

**КУРС ЛЕКЦИЙ**  
**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**  
**ДИСЦИПЛИНЫ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»**

а) основная литература:

1. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. Изд-во ЛАНЬ, 2015. – 340 с. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785930939101.html>
2. Земцов В.М. Основы теории вероятности и математической статистики (электронный ресурс). Учебное пособие. М.: АСВ, 2013 – 540 с.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785930939101.html>
3. Никитин О.Р. Обработка экспериментальных данных (электронный ресурс): конспект лекций/ О.Р. Никитин; Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. 2012 – 229 с.  
<http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/2926/1/00164.doc>.
4. Яковлев В.П. Теория вероятности и математическая статистика ((электронный ресурс). Учебное пособие. М.: Дашков и К, 2012 – 184 с.  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785394016363.html>.

б) дополнительная литература:

1. Гоц А.Н., Горнушкин Ю.Г. Погрешности измерений при экспериментальных исследованиях двигателей внутреннего сгорания. Учеб. пособие/ Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 64 с.
2. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа: учеб. пособие./Э.А. Вуколов – 2-е изд., исп. и доп. – М.: ФОРУМ: интра-м, 2014. – 464 с.
3. Семин В.А., Семина С.М. Основы получения и обработки экспериментальных данных: учебно-методическое пособие. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – 68 с.
4. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. Пер. с английского. М.: Радио и связь. 1988 г.

в) периодические издания: журналы «Двигателестроение», «Дизель», «Известия вузов Машиностроение»

в) интернет-ресурсы <http://window.edu.ru/resource/635/19635/files/metod551.pdf>;  
<https://yandex.ru/search/?lr=192&msid=22883.3563.1455454546.93413>

В связи с этим, последовательность изложения курса «Методы оптимизации» на лекциях будет дана блоками и основана на приведенных выше учебных пособий, которые в достаточном количестве имеются в библиотеке ВлГУ.

**Блок 1 (4 часа лекций).** Введение. Минимум функции одного переменного. Постановка задачи. Золотое сечение. Метод парабол. Минимум функции двух переменных. Рельеф функции. Спуск по координатам. Наискорейший спуск. Метод оврагов. Сопряженные направления. Случайный поиск. Примеры. [1, глава 1] Стохастические задачи. Примеры. Рассмотрим методы поиска оптимальных значений максимума или минимума функции  $n$  действительных переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Если функция выражает прибыль, получаемую при производстве товаров  $x_i$  в количестве  $P_{ii}$  то мы будем стремиться максимизировать функцию. Если, с другой стороны, она выражает цену товара, участвующего в обороте, то мы будем стремиться минимизировать функцию. С математической точки зрения не играет существенной роли, рассматривать максимизацию или минимизацию, поскольку максимизация  $f$  эквивалентна минимизации  $-f$ . Мы ограничимся рассмотрением минимизации.

Значения переменных могут подчиняться ограничениям или изменяться без ограничений. Если, например, они действительно выражают количество определенных производимых продуктов, то при этом будет существовать ограничение на производственную мощность и ограничение на количество товара, которое может поглотить рынок. Таким образом, любое решение оптимизационной задачи должно учитывать эти ограничения. Для удобства сначала будут рассмотрены задачи, в которых на переменные не наложены ограничения, а затем рассмотрены задачи, в которых на переменные наложены ограничения.

В любой практической оптимизационной задаче существует много совпадающих этапов. Наиболее важным этапом является моделирование рассматриваемой физической ситуации с целью получения математической функции, которую необходимо минимизировать, а также определения ограничений, если таковые существуют. Затем следует выбрать подходящую процедуру для осуществления минимизации. Эта процедура должна быть реализована на практике, что во многих реальных случаях вынуждает использовать ПЭВМ для выполнения большого объема вычислений. И наконец, математический результат должен быть интерпретирован опять же в терминах физического содержания задачи.

