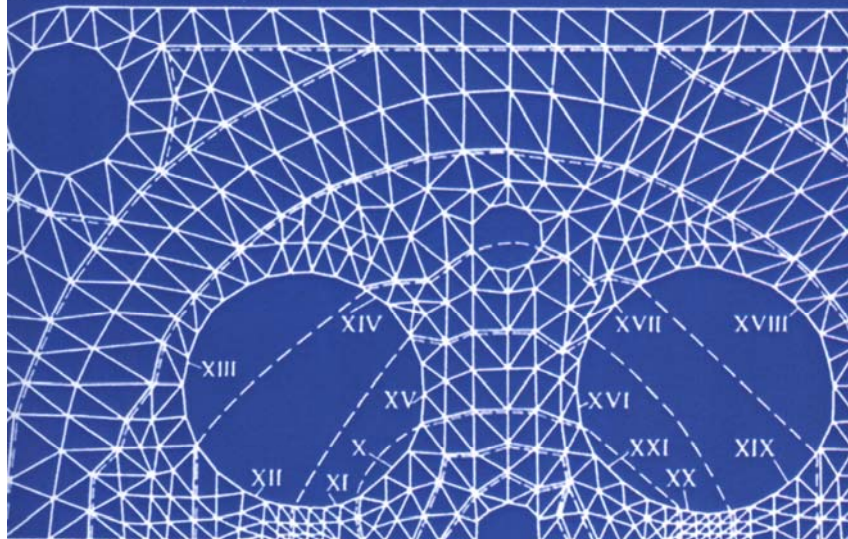


**А.Н. Гоц**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА В ЭНЕРГОМАШИНОСТРОЕНИИ**

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

**Часть 1**



III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | IX | VIII | VII | VI | V |

Владимир 2012

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

А.Н. ГОЦ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
В ЭНЕРГОМАШИНОСТРОЕНИИ

*Учебное пособие в двух частях*  
Часть 1

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено УМО по образованию в области энергетики и электротехники  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности 140501 – «Двигатели внутреннего сгорания»  
и направлений подготовки 141500 – «Энергомашиностроение»*

Владимир 2012

УДК 621.01:539.4.001.2 (075.8)

ББК 31.365 я73

Г 74

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ,  
заведующий кафедрой «Поршневые двигатели» Московского  
государственного технического университета имени Н.Э. Баумана  
*Н.А. Иващенко*

Доктор технических наук, профессор Московского государственного  
технического университета «МАМИ»  
*В.М. Фомин*

Печатается по решению редакционного совета  
Владимирского государственного университета

**Гоц, А. Н.** Численные методы расчета в энергомашиностроении : учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 1 / А. Н. Гоц ; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2012. – 154 с.

Рассмотрены основы механики деформируемого твердого тела, основы теории упругости, а также численные методы расчета сложных конструкций, к которым относятся детали поршневых двигателей. В частности, рассматриваются следующие методы: конечных разностей, конечных элементов и вариационные.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 140501 – двигатели внутреннего сгорания, направления 140500 – энергомашиностроение. Соответствует требованиям государственных образовательных стандартов указанных специальностей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения

Табл. 5. Ил. 41. Библиогр.: 26 назв.

УДК 621.01: 539.4.001.2 (075.8)

ББК 31.365 я73

ISBN 978-5-9984-0199-2

© ВлГУ, 2012

© Гоц А.Н.

## Оглавление

Предисловие.....	6
РАЗДЕЛ 1. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	10
Глава 1. Теория напряженного состояния.....	10
1.1. Объект изучения. Основные принципы классической теории упругости.....	10
1.2. Силы и напряжения.....	14
1.3. Дифференциальные уравнения равновесия.....	18
1.4. Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности.....	23
1.5. Исследование напряженного состояния в данной точке тела при известном для нее тензоре напряжений.....	26
1.6. Главные напряжения.....	28
1.7. Инварианты тензора напряжений.....	33
1.8. Наибольшие касательные напряжения.....	35
1.9. Октаэдрические напряжения.....	38
Контрольные вопросы.....	41
Глава 2. Геометрическая теория деформаций.....	42
2.1. Составляющие перемещения и деформации. Зависимость между ними.....	42
2.2. Объемная деформация.....	46
2.3. Уравнения неразрывности деформаций.....	49
2.4. Граничные условия.....	53
2.5. Начальные условия.....	54
Контрольные вопросы.....	55
Глава 3. Зависимость между напряжениями и деформациями. Обобщенный закон Гука.....	56
3.1. Выражение составляющих деформации через составляющие напряжения.....	56
3.2. Выражение составляющих напряжений через составляющие деформации.....	60

