть как угодно малым при больших объемах выборки. В общем случае формула для дисперсии s^2 громоздка, однако из-за n в знаменателе тоже следует, что величина стандартного отклонения при больших объемах выборки будет достаточно мала. Поэтому можно утверждать, что при достаточно больших n случайная величина s^2 будет как угодно мало (в статистическом смысле) отличаться от среднего значения σ^2. Это и является основанием для принятия величины s^2, определяемой формулой (10.2), в качестве оценки значения σ^2.

Если в качестве оценки величины σ^2 использовать s^2, то для оценки стандартного отклонения величины $\bar{x}$, которое обозначим как $s_{\bar{x}}$, из (10.2) и (10.5) будем иметь формулу

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \qquad (10.8)$$

Формулы (10.1) и (10.8) позволяют ответить на поставленный вначале вопрос. Используя результаты выборки x_1, x_2, …, x_n, можно по формуле (10.1) вычислить оценку среднего значения μ, т. е. величину $\bar{x}$, а по формуле (10.8) – выборочное стандартное отклонение этой оценки, которая позволит судить о том, как сильно величина $\bar{x}$ может отличаться от среднего значения μ.

Среднее значение величины равно $\bar{x}$, а дисперсия определяется по формуле (10.5). Что касается функции распределения величины $\bar{x}$, то она, как правило, неизвестна. В частном случае, если величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2, то выборочное среднее значение $\bar{x}$ также будет иметь нормальное распределение со средним значением μ и дисперсией σ^2/n.

10.3. Доверительные интервалы. Критерий значимости. Коэффициент доверия

В результате измерений некоторой величины можно найти оценку значения μ, вычислив $\bar{x}$ по формуле (10.1). Такая оценка называется *точечной*. Знание одной только точечной оценки дает мало представления о величине μ. Если еще вычислить $s_{\bar{x}}$ по формуле (10.8), то можно предполагать, как сильно величина μ может отличаться от $\bar{x}$. Однако предпочтительнее более точная, количественная характеристика того, как сильно μ может отличаться от $\bar{x}$. Такой характеристикой может служить интервал, для которого известно, с какой вероятностью значение μ может находиться внутри этого интервала. Из имеющихся в нашем распоряжении величин $\bar{x}$ и $s_{\bar{x}}$ (или $\bar{x}$ и $\sigma_{\bar{x}}$) можно построить интервал вида

$$\bar{x} \pm K_\alpha s_{\bar{x}}, \qquad (10.9)$$

где K_α – положительное число, зависящее от параметра α. Назовем *статистической гипотезой* утверждение о том, что неизвестное значение μ заключено внутри интервала (10.9). Возникает вопрос: на основании какого критерия можно сделать заключение о справедливости или ошибочности этой гипотезы?

Допустим, нам удалось вычислить, что вероятность того, что μ заключено внутри интервала (10.9), равна α. Выберем произвольно некоторое число $\alpha_0 = 1 - \varepsilon$, где ε – малое положительное число. Тогда в качестве критерия можно использовать следующее неравенство:

$$\alpha \geq \alpha_0. \qquad (10.10)$$

Если неравенство (10.10) выполняется, то мы должны принять гипотезу, а если нет, то отвергнуть.

Критерий (10.10) называется *критерием значимости* гипотезы, а число α_0, которое выступает в роли предельной вероятности, – *уровнем значимости критерия*. Величины α и α_0 можно выражать в долях единицы или в процентах. Если величина α_0 выражена в процентах, то она называется α_0-процентным уровнем значимости. Величину α_0 называют также *коэффициентом доверия*, или просто вероятностью, а интервал (10.9) – *доверительным интервалом.*

Конкретные значения α_0 выбираются из следующих соображений. Во-первых, естественно, чем больше α_0, тем более сильное утверждение делается о величине μ, к чему и надо стремиться. С другой стороны, если при этом длина интервала (10.9) становится слишком большой, то теряется представление даже о порядке величины μ.

Заметим, что выводы о том, верна или нет рассматриваемая гипотеза, носят *статистический* характер. Это означает, что если принимается гипотеза на основании критерия (10.10), то это не означает безусловность справедливости гипотезы. Это только означает следующее. Допустим, что проделана серия опытов из n измерений и для каждой серии вычислено $\bar{x}$ и $s_{\bar{x}}$, а также построен интервал (10.9), используя для этой цели некоторое число K_α. Тогда величина μ заключена лишь внутри α_0 процентов всех построенных интервалов. Иными словами, рассматриваемая гипотеза будет выполняться в α_0 процентов случаев. Если α_0 достаточно близко к единице, то это будет практически достоверным событием. Но в $\varepsilon = 1 - \alpha_0$ проценте случаев гипотеза не будет верна. При малом ε это будет практически недостоверным событием.

10.4. Построение доверительных интервалов

Покажем теперь, как можно для заданной вероятности α построить интервал (10.9), т. е. определить число K_α. Величина μ может находиться внутри этого интервала с вероятностью $P = \alpha.$ Из всех возможных случаев рассмотрим применение распределения Стьюдента.

Пусть величина x, а следовательно, и $\bar{x}$ распределены по нормальному закону. Рассмотрим следующее отношение, которое обозначим через t:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}. \qquad (10.11)$$

Перепишем выражение для t в виде

$$t = \frac{(\bar{t} - \mu)}{\sqrt{s_{\bar{x}}^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right)}}. \qquad (10.12)$$

Можно доказать, что числитель и знаменатель независимы [10]. Так как величина в числителе распределена по нормальному закону со средним значением 0 и дисперсией σ^2, а в знаменателе стоит корень квадратный из среднего арифметического суммы квадратов (n - 1) величин с тем же законом распределения, то величина t имеет распределение Стьюдента с параметром *n* - 1. Поэтому формулу (10.9) можно переписать в виде

$$\bar{x} - t_{\alpha,n-1} s_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha,n-1} s_{\bar{x}}. \qquad (10.13)$$

Величины $\bar{x}$ и $s_{\bar{x}}$ рассчитываются из результатов измерений, а коэффициент $t_{\alpha,n-1}$ для заданной надежности α и числа измерений *n* находится по прил. 2.

Пример. При испытаниях 10 двигателей получены значения удельного расхода топлива, приведенные в табл. 3. Расположим измеренные значения удельного расхода топлива g_e, полученные при испытаниях 10 двигателей, в виде вариационного ряда

$$x_1 \le x_2 \le, \ \ldots, x_i \le \ldots \le x_n.$$

Полученное выборочное среднее значение $\bar{g}_e = 2562/10 = 256{,}2$ г/(кВт·ч); а стандартное отклонение величины $\bar{g}_e$ $s_{\bar{x}} = \sqrt{27{,}6/10 \cdot 9} = 0{,}5538$. Из прил. 2 при *n* – 1 = 9 и α = 0,8 (для 80-ного % доверительного интервала) находим $t_{\alpha,n-1}$= 1,383.

Тогда $s_{\bar{x}} t_{\alpha,n-1}$ =0,5538·1,4 = 0,7753.

Таблица 3

Результаты испытаний 10 двигателей

Номер измерения	Измеренный удельный расход топлива g_e, г/(кВт·ч)	Отклонение $d_i = g_{e,i} - \bar{g}_e$	d_i^2
1	254	- 2,2	4,84
2	254	- 2,2	4,84
3	255	- 1,2	1,44
4	255	- 1,2	1,44
5	256	- 0,2	0,04
6	256	- 0,2	0,04
7	257	+ 0,8	0,64
8	258	+1,8	3,24
9	258	+ 1,8	3,24
10	259	+ 2,8	7,84
$\sum_{i=1}^{10}$	**2562**	**0**	**27,6**

Интервал, в котором находится среднее значение удельного расхода топлива g_e с заданной достоверностью α = 0,8:

$$255 \le g_e \le 257.$$

11. *МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ*

Пусть имеется зависимость вида *y* = *ax,* причем значения *y* и *x* получают из наблюдений. Если бы измерения этих величин производились без ошибок, то для определения коэффициента *a* было бы достаточно одного измерения. Если рассматривать более общую зависимость, например, *y* = = *ax*+*b,* то здесь имеется два неизвестных коэффициента, для нахождения которых достаточно было бы двух абсолютно точных измерений.