Хотя ни одним из этих этапов нельзя пренебречь, основной упор нами будет сделан на изучение процедур, предназначенных для осуществления минимизации, и возможностей их преобразования в такие вычислительные процедуры, которые можно выполнить на ПЭВМ.

Не случайно, что многие важные методы оптимизации были разработаны в течение трех последних десятилетий, в период появления цифровых ЭВМ, и эти методы являются машинными. Трудно считать их сколько-нибудь практически значимыми без большой скорости и эффективности вычислительных машин, имеющихся в нашем распоряжении. На многих универсальных ПЭВМ имеются пакеты программ оптимизации, реализующие эти методы. Они могут оказаться весьма эффективными и позволят решить широкий круг задач. При этом они могут быть достаточно самостоятельными и использоваться без оценки того, что происходит в действительности.

**Блок 2 (4 часа лекций).** Минимум в ограниченной области. Формулировка задачи. Метод штрафных функций. Линейное программирование. Симплекс метод. Регуляризация линейного программирования. Минимизация функционала. Задачи на минимум функционала.

Функции одной переменной. Функция  $f(x)$  имеет локальный минимум в точке  $x_0$ , если существует некоторая положительная величина  $\delta$ , такая, что если  $|x - x_0| < \delta$ , то  $f(x) \geq f(x_0)$ , т.е. если существует окрестность точки  $x_0$ , такая, что для всех значений  $x$  в этой окрестности  $f(x)$  больше  $f(x_0)$ . Функция  $f(x)$  имеет глобальный минимум в точке  $x^*$ , если для всех  $x$  справедливо неравенство  $f(x) \geq f(x^*)$ .

Классический подход к задаче нахождения значений  $x_0$  и  $x^*$  состоит в поиске уравнений, которым они должны удовлетворять.

Для функций одной переменной классический подход при поиске значений  $x$  в точках перегиба функции  $f(x)$  состоит в решении уравнения  $f'(x)$ .

Решить такое уравнение не всегда просто. Поэтому кратко рассмотрим численный метод его решения. Приблизительный эскиз кривой  $f'(x)$  позволит получить

приближенное решение. Если можно найти два значения  $a$  и  $b$ , таких, что  $f'(a)$  и  $f'(b)$  имеют противоположные знаки, то тогда, в силу очевидных предположений о непрерывности, будет существовать корень  $\eta$  настоящего уравнения, причем  $a < \eta < b$ . (дополнительная литература[4]).

### Блок 3 (4 часа лекций).

#### Выбор оптимального коэффициента демпфирования и коэффициента жесткости упругого слоя демпферов внутреннего трения

Пусть  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – соответственно мгновенные значения углов поворота маховика и первой массы, в качестве которой может выбрана втулка вместе со шкивом на носке коленчатого вала (рис. 3.5). Тогда мгновенное значение относительного угла поворота между массами с моментами инерции  $I_0$  (маховик) и  $I_1$  оказывается равным  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ . Крутящий момент, действующий на маховик демпфера согласно аналога закона Ньютона для вращательного движения [30] равен  $I_0\ddot{\varphi}_0$ , причем этот момент равен моментам: сопротивления от рассеяние энергии в резиновом слое и – и упругих сил. Используя систему (3.3), рассмотрим свободные колебания двухмассовой системы с демпфером.

Считаем, что при деформировании резинового слоя часть энергии рассеивается, а часть – переходит в потенциальную энергию упругой деформации. Таким образом, из системы уравнений (3.3) имеем:

$$I_0\ddot{\varphi}_0 = \xi_0(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) + C_{0,1}(\varphi_1 - \varphi_0). \quad (3.31)$$

Здесь  $\xi_0$  – коэффициент демпфирования в резиновом слое, Н·м·с;  $C_{0,1}$  – коэффициент жесткости его.

Если представить, что массы с моментами инерции  $I_0$  и  $I_1$  перемещается по закону

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A_0 e^{i\omega_c t}; \\ \varphi_1 &= A_1 e^{i\omega_c t}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

то получим уравнение относительно неизвестного угла  $\varphi_0$ , как функции угла  $\varphi_1$ .

Подставив значение первой производной по  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , а также второй производной по  $\varphi_0$  из (3.32) в уравнение (3.31), получим в комплексной форме:

$$A_0 I_0 \omega_c^2 - A_0 C_{0,1} - i A_0 \xi_0 \omega_c = -A_1 C_{0,1} - i A_1 \xi_0 \omega_c. \quad (3.33)$$

Разрешая это уравнение относительно амплитуды колебаний  $A_0$  маховика демпфера, находим

$$A_0 = \frac{-C_{0,1} - i \xi_0 \omega_c}{I_0 \omega_c^2 - C_{0,1} - i \xi_0 \omega_c} A_1 \quad (3.34)$$

или в действительной форме

$$A_0 = \frac{\sqrt{C_{0,1}^2 + \xi_0^2 \omega_c^2}}{\sqrt{(I_0 \omega_c^2 - C_{0,1})^2 + \xi_0^2 \omega_c^2}} A_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{C_{0,1}}{\xi_0 \omega_c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_0 \omega_c}{\xi_0} - \frac{C_{0,1}}{\xi_0 \omega_c}\right)^2}} A_1. \quad (3.35)$$

Заметим, что для жидкостного демпфера  $C_{0,1}=0$ . Тогда из уравнения (3.35) получим

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_0 \omega_c}{\xi_0}\right)^2}} A_1. \quad (3.36)$$

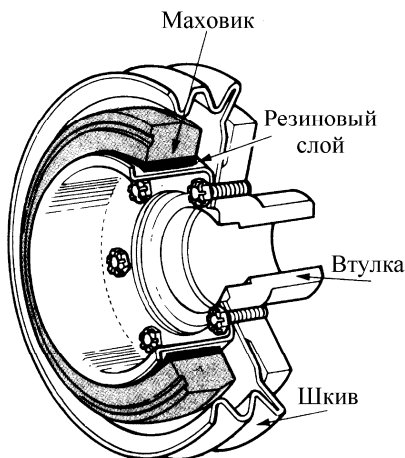


Рис. 3.5. Резиновый демпфер крутильных колебаний

Это решение совпадает с результатом, приведенным в работе [30] для жидкостного демпфера .

Анализируя (3.35), устанавливаем тот физический факт, что при  $\xi_0 = C_{0,1} = 0$  (нет никакой связи с массой с моментом инерции  $I_1$ )  $\varphi_0 = 0$ , тогда как для  $\xi_0 \omega + C_{0,1} = \infty$  (маховик и втулка составляют единое целое) имеем  $\varphi_0 = \varphi_1$ .

Наибольший крутящий момент, передаваемый маховику демпфера равен  $I_0 \omega_c^2 A_0$ . Работа за цикл, т. е. за одно полное колебание, равна [259, 264, 265]

$$W = \pi (I_0 \omega_c^2 A_0) (A_1 - A_0), \quad (3.37)$$

где разность амплитуд  $A_1$  и  $A_0$  найдем по правилу вычитания комплексных величин

$$A_1 - A_0 = \frac{I_0 \omega_c^2}{I_0 \omega_c^2 - C_{0,1} - i \xi_0 \omega_c} A_1,$$

или в действительной форме

$$A_1 - A_0 = \frac{I_0 \omega_c^2}{\sqrt{(I_0 \omega_c^2 - C_{0,1})^2 + \xi_0^2 \omega_c^2}} A_1. \quad (3.38)$$

Подставляя в (3.37) значение  $A_0$  из (3.35), а разность амплитуд – из (3.38) и производя преобразования, находим

$$W = \frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2 \cdot 2 \frac{\sqrt{\left(\frac{C_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}}{\left(1 - \frac{C_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}. \quad (3.39)$$

Для демпфера жидкостного трения, приняв  $C_{0,1} = 0$ , из (3.39) получим

$$W = \frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2 \frac{2 \xi_0}{1 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}. \quad (3.40)$$

Решение (3.40) совпадает выражением, приведенным в работе [30].

Дробь, стоящая в (3.40) в качестве последнего множителя, достигает наибольшего значения, равного единице, при  $\xi_0 / (I_0 \omega_c) = 1$ . Это легко может быть найдено дифференцированием (3.40). Таким образом, заключаем, что оптимальное затухание для жидкостного демпфера (для максимума рассеиваемой энергии) определяется формулами

$$\xi_{\text{опт.}} = I_0 \omega_c; \quad (3.41)$$

$$W_{\text{опт.}} = \frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2. \quad (3.42)$$

На рис. 3.6 [30] графически представлено зависимость в безразмерных величинах

$$Y = f(X), \text{ где согласно (3.42) } Y = \frac{W}{\frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2}, \quad X = \frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}.$$

Что касается момента сил инерции или эквивалентного инерционного момента, воспринимаемого втулкой (рис. 3.5) или корпусом жидкостного демпфера с моментом инерции  $I_0$ , то согласно [30] он равен

$$I_{\text{экр}} \omega_c^2 A_1 = \frac{A_0}{A_1} (I_0 \omega_c^2 A_0),$$

откуда эквивалентный момент инерции равен

$$I_{\text{экр}} = I_0 \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^2 \text{ или согласно уравнению (3.35)}$$

$$I_{\text{экр}} = I_0 \frac{1 + \left( \frac{C_{0,1}}{\xi_0 \omega_c} \right)^2}{1 + \left( \frac{I_0 \omega_c}{\xi_0} - \frac{C_{0,1}}{\xi_0 \omega_c} \right)^2}. \quad (3.43)$$

Для жидкостного демпфера крутильных колебаний ( $C_{0,1}=0$ ) из (3.43) получим

$$I_{\text{экр}} = I_0 \frac{1}{1 + \left( \frac{I_0 \omega_c}{\xi_0} \right)^2}. \quad (3.44)$$

Для оптимального затухания

$$I_{\text{экр}} = 0,5 I_0. \quad (3.45)$$

Результаты (3.44) и (3.45)

представлены графически на рис. 3.7. При расчете собственных колебаний системы с жидкостным демпфером, половина момента инерции маховика приплюсовывается к моменту инерции первой массы. Напомним, что мы условились массу маховика демпфера обозначать 0, а следующую за ним массу 1. Строго говоря, зависимость (3.45) верна только тогда, когда затухание является

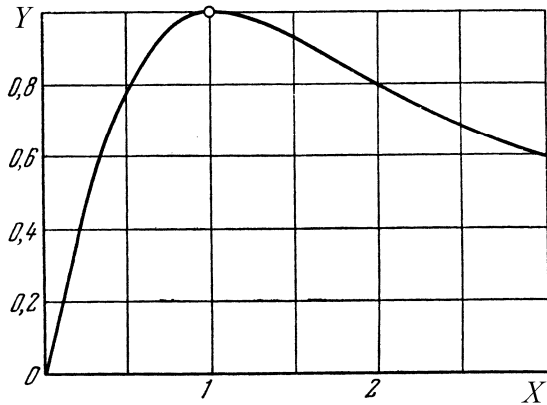


Рис. 3.6. Работа, рассеиваемая за период колебаний демпфером внутреннего трения в относительных величинах  $Y$  и  $X$

$\xi_0 = I_0 \omega_c$ , откуда получаем

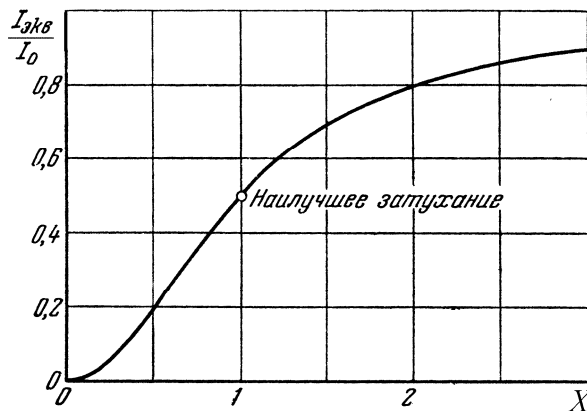


Рис. 3.7. Действие эквивалентного маховика на первую массу в демпфере в зависимости от момента затухания

оптимальным. Согласно уравнению (3.41) это справедливо для заданного демпфера лишь при одной определенной частоте колебаний. Однако расчет начинается с оптимального затухания. Рассчитывая систему, находим опасную частоту и тогда уже назначаем затухание  $\xi_0$  для демпфера так, чтобы иметь оптимум. Это может быть сделано для демпфера внутреннего трения выбором демпфирующего материала с соответствующими размерами и коэффициентом жесткости  $C_{0,1}$ , а для жидкостного – вязкости силиконовой жидкости

Блок 4 (4 часа лекций). Расчет оптимального момента трения жидкостного демпфера

Момент вязкого трения, который возникает в жидкой пленке между маховиком и корпусом демпфера, равен

$$M'_T = \xi_0 \omega_c (A_1 - A_0), \quad (3.78)$$

или, используя из зависимости (3.38) разность амплитуд для жидкостного демпфера

$$M'_T = \xi_0 \omega_c \zeta_{ж} A_1, \quad (3.79)$$

где

$$\zeta_{ж} = \frac{\frac{I_0 \omega_c}{\xi_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_0 \omega_c}{\xi_0}\right)^2}}. \quad (3.80)$$

С другой стороны, момент трения можно определить, исходя из того, он возникает в демпфирующей жидкости, находящейся в зазорах между цилиндрической и торцевыми поверхностями маховика и корпуса

$$M''_T = M_{тц} + 2M_{тт}. \quad (3.81)$$

Момент трения в зазорах цилиндрической поверхности (при установке его на подшипниках скольжения по внутреннему диаметру) равен

$$M_{тц} = F_{тц} R_H, \quad (3.82)$$

где  $F_{тц}$  – сила трения на цилиндрической поверхности маховика;  $R_H$  – наружный радиус его.

Величина силы трения  $F_{тц}$ , возникающей при относительной скорости  $V_{ц}$  смещения двух поверхностей с площадями  $S_{ц}$  каждая и разделенная зазором  $h_p$ , равна [250]:

$$F_{тц} = \frac{\eta_D S_{ц} V_{ц}}{h_p} \quad \text{или} \quad F_{тц} = \eta_D S_{ц} D, \quad (3.83)$$

где  $S_{ц} = 2\pi R_H l$ ;  $l$  – ширина маховика демпфера;  $\eta_D$  – вязкость демпфирующей жидкости с учетом влияние на нее температуры и градиента скорости сдвига  $D$  (формулы (3.75) и (3.76));  $V_{ц}$  – относительная скорость:  $V_{ц} = \omega_c R_H \zeta_{ж} A_1$ ;  $\omega_c$  – собственная угловая частота колебаний системы;  $D = V_{ц}/h_p$  – градиент скорости сдвига:

$$D = \frac{V_{ц}}{h_p} = \frac{\omega_c R_H \zeta_{ж} A_1}{h_p} \quad (3.84)$$

Подставив значение  $F_{тц}$  из (3.83) в формулу (3.82), окончательно получим

$$M_{тц} = \frac{2\pi \eta_D \omega_c l R_H^3 \zeta_{ж} A_1}{h_p}. \quad (3.85)$$

Выделив на торцевой поверхности маховика элементарную площадку  $dS_T = 2\pi R dR$  (рис. 3.27, а), найдем, что при относительной скорости перемещения  $V_T = \omega_c \zeta_{ж} A_1 R$  элементарная сила трения  $dF_{тт}$  на этой поверхности равна

$$dF_{тт} = \frac{2\pi \eta_D V_T R dR}{h_T} = \frac{2\pi \eta_D \omega_c \zeta_{ж} A_1 R^2 dR}{h_T}, \quad (3.86)$$

а момент трения  $M_{тт}$  на ней равен

$$dM_{тт} = \frac{2\pi \eta_D \omega_c \zeta_{ж} A_1 R^3 dR}{h_T} = 2\pi \eta_D D_0 R^3 dR, \quad (3.87)$$

где  $D_0 = \frac{\omega_c \xi_{ж} A_1}{h_T}$ .

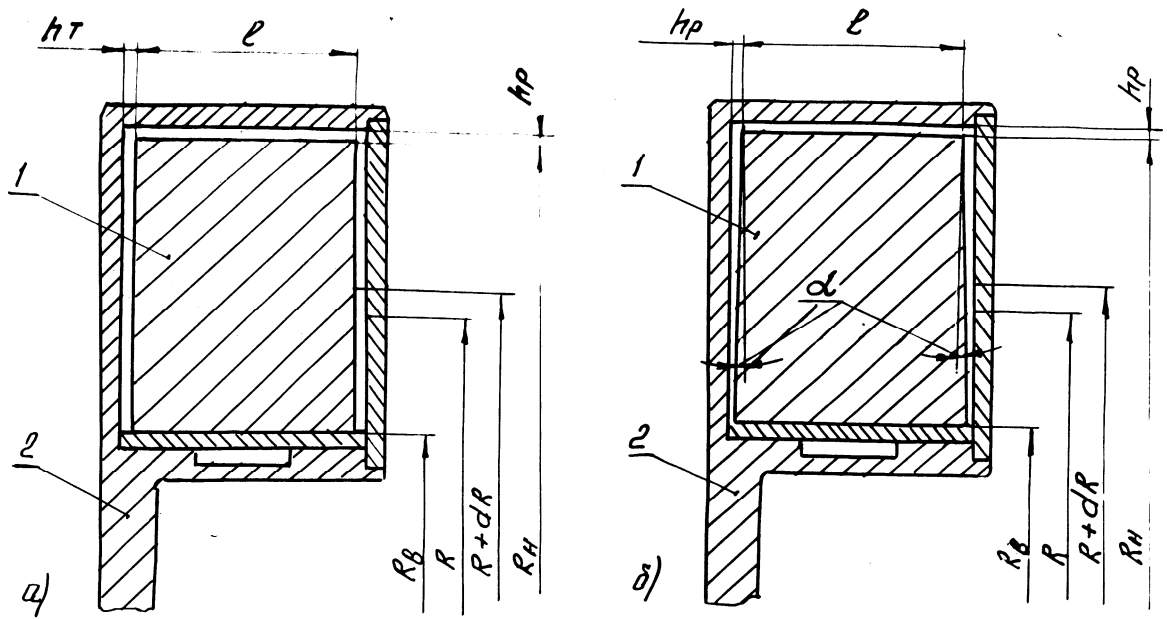


Рис. 3.27. Схема жидкостного демпфера: 1 – маховик; 2 – корпус; а) торцевые зазоры постоянны; б) торцевые зазоры конические

Полный момент трения на каждой торцевой поверхности равен

$$M_{тр} = \int_{R_B}^{R_H} dM_{тр} = 2\pi D_0 \eta_t^{0,047} \int_{R_B}^{R_H} \frac{R^3 dR}{1,1181 + B_{\eta_t} (D_0 R)^{C_{\eta_t}} \eta_t^{0,047}}, \quad (3.88)$$

где  $R_B$  и  $R_H$  – внутренний и наружный радиусы маховика; значения  $\eta_t$ ,  $B_{\eta_t}$ ,  $C_{\eta_t}$  определяются по формулам (3.75) и (3.76).

При постоянном зазоре между торцевыми поверхностями маховика и корпуса демпфера градиент скорости сдвига  $D$  – переменная величина, так как скорость  $V_T$  увеличивается с увеличением радиуса  $R$ . Нами разработана конструкция жидкостного демпфера крутильных колебаний [119, 262, 263], в котором торцевые поверхности маховика выполнены коническими с углом наклона (от внутренней поверхности)

$$\alpha = \arctg \frac{h_p}{R_H},$$

где  $h_p$  – радиальный зазор, выбранный при оптимальном демпфировании.

Поскольку на произвольном радиусе  $R$  торцевой зазор зависит только от радиуса  $h_T = R h_p / R_H$  (см. рис. 3.27, б), то полный крутящий момент трения в конических торцевых поверхностях равен:

$$M_{тр} = \frac{2\pi \eta_t^{0,047} D}{1,1181 + B_{\eta_t} D^{C_{\eta_t}} \eta_t^{0,047}} \cdot \frac{R_H^3 - R_B^3}{3}, \quad (3.89)$$

где градиент скорости сдвига  $D$  определяется по формуле (3.84) и величина его постоянна в зазорах. Динамическая вязкость  $\eta_t$  выбирается с учетом температуры и величины  $D$ .

Расчет вязкости демпфирующей жидкости, радиального и торцевых зазоров проводится на соответствие зависимостей (3.79) и (3.81)

$$M'_T = M''_T. \quad (3.90)$$

Для демпфера с постоянными торцевыми зазорами между корпусом и маховиком момент трения  $M''_{TT}$  равен

$$M''_T = \frac{2\pi\eta_t^{0,047}\omega_c I R_H^3 \zeta_{ж} A_1}{h_p (1,1181 + B_{\eta_t} D^{C_{\eta_t}} \eta_t^{0,047})} + 2\pi D_0 \eta_t^{0,047} \int_{R_B}^{R_H} \frac{R^3 dR}{1,1181 + B_{\eta_t} (D_0 R)^{C_{\eta_t}} \eta_t^{0,047}}. \quad (3.91)$$

Проинтегрировав численно последний член выражения (3.91), определим величину  $M''_T$

Для демпфера с коническими торцевыми поверхностями маховика момент трения  $M''_{TT}$  равен

$$M''_T = \frac{2\pi\eta_t^{0,047}\omega_c I R_H^3 \zeta_{ж} A_1}{h_p (1,1181 + B_{\eta_t} D^{C_{\eta_t}} \eta_t^{0,047})} + \frac{2\pi\eta_t^{0,047} D}{1,1181 + B_{\eta_t} D^{C_{\eta_t}}} \cdot \frac{R_H^3 - R_B^3}{3}. \quad (3.92)$$

кости демпфирующей жидкости, а также установления зазора между маховиком и корпусом демпфера, поскольку оба эти фактора влияют на величину  $\xi_0$ .

Исследуя зависимость (3.39), можно найти, что максимальное затухание для демпфера внутреннего трения возможно при следующих условиях [297, 298]

$$\xi_{0\text{опт}} = I_0 \omega_c \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{\frac{2C_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}}\right)^2 - \left(\frac{C_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2}. \quad (3.46)$$

Нетрудно заметить, что условия (3.46) при  $C_{0,1}=0$  приходим к результату (3.41), полученному для жидкостного демпфера крутильных колебаний.

Заметим, что проводить оптимизацию по уравнению (3.46) можно, изменяя только коэффициент жесткости  $C_{0,1}$  и момент инерции маховика демпфера  $I_0$ , поскольку частота собственных колебаний определяется по известным зависимостям. Кроме того, строго говоря, коэффициент демпфирования  $\xi_0$  также зависит от круговой частоты свободных крутильных колебаний системы  $\omega_c$ , поэтому зависимость (3.46) хорошо выполняется при высоких значениях величин  $I_0$  и  $C_{0,1}$ , что не всегда возможно обеспечить при конструировании демпфера внутреннего трения.

Разработал  
д.т.н., профессор  
кафедры ТД и ЭУ



А.Н.Гоц