

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

### **по дисциплине «Численные методы в энергомашиностроении»**

#### **Цель практических занятий по всему курсу:**

- научить студентов определять напряженно-деформированное состояние при упругих деформациях;
- научить студентов использовать в инженерных расчетах и научных исследованиях численные методы расчета прочности;
- получить навыки научно обоснованного подхода к выбору расчетных схем при расчете конкретных деталей машин энергетического машиностроения и методов проведения численных расчетов;
- научить проводить анализ полученных результатов расчета и, при необходимости внести изменения в методику расчета;
- воспитании ответственности за правильное и рациональное оформления результатов расчета.
- ознакомить студентов с известными методами численных расчетов в области энергетического машиностроения, организационными формами работ, способами их рационального проведения;
- обучить студентов основополагающим закономерностям обработки результатов расчетных исследований в энергетическом машиностроении, когда используемые модели описываются дифференциальными уравнениями, не имеющими точного решения;
- сформировать у студентов навыки и умения по организации проведения расчетных исследований, как в процессе обучения, так и в производственных условиях.

Особенностью учебного плана по направлению подготовки 141100 «Энергетическое машиностроение» (степень бакалавр), составленного на основании ФГОС ВПО (приказ от 08.12.2009 № 715) является усиление самостоятельной подготовки студентов, а занятия лекционного типа для соответствующих групп студентов должны составлять не более 40 процентов аудиторных занятий (п. 7.3 ФГОС). Подготовка к практическим занятиям проводится студентами после установочных лекций и самостоятельно (см. раздел «Методические рекомендации по самостоятельной работе по дисциплине «Численные методы в энергомашиностроении»). Студентам выдается темы для самостоятельного изучения разделов курса, которые в дальнейшем детально обсуждаются на практических занятиях.

**Используемые технологии преподавания.** Практические занятия являются формой индивидуально-группового и практико-ориентированного обучения на основе реальных или модельных ситуаций применительно к виду и профилю профессиональной деятельности. При планировании и проведении практических занятий исходим из того, что они предназначены прежде всего для углубления и расширения знаний, полученных в результате самостоятельной работы студента по учебнику или учебному пособию, а также для овладения методикой работы с научным материалом при подготовке выпускной квалификационной работы. Каждое практическое занятие начинается с краткого обобщения главнейших теоретических положений, которые должны служить и сходным моментом в работе студентов по данной теме. Для заинтересованности студентов по некоторым темам такое обобщение поручается сделать одному из студентов. Для этого требуется заранее предупредить студента о возможности такого поручения, что служит известным стимулом к их предварительной подготовке. Заключительное слово принадлежит преподавателю, так как отметить самое важное, точно сформулировать основные теоретические положения или охарактеризовать наиболее правильные методы работы студенту не всегда удается.

Естественно, необходимо после обобщения давать иногда дополнительные разъяснения студентам по теоретическим вопросам, но это необходимо сделать кратко, чтобы не превратить практические занятия в лекцию.

Не всегда преподавателю необходимо немедленно давать студентам разъяснения по возникшему у них вопросу, поскольку после выполнения работы студент сам может получить ответы на свои вопросы. Необходимо четко спланированное практическое занятие выполнить, что возможно, если преподаватель не будет отвлекаться на вопросы. Если вопрос не связан с планом занятия, целесообразно отослать студента к учебнику, учебному пособию или пригласить на консультацию.

Но иногда необходимо дать разъяснение по вопросу, прямо не относящемуся к текущему занятию (при повышенной сложности вопросов, от разрешения которых зависит дальнейшая самостоятельная работа). Иногда возникает необходимость дать поручение одному из студентов сделать на очередном практическом занятии краткое сообщение по поставленному вопросу. Однако таким методом нужно пользоваться очень осторожно, поскольку студенты могут перестать обращаться с вопросами к преподавателю.

Иногда необходимо разъяснение сделать в процессе дальнейшей работы группы. Методика преподавания по каждой теме должна быть гибкой и учитывать подготовку студентов воспринимать поставленные задачи.

Когда теория темы достаточно выяснена на лекциях, необходимо перейти к проведению практических занятий. В начале занятий рекомендуется напомнить основные выводы на лекциях и провести решение типовых задач, при этом решение лучше проводить совместно со студентом и только потом выдавать каждому студенту индивидуальное задание. Это позволяет студенту более широко применить полученные знания, а с другой стороны – подготовиться к совершенно самостоятельному выполнению домашнего задания. Для преподавателя такие индивидуальные задания служат способом проверки знаний (хотя и с использованием учебной литературы), проверки усвоения учебного материала.

Поскольку в группе могут быть достаточно слабые студенты, то необходимо при выдаче задания установить определенный средний уровень, а от занятия к занятию его повышать. Студент должен сам ощущать рост своей подготовки, иначе практические могут оказаться для него неинтересными. Если студент на доске не может решить задачу, то преподаватель должен опросить группу о методах решения, но стараться это сделать самому.

При проведении занятий необходимо, по возможности, всегда указывать, что такие-то методы расчета приняты в промышленности или применяются в таких-то конструкторских бюро. Это придает практическому занятию жизненный характер, утверждает необходимость овладения знаниями и навыками, связывает их реальной работой на предприятии.

В этом заключается одна из основных особенностей высшего образования по сравнению с общеобразовательной школой, где преподавателю еще приходится затрачивать немалые усилия на то, чтобы студенты осознали цель и задачи учебной работы, практическое значение которых не всегда для них очевидно. Студенты, за редкими исключениями, знают, для чего они учатся и как могут распорядиться своими знаниями. Это несколько облегчает задачу преподавателя и делает процесс учебной работы осмысленным.

Как правило, студенты отдают себе отчет и в том, в какой мере им необходимы данные занятия для предстоящей самостоятельной работы. Как только они поймут, что все учебные возможности занятий исчерпаны, интерес к ним будет утрачен. Учитывая этот психологический момент, необходимо проводить занятия так, чтобы все студенты были заняты напряженной, творческой работой, поисками правильных и точных решений. Студент должен получить возможность раскрыться, проявить способности с использованием всех полученных знаний и навыков, поэтому при разработке плана занятий и индивидуальных заданий учитывается подготовка и интересы каждого студента. Если это будет выполнено, в аудитории не возникнет и мысли о том, что возможности практических занятий исчерпаны.

При проведении занятий необходимо всегда выступать в роли консультанта, наблюдая за работой каждого студента и вовремя оказывая педагогически оправданную совершенно необходимую помощь, не подавляя самостоятельности в работе, заботливо развивая самоконтроль каждого студента на основе укрепления сосредоточенного внимания к работе, к поставленной задаче. Разумеется, вмешательство в работу студента не может быть одинаковым; все зависит от знания и каждого студента в отдельности.

Одному студенту не надо никакой помощи несмотря на возникшие затруднения, он сам найдет путь для правильного решения; другому – нужно небольшое напоминание теории или метода, и он также самостоятельно пойдет дальше. С некоторыми же требуется дополнительная работа в аудитории или на консультации. Опыт работы говорит о том, что решение задач на аудиторной доске целесообразно лишь в том случае, когда возникли общие для аудитории затруднения, требующие разъяснений преподавателя, а также для сравнения различных методов решения одной и той же задачи. Решение задач на доске в течение всего учебного занятия преподавателем или студентом с механическим списыванием задачи другими студентами не способствует развитию самостоятельной работы студентов.

Большую ценность имеют беглые указания преподавателя по ходу работы в аудитории; они содействуют выработке наиболее правильных приемов работы, из которых в конечном счете складывается система работы. Во всех без исключения случаях нельзя затягивать процесс восполнения каких-либо пробелов в знаниях, это уменьшает эффективность практических занятий.

Очень важно так ставить практические занятия, чтобы они вели студентов к дальнейшей углубленной самостоятельной творческой работе, указывали путь к ее осуществлению и вооружали необходимыми методами практической работы.

Каждое занятие целесообразно заканчивать кратким заключением, и указаниями преподавателя к дальнейшей работе или же разбором предстоящего домашнего задания. Тогда практические занятия наряду с лекциями будут содействовать созданию перспективы в работе каждого студента;

При проведении практических занятий, консультациях используются различные образовательные технологии, например, модульное обучение, при котором по отдельным разделам курса (модулям) рассказывается, что необходимо изучить, цели и задачи изучения, как будет организована проверка изучаемого в модуле материала, где студенты должны использовать полученные знания при выполнении выполнения магистерской диссертации, а также при изучении новых специальных дисциплин. При этом соблюдается постоянная обратная связь преподавателя и студента. Например, выборочно задается студентам вопрос по некоторым изучаемым вопросам и студенты дают свои варианты отве-

тов. В этом случае обеспечивается активная роль студентов на занятиях, так как отвечать на вопросы может каждый.

Занятия проводятся с использованием компьютерных технологий, по некоторым разделам курса кафедрой выпущены учебные пособия, а электронные версии их размещены в электронной библиотеке ВлГУ, а также на сайте кафедры. Это позволяет в любой момент обратиться к источнику. Студентам выдается раздаточный материал (сложные схемы, чертежи и т.д.) с целью уменьшения затрат времени на оформление студентами чертежей и рисунков.

На практических занятиях используются методы проблемного обучения – организация учебных занятий, которые предполагают создание под руководством преподавателя проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность студентов по их разрешению.

Усвоение студентами знаний, добытых в ходе активного поиска и самостоятельного решения проблем более прочные, чем при традиционном обучении. Кроме того, при таком обучении происходит воспитание активной, творческой личности студента, умеющего видеть и решать нестандартные профессиональные проблемы

Наконец, при проведении практических занятий используется проектный метод обучения. Студентам выдается индивидуальное задание. Под руководством преподавателя студенты решают возникшие проблемные ситуации, в результате чего и происходит творческое овладение профессиональными знаниями, навыками и умениями и развитие мыслительных способностей. При этом студенты используют учебные компьютерные программы для проведения расчетов, построения графиков.

Активно используются информационно-коммуникационные технологии – взаимный обмен электронного портфолио преподавателя и студента, что позволяет студенту использовать материалы из портфолио преподавателя, а преподавателю – лучшие работы студентов. Таким образом, создается единая образовательная среда, которая обеспечивает эффективное взаимодействие преподавателей и студентов.

Распределение практических занятий по семестрам следующее.

## **5 семестр**

**План проведения практических занятий.** На практических занятиях решаются примеры решения типовых задач по следующим темам, а также задачам для выполнения курсовой работы.

**Тема 1-4.** (4 недели – 12 ч. для освоения этого материала). Методы расчета на прочность деталей ДВС при нагрузках, переменных во времени. Определения коэффициента

запаса прочности при одноосном напряженном состоянии. Определения коэффициента запаса прочности при сложном напряженном состоянии. Детерминированные модели усталостной долговечности при стационарном нагружении. Для самостоятельного изучения рекомендуется использовать учебное пособие [3,4] (с. 62-69; с. 79-83 – примеры расчетов)

Цель первого занятия – рассмотреть расчеты на прочность при переменных напряжениях в случае одноосного напряженного состояния деталей машин энергетического оборудования.

Приведем типовые задачи, которые можно предложить на практических занятиях (все ссылки на приложения и рисунки даются по учебным пособиям [3, 4]).

**Пример 3.** Определить предел выносливости при изгибе по симметричному циклу для шлифованного ступенчатого вала в месте изменения его диаметра с  $d = 80$  до  $D = 100$  мм. Радиус галтели  $r = 6$  мм (рис. 44). Материал вала – сталь 45. Ее механические характеристики равны:  $\sigma_B = 600$  МПа;  $\sigma_{-1}^H = 260$  МПа.

**Решение.** Из рис. П2.1 для  $\frac{r}{d} = \frac{6}{80} = 0,075$  и  $\frac{D}{d} = 2$  по кривой 3 (углеродистая сталь  $\sigma_B = 500$  МПа, диаметр модели  $d_1 = 30 \dots 50$  мм) находим  $(K_\sigma)_{d_1} = 1,70$  (за диаметр  $d_1$  принимаем среднюю величину интервала  $30 \dots 50$  мм, т. е.  $d_1 = 40$  мм).

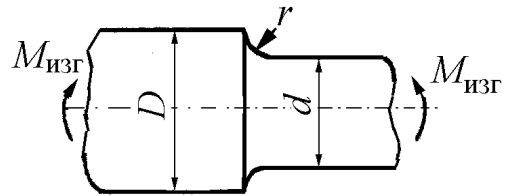


Рис. 44. К примеру 3

Поправку, учитывающую влияние предела прочности  $\xi_\sigma$ , определяем из рис.П2.2 прил. 2. Для  $\sigma_B = 600$  МПа и  $\frac{r}{d} = 0,075$  поправочный коэффициент  $\xi_\sigma = 1,02$  и при  $\frac{D}{d} = 2$  коэффициент концентрации

$$(K_\sigma)_{d_1}' = \xi_\sigma (K_\sigma)_{d_1} = 1,02 \cdot 1,7 = 1,73.$$

Поправку, учитывающую влияние отношения диаметров  $D/d$ , находим из рис. П3.3 прил. 3. Для  $\frac{D}{d} = \frac{100}{80} = 1,25$  по кривой 1 поправочный коэффициент  $\xi_d = 0,84$  и коэффициент концентрации с учетом поправки для  $D/d$  будет равен

$$(K_\sigma)_{d_1}'' = 1 + \xi_d [(K_\sigma)_{d_1}' - 1] = 1 + 0,84(1,73 - 1) = 1,61.$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений для детали ( $d = 80$  мм) определяем по формуле (33) (с заменой  $(K_\sigma)_{d_1}$  на  $(K_\sigma)_{d_1}''$ ):

$$(K_\sigma)_d = (K_\sigma)_{d_1}'' \frac{(\varepsilon_{\sigma_k})_{d_1}}{(\varepsilon_{\sigma_k})_d (\varepsilon_\sigma)_{d_1}}.$$

Из рис. 37 находим по кривой 4 при  $d_1 = 40$  мм,  $(\varepsilon_{\sigma_k})_{d_1} = 0,73$ ; при  $d = 80$  мм,

$(\varepsilon_{\sigma\kappa})_d \approx 0,63$ . По кривой 2 при  $d_1 = 40$  мм,  $(\varepsilon_{\sigma})_{d_1} = 0,85$ .

Подставляя найденные величины, получим:

$$(K_{\sigma})_d = (K_{\sigma})_{d_1}'' \frac{(\varepsilon_{\sigma\kappa})_{d_1}}{(\varepsilon_{\sigma\kappa})_d \cdot (\varepsilon_{\sigma})_{d_1}} = 1,61 \frac{0,73}{0,63 \cdot 0,85} = 2,20.$$

Так как коэффициент  $(K_{\sigma})_{d_1}$  определялся на образцах достаточно большого диаметра ( $d_1 = 40$  мм), то для определения эффективного коэффициента концентрации  $(K_{\sigma})_d$  можно воспользоваться приближенной формулой (35)

$$(K_{\sigma})_d = \frac{(K_{\sigma})_{d_1}''}{(\varepsilon_{\sigma})_d}.$$

Для диаметра  $d = 80$  мм по кривой 2 рис. 37 находим  $(\varepsilon_{\sigma})_d = 0,73$ ;  $(K_{\sigma})_{d_1}'' = 1,61$  нами уже найдено ранее, следовательно

$$(K_{\sigma})_d = \frac{1,61}{0,73} = 2,21.$$

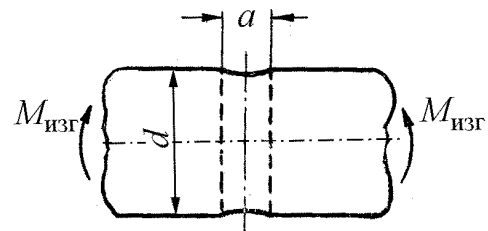
Коэффициент поверхностной чувствительности  $\beta$  для шлифованной поверхности при  $\sigma_B = 600$  МПа находим по кривой 2 рис. 42  $\beta = 0,93$  или по формуле  $\beta = 1 - 0,0001 \sigma_B = 1 - 0,0001 \cdot 600 = 0,94$ .

Предел выносливости вала при симметричном цикле вычисляем по формуле (38)

$$(\sigma_{-1\kappa})_d = \frac{(\sigma_{-1}^n)_{d_0} \cdot \beta}{(K_{\sigma})_d} = \frac{260 \cdot 0,93}{2,21} = 109 \text{ МПа}.$$

**Пример 4.** Найти предел выносливости при изгибе по симметричному циклу для шлифованного вала  $d = 60$  мм с поперечным отверстием  $a = 10$  мм (рис. 45).

Материал детали: углеродистая сталь с характеристиками  $\sigma_B = 600$  МПа,  $\sigma_{-1}^H = 270$  МПа.



**Рис. 45. К примеру 4**

**Решение.** Из рис. П4.1 прил. 4 при  $a/d = 10/60 = 0,17$  по кривой 3 находим  $(K_{\sigma})_{d_1} = 1,79$ .

Эффективный коэффициент концентрации вала  $(K_{\sigma})_d$  определяем по приближенной формуле (36), так как  $d_1 = 45$  мм (за  $d_1$  принимаем среднюю величину интервала 40...50 мм)

$$(K_{\sigma})_d = \frac{(K_{\sigma})_{d_1}}{(\varepsilon_{\sigma})_d}.$$

По кривой 2 рис. 37 для диаметра  $d = 60$  мм находим  $(\varepsilon_{\sigma})_d = 0,78$ .

$$(K_{\sigma})_d = \frac{1,79}{0,78} = 2,3.$$

Коэффициент поверхностной чувствительности  $\beta = 0,92$  (пример 3).

По формуле (38) находим предел выносливости вала

$$(\sigma_{-1})_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0} \cdot \beta}{(K_{\sigma})_d} = \frac{270 \cdot 0,92}{2,3} = 109 \text{ МПа}.$$

**Пример 5.** Определить эффективный коэффициент концентрации напряжений для вала диаметром  $D = 40$  мм с кольцевой выточкой глубиной  $t = 4$  мм, диаметром  $d = 32$  мм (рис. 46) при кручении. Цикл изменения напряжений – симметричный. Вал изготовлен из легированной стали 40ХН с пределом прочности  $\sigma_B = 1000$  МПа.

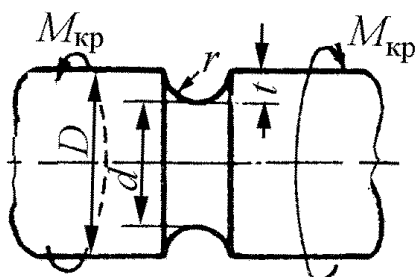


Рис. 46. К примеру 5

**Решение.** Из рис. П6.1 прил. 6 при  $t/D = 4/40 = 0,1$  по кривой 1 находим  $(K_{\tau})_{d_1} = 1,38$ .

При кручении  $\varepsilon_{\tau} = \varepsilon_{\tau K}$ , а эффективный коэффициент концентрации напряжений детали определяется по формуле (38) (заменой  $\sigma$  на  $\tau$ ):

$$(K_{\tau})_d = \frac{(K_{\tau})_{d_1}}{(\varepsilon_{\tau})_d}.$$

При  $d = 32$  мм из рис. 36 находим, что  $(\varepsilon_{\tau K})_d = 0,82$  и  $(K_{\tau})_d = 1,38/0,82 = 1,7$ .

**Пример 14.** Определить коэффициент запаса в опасном сечении элемента вала с кольцевой выточкой (рис. 54). Дано:  $D = 110$  мм,  $d = 90$  мм, радиус кольцевой выточки  $r = 10$  мм; поверхность вала тонкого шлифования. Материал вала – легированная сталь марки 45Х с характеристиками:  $\sigma_B = 850 \dots 1050$  МПа;  $\sigma_T = 700 \dots 950$  МПа;  $\sigma_{-1} = 400 \dots 500$  МПа,  $\tau_B = 490 \dots 608$  МПа;  $\tau_T = 405 \dots 550$  МПа;  $\tau_{-1} = 230 \dots 290$  МПа. Действующие переменные во времени моменты равны: изгибающие  $M_{и max} = 5000$  Н·м;  $M_{и min} = -1000$  Н·м; крутящие  $M_{кр max} = 2000$  Н·м;  $M_{кр min} = -500$  Н·м.

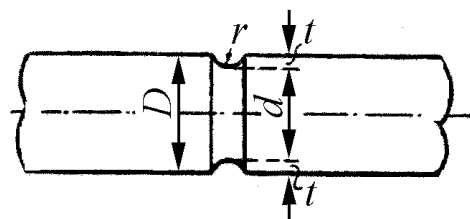


Рис. 54. К примеру 14

**Решение.** Полярный и осевой моменты сопротивления сечения

$$W_p = 0,2d^3 = 0,2 \cdot (0,09)^3 = 146 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$



$$W_{\text{и}} = 0,5W_p = 73 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Определяем максимальные и минимальные номинальные напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{и max}}}{W_{\text{и}}} = \frac{5000}{73 \cdot 10^{-6}} = 68,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{min}} = \frac{M_{\text{и min}}}{W_{\text{и}}} = \frac{-1000}{73 \cdot 10^{-6}} = -13,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_p} = \frac{2000}{146 \cdot 10^{-6}} = 13,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{min}} = \frac{M_{\text{кр min}}}{W_p} = \frac{-500}{146 \cdot 10^{-6}} = -3,4 \text{ МПа}.$$

Определяем средние напряжения и амплитуды циклов:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}}}{2} = \frac{68,5 - 13,7}{2} = 27,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2} = \frac{68,5 + 13,7}{2} = 41,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\text{max}} + \tau_{\text{min}}}{2} = \frac{13,7 - 3,4}{2} = 5,15 \text{ МПа};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{min}}}{2} = \frac{13,7 + 3,4}{2} = 8,55 \text{ МПа}.$$

Для рабочих напряжений

$$\chi_{\sigma} = 27,4/41,1 = 0,667; \quad \chi_{\tau} = 5,15/8,55 = 0,602.$$

В соответствии с табл. П1.4 прил. 1 предельные значения  $\chi_{\sigma} = 1,969 \dots 1,187$ ;  $\chi_{\tau} = 0,901 \dots 1,179$ . Таким образом, коэффициент запаса лимитируется усталостной прочностью и расчет необходимо вести по формулам (49) и (51).

Эффективный коэффициент концентрации напряжений при изгибе для детали с  $\sigma_B = 500 \text{ МПа}$  равен (прил. 5)

$$\begin{aligned} (K_{\sigma})_{\sigma_B=500} &= -0,4734(-2,6155 - e^{-6,4619(r/d)}) = \\ &= -0,4734(-2,6155 - e^{-6,4619 \cdot 0,22}) = 1,35. \end{aligned}$$

Поправочный коэффициент, учитывающий влияние предела прочности при  $r/d = 0,22$  и  $\sigma_B = 700 \text{ МПа}$ , равен  $\xi_{\sigma} = 1,04$ .

$$\text{Тогда } (K_{\sigma})_{\sigma_B} = \xi_{\sigma} (K_{\sigma})_{\sigma_B=500} = 1,04 \cdot 1,35 = 1,404.$$

Поправочный коэффициент, учитывающий влияние отношения  $t/r = 10/10 = 1$  равен  $\xi_r = 1$  (прил. 5, рис. П5.3). Тогда окончательно  $K_\sigma = 1,404$ .

При кручении (прил. 6, рис. П6.3)  $K_\tau = 1,1$ .

Коэффициент состояния поверхности  $\beta$  находим по кривой 2 (см. рис. 40) или по уравнению

$$\beta = 1 - 0,0001 \sigma_B = 0,93.$$

Примем, что  $\beta_\sigma = \beta_\tau = 0,93$ .

Определим масштабные коэффициенты  $\varepsilon_{\sigma_k}$  и  $\varepsilon_{\tau_k}$ . При действии нормальных напряжений по кривой 3 на рис. 35 или по моделям (поскольку кривая заканчивается при  $d = 50$  мм)

$$\varepsilon_{\sigma_k} = e^{-0,0052d} = 0,626.$$

При действии касательных напряжений (см. рис. 38) или по модели (поскольку кривая заканчивается при  $d = 80$  мм):

$$\varepsilon_{\tau_k} = 0,6389d^{2,169/d} = 0,712.$$

Коэффициенты  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$  определим по табл. П1.4 прил. 1:  $\psi_\sigma = 0,210 \dots 0,286$ ;  $\psi_\tau = 0,096 \dots 0,125$ .

Вычисляем частные коэффициенты запаса:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_{\sigma_k} \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} = \frac{400}{\frac{1,404}{0,626 \cdot 0,93} \cdot 41,1 + 0,21 \cdot 27,4} = 2,72;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_{\tau_k} \beta} \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m} = \frac{230}{\frac{1,1}{0,712 \cdot 0,93} \cdot 8,55 + 0,096 \cdot 5,15} = 15,6.$$

Общий коэффициент запаса прочности по усталостному разрушению определим по формуле Гафа и Полларда (58)

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2,72 \cdot 15,6}{\sqrt{2,72^2 + 15,6^2}} = 2,68.$$

Расчет запаса прочности по пределу текучести не проводим, так как прочность лимитируется усталостным разрушением (рабочие напряжения располагаются в областях ОАС, см. рис. 51).

**Тема 5.** (2 недели – 6 ч. для освоения этого материала). Теория напряженного состояния. Дифференциальные уравнения равновесия. Напряжение в наклонных площадках. Главные напряжения.

**Цель практического занятия** – освоить знания, полученные на лекциях по определению напряженного состояния.

Для лучшего усвоения материала и самостоятельного изучения рекомендуется использовать учебное пособие [1] (с. 10-35).

Приведем типовые задачи, которые можно предложить на практических занятиях.

Задача 1. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & -75 \\ 80 & -75 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с направляющими

нормальными  $l = 1/2$ ;  $m = 1/2$ ;  $n = 1/\sqrt{2}$  полное, нормальное и касательное напряжения.

Задача 2. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(y + z); \sigma_y = b(x + z); \sigma_z = c(x + y); \tau_{xy} = az; \tau_{yz} = bx; \tau_{zx} = cy.$$

Задача 3. Перемещения в упругом теле определяются следующими выражениями:

$$u_x = a(x + y - 5 + 0,5z); u_y = a(y + 0,5z)z; u_z = a(xy + yz + xz); \quad \text{Определить деформации тела.}$$

Задача 4. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(2y + 2z); \sigma_y = b(2x + 2z); \sigma_z = c(2x + 2y); \tau_{xy} = az; \tau_{yz} = bx; \tau_{zx} = cy.$$

Задача 5. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & 75 \\ 80 & 75 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с направляющими

нормальными  $l = 1/\sqrt{2}$ ;  $m = 1/2$ ;  $n = 1/2$  полное, нормальное и касательное напряжения.

Задача 6. Для напряженного состояния, заданного тензором, имеющим все одинаковые составляющие, равные  $\sigma$ , найти главные напряжения и главные площадки. Объяснить, почему число последних оказывается неограниченным.

Задача 7. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(y^3 + z^2); \sigma_y = b(x + z)^3; \sigma_z = c(x + y)^2; \tau_{xy} = az; \tau_{yz} = bx; \tau_{zx} = 0.$$

Задача 8. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 \\ 50 & 30 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с направляющими

нормальями  $l = 1/\sqrt{2}$ ;  $m = 1/2$ ;  $n = 1/2$  полное, нормальное и касательное напряжения.

Задача 9. Для точки, имеющей компоненты напряжений  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ,

$\sigma_z = 200$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 100$ . Вычислить главные напряжения.

Задача 10. В точке тела, на его границе (направляющие косинусы  $l, m, n$  заданы) известны компоненты внешнего нагружения  $p_x = a, p_y = p_z = 0$ . Кроме того, известно, что возле заданной точки внутри тела  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0$ . Вычислить остальные компоненты напряжений.

Задача 11. В одной из точек поверхности тела полная интенсивность внешней поверхностной силы равна 100, а ее направление определяется направляющими косинусами  $l = m = 0,707; n = 0$ . Найти составляющие внешней нагрузки в этой точке.

Задача 12. В точке тела  $A(10, 5, -8)$  по площадке с нормалью  $\nu(0,5; 0,5; 0,707)$  известно полное напряжение  $p_\nu = 100$  и его направление  $l = m = n = \frac{1}{3}$ . Известно также, что касательные напряжения в теле определяются выражениями

$\tau_{xy} = 60y, \tau_{yz} = 100z, \tau_{zx} = 20 + 40y$ . Определить нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  в точке  $A$ .

Задача 13. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & 75 \\ 80 & 75 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с направляющими

нормальями  $l = 1/\sqrt{2}$ ;  $m = 1/2$ ;  $n = 1/2$  полное, нормальное и касательное напряжения.

Задача 14. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(y + z); \sigma_y = b(x + z); \sigma_z = c(x + y); \tau_{xy} = az; \tau_{yz} = bx; \tau_{zx} = cy.$$

Задача 15. Перемещения в упругом теле определяются следующими выражениями:

$u_x = a(x + y - 5 + 0,5z); u_y = a(y + 0,5z)z; u_z = a(xy + yz + xz);$  Определить деформации тела.

**Тема 6.** (2 недели – 6 ч. для освоения этого материала). Геометрическая теория деформаций. Уравнения неразрывности деформаций. Обобщенный закон Гука

**Цель практического занятия** – освоить знания, полученные на лекциях при определении деформированного состояния упругого тела.

Для освоения материала и самостоятельного изучения рекомендуется учебное пособие [1], главы 2 и 3.

Для проведения практических занятий рекомендуется следующие типы задач.

Задача 1. Какому виду деформации тела соответствуют следующие перемещения  $u_x = a - by - cz; u_y = bx - cz; u_z = c(x + y)$ , где  $a, b, c$  – константы?

Задача 1. Для упругого тела прямоугольной формы, размерами  $b \times h \times l$ , известны перемещения:

$$u_x = \frac{P}{Ebh} x; \quad u_y = -\frac{\mu P}{Ebh} y; \quad u_z = -\frac{\mu P}{Ebh} z. \quad \text{Вычислить полную потенциальную энергию}$$

деформации, накопленную во всем объеме тела и работу внешней нагрузки  $A$ . Установить физический смысл параметра  $P$ .

Задача 2. Для упругого тела заданы перемещения:

$$u_x = \left( \frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2} \right) x; \quad u_y = \left( \frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2} \right) y; \quad u_z = 2cz,$$

где  $a, b, c$  – константы;  $r^2 = x^2 + y^2$ . Определить деформации, возникшие в теле.

Задача 3. Для напряженного состояния, заданного тензором, имеющим все одинаковые составляющие, равные  $\sigma$ , найти главные напряжения и главные площадки. Объяснить, почему число последних оказывается неограниченным.

Задача 4. Можно ли вызвать в произвольном упругом теле заданные ниже перемещения путем соответствующего подбора одних только поверхностных внешних сил:

$$u_x = a; \quad u_y = b(x + z)^2; \quad u_z = c(x + y)^3.$$

Задача 5. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(y^3 + z^2); \quad \sigma_y = b(x + z)^3; \quad \sigma_z = c(x + y)^2; \quad \tau_{xy} = az; \quad \tau_{yz} = bx; \quad \tau_{zx} = 0.$$

Задача 6. Для точки, имеющей компоненты напряжений  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ,

$$\sigma_z = 200, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 100. \quad \text{Вычислить главные напряжения.}$$

Задача 7. Для упругого тела известны перемещения:

$$u_x = 0,01(x^2 + y^2); \quad u_y = 0,01(xy + z^2); \quad u_z = 0,01(z^2 + y^2)$$

Вычислить полное перемещение точки тела  $A(3, -2, 1)$  и определить его направление.

Произвести графическое построение.

Задача 8. В одной из точек поверхности тела полная интенсивность внешней поверхностной силы равна 200, а ее направление определяется направляющими косинусами  $l=0,707$ ;  $m=0,707$ ;  $n=0$ . Найти направляющие внешней нагрузки по координатным осям.

Задача 9. Какому виду деформации тела соответствуют следующие перемещения  $u_x = a - by - cz$ ;  $u_y = bx - cz$ ;  $u_z = c(x + y)$ , где  $a, b, c$  – константы?

Задача 10. Концы отрезка  $MN$  до деформации тела имели следующие декартовы координаты  $M(0, 0, 0)$ ;  $N(5, 3, 6)$ . После деформации координаты концов отрезка изменились:  $M_1(1, 1, 1)$ ,  $N_1(6,05; 4,03; 7,06)$ . Вычислить абсолютную и среднюю относительную деформацию отрезка  $MN$ .

Задача 11. Для упругого тела заданы перемещения:

$$u_x = \left( \frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2} \right)x; \quad u_y = \left( \frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2} \right)y; \quad u_z = 2cz,$$

где  $a, b, c$  – константы;  $r^2 = x^2 + y^2$ . Определить деформации, возникшие в теле.

**Тема 7.** (2 недели – 6 ч. для освоения этого материала). Основные уравнения теории упругости и способы их решения. Теорема единственности, Методы решения задач теории упругости.

Цель практических занятий – закрепить знания, полученные на лекциях по изучению деформированного состояния.

Для освоения материала и самостоятельного изучения рекомендуется учебное пособие [1], глава 4. Студенты понять основные уравнения теории упругости и способы их решения (обозначение согласно [1]).

*А. Группа статических или динамических уравнений.*

В эту группу входят дифференциальные уравнения равновесия (5). Для динамической задачи, принимая, что перемещения  $u_x, u_y, u_z$  очень малые, а проекции ускорения на координатные оси запишутся как  $\partial^2 u_x / \partial t^2$ ,  $\partial^2 u_y / \partial t^2$ ,  $\partial^2 u_z / \partial t^2$ , удельная объемная сила по осям  $x, y, z$  будет равна:

$$-\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (a)$$

В случае динамической задачи уравнения (5) будут содержать, кроме объемных (массовых) сил  $X, Y, Z$ , отнесенных к единице объема, и инерционные силы, определяемые в

соответствии с (a).

Система уравнений будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \quad (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}); \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \quad (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}); \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \quad (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Б. Геометрические уравнения (44)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

В. Физические уравнения (60)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

или в обратной форме (67)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (80a)$$

Уравнения (78) - (80) (их количество 15) содержат 15 неизвестных функций: шесть компонентов напряжений

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z),$$

шесть компонентов деформации

$$\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \\ \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z),$$

а также три компонента перемещения

$$u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z).$$

Таким образом, с математической точки зрения задача может быть разрешена и сводится к нахождению 15 функций, удовлетворяющих уравнениям (78), (79), (80) или (80a),

а также условиям на контуре (8):

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

К ним необходимо присоединить уравнения неразрывности деформаций (53)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

При прямом решении задачи, когда используются все 15 уравнений (78) - (80), уравнения неразрывности (в) сами по себе, как вытекающие из (79), не нужны и могут выполнять роль контрольных уравнений.

Однако, если решается статическая задача теории упругости (следовательно, правая часть уравнений (78) обращается в нуль) и отыскиваются только напряжения и деформации (значит, неизвестных будет 12), целесообразно уравнения (79) подменить тремя из шести уравнениями (в) или принять первую группу уравнений неразрывности. В этом случае будем иметь три уравнения равновесия (78), шесть физических уравнений (80) и три уравнения неразрывности (в) (для линейных деформаций). Задача сводится к нахождению 12 неизвестных функций, удовлетворяющих в каждой точке упругого тела 12 уравнениям, а на поверхности тела удовлетворяющих граничным уравнениям (б).

Далее, если это потребуется, по найденным деформациям из (80) можно вычислить компоненты перемещений  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$ . Решение указанных уравнений можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные:

1. Решение в *перемещениях*, когда за основные неизвестные приняты три составляющие перемещения:

$$u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z).$$

Этот метод часто называют методом перемещений [5]. При решении задачи используются кинематические граничные условия или граничные условия смешанного типа.

2. Решение в *напряжениях*, когда за основные неизвестные приняты шесть составляющих напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned}$$



Этот метод часто называют методом сил [5]. При решении задачи используются статические или динамические граничные условия.

3. Решение в *смешанной форме*, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений. При решении задачи используются граничные условия смешанного типа.

**Тема 8.** (2 недели – 6 ч. для освоения этого материала). Методы решения плоской задачи теории упругости для односвязных областей. Решение плоской задачи в тригонометрических рядах.

Цель практических занятий – закрепить знания, полученные на лекциях по приближенному решению задач теории упругости.

Для освоения материала и самостоятельного изучения рекомендуется учебное пособие [1], глава 5.

Приведем примеры решения плоской задачи с помощью полиномов [1, с. 93-95].

**Пример 1.** Для тонкой пластинки длиной  $L$ , высотой  $h$  и толщиной в единицу (рис. 19) задана функция напряжений в виде полинома второй степени  $\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2$ .

Известно, что внешние силы, приложенные по кромкам пластинки, равномерно распределены по их толщине и, таким образом, создают обобщенное плоское напряженное состояние. Объемные силы отсутствуют. Для такой функции напряжений:

- проверить возможность существования ее, используя формулу (97);
- по функции напряжений найти выражения для компонентов напряжений на основании уравнения (96);

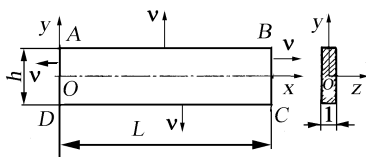


Рис. 19. Эскиз пластинки с нормальными  $v$  к краям

- используя контурные условия (89), выяснить характер внешних нагрузок, при которых будет иметь место найденная система напряжений;
- дать эскиз распределения по контурам внешних нагрузок, отвечающих исследуемой функции напряжений.

**Решение.** В соответствии с (98) функция может быть использована в качестве функции напряжений, поскольку она удовлетворяет уравнению (97).

Определим компоненты напряжений, используя уравнения (96):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_2, \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (6)$$

Используем контурные условия (89) для выяснения характера внешних нагрузок, которые вызовут напряжения (6).

На верхней грани  $AB$  (см. рис. 19) с направляющими косинусами  $l = \cos(\nu, x) = \cos 90^\circ = 0$ ,  $m = \cos(\nu, y) = \cos 0 = 1$  в соответствии с (89) контурные условия, при которых будет иметь место найденная система напряжений, имеют вид

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m = c_2 \cdot 0 - b_2 \cdot 1 = -b_2, \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m = -b_2 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2. \end{aligned} \quad (z)$$

На нижней грани  $CD$  с направляющими косинусами  $l = \cos(\nu, x) = \cos(-90^\circ) = 0$ ,  $m = \cos(\nu, y) = \cos 180^\circ = -1$  в соответствии с (89) контурные условия имеют вид

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= c_2 \cdot 0 + (-b_2)(-1) = b_2, \\ p_{y\nu} &= (-b_2) \cdot 0 + a_2(-1) = -a_2. \end{aligned} \quad (d)$$

На левой грани  $AD$  с направляющими косинусами  $m = 0$ ,  $l = \cos 180^\circ = -1$  контурные условия имеют вид

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= c_2(-1) + (-b_2) \cdot 0 = -c_2, \\ p_{y\nu} &= (-b_2)(-1) + a_2 \cdot 0 = b_2. \end{aligned} \quad (e)$$

Наконец, на правой грани  $BC$  с направляющими косинусами  $m = 0$ ,  $l = 1$  контурные условия имеют вид

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= c_2 \cdot 1 + (-b_2) \cdot 0 = c_2, \\ p_{y\nu} &= (-b_2) \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = -b_2. \end{aligned} \quad (ж)$$

Используя контурные условия по граням (z) - (ж), дадим эскиз распределения по контурам внешних нагрузок, отвечающих исследуемой функции напряжений

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \quad (\text{рис. 20}).$$

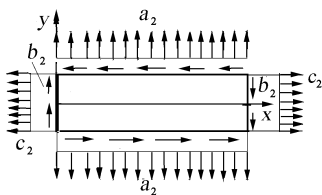


Рис. 20. Внешние нагрузки по контуру пластинки

По результатам исследования можно сделать вывод, что предложенная функция напряжений моделирует сложное напряженное состояние: растяжение по осям  $x$  и  $y$  с напряжениями  $\sigma_x = c_2$ ,  $\sigma_y = a_2$  соответственно, а также сдвиг с касательными напряжениями  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -b_2$ .

**Пример 2[12].** На рис. 21 изображены три случая нагружения по кромкам пластинки.

Каждая из приведенных эпюр отвечает какой-либо из функций (98) - (101) (или частей этих функций). Выяснить,

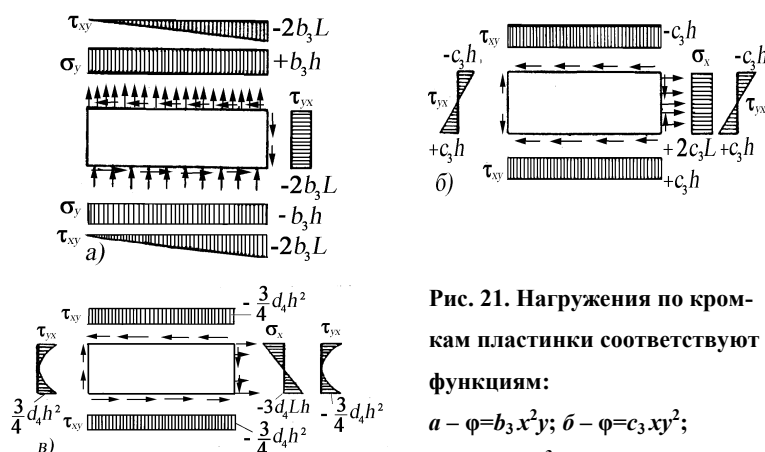


Рис. 21. Нагружения по кромкам пластинки соответствуют функциям:  
 $a - \varphi = b_3 x^2 y$ ;  $b - \varphi = c_3 x y^2$ ;  
 $v - \varphi = d_4 x y^3$

соответствуют ли приведенным функциям напряжений изображенные на рис. 21 эпюры нагрузок.

Решение при помощи целых полиномов применимо только в тех случаях, когда нагрузка по краям полосы непрерывно и монотонно

возрастает или убывает по какому-либо алгебраическому закону.

Если же нагрузка не является непрерывной или же закон ее не может быть представлен алгебраической функцией, решение можно искать в виде тригонометрического ряда.

**Тема 9.** (2 недели – 6 ч. для освоения этого материала). Понятие о методе конечных разностей (метод сеток) для решения плоской задачи. Понятие о методе конечных разностей (метод сеток) для решения плоской задачи.

**Цель практических занятий** – закрепить знания, полученные на лекциях по численному решению задач теории упругости.

Для освоения материала и самостоятельного изучения рекомендуется учебное пособие [1], глава 5, пп. 5.4; 5.5, 5.6.

При решении задач следует обратить внимание студентов, что при поиске количественного описания физического явления обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливую в определенной области, и налагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. На этой стадии математическая модель замкнута, и для практических применений требуется только найти решение для конкретного множества числовых данных. Здесь, однако, возникают основные трудности, так как точному решению существующими математическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются одним из немногих примеров, для которых имеются стандартные процедуры решения, но даже здесь при большом числе зависимых переменных встречаются значительные трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность воспользоваться ПЭВМ, необходимо преобразовать задачу к чисто алгебраической форме, включающей только основ-

ные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды дискретизации непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При этом бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию или функции, заменяется конечным числом неизвестных параметров, и для этого процесса, вообще говоря, требуется некоторая форма аппроксимации. Среди различных возможных видов дискретизации одним из простейших является процесс перехода к конечным разностям. Рассмотрим основные понятия этого процесса, что позволит сформулировать суть метода.

Например, точное решение бигармонического уравнения  $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$  ( $\varphi$  – функция напряжений) плоской задачи теории упругости во многих случаях оказывается очень сложным. Для его решения можно применить приближенный метод конечных разностей. Его еще часто называют конечно-разностным, или методом сеток [1]. Идея метода состоит в том, чтобы решение плоской задачи через функцию напряжений  $\varphi$ , определяемую бигармоническим уравнением, свести к алгебраическим уравнениям. В методе конечных разностей частные производные бигармонического уравнения *приближенно* заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое.

Используя в качестве шаблона запись производных до четвертого порядка включительно (в том числе и смешанную производную) для одномерной функции через конечные разности в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_0 &= \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_{-1}); \quad \varphi''_0 = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}); \\ \varphi'''_0 &= \frac{1}{2h^3}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}); \\ \varphi^{IV}_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_2 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_{-1} + \varphi_{-2}). \end{aligned} \right\}$$

Далее при рассмотрении пластинки (см. [1, с. 96-98] нанесем на нее сетку с определенным шагом в направлении осей  $x$  и  $y$ . Узловые точки обозначаются относительно центральной точки по ходу часовой стрелки. Тогда бигармоническое уравнение для произвольной нулевой точки, записанное в конечно-разностных уравнениях имеет вид:

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0.$$

Уравнение такого вида можно составить для каждого из узлов внутри контура. При этом в часть уравнений войдут и значения функции  $\varphi$  на контуре и для узлов, расположенных на расстоянии одного шага сетки вне контура.

Значения функции  $\varphi$  на контуре и вне контура находят из граничных условий. Таким образом, неизвестных значений функции окажется столько, сколько узлов внутри контура, но столько же можно составить уравнений такого вида. Следовательно, для решения задачи уравнений достаточно.

Для расчета балок-стенок методом конечных разностей или методом сеток можно рекомендовать следующий порядок.

1. Заменяем контур балки-стенки в виде рамы (замкнутого контура) с той же действующей нагрузкой. Выбираем основную систему для данного замкнутого контура и, применяя метод сил, раскрываем статическую неопределимость рамы (см. [1], п. 5.6). Строим в заданной системе суммарные эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил по общеизвестной методике. Последняя эпюра (поперечных сил) строится для проверки правильности построения эпюры изгибающих моментов (ввиду их дифференциально-интегральной зависимости –  $Q = dM/dx$ ). Заметим, что обычно оси координат совмещают с осями стержней, составляющих раму или замкнутый контур. В нашем случае координатная система остается неизменной, как она была выбрана для балки-стенки.

2. Нанесем на пластину (балку-стенку) квадратную сетку<sup>1</sup> с заранее выбранным шагом. Назначая шаг сетки, необходимо иметь в виду, что при уменьшении шага сетки точность решения повышается, но одновременно с этим растет громоздкость решения.

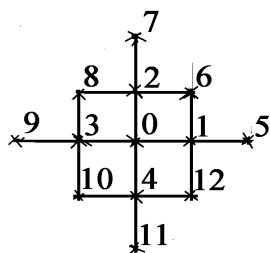
Пронумеруем узлы сетки с учетом свойств прямой или обратной симметрии (ориентируясь на эпюру изгибающих моментов).

3. Используя ординаты эпюры изгибающих моментов для замкнутого контура (рамы), определяем функции напряжений  $\varphi_i$  по контуру балки-стенки. Для этого используем зависимости в пособии [1]: (122), (124), (126), (128) или рекомендации рис. 30 и формулы (129). Напомним, что ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются на сжатой стороне стержней.

---

<sup>1</sup> Рассматривается только равномерная по осям  $x$  и  $y$  сетка. В случае неравномерной сетки решение немного усложняется (см., например, [1]).

4. Используя эпюру продольных сил  $N$  в стержнях замкнутого контура и зависимости [1]: (121), (123), (125) и (127) или при положительном значении  $N$  (130) - (133), выражаем



**Рис. Шаблон для составления разностных уравнений**

функции напряжений в законтурных точках через функции внутри контура и частные производные по соответствующему направлению.

5. Для составления разностных уравнений используем шаблон (рис.). После этого бигармоническое уравнение Мориса Леви в нулевой точке имеет вид

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_0 + 2 \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right)_0 = 0$$

Которое в разностном виде может быть записано:

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0.$$

Составим разностные уравнения для всех внутриконтурных точек (число уравнений в точности равно числу внутриконтурных точек).

6. Решив полученную систему алгебраических линейных уравнений, находим значения функции напряжений  $\varphi_i$  в точках внутри контура (на контуре и в законтурных точках  $\varphi_i$  определены в п. 3 и 4).

7. Для проверки правильности решения необходимо подставить найденные значения функции напряжений  $\varphi_i$  в исходные алгебраические уравнения (п. 5). Погрешность в каждом из уравнений между положительными и отрицательными значениями не должна превышать 5 %.

8. Используя шаблон (см. рис.), определяем нормальные и касательные напряжения в окрестностях всех узловых точек в соответствии с зависимостями (113, [1]).

9. Строим распределение напряжений по линиям сетки, используя вычисленные в п. 8 [1] значения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в узловых точках.

10. Из условия равновесия проверяем правильность построения эпюр  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ . Для удобства составления условий равновесия эпюра внутренних сил, действующих по нелинейному закону (эпюра криволинейная), заменяется равновеликими им (по площади) силами, равномерно распределенными по каждому участку.

Для выбора граничных условий рекомендуется ознакомиться с приложениям в учебном пособии [1, с 143-148], поскольку в курсах сопротивление материалов этому разделу уделяется недостаточное внимание.

Приведем расчет балки-стенки сеточным методом.

**Пример 3.** Определить методом конечных разностей напряженное состояние в пластинке толщиной  $b=1$ , нагруженную, как показано на рис. 32. Решение проведем в общем виде, придерживаясь предложенного алгоритма решения таких задач.

1. Заменяем контур пластинки (рис. 32, а) рамой с той же приложенной нагрузкой. Поскольку рама имеет четыре оси симметрии, то основную систему выбираем путем сквозного разреза по одной из линий симметрии конструкции и нагрузки (вертикальной).

На рис. 32, б показана основная система, эквивалентная заданной – в сечении разреза приложены внутренние силовые факторы, которые при этом могут возникнуть.

Продольные силы  $N = P/2$  определяются из условия равновесия половины рамы. Поперечные силы отсутствуют ввиду симметрии<sup>2</sup>.

Для рассматриваемой основной системы запишем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1,P} = 0. \quad (a)$$

Физический смысл полученного уравнения заключается в том, что в случае приложения в сечении разреза неизвестных пока моментов  $X_1$  плоскость разреза не будет разомкнута.

Для основной системы на рис. 32, в построена эпюра изгибающих моментов от единичной силы  $X_1=1$   $M_1$ , а на рис. 32, г – от заданной нагрузки  $M_P$  (ее еще называют грузовой).

Используя построенные на рис. 32, в и г эпюры, по правилу Верещагина определим коэффициенты  $\delta_{11}$  и

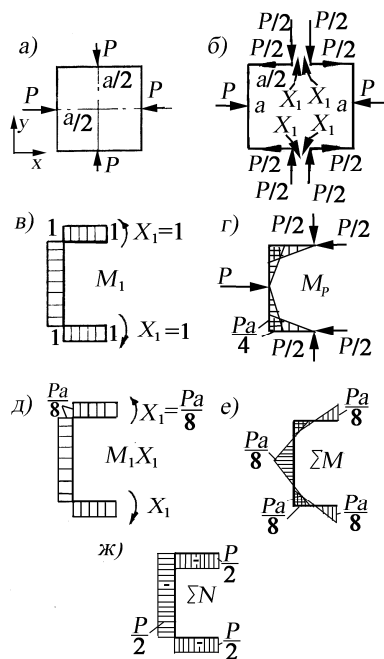


Рис. 32. Расчет рамы, равной по контуру балке-стенке

$\Delta_{1,P}$  в каноническом уравнении (а):

$$EI\delta_{11} = 1 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot a \cdot 1 = 2a; \quad EI\Delta_{1,P} = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{4} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{Pa^2}{4}.$$

Подставив полученные значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1,P}$  в уравнение (а), получим:

$$2aX_1 - \frac{Pa^2}{4} = 0.$$

Откуда

$$X_1 = \frac{Pa}{8}.$$

<sup>2</sup> Для проверки можно выбрать основную систему путем разреза в одном сечении рамы (например внизу) и приложить все три внутренних силовых фактора. После составления канонических уравнений и определения коэффициентов при неизвестных метода сил получим: поперечные силы  $Q=0$ .

После определения неизвестного значения  $X_1$  строим эпюру  $M_1X_1$  (рис. 32, д). Суммарная эпюра изгибающих моментов для заданной системы (см. рис. 32, е) может быть построена суммированием ординат эпюр  $M_P$  и  $M_1X_1$

$$\sum M = M_P + M_1X_1.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов  $\sum M$  построена для половины замкнутого контура (для второй половины она будет симметричной относительно вертикальной оси).

Эпюра продольных сил построена на рис. 32, ж.

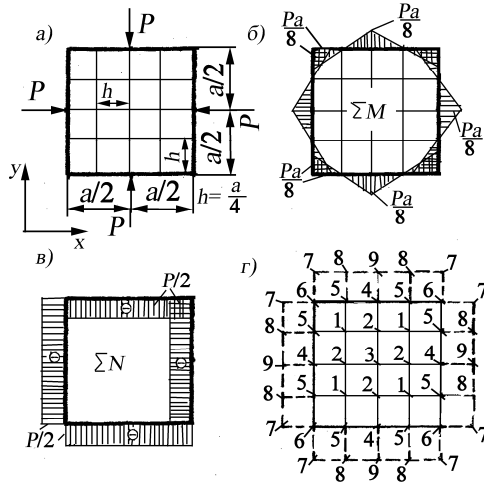


Рис. 33. Пластина с нанесенной сеткой (а) и обозначением узловых точек (г), эпюры моментов (б) и продольных сил (в) после замены контура пластинки рамой

2. Нанесем на пластину (балку-стенку) квадратную сетку с шагом  $a/4$  (рис. 33, а). Для определения функции напряжений в узловых точках контура, а также в законтурных точках на рис. 33, б приведена эпюра  $\sum M$ , а на рис. 33, в – суммарная эпюра продольных сил  $\sum N$ .

Пронумеруем узлы сетки с учетом свойств прямой симметрии (эпюра моментов симметрична относительно четырех осей).

3. Используя ординаты эпюры изгибающих моментов для замкнутого контура, определяем функции напряжений  $\varphi_i$  по контуру балки-стенки. Для этого используем зависимости (122), (124), (126), (128) или рекомендации рис. 30 и формулы (129). Напомним, что ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются на сжатой стороне стержней.

Из эпюр (см. рис. 33, б) следует, что в узловых точках контура функция напряжений имеет следующие значения:

$$\varphi_4 = \frac{Pa}{8}, \quad \varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = -\frac{Pa}{8}. \quad (б)$$

4. Используя эпюру продольных сил  $N$  (см. рис. 33, в) для замкнутого контура и зависимости (121), (123), (125) и (127), выражаем функции напряжений в законтурных точках через функции внутри контура и частные производные по соответствующему направлению:

$$\begin{aligned} \varphi_9 &= \varphi_2 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = \varphi_2 - \frac{Pa}{4}, \\ \varphi_8 &= \varphi_1 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = \varphi_1 - \frac{Pa}{4}, \\ \varphi_7 &= \varphi_5 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = -\frac{Pa}{4}. \end{aligned} \quad (в)$$



5. Используя рис. 31 как шаблон для решения уравнения Мориса Леви (в нулевой точке), составляем разностные уравнения (112) для всех внутриконтурных точек (число уравнений в точности равно числу внутриконтурных точек):

$$20\varphi_1 - 8(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_5) + 2(\varphi_4 + \varphi_6 + \varphi_4 + \varphi_3) + (\varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_8 + \varphi_1) = 0; \quad (z)$$

$$20\varphi_2 - 8(\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_3) + 2(\varphi_5 + \varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_2) + (\varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_5 + \varphi_2) = 0;$$

$$20\varphi_3 - 8(\varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2) + 2(\varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1) + (\varphi_4 + \varphi_4 + \varphi_4 + \varphi_4) = 0.$$

Подставляя найденные значения функции напряжений в контурных (б) и законтурных (в) точках в выражение (z) и группируя подобные члены, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 24\varphi_1 - 16\varphi_2 + 2\varphi_3 - 0,25Pa &= 0, \\ -16\varphi_1 + 26\varphi_2 - 8\varphi_3 - 1,25Pa &= 0, \\ 8\varphi_1 - 32\varphi_2 + 20\varphi_3 + 0,5Pa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

6. Решив систему алгебраических линейных уравнений (d), находим значения функции напряжений  $\varphi_i$  в точках внутри контура. Для этого используем, например, схему Гаусса [20]. Решая, находим:

$$\varphi_1 = 0,1215Pa; \quad \varphi_2 = 0,1974Pa; \quad \varphi_3 = 0,243Pa.$$

Из уравнений (в) также получим

$$\varphi_9 = -0,0526Pa; \quad \varphi_8 = -0,1285Pa; \quad \varphi_7 = -0,25Pa.$$

7. Для проверки правильности решения необходимо подставить найденные значения функции напряжений  $\varphi_i$  в исходные алгебраические уравнения (d):

$$\begin{aligned} 6,356Pa - 6,3168Pa &\approx 0; \\ -5,186Pa + 5,1324Pa &\approx 0; \\ 3,474Pa - 3,408Pa &\approx 0. \end{aligned}$$

Хотя полученные уравнения не обращаются в нуль, но расхождение (между положительными и отрицательными значениями) составляет: в первом –  $[(6,332 - 6,3168)/6,3168]100 \approx 0,2\%$ , во втором –  $[(5,1324 - 5,138)/5,1324]100 = 0,1\%$ , в третьем –  $[(3,408 - 3,402)/3,402]100 = 0,2\%$ , что объясняется принятыми в процессе решения округлениями (допускается до 5 %).

8. Используя шаблон (см. рис. 31), определяем нормальные и касательные напряжения в окрестностях всех узловых точек в соответствии с зависимостями (113). Определим, например, напряжения  $\sigma_x$  по сечению 4-4 (см. рис. 33, z – вертикальная линия)

$$\sigma_{x4} = (\varphi_9 - 2\varphi_4 + \varphi_2) / (0,25a)^2 = -1,683 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{x2} = (\varphi_4 - 2\varphi_2 + \varphi_3) / (0,25a)^2 = -0,429 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{x3} = (\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_2) / (0,25a)^2 = -1,459 \frac{P}{a}.$$

Поскольку на балку-стенку действует нагрузка, симметричная относительно осей симметрии балки-стенки (см. рис. 33, з), то нормальные напряжения  $\sigma_y$  по горизонтальному сечению 4-4 будут равны  $\sigma_{y4} = -1,683 \frac{P}{a}$ ;  $\sigma_{y2} = -0,429 \frac{P}{a}$ ;  $\sigma_{y3} = -1,459 \frac{P}{a}$ .

По горизонтальному сечению 5-5 нормальные напряжения  $\sigma_y$

$$\sigma_{y5} = (\varphi_8 - 2\varphi_5 + \varphi_1) / (0,25a)^2 = 0,016 \frac{P}{a} \approx 0;$$

$$\sigma_{y1} = (\varphi_5 - 2\varphi_1 + \varphi_2) / (0,25a)^2 = -0,73 \frac{P}{a}; \quad \sigma_{y2} = (\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_1) / (0,25a)^2 = -2,45 \frac{P}{a}.$$

По горизонтальной линии 6-6

$$\sigma_{y6} = (\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7) / (0,25a)^2 = 0;$$

$$\sigma_{y5} = (\varphi_4 - 2\varphi_5 + \varphi_6) / (0,25a)^2 = 0;$$

$$\sigma_{y4} = (\varphi_5 - 2\varphi_4 + \varphi_5) / (0,25a)^2 = 4 \frac{P}{a}.$$

Если воспользоваться шаблоном (см. рис. 31) и зависимостью для вычисления касательных напряжений  $\tau_{xy} = -\frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12})$ , то по сечениям 4-4 в балке-стенке как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях  $\tau_{xy} = 0$ . Действительно, для  $\tau_{yx4}$  по вертикальному сечению 4-4

$$\tau_{yx4} = -(\varphi_8 - \varphi_8 + \varphi_1 - \varphi_1) / [4(0,25)^2] = 0.$$

Нетрудно заметить, что аналогичный результат получим для всех точек по сечению 4-4.

Для вертикального сечения 5-5

$$\tau_{yx5} = -(\varphi_7 - \varphi_9 + \varphi_2 - \varphi_5) / [4(0,25a)^2] = 0;$$

$$\tau_{yx1} = -(\varphi_6 - \varphi_4 + \varphi_3 - \varphi_4) / [4(0,25a)^2] = 0,528 \frac{P}{a};$$

$$\tau_{yx2} = -(\varphi_5 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_5) / [4(0,25a)^2] = 0;$$

$$\tau_{yx1} = -(\varphi_4 - \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_6) / [4(0,25a)^2] = -0,528 \frac{P}{a}.$$

Построенные по расчетным данным эпюры напряжений (знак напряжений указан знаком плюс или минус) приведены на рис. 34.

Для удобства проверки из условия равновесия эпюры  $\sigma_x$  построены по вертикальным сечениям, а эпюры  $\sigma_y$  – по горизонтальным. Проверка правильности построения эпюр  $\tau_{xy}$  не требуется, так как сумма площадей для этих эпюр равна нулю, то есть оно выполняется по сечениям тождественно.

В силу симметрии эпюр  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , очевидно, достаточно проверить только эпюру нормальных напряжений  $\sigma_y$ . Рассмотрим равновесие отсеченных частей, приведенных на рис. 35.

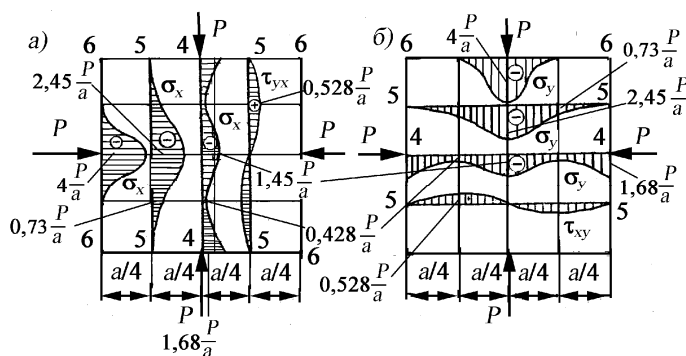


Рис. 34. Эпюры напряжений  $\sigma_x$  (а) и  $\sigma_y$  (б), построенных по расчетным данным

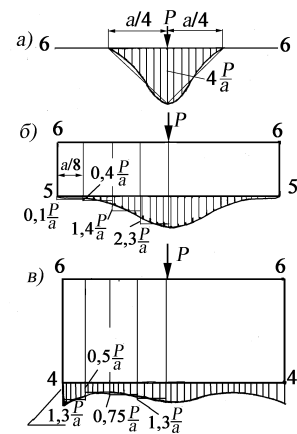


Рис. 35. К равновесию отсеченных частей балки-стенки

Если заменить на рис. 35, а площадь эпюры напряжений  $\sigma_y$  площадью треугольника, то, используя уравнения равновесия в форме  $\sum Y = 0$ , получим для сечения 6-6:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \frac{P}{a} \cdot \frac{a}{2} - P = 0.$$

Для удобства составления условий равновесия по сечениям 5-5 (рис. 35, б) и 4-4 (рис. 35, в) разобьем эпюру внутренних сил, изменяющихся по нелинейному закону, на участках длиной  $a/8$  равновеликими равномерно распределенными силами (чтобы площади под эпюрами были одинаковыми). Тогда для сечения 5-5 имеем

$$2(0,1 \frac{P}{a} + 0,4 \frac{P}{a} + 1,4 \frac{P}{a} + 2,3 \frac{P}{a}) \frac{a}{8} - P \approx 0.$$

Для сечения 4-4:

$$2(1,3 \frac{P}{a} + 0,5 \frac{P}{a} + 0,75 \frac{P}{a} + 1,3 \frac{P}{a}) \frac{a}{8} - P \approx 0.$$

Таким образом, равновесие по всем сечениям выполняется.

**Тема 10.** (2 недели – 6 ч. для освоения этого материала). Другие сеточные методы решения плоской задачи теории упругости. Плоская задача теории упругости в полярных координатах.

**Цель занятий** – показать другие методы решения задач теории упругости методом сеток.

Для самостоятельного изучения достаточно рассмотреть из учебного пособия [1] п. 5.7. Поскольку тема 9 часто осваивается студентами достаточно трудно, то на эти две недели можно продолжить тему 9, заставив студентов ознакомиться с прил. в пособии [1].

Особенное затруднение вызывает решения полученных систем алгебраических уравнений после сеточного деления некоторой плоскости.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений можно также воспользоваться интернет-ресурсами:

[http://www.math-pr.com/equations\\_1.php](http://www.math-pr.com/equations_1.php);  
<http://ru.onlinemschool.com/math/assistance/equation/matr/>;  
<http://ru.numberempire.com/equationsolver.php>.

Можно воспользоваться любой программой «Решение системы  $M$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными (СЛУ) - *OnLine Калькулятор*» – **система уравнений** будет решена прямо на сайте, с выводом всех промежуточных результатов и комментариями. Точно также можно воспользоваться **«Онлайн калькулятор. Решение систем линейных уравнений. Матричный метод. Метод обратной матрицы»**. Этот онлайн калькулятор позволит очень просто решить систему линейных уравнений (СЛУ) матричным методом (методом обратной матрицы).

Дополнительно для подготовки к проведению практических занятий рекомендуется использовать из дополнительной литературы [3, с. 10-20].

**Тема 11.** (2 недели – 6 ч. для освоения этого материала). Простое радиальное напряженное состояние. Функции напряжений для плоской задачи в полярных координатах.

**Цель занятий** – на практике использовать решение уравнений плоской задачи в полярных координатах.

Для самостоятельного изучения достаточно рассмотреть из учебного пособия [1] главу 6.

Особенно интересным будет решение задачи о нагружении клина в вершине сосредоточенной силой (типа нагрузки на резец).

Решение (149) можно применить к задаче о клине, к вершине которого приложена сила  $P$  произвольного направления (рис. 38). Угол раствора клина равен  $2\alpha$ . Начальный радиус-вектор совпадает с биссектрисой угла  $2\alpha$ . Направление линии действия силы  $P$  с начальным радиусом-вектором составляет угол  $\beta$ . Покажем, что в этом случае клин находится в

простом радиальном напряженном состоянии.

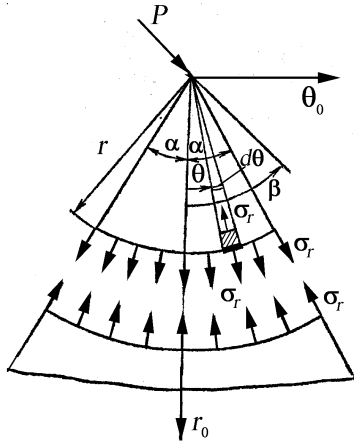


Рис. 38. Нагружение на участок клина произвольной силой

нием полюса  $O$ . В полюсе при  $r = 0$  формула (148) неприемлема. Для включения в граничные условия силы  $P$  на основании принципа Сен-Венана заменим эту силу эквивалентной ей нагрузкой, распределенной по дуге радиусом  $r$ , проведенной из полюса  $O$  (см. рис. 38) и рассмотрим равновесие элемента клина.

Спроектируем все силы, действующие на этот элемент, на вертикальную и горизонтальную оси. В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r d\theta \cdot \cos \theta + P \cos \beta &= 0; \\ \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r d\theta \cdot \sin \theta + P \sin \beta &= 0. \end{aligned}$$

После подстановки значения  $\sigma_r$  из формулы (148) получим

$$\begin{aligned} -k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta - k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta + P \cos \beta &= 0; \\ -k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta - k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta + P \sin \beta &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрировав, получаем систему двух уравнений для определения постоянных  $k$  и  $\theta_0$ :

$$\begin{aligned} -k \cos \theta_0 [\alpha + (\sin 2\alpha)/2] + P \cos \beta &= 0; \\ -k \sin \theta_0 [\alpha + (\sin 2\alpha)/2] + P \sin \beta &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta_0 &= \frac{P \cos \beta}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}; \\ k \sin \theta_0 &= \frac{P \sin \beta}{\alpha - (\sin 2\alpha)/2}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Разделив почленно второе уравнение (а) на первое, получаем условие для определения постоянной  $\theta_0$ :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} \beta \frac{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}{\alpha - (\sin 2\alpha)/2}. \quad (150)$$

Возведем оба выражения в (а) в квадрат, сложим, а после извлечения квадратного корня находим

$$k = P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{[\alpha + (\sin 2\alpha)/2]^2} + \frac{\sin^2 \beta}{[\alpha - (\sin 2\alpha)/2]^2}}. \quad (151)$$

Таким образом, удалось удовлетворить граничным условиям и, следовательно, рассматриваемый клин находится в простом радиальном напряженном состоянии.

Если по некоторым задачам из приведенного списка у студентов возникают дополнительные вопросы (точное решение, точное удовлетворение граничным условиям, то для этого проводится дополнительная консультация.

## 6 СЕМЕСТР

**План проведения практических занятий.** На практических занятиях решаются примеры решения типовых задач по следующим темам.

**Тема 1-4.** (4 недели – 12 ч. для освоения этого материала). Изгиб тонких пластинок. Основные понятия и гипотезы. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки. Условие на контуре пластинки. Основные уравнения изгиба круглой пластинки.

Цель первого занятия – рассмотреть методы расчета на прочность пластин при действии произвольной нагрузки.

Приведем типовые задачи, которые можно предложить на практических занятиях (все ссылки по учебным пособиям [2, 3, 8]).

1. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C(1 - \cos \frac{4\pi x}{a})(1 - \cos \frac{4\pi y}{b})$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

2. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C(1 - \cos \frac{4\pi x}{a})(1 - \cos \frac{4\pi y}{b})$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

3. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left( \cos \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{3\pi x}{a} \right) \left( \cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b} \right)$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

4. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left( \cos \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{3\pi x}{a} \right) \left( \cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b} \right)$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

5. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

6. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

7. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{b} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

8. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left( \cos \frac{3\pi x}{a} - \cos \frac{5\pi x}{a} \right) \left( \cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b} \right)$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

9. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{4\pi y}{b} \right)$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

10. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C(1 - \cos \frac{4\pi x}{a}) \sin \frac{3\pi y}{b}$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

11. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C(1 - \cos \frac{4\pi y}{b}) \sin \frac{3\pi x}{a}$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

12. Прямоугольная пластинка OABC изгибается под действием поперечной нагрузки интенсивности  $q$ . Задано уравнение  $W(x,y)$

$$W = C(x - a)^2(y - b)y$$

Вычислить, каким граничным кинематическим и статическим условиям это соответствует? Чему равняется постоянный коэффициент  $C$ ?

13. Прямоугольная пластинка OABC изгибается под действием поперечной нагрузки интенсивности  $q$ . Задано уравнение  $W(x,y)$

$$W = C(x - a)(y - b)^2x$$

Вычислить, каким граничным кинематическим и статическим условиям это соответствует? Чему равняется постоянный коэффициент  $C$ ?

14. Для прямоугольной пластинки, опертой по четырем углам на жесткие опоры, задано приближенное выражение для прогибов

$$W(x,y) = C_1 \cos \frac{\pi x}{a} + C_2 \cos \frac{\pi y}{b}$$

Проверить, удовлетворяется ли статические и кинематические граничные условия

15. Для прямоугольной пластинки, опертой по четырем углам на жесткие опоры, задано приближенное выражение для прогибов

$$W(x,y) = C_1 \cos \frac{3\pi x}{a} + C_2 \cos \frac{3\pi y}{b}$$

Проверить, удовлетворяется ли статические и кинематические граничные условия

16. Для прямоугольной пластинки, опертой по четырем углам на жесткие опоры, задано приближенное выражение для прогибов

$$W(x,y) = C(1 - \cos \frac{4\pi x}{a})(1 - \cos \frac{4\pi y}{b})$$

Проверить, удовлетворяется ли статические и кинематические граничные условия

17. Для прямоугольной пластинки, опертой по четырем углам на жесткие опоры, задано приближенное выражение для прогибов



$$W(x,y) = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$$

Проверить, удовлетворяются ли статические и кинематические граничные условия

18. Круглая пластина свободно опирается по контуру, нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Уравнение изогнутой поверхности имеет вид:

$$W(x,y) = C(R^2 - r^2)$$

$R$  – Внешний радиус пластинки .

Требуется: 1) Проверить удовлетворяются ли граничные условия;

2) Проверить удовлетворяются ли дифференциальные условия изгиба пластин

3) Определить постоянный коэффициент  $C$  и углы поворота пластин на контуре.

19. Круглая пластинка свободно опирается по контуру, загружена нагрузкой, равномерно распределенной по площади кольца с внутренним радиусом  $b$

Уравнение изогнутой поверхности имеет вид:

а) на участке, где  $\rho < \beta$

$$\left(\rho = \frac{r}{a}, \beta = \frac{b}{a}\right)$$

$$W = C \{ [(5+\mu) - 4(3+\mu)\beta^2 + (7+3\mu)\rho^4] - 2[(3+\mu) - 4\beta^2 + (1-\mu)\beta^4]\rho^2 - 4(1+\mu)(\beta^2 + 2\rho^2)\beta^2 \ln \beta \}$$

б) на участке, где  $\rho > \beta$

$$W = C \{ [(5+\mu) - 4(3+\mu)\beta^2 + 2(1-\mu)\beta^4] - 2[(3+\mu) - 2(3+\mu)\beta^2 + (1-\mu)\beta^4]\rho^2 + (1+\mu)\rho^4 - 4(1+\mu)(\beta^2 + 2\rho^2)\beta^2 \ln \beta \}$$

Требуется: 1) Проверить удовлетворяются ли граничные условия на контуре пластин.

2) Найти значение постоянного коэффициента  $C$

20. . Круглая пластинка свободно опирается по контуру, загружена нагрузкой, равномерно распределенной по площади кольца с внутренним радиусом  $b$

Уравнение изогнутой поверхности имеет вид:

а) на участке, где  $\rho < \beta$   $W = C \{ (1 - \beta^2)[(3+\mu) - (1-\mu)\rho^2] + 2(1+\mu)(\beta^2 + \rho^2) \ln \beta \}$

$\rho > \beta$   $W = C \{ [(3+\mu) - (1-\mu)\beta^2](1 - \rho^2) + 2(1+\mu)(\beta^2 - \rho^2) \ln \rho \}$

Требуется: 1) Проверить удовлетворяются ли граничные условия на контуре пластин.

2) Найти значение постоянного коэффициента  $C$

21. . Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2a}\right) \left(1 - \sin \frac{\pi y}{b}\right)$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

22. Для прямоугольной пластинки, изгибаемой поперечной нагрузкой, задано уравнение прогибов  $W(x,y)$

$$W(x,y) = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Установить: 1) каким граничным условиям удовлетворяет предложенное для решения  $W(x,y)$ ? Какой нагрузке оно соответствует.

23. Пластика со сторонами  $a$  и  $b$  изгибается по уравнению

$$W = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Выяснить, каким граничным кинематическим и статическим условиям и какой нагрузке соответствует уравнение W

24. Задано уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластинки  $W=C[(5+\mu)a^4 - 2(3+\mu)a^2r^2 + (1+\mu)r^4]$  где  $a$  – радиус пластинки

Выяснить, каким граничным кинематическим и статическим условиям и какой нагрузке соответствует уравнение W

25. Задано уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластинки  $W=C[(5+\mu)a^4 - 2(3+\mu)a^2r^2 + (1+\mu)r^4]$  где  $a$  – радиус пластинки

Вычислить изгибающие моменты в тангенциальном и радиальном сечении.

26. Пластика со сторонами  $a$  и  $b$  изгибается по уравнению

$$W=C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

Выяснить, каким граничным кинематическим и статическим условиям и какой нагрузке соответствует уравнение W.

27. Вычислить изгибающие моменты в тангенциальном и радиальном сечении

Выяснить, каким граничным кинематическим и статическим условиям и какой нагрузке соответствует уравнение W

$$W=C\sin\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi y}{b}.$$

**Тема 5-9.** (5 недель – 16 ч. практических занятий для освоения этого материала).

Для самостоятельного изучения материала выдается индивидуальное задание каждому студенту для самостоятельной проработки этого раздела.

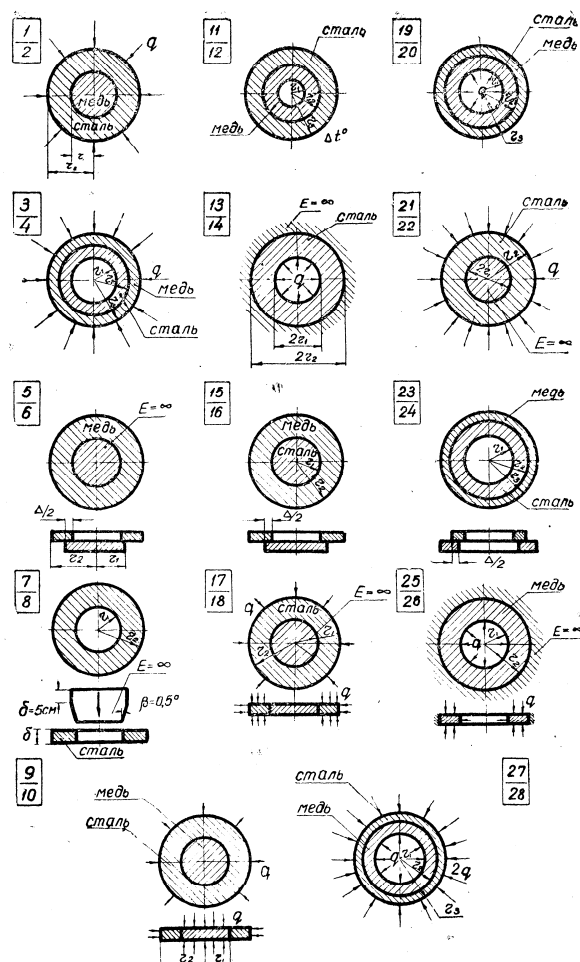
**Задание.** Определить радиальные и тангенциальные напряжения, возникающие в толстостенных дисках от действия давления  $q$ , от нагрева или от прессовой посадки с натягом  $\Delta$ .

Проверить диск на прочность (материал – сталь 65Г).

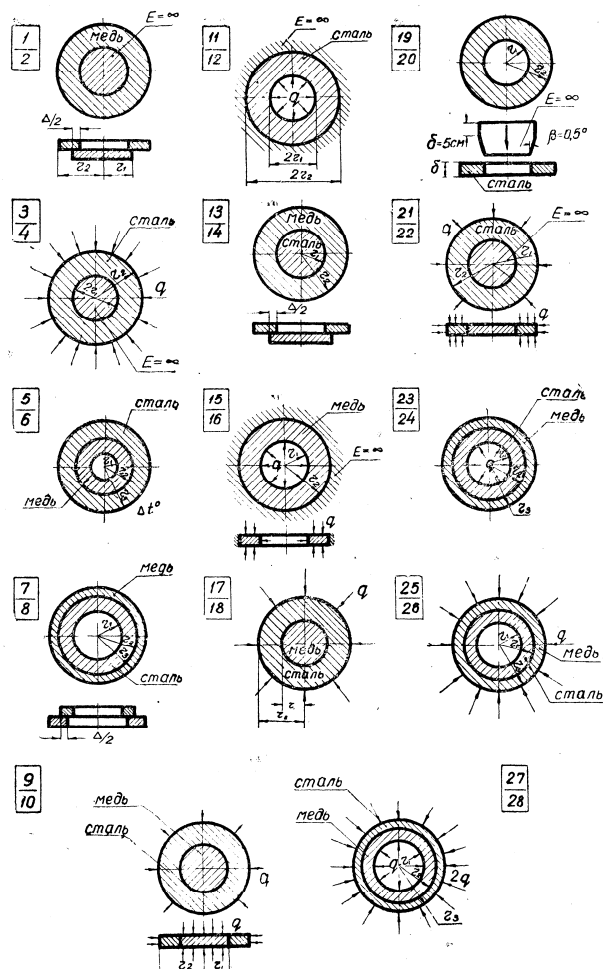
#### *Данные для задачи*

Наименование величин	Единица измерения	Варианты									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус $r_1$	см	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Радиус $r_2$	см	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Радиус $r_3$	см	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Давление $q$	МПа	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Изменение температуры $\Delta t$	°C	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Натяг $\Delta$	мм	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55

### Вариант 1

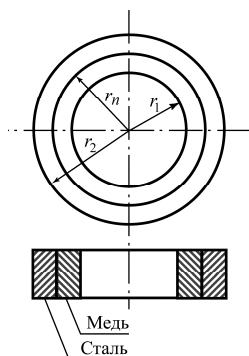


### Вариант 2



Кроме того, для самостоятельного решения и рейтинг-контроля рекомендуется использовать следующие задачи.

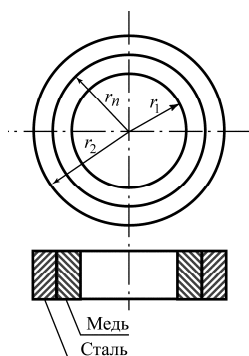
1.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_2=24$  см;  $r_3=14$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=10$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. Определить напряжения во вращающемся диске, если внешний радиус диска  $r_2=30$  см; внутренний –  $r_1=6$  см, частота вращения  $n=300$  мин<sup>-1</sup>. Плотность единицы объема материала  $\rho=8$  г/см<sup>3</sup>. Коэффициент Пуассона  $\mu=0,3$ .

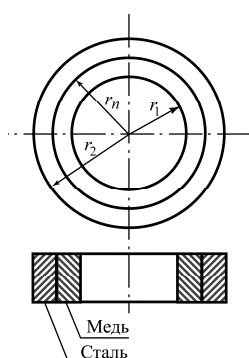
2.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=10$  см;  $r_n=16$  см;  $r_2=26$  см;  $p=40$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=10$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. При какой частоте вращения  $n$  наибольшее напряжение в диске, размерами  $r_1=4,5$  см и  $r_2=33$  см достигнет величины  $\sigma = 100$  МПа, если плотность единицы объема материала  $\rho=8$  г/см<sup>3</sup> и  $\mu=0,3$ ?

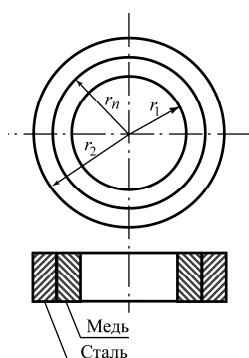
3.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=6$  см;  $r_n=12$  см;  $r_2=22$  см;  $p=30$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. Определить допустимую частоту вращения  $n$  чугунного маховика со средним диаметром 2 метра (толщина стенки 0,5 м), если плотность единицы объема материала  $\rho=7,8$  г/см<sup>3</sup>, а допускаемое напряжение  $[\sigma]=20$  МПа.

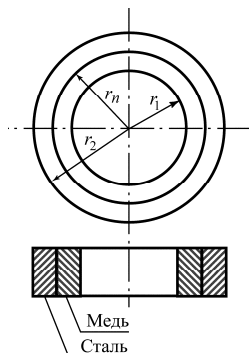
4.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=12$  см;  $r_n=15$  см;  $r_2=25$  см;  $p=25$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=30$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. Медный цилиндр надет на стальной так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=0,6$  МПа. Система вращается вокруг оси цилиндров. Определить при какой частоте вращения  $n$  давление  $p_0$  станет равным нулю. Для меди:  $\rho_m=8,9$  г/см<sup>3</sup>;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для стали:  $\rho_c=7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при этом условии?

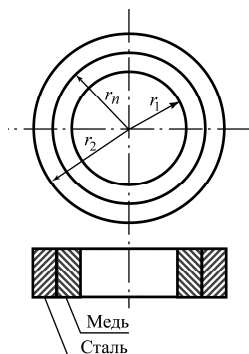
5.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_{\text{п}}=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. Стальной цилиндр надет на медный так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=1$  МПа. Система вращается вокруг оси цилиндров с частотой вращения  $n=600$  мин<sup>-1</sup>. Для стали:  $\rho_c=7,8$  г/см<sup>3</sup>;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_{\text{п}}=0,712$  м. Для меди:  $\rho_m=8,9$  г/см<sup>3</sup>,  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах на посадочном радиусе при этом условии?

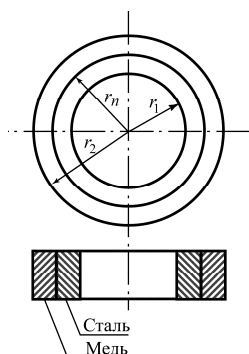
6.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_{\text{п}}=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ; внутреннее давление  $q=10$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. Определить допускаемую частоту вращения стального диска, если внешний радиус диска  $r_2=30$  см; внутренний –  $r_1=6$  см. Плотность единицы объема материала  $\rho=7,8$  г/см<sup>3</sup>. Коэффициент Пуассона  $\mu=0,3$ .

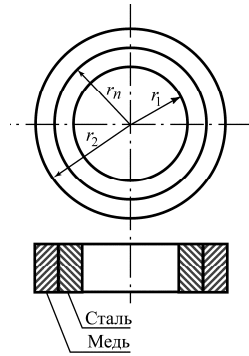
7.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_{\text{п}}=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=10$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. Стальной цилиндр надет на медный так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=1$  МПа. Для стали:  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,75$  м; посадочный радиус  $r_{\text{п}}=0,712$  м. Для меди:  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при внутреннем давлении  $p_1=100$  МПа?

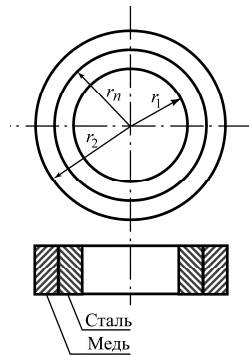
8.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_2=14$  см;  $r_3=24$  см;  $p=30$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. Стальной цилиндр надет на медный так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=1$  МПа. Система нагревается равномерно до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Для стали:  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,73$  м; посадочный радиус  $r_1=0,712$  м. Для меди:  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ ,  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при этом условии?

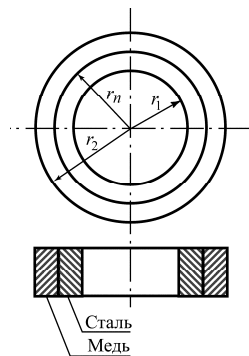
9.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_2=14$  см;  $r_3=24$  см;  $p=25$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. На медный цилиндр с внешним диаметром 40 см и толщиной стенок 10 см плотно надет (без натяга) стальной цилиндр с внутренним диаметром 40 см и внешним 60 см. Медный цилиндр подвергается внутреннему давлению  $p_1=80$  МПа. Найти давление, передаваемое с медного цилиндра на стальной и наибольшие напряжения в медном и стальном цилиндрах, если для стали  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ .

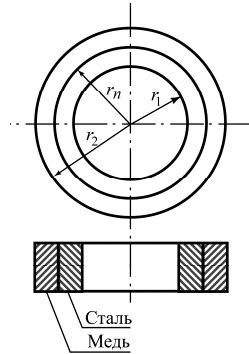
10.



1. Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_2=14$  см;  $r_3=24$  см;  $p=25$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

2. На медный цилиндр с внешним диаметром 40 см и толщиной стенок 10 см плотно надет стальной цилиндр (без натяга) с внутренним диаметром 40 см и внешним 60 см. Система нагревается равномерно до температуры 100°C. Медный цилиндр подвергается внутреннему давлению  $p_1=80$  МПа. Найти давление, передаваемое с медного цилиндра на стальной и наибольшие напряжения в медном и стальном цилиндрах, если для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ .

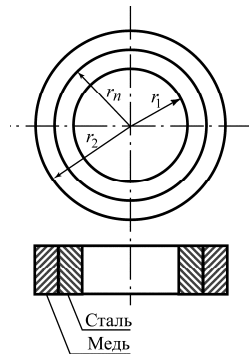
11.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=10$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Стальной цилиндр надет на медный с натягом  $\delta=0,002$  м. Для стали:  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди:  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при внутреннем давлении  $p_1=100$  МПа?

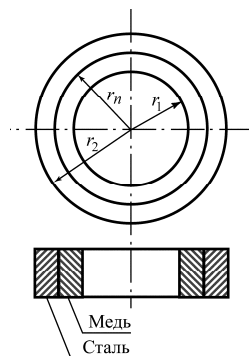
12.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Медный цилиндр надет на стальной так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=16$  МПа. Определить до какой температуры необходимо нагреть систему, чтобы давление  $p_0$  стало равным 8 МПа (для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ ).

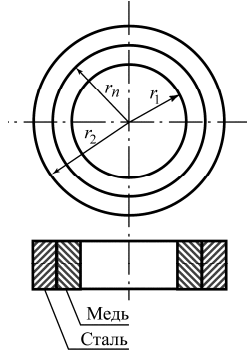
13.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Стальной цилиндр надет на медный так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=1$  МПа. Для стали:  $E_c=2\cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди:  $E_m=1\cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при внутреннем давлении  $p_1=80$  МПа и нагревании до  $100^\circ\text{C}$  ?

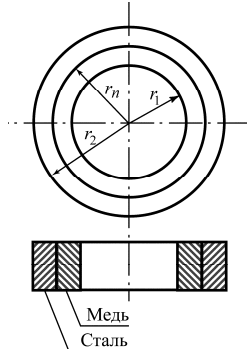
14.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2\cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1\cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Стальной цилиндр надет на медный так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=1$  МПа. Для стали:  $E_c=2\cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди:  $E_m=1\cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при внутреннем давлении  $p_1=120$  МПа и напряжении растяжения  $\sigma_z=10$  МПа?

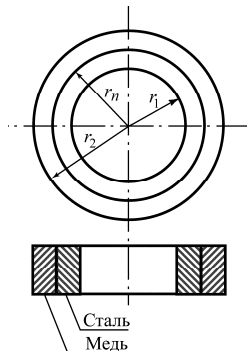
15.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном и медном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2\cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1\cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Медный цилиндр надет на стальной так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=0,6$  МПа. Определить до какой температуры необходимо нагреть систему, чтобы давление  $p_0$  стало равным нулю (для стали  $\alpha_c=12,5\cdot 10^{-6}$ ;  $E=2\cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1\cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5\cdot 10^{-6}$ ).

16.

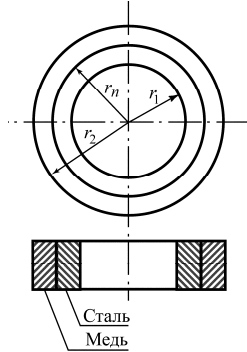


Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=25$  МПа;  $E_c=2\cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1\cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.



Стальной цилиндр надет на медный с натягом  $\delta=0,002$  м. Для стали:  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах, если по медной трубе протекает жидкость при температуре  $-20^\circ\text{C}$  и давлении  $p_1=10$  МПа (Известно, что для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ )?

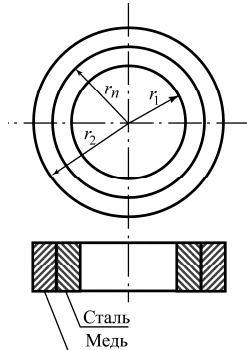
17.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=25$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

На медный цилиндр с внешним диаметром 0,40 м и толщиной стенок 0,10 м надет стальной цилиндр (с натягом) с внутренним диаметром 0,404 м и внешним 0,60 см. Система нагревается равномерно до температуры  $100^\circ\text{C}$ . Медный цилиндр подвергается внутреннему давлению  $p_1=80$  МПа. Найти давление, передаваемое с медного цилиндра на стальной и наибольшие напряжения в медном и стальном цилиндрах, если для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ .

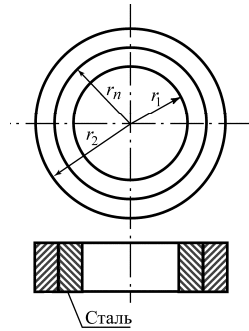
18.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=25$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=20$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

На медный цилиндр с внешним диаметром 0,40 м и толщиной стенок 0,10 м надет стальной цилиндр (с натягом) с внутренним диаметром 0,404 м и внешним 0,60 см. Стальной цилиндр охлаждается равномерно до температуры  $-20^\circ\text{C}$ . Медный цилиндр подвергается внутреннему давлению  $p_1=80$  МПа. Найти давление, передаваемое с медного цилиндра на стальной и наибольшие напряжения в медном и стальном цилиндрах, если для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ .

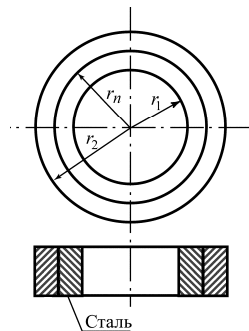
19.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном диске, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=\infty$ ;  $p=25$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_2=\infty$ ;  $\mu_c=0,24$ ;  $q=25$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Медный цилиндр надет на стальной так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=16$  МПа. Определить до какой температуры необходимо нагреть систему, чтобы давление  $p_0$  стало равным 8 МПа (для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ ).

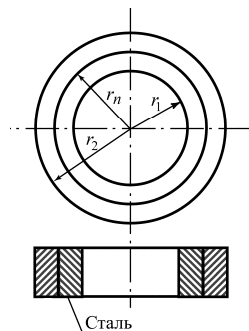
20.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном диске, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=\infty$ ;  $p=0$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_2=\infty$ ;  $\mu_c=0,24$ ;  $q=45$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Медный цилиндр надет на стальной так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=0,6$  МПа. Определить до какой температуры необходимо охладить систему, чтобы давление  $p_0$  возросло на 20 %. (для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ ).

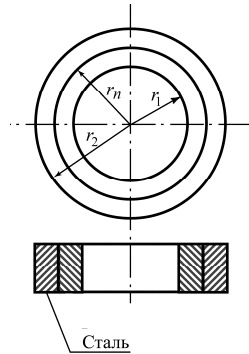
21.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном диске, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=\infty$ ; МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_2=\infty$ ;  $\mu_c=0,24$ ;  $q=35$  МПа. Кроме того, диск нагревается до температуры  $100^\circ\text{C}$  ( $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ). Посадка осуществлена без натяга.

Стальной цилиндр надет на медный с натягом  $\delta=0,002$  м. Для стали:  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах, если стальную трубу охладить до температуры  $-20^\circ\text{C}$  при внутреннем давлении  $p_1=10$  МПа (Известно, что для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ )?

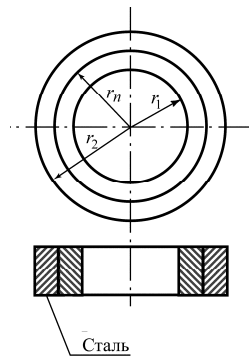
22.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном диске, если даны значения  $r_1=0$ ;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см; МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_l=\infty$ ;  $\mu_c=0,24$ ;  $q=35$  МПа. Кроме того, диск нагревается до температуры  $100^\circ\text{C}$  ( $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ). Посадка осуществлена без натяга.

В поршневую головку шатуна внутреннего диаметра 40 мм и внешнего 54 мм запрессовывается бронзовая втулка с толщиной стенки 2,5 мм и внешним диаметром 40,2 мм. До какой температуры необходимо охладить втулку, чтобы она вошла в поршневую головку без натяга? (Известно, что для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для бронзы –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ ). Какие напряжения возникают во втулке и головке, если система нагревается до температуры  $50^\circ\text{C}$ ? Какое давление нужно приложить, чтобы выпрессовать втулку, если коэффициент трения  $f=0,06$ ?

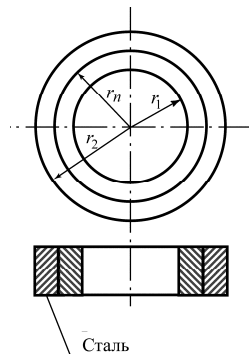
23.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном диске, если даны значения  $r_1=0$ ;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см; МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_l=\infty$ ;  $\mu_c=0,24$ ;  $p_2=35$  МПа;  $q=45$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Стальной цилиндр надет на медный так, что при посадке на поверхность соприкосновения обоих цилиндров возникло радиальное давление  $p_0=1$  МПа. Для стали:  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди:  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при внутреннем давлении  $p_1=120$  МПа?

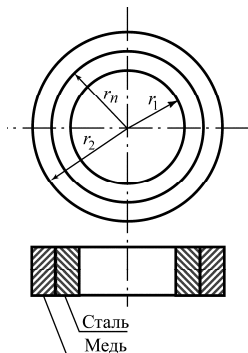
24.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в стальном диске, если даны значения  $r_1=0$ ;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см; МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_l=\infty$ ;  $\mu_c=0,24$ ;  $q=55$  МПа. Кроме того, диск нагревается до температуры  $100^\circ\text{C}$  ( $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ). Посадка осуществлена без натяга.

Стальной цилиндр надет на медный с натягом  $\delta=0,002$  м. Для стали:  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах, если по медной трубе протекает жидкость при температуре  $50^\circ\text{C}$  и давлении  $p_1=10$  МПа (Известно, что для стали  $\alpha_c=12,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,25$ , для меди –  $E=1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,34$ ,  $\alpha_m=16,5 \cdot 10^{-6}$ )?

25.



Найти наибольшие радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное  $\sigma_\theta$  напряжения в медном и стальном дисках, если даны значения  $r_1=8$  см;  $r_n=14$  см;  $r_2=24$  см;  $p=20$  МПа;  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu_c=0,24$ ;  $\mu_m=0,34$ ;  $q=10$  МПа. Посадка осуществлена без натяга.

Стальной цилиндр надет на медный с натягом  $\delta=0,002$  м. Для стали:  $E_c=2 \cdot 10^5$  МПа,  $r_2=0,72$  м; посадочный радиус  $r_n=0,712$  м. Для меди:  $E_m=1 \cdot 10^5$  МПа, внутренний радиус  $r_1=0,7$  м. Какие напряжения возникнут в медном и стальном цилиндрах при внутреннем давлении  $p_1=100$  МПа?

**Тема 10-15.** (6 недель – 16 ч. практических занятий для освоения этого материала).

Для самостоятельного изучения материала выдается индивидуальное задание каждому студенту для самостоятельной проработки этого раздела. В течение этого периода студенты должны овладеть основными понятиями о методе конечных элементов.

Даны координаты узловых точек (см. табл.) треугольного конечного элемента, толщина которого равна  $h^e$ . На элемент действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , направленная перпендикулярно стороне, указанной в колонках 8 и 15 таблицы. Построить аппроксимирующую матрицу  $[\alpha]$ , матрицу  $[\beta]$ , а также найти компоненты матрицы жесткости КЭ. При расчете принять  $\mu=0,3$ ,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа. Записать вектор внешних нагрузок и исходное матричное уравнение для определения узловых перемещений.

Исходные данные

№№ п/п	Вариант 1							Вариант 2						
	Координаты $x$ и $y$ узловых точек							Координаты $x$ и $y$ узловых точек						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	$i$		$j$		$m$			$i$		$j$		$m$		
1	0	$a$	0	0	$a$	0	$i-j$	$a$	0	0	0	0	$a$	$i-j$
2	0	$2a$	$a$	0	$a$	$a$	$j-m$	$a$	$a$	$a$	0	0	$2a$	$j-m$
3	0	$3a$	$2a$	0	$2a$	$a$	$m-l$	$2a$	$a$	$2a$	0	0	$3a$	$m-l$
4	$a$	$2a$	$a$	$a$	$2a$	$a$	$i-l$	$2a$	$a$	$a$	$a$	$a$	$2a$	$i-l$
5	$a$	$3a$	$a$	$2a$	$2a$	$2a$	$j-l$	$2a$	$2a$	$a$	$2a$	$a$	$3a$	$j-l$
6	$2a$	$a$	$a$	0	$2a$	0	$m-j$	$2a$	0	$a$	0	$2a$	$a$	$m-j$
7	$2a$	$2a$	$2a$	$a$	$3a$	$a$	$i-j$	$3a$	$a$	$2a$	$a$	$2a$	$2a$	$i-j$
8	$2a$	$a$	$2a$	0	$3a$	0	$i-j$	$3a$	0	$2a$	0	$2a$	$a$	$i-j$
9	$3a$	$3a$	$3a$	$2a$	$4a$	$2a$	$j-l$	$4a$	$2a$	$3a$	$2a$	$3a$	$3a$	$j-l$
10	$3a$	$2a$	$3a$	$a$	$4a$	$a$	$j-l$	$4a$	$a$	$3a$	$a$	$3a$	$2a$	$j-l$

11	3a	a	3a	0	4a	0	l-m	4a	0	3a	0	3a	a	l-m
12	4a	3a	4a	2a	5a	2a	l-m	5a	2a	4a	2a	4a	3a	l-m
13	4a	2a	4a	a	5a	a	i-m	5a	a	4a	a	4a	2a	i-m
14	4a	a	4a	0	5a	0	i-m	5a	0	4a	0	4a	a	i-m
15	4a	a	5a	0	5a	a	l-m	5a	a	5a	0	4a	a	l-m
16	4a	2a	5a	a	5a	a	l-m	5a	a	5a	a	4a	2a	l-m
17	4a	3a	5a	2a	5a	2a	l-m	5a	2a	5a	2a	4a	3a	l-m
18	4a	0	5a	0	5a	a	m-i	5a	a	5a	0	4a	0	m-i
19	4a	a	5a	a	5a	2a	j-i	5a	2a	5a	a	4a	a	j-i
20	4a	2a	5a	2a	5a	3a	l-j	5a	3a	5a	2a	4a	2a	l-j
21	2a	a	3a	0	3a	a	j-l	3a	a	3a	0	2a	a	j-l
22	2a	2a	3a	a	3a	2a	m-j	3a	2a	3a	a	2a	2a	m-j
23	2a	3a	3a	2a	3a	3a	m-i	3a	3a	3a	2a	2a	3a	m-i
24	a	a	2a	0	2a	a	i-j	2a	a	2a	0	a	a	i-j
25	a	2a	2a	a	2a	2a	j-l	2a	2a	2a	a	a	2a	j-l
26	a	3a	2a	2a	2a	3a	j-m	2a	3a	2a	2a	a	3a	j-m
27	a	4a	2a	3a	2a	4a	m-l	2a	4a	2a	3a	a	4a	m-l

**Тема 16-18.** (3 недели – 16 ч. практических занятий для освоения этого материала).

Студенты осваивают вариационные методы решения задач теории упругости. Для этого рекомендуется использовать задачи, представленные для раздела 1-4. На практических занятиях необходимо показать, что численное решение о деформированном состоянии пластины может быть решено с использованием вариационных методов.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЭНЕРГОМАШИНОСТРОЕНИИ»

### а) Основная литература

1. Гоц А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении; учеб. пособие. В 2 ч. Ч.1, 151 с. 2012 г; Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ.
2. Гоц А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении; учеб. пособие. В 2 ч. ч.2, 2013 г., 180 с; Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ.
3. Гоц А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: ФОРУМ; инфра-м, 2013. – 208 с.
4. Гоц А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ. 2011 – 140 с.

5. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В.. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. М: НТ Пресс, 2006. – 496с.

#### **б) Дополнительная литература**

1. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон.– М.: Наука, 1968. – 660 с.

2. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами; Пер. с англ./ Под ред. В.Г. Горского. М.: Мир, 1973. – 957 с.

3. Березин, И. С. Методы вычислений. В 2 т. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.

4. Постнов, В. А. Численные методы расчета судовых конструкций / В.А. Постнов. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.

5. Варвак, П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок: в 2 ч. / П.М. Варвак. – Киев: АН УССР – Ч. 1. – 1949. – 252 с.; Ч. 2. – 1952. – 275 с.

6. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин.– Киев: Изд. «Будівельник», 1970. – 435 с.

7. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 496 с.

8. Суслов В.П., Кочанов Ю.П. Задачник по строительной механике корабля и основам теории упругости. Л.: Судостроение, 1977. –216 с.

9. Отраслевые журналы «Известие вузов. Машиностроение», «Двигателестроение», «Двигатель», «Фундаментальные исследования»

10. Программный комплекс «Diesel RK». Бесплатный удаленный доступ к системе ДИЗЕЛЬ-РК <http://www.diesel-rk.bmstu.ru/Rus/index.php?page=Vozmojnosti>.

11. Для перемножения матриц необходимо использовать

<http://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/matrix/>

Разработал  
д.т.н., профессор  
кафедры ТД и ЭУ



А.Н.Гоц