Однако абсолютно точные измерения практически не возможны. Для того чтобы исключить влияние случайных ошибок, производится большое число измерений. Результаты каждого измерения дают нам уравнение, связывающее неизвестные коэффициенты. При большом числе измерений мы приходим, следовательно, к системе, число уравнений в которой значительно больше, нежели число неизвестных. Задача метода наименьших квадратов – отыскание наиболее вероятных значений коэффициентов, которые, вообще говоря, не будут точно удовлетворять ни одному из уравнений системы. Сформулируем эту задачу в более общем виде.

Пусть дана функция

$$y = f(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) \tag{11.1}$$

независимой переменной x и m+1 коэффициентов (параметров) a_0, $a_1, \ldots, a_m$. Эти коэффициенты постоянны, но заранее не известны и подлежат определению. Для их отыскания производится ряд измерений величин x и y. Подставляя их в равенство (11.1), получаем некоторую зависимость между параметрами $a_0, a_1, \ldots, a_m$ вида

$$y_i = f(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{11.2}$$

где x_i и y_i — соответствующие друг другу измеренные значения, а n – число измерений. Если бы при измерениях значения x и y находились точно, то для отыскания m+1 коэффициента достаточно было бы произвести столько же измерений. На самом деле измеренные значения x и y содержат случайные погрешности (мы исключаем из рассмотрения при измерении систематические и грубые погрешности), и никакие m+1 измерения не позволят определить истинные значения коэффициентов (параметров) a_0, $a_1, \ldots, a_m$. Обычно производится большее число измерений ($n > m+1$), в результате чего число уравнений (11.2) будет больше, чем число неизвестных параметров. В этом случае система (11.2) будет, вообще говоря, несовместной, т. е. точные решения каких-либо (m+1) из уравнений системы могут не удовлетворять остальным уравнениям. Заметим, в случае $n < m+1$ система (11.2) была бы совместной и всегда имела бы бесчисленное множество решений. В этом случае нет смысла применять метод наименьших квадратов. При $n>m+1$ задача состоит в том, чтобы найти такие значения неизвестных параметров, которые будут удовлетворять этим уравнениям наилучшим образом (хотя и неточно). Иначе говоря, требуется найти *наиболее вероятные значения неизвестных коэффициентов* $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Эти вероятные значения будут тем более близки к истинным, чем больше число измерений.

Так как уравнения (11.2) удовлетворяются неточно, то

$$y_i - f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = \varepsilon_i, \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{11.3}$$

где ε_i – отклонения измеренных значений y_i от вычисленных по формуле (11.1). Принцип наименьших квадратов утверждает, что *наивероятнейшими значениями коэффициентов* a_0, $a_1, \ldots, a_m$, *которые можно получить из ряда измерений одинаковой точности, являются такие значения, при которых сумма квадратов отклонений* ε_i *будет наименьшей*, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)]^2 = \min. \tag{11.4}$$

При этом полагаем, что отклонения ε_i подчиняются нормальному закону распределения. Рассматривая a_0, a_1, ..., a_m как независимые переменные и приравнивая к нулю частные производные от левой части по этим переменным, получим в точности m+1 уравнений с m+1 неизвестными. Составление и решение этой системы особенно просто в том случае, когда функция $f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)$ линейна относительно коэффициентов. Наиболее простое решение получим, когда зависимость (11.1) имеет вид многочлена

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \tag{11.5}$$

с неизвестными коэффициентами.

Нашей задачей является нахождение по результатам экспериментальных наблюдений наиболее вероятных значений коэффициентов a_0, a_1, …, a_m. Если бы число измеренных значений x и y в точности равнялось числу неизвестных коэффициентов a_0, a_1, …, a_m, то определить их затруднения не представляло бы. Значительно более важным является тот случай, когда число наблюдений n много больше степени многочлена ($n >> m+1$). Требуется найти коэффициенты a_0, a_1, …, a_m, дающие минимум функции

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \ldots + a_mx_i^m)]^2. \qquad (11.6)$$

Дифференцируя правую часть зависимости (11.6) по $a_0, a_1,\ldots, a_m$, получим:

$$2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0+a_1x_i + a_2x_i^2 + \ldots + a_mx_i^m)](-1) = 0,$$

$$2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \ldots + a_mx_i^m)](-x_i) = 0, \qquad (11.7)$$

$$2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \ldots + a_mx_i^m)](-x_i^2) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \ldots + a_mx_i^m)](-x_i^m) = 0.$$

После преобразований система (11.7) запишется в виде:

$$na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^m = \sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n}x_i + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^{n}x_i^2y^i, \qquad (11.8)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^m + a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1} + a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+2} + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n}x_i^my_i.$$

Укажем на один прием, позволяющий в некоторых случаях упростить систему (11.8). Предположим, что значения x являются точными и даны с постоянным шагом $x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Введем вместо x новый аргумент u. Если число наблюдений нечетное, $n = 2k+1$, то полагаем

$$u = \frac{x - x_{k+1}}{h} \qquad \text{или} \qquad x = x_{k+1} + uh; \qquad (11.9)$$

когда x последовательно принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, \ldots, x_{2k+1}$, то u будет принимать целочисленные значения

$-k,\ -k+1,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,\ k.$

Действительно, пусть n=7, а x_1=1; x_2=2; x_3=3; x_4=4; x_5=5; x_6=6; x_7=7. Тогда 7=2k+1, а k=3; h=1, x_{k+1}=4. В соответствии с зависимостью (11.9) u принимает значения

–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.

Если искать зависимость y от u, т. е. найти коэффициенты многочлена

$$y = a_0 + a_1u + \ldots + a_mu^m, \qquad (11.10)$$

то система (11.10) для определения $a_0, a_1, \ldots, a_m$ значительно упростится, ибо благодаря выбору значений u суммы нечетных степеней будут равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} u_i = \sum_{i=1}^{2k+1} u_i^3 = \ldots = 0. \qquad (11.11)$$

Для случая четного числа наблюдений $n = 2k$ введем переменную u равенством

$$u = \frac{2(x - x_k)}{h} - 1 \quad \text{или} \quad x = \frac{(u+1)h}{2} + x_k. \qquad (11.12)$$

Тогда при изменении индекса у x от 1 до $2k$ величина u последовательно будет равна

$$-2k+1, \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots, 2k-1$$

и снова сумма нечетных степеней u будет равна нулю. После того, как многочлен (11.10) будет определен (т. е. найдены его коэффициенты), можно перейти к старой переменной x по формулам (11.9) или (11.12).

Выясним, как будет выглядеть система (11.8) в простейших случаях многочленов первой, второй и третьей степени.

Пусть $y = a_0 + a_1u$; тогда, учитывая равенство (11.11), получим вместо системы двух уравнений с двумя неизвестными два независимых уравнения, так как $\sum u_i = 0$ (здесь и в дальнейшем суммирование ведется в пределах от 1 до n, и индексы суммирования для краткости опускаются)

$$na_0 = \sum y_i, \; a_1 \sum u_i^2 = \sum u_i y_i,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum y_i; \; a_1 = \frac{\sum u_i y_i}{\sum u_i^2}. \qquad (11.13)$$

Для случая многочлена второй степени система (11.8) запишется в виде (в трех уравнениях будут отсутствовать члены, умножаемые на суммы нечетных степеней u):

$$\begin{aligned} na_0 + a_2 \sum u_i^2 &= \sum y_i, \\ a_1 \sum u_i^2 &= \sum u_i y_i, \\ a_0 \sum u_i^2 + a_2 \sum u_i^4 &= \sum u_i^2 y_i. \end{aligned} \qquad (11.14)$$

Решая полученную систему, найдем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum y_i \sum u_i^4 - \sum u_i^2 y_i \sum u_i^2}{n\sum u_i^4 - (\sum u_i^2)^2}, \\ a_1 &= \frac{\sum u_i y_i}{\sum u_i^2}, \\ a_2 &= \frac{n\sum u_i^2 y_i - \sum y_i \sum u_i^2}{n\sum u_i^4 - (\sum u_i^2)^2}. \end{aligned} \qquad (11.15)$$

Для многочлена третьей степени система (11.8) запишется в виде:

$$\begin{aligned} na_0 + a_2 \sum u_i^2 &= \sum y_i, \\ a_1 \sum u_i^2 + a_3 \sum u_i^4 &= \sum u_i y_i, \\ a_0 \sum u_i^2 + a_2 \sum u_i^4 &= \sum u_i^2 y_i, \\ a_1 \sum u_i^4 + a_3 \sum u_i^6 &= \sum u_i^3 y_i. \end{aligned} \qquad (11.16)$$

В системе (11.16) первое и третье уравнение в точности равны таким же уравнениям системы (11.14), т.е. коэффициенты многочлена a_0 и a_2 могут быть вычислены по зависимостям (11.15). Решив совместно второе и четвертое уравнения системы (11.16), найдем коэффициенты a_1 и a_3 для многочлена третьей степени:

$$a_1 = \frac{\sum u_i^6 \sum u_i y_i - \sum u_i^4 \sum u_i^3 y_i}{\sum u_i^2 \sum u_i^6 - (\sum u_i^4)^2},$$

$$a_3 = \frac{\sum u_i^2 \sum u_i^3 y_i - \sum u_i^4 \sum u_i y_i}{\sum u_i^2 \sum u_i^6 - (\sum u_i^4)^2}. \qquad (11.17)$$

Заметим, что целый ряд множителей в (11.13), (11.15) и (11.17) имеет вид суммы степеней *u,* значение которой в соответствии с зависимостями (11.9) и (11.12) принимает некоторые целочисленные значения, т. е. не зависит от результатов наблюдений и вполне определяется числом экспериментальных значений. Для таких множителей можно заранее составить таблицы значений, что весьма облегчит нахождение коэффициентов a_i .

Введем обозначения (суммирование ведется в пределах от 1 до n):

$$\alpha_1 = \frac{1}{n},\ \alpha_2 = \frac{1}{\sum u_i^2}, \qquad \alpha_3 = \frac{\sum u_i^4}{n\sum u_i^4 - (\sum u_i^2)^2},$$
$$\alpha_4 = \frac{\sum u_i^2}{n\sum u_i^4 - (\sum u_i^2)^2}, \qquad \alpha_5 = \frac{n}{n\sum u_i^4 - (\sum u_i^2)^2},$$
$$\alpha_6 = \frac{\sum u_i^6}{\sum u_i^2 \sum u_i^6 - (\sum u_i^4)^2},\ \alpha_7 = \frac{\sum u_i^4}{\sum u_i^2 \sum u_i^6 - (\sum u_i^4)^2}, \qquad (11.18)$$
$$\alpha_8 = \frac{\sum u_i^2}{\sum u_i^2 \sum u_i^6 - (\sum u_i^4)^2}.$$

Пользуясь обозначениями (11.18), можно записать выражения для коэффициентов a_i для каждого многочлена в виде табл. 3. Аналогичные формулы можно получить и для коэффициентов многочленов более высоких степеней.

Таблица 4

Значения коэффициентов a_i

Степень уравнения	Коэффициент			
	a_0	a_1	a_2	a_3
1	$\alpha_1 \sum y_i$	$\alpha_2 \sum u_i y_i$	-	-
2	$\alpha_3 \sum y_i -$ $- \alpha_4 \sum u_i^2 y_i$	$\alpha_2 \sum u_i y_i$	$\alpha_5 \sum u_i^2 y_i -$ $- \alpha_4 \sum y_i$	-
3	$\alpha_3 \sum y_i -$ $- \alpha_4 \sum u_i^2 y_i$	$\alpha_6 \sum u_i y_i -$ $- \alpha_7 \sum u_i^3 y_i$	$\alpha_5 \sum u_i^2 y_i -$ $- \alpha_4 \sum y_i$	$\alpha_8 \sum u_i^3 y_i -$ $- \alpha_7 \sum u_i y_i$

Что касается числовых значений коэффициентов α_k, то в зависимости от числа экспериментальных точек они могут быть вычислены заранее. Эти значения приведены в прил. 3.

Блок 7,8 (4 часа).

Пример. Требуется определить зависимость эффективного крутящего момента M_e (Н·м) бензинового двигателя от частоты вращения коленчатого вала $n_д$ (мин$^{-1}$) при снятии внешней скоростной характеристики по результатам девяти наблюдений, приведенных в табл. 5.

Для решения вопроса о степени приближающего многочлена для зависимости $M_e = f(n_д)$ по данным столбцов 1 – 2 (табл. 5) в столбцах 3 – 4 приведены разности ΔM_{ei} и $\Delta^2 M_{ei}$. Как показывают данные столбца 4, вторые разности являются практически постоянными. На основании этого будем искать многочлен второй степени.

Таблица 5.

Результаты замеров и расчетов крутящего момента бензинового двигателя

$n_д$	M_{ei}	ΔM_{ei}	$\Delta^2 M_{ei}$	u_i	$u_i M_{ei}$	u_i^2	$u_i^2\ M_{ei}$	$M_{ei выч.}$	$M_{ei\ выч.}$-$M_{ei набл.}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1500	90	6	-2	-4	-360	16	1440	92,53	2,53
2000	96	4	-2	-3	-288	9	864	96,18	0,18
2500	100	2	-1	-2	-200	4	400	100,15	0,15
3000	102	1	-1	-1	-102	1	102	102,38	0,38
3500	103	-2	0	0	0	0	0	102,9	- 0,1
4000	101	-2	-3	1	101	1	101	101,58	0,58
4500	99	-5	-3	2	198	4	396	98,56	- 0,4
5000	94	-8	-	3	282	9	846	93,78	- 0,22
5500	86	-	-	4	344	16	1376	87,23	1,23
Σ	**871**	**-**	**-**	**0**	**-25**	**60**	**5525**	**-**	**-**

Зависимость возьмем в виде многочлена второй степени:

$$M_e = A_0 + A_1 n_д + A_2 n_д^2, \qquad (11.19)$$

где коэффициенты A_0, A_1 и A_2 вычислим по данным столбцов 1 – 2.

Поскольку значения $n_д$ даны точными и с постоянным шагом $n_{д,i+1} - n_{д,i} = 500$ (i = 1, 2, … , 8), то введем вместо $n_д$ новый аргумент u.

$$n = 2k + 1 = 9;\ n_k = 4;\ h = 500 \text{ и } n_{д5} = 3500;\ u = \frac{n_д - 3500}{500} = 0{,}002 n_д - 7.$$

Тогда зависимость (11.19) примет вид

$$M_e = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

Столбец 5 табл. 5 содержит значения u, соответствующие приведенным значениям $n_д$.

Из прил. 3 находим

α_2 = 0,01666; α_3 = 0,2554; α_4 = 0,02165; α_5 =0,003257.

Столбцы 5 – 8 содержат произведения, нужные для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2. Поэтому согласно данным прил. 3

a_0 = 0,2554·871 - 0,02165·5525 = 102,84; a_1 = 0,01666·(-25) = -0,404;

a_2 = 0,003257·5525 – 0,021645·871.

Таким образом, приближающий многочлен для M_e имеет вид

$$M_e = 102{,}84 - 0{,}404u - 0{,}9753u^2.$$

Остается возвратиться от переменной u к переменной $n_д$, и искомый многочлен приобретает вид

$$M_e = 102{,}84 - 0{,}404(0{,}002 n_д - 7) - 0{,}9753(0{,}002 n_д - 7)^2,$$

или, после алгебраических преобразований,

$$M_e = 62{,}78 + 0{,}0237 n_д - 3{,}5 \cdot 10^{-6} n_д^2.$$

Столбцы 9 – 10 содержат вычисления значений M_{ei} с помощью полученного многочлена и сравнение их с экспериментальными данными.

Поскольку эффективная мощность двигателя определяется однозначно: $N_e = (M_e n_д)/9554$, то для N_e получим зависимость

$$N_e = 6{,}571 \cdot 10^{-3} n_д + 2{,}48 \cdot 10^{-6} n_д^2 - 3{,}6633 \cdot 10^{-11} n_д^3.$$

Полученные зависимости позволяют построить зависимости $M_e = f(n_д)$ и $N_e = f(n_д)$.

12. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ОФОРМЛЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Результаты измерений необходимо записывать и обрабатывать определенным образом. Разумная схема записи предупреждает грубые ошибки при выполнении измерений, экономит время, позволяет по записи быстро понять смысл работы.

Результаты измерений записывают только в журнал лабораторных работ. Для вспомогательных расчетов можно использовать черновики. Всю подготовительную работу (оформление вводной части, построение таблиц, подготовка миллиметровой бумаги для графиков и т. д.) следует выполнять заранее с тем, чтобы в лаборатории только производить измерения, записывать и обрабатывать результаты измерений. Правильно оформленная лабораторная работа — это отчет, основу которого составляют три части. В первой, вводной, части описывают установку и применяемый метод измерения. Во второй, основной, части должны содержаться результаты всех прямых измерений. Итоговые результаты эксперимента и выводы приводят в третьей части.

Вводная часть должна содержать краткое описание примененного метода измерений и основных элементов (узлов) установки, которая используется для реализации этого метода. В этой части следует также указать основные характеристики используемых приборов.

Затруднительно дать одну точную схему, согласно которой следует оформлять вводную часть для всех задач экспериментального исследования. Однако можно рекомендовать следующую примерную схему:

1. Указать название задачи.

2. Выполнить схематический чертеж (рисунок, схему), поясняющий идею применяемого метода измерений, и схему экспериментальной установки. На чертеже обозначить характерные величины.

3. В одном-двух предложениях сформулировать идею метода измерений.

4. Привести основные расчетные формулы.

5. Привести обозначения и названия величин, встречающихся при измерениях.

6. Указать название, диапазон измерения, цену деления и ошибки для всех используемых приборов.

7. Для каждого упражнения записать его название и номер. Если в данном упражнении используют дополнительные формулы, приборы, применяю другой метод измерения, то это необходимо указать дополнительно.

Результаты измерений рекомендуется записывать в таблицы (протокол наблюдений), которые оформляют следующим образом:

1. Сначала записывают номер таблицы и ее название.

2. Каждый столбец (или строка) таблицы должен иметь название измеряемой величины, ее обозначение и единицы измерения.

3. Разумно в первые столбцы записывать величины, играющие роль аргумента (например, время, температура и т. д.), а в последующие — роль функции (скорость, теплоемкость и т. д.).

4. Иногда бывает удобно рядом со столбцом для некоторой величины X_i записывать в отдельные столбцы разность этой величины (X_i - X) и квадрата этой разности $(X_i - X)^2$.

5. Таблицы следует чертить только с использованием линейки. Желательно, чтобы таблица результатов измерений выглядела приемлемо с эстетической точки зрения.

После окончания измерений проводят расчеты. Сначала вычисляют выборочные средние, а также оценки стандартных отклонений случайных и систематических ошибок для прямых измерений. Если искомая величина — результат косвенных или совместных измерений, то производят необходимые расчеты соответствующих оценок средних значений и стандартных отклонений. В журнале лабораторных работ для каждой рассчитываемой величины сначала записывают формулу, затем переписывают ту же формулу с подставленными в нее числовыми значениями и, наконец, приводят результат вычислений. Таким образом, рекомендуется придерживаться схемы: формула — арифметическое выражение — результат расчета. Для записи результатов промежуточных вычислений можно использовать черновики. Если результат вычисляется на ЭВМ, то прикладывают распечатку расчета.

Затем, в тех случаях, когда это возможно, определяют интервал, в котором искомая величина может находиться с установленной вероятностью.

В третьей части отчета нужно привести все итоговые результаты эксперимента и сделать необходимые выводы. Если результаты эксперимента можно получить из расчета (с использованием некоторых простейших измерений), то рекомендуется провести сопоставление экспериментальных и расчетных данных. Для последних приводят формулы, по которым они были вычислены.

Если по каким-либо причинам (например на начальном этапе обучения) систематические погрешности не определялись, то необходимо указать: *«систематические погрешности не определялись».*

Рекомендуется также проанализировать достоинства и недостатки примененного метода измерений желательно в сопоставлении с другими известными методами измерений искомой величины. В заключение в выводах можно отметить относительную точность результатов измерений, соотношение случайной и систематической ошибок, возможность уменьшения ошибок и сделать общие замечания о работе установки.

Как правило, в результате обработки результатов эксперимента на графике должны получиться гладкие, плавные линии, без резких изломов. Экспериментальные точки вследствие ошибок измерений не ложатся на гладкую кривую, а группируются вокруг нее случайным образом. Поэтому не следует соединять соседние экспериментальные точки на графике отрезками прямой и получать таким образом некоторую ломаную линию.

Проводить гладкие кривые, соответствующие физическим зависимостям, следует в согласии с идеями метода наименьших квадратов. Сначала из уравнений измерения необходимо выяснить, какая имеется зависимость (линейная, степенная, экспоненциальная и т. д.). Разумно, если это возможно, сделать такую замену переменных, чтобы в новых переменных зависимость была бы линейной.

Однако иногда не требуется вычислять коэффициенты для кривых по методу наименьших квадратов. В этом случае кривые на графике следует проводить на глаз так, чтобы примерно выполнялось требование МНК о минимальности суммы квадратов расстояний от точек до кривой. В случае построения нелинейных зависимостей по МНК следует обращаться к справочной или учебной литературе .

Графики выполняют обязательно на миллиметровой бумаге или с использованием ПЭВМ. Сначала нужно выбрать масштаб по осям координат. Масштаб выбирают таким образом, чтобы угол наклона кривых на графике был близок к 45° (если не имеют в виду, что функция является постоянной, или другие особые случаи). Кривые должны занимать по возможности все поле чертежа (т. е. должно быть соответствие между протяженностью кривой и размером чертежа). За единицу масштаба разумно выбирать только числа, кратные 5, 10, 50, 100 мм.

В качестве осей координат следует использовать прямоугольную рамку (это облегчает пользование чертежом). На осях координат наносят метки, соответствующие целым цифровым значениям. Цифровые значения представляются только для крупных единиц масштаба. Около оси координат необходимо написать название величины, которая отложена по данной оси, ее обозначение и единицу измерения. Все надписи и цифровые значения должны быть крупными (высота знаков не менее 2 мм).

Экспериментальные точки наносят на чертеж в виде точек и обводят кружками диаметром 2…3 мм. С помощью линейки или лекала между точками проводят гладкую кривую возможно ближе ко всем экспериментальным точкам. Если имеется несколько кривых, то каждой кривой присваивают номер, а на свободном поле чертежа указывают название, обозначение, цифровое значение и единицу измерения параметра, соответствующего этому номеру. Если имеется теоретическая кривая, то ее наносят на чертеж с указанием, по какой теории она получена. Если имеются кривые или экспериментальные точки, полученные различными методами, то желательно использовать для их построения линии и фигуры разной структуры (сплошные линии, пунктир, кружочки, квадратики и т. д.).

График должен быть наглядным и приемлемым с эстетической точки зрения (разные цвета для экспериментальных точек, кривых, осей координат и т. д.). Готовый график подклеивают в журнал лабораторных работ и снабжают подписью, разъясняющей его смысл.