3.3. Работа упругих сил. Потенциальная энергия деформации.....	62
Контрольные вопросы.....	66
Глава 4. О решении задач теории упругости.....	67
4.1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения.....	67
4.2. Решение задачи теории упругости в перемещениях.....	70
4.3. Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объемных сил.....	74
4.4. Теорема единственности. Методы решения задач теории упругости.....	77
Контрольные вопросы.....	80
<i>Раздел второй. Плоская задача математической теории упругости.....</i>	<i>81</i>
Глава 5. Плоская задача теории упругости в прямоугольных координатах.....	81
5.1. Плоская деформация.....	81
5.2. Обобщенное плоское напряженное состояние.....	84
5.3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений.....	86
5.4. Методы решения плоской задачи для прямоугольных односвязных областей.....	89
5.4.1. Решение плоской задачи в полиномах.....	90
5.4.2. Решение плоской задачи в тригонометрических рядах.....	95
5.4.3. Понятие о методе конечных разностей (методе сеток) для решения плоской задачи.....	99
5.5. Расчет балок-стенок.....	107
5.6. Порядок расчета балки-стенки методом конечных разностей.....	114
5.7. Другие сеточные методы решения плоской задачи теории упругости.....	123
Контрольные вопросы.....	133
Глава 6. Плоская задача теории упругости в полярных координатах.....	134

6.1. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах.....	134
6.2. Простое радиальное напряженное состояние.....	136
6.3. Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой.....	139
6.4. Сжатие клина.....	141
6.5. Действие сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости.....	144
6.6. Приложение теории плоской задачи к определению напряжений в основании фундамента.....	145
6.7. Функция напряжений для плоской задачи в полярных координатах.....	147
6.8. Осесимметричные задачи. Решение в перемещениях.....	148
Контрольные вопросы.....	151
Заключение.....	152
Приложение.....	153
Библиографический список.....	159

*Учитель, ты знаешь, бывает как трудно  
Учить дураков, но бывает трудней  
Учить молодежь (ведь она всех умней!),  
Тогда-то становится тошно и нудно...  
Уча, ты в науку сам глубже вникаешь –  
К стыду своему сознаешь, замечаешь,  
Что много сам ты, премудрый, не знаешь!  
Омар Хайям<sup>1</sup>*

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Численные методы расчета конструкций являются составной частью строительной механики машин – одной из важнейших наук, основная задача которой заключается в обеспечении прочности и долговечности деталей, а также сложных машиностроительных конструкций, к которым относятся детали и узлы поршневых двигателей внутреннего сгорания. Знание основ этой науки и владение ее методами в той или иной степени необходимы всем специалистам в области энергомашиностроения независимо от их специализации: расчетчикам, проектировщикам, специалистам по эксплуатации и т.д.

Достаточная прочность и долговечность – основные требования, предъявляемые к деталям поршневых двигателей. Однако если для стационарных сооружений (зданий, мостов и т. п.) их собственная масса связана лишь с расходом материалов и их стоимостью, то для автомобильных и тракторных двигателей собственная масса отдельных деталей (совершающих возвратно-поступательное или вращательное движение) влияет на технико-экономические показатели. Следовательно, наука о прочности имеет большое народнохозяйственное значение. Любое достижение этой науки, позволяющее без ущерба для прочности деталей и узлов двигателя снизить его собственную массу, равносильно соответствующему увеличению технико-экономических показателей.

---

<sup>1</sup> Омар Хайям и персидские поэты X-XVI веков / под ред. В.П. Бутромеева [и др.]. – М.: Белый город, 2007. – 416 с.

Численные методы расчета в энергомашиностроении позволяют решать следующие основные проблемы.

- Разработку методов определения величины и характера распределения напряжений и деформаций, возникающих в конструкциях поршневых двигателей при действии заданных внешних сил<sup>2</sup>. Решение этой проблемы применительно к отдельным элементам выполняется с использованием соответствующих методов сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности и других разделов механики деформируемого твердого тела.
- Исследование допускаемых напряжений: изучение факторов, влияющих на прочность основных деталей поршневого двигателя в процессе его эксплуатации, установление уровней предельно допустимых напряжений, деформаций и перемещений с полным учетом всех факторов, влияющих на прочность.
- Разработку методов расчета долговечности деталей особенно в условиях действия высоких температур, а также нагрузок, действующих циклически.
- Разработку методов численного решения напряженно-деформированного состояния наиболее нагруженных деталей тепловых двигателей с использованием методов конечных элементов, сеточного и др.

Ввиду сложности основных проблем численных методов адекватность полученных результатов может быть получена только при экспериментальных исследованиях как модельных, так и натурных.

Степень и глубина разработки указанных основных проблем численных методов расчета деталей поршневых двигателей различны. Наиболее строго и полно решена, пожалуй, первая проблема. Однако с точки зрения получения окончательных результатов все три проблемы имеют одинаковое значение. Действительно, если даже допущена неточность в определении величины внешних

---

<sup>2</sup> Внешние силы определяются при рассмотрении кинематики и динамики поршневых двигателей [1, 2].



нагрузок или допускаемых напряжений, результат практически один и тот же – конструкция в зависимости от знака ошибки будет иметь либо избыточную прочность, а следовательно, и массу, либо окажется недостаточно прочной. Поэтому главной задачей при расчете деталей поршневых двигателей является расширение исследований по указанным проблемам.

Заметим, что наибольшие результаты по проблеме повышения прочности базовых узлов и деталей двигателей внутреннего сгорания были получены на кафедре «Поршневые двигатели» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана [3].

На кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» Владимирского государственного университета ряд преподавателей достаточно плодотворно работают по указанным проблемам<sup>3</sup>. Некоторые из полученных интересных результатов, в частности по расчету теплонапряженных деталей, по расчету деталей при напряжениях, переменных во времени, выбор эквивалентного напряжения при расчете деталей ДВС методом конечных элементов, используются в практике конструкторских бюро.

В первой части пособия будут рассмотрены теория напряжений и деформаций, основные соотношения, принципы и методы решения задач теории упругости, в том числе решение плоской задачи в полиномах, тригонометрических рядах, а также с использованием конечно-разностного метода.

Во второй части будут рассмотрены прикладные задачи: расчет толстостенных цилиндров (задача Ламе), прессовых посадок, расчет пластин, вариационные методы решения, а также основы теории метода конечных элементов.

В пособии ведется последовательная нумерация формул, которые используются в дальнейших расчетах. Однако в каждом пункте часть формул, которая поясняет вывод основных зависимостей и они нигде, кроме данного пункта, не используются, нумеру-

---

<sup>3</sup> Следует отметить, что часть преподавателей кафедры окончили аспирантуру на кафедре «Поршневые двигатели» МГТУ.

ется буквами русского алфавита. Это позволяет уменьшить общее количество зависимостей, которые при изучении курса учащиеся должны использовать.

Пособие предназначено для студентов специальности 140500 – двигатели внутреннего сгорания, направления 140501 – энергомашиностроение (бакалавров и магистров) и рассчитано как на аудиторную, так и самостоятельную работу студентов не только при изучении курса «Численные методы в энергомашиностроении», но и при дальнейшем изучении курсов «Использование МКЭ в энергомашиностроении», «Конструирование ДВС».

Автор с благодарностью примет замечания и предложения, которые могут появиться при практическом пользовании пособием. Вину за все опечатки автор принимает на себя. Замечания просим направлять по адресу:

600000, Владимир, ул. Горького, 87, кафедра «Тепловые двигатели и энергетические установки».

E-mail: [hotz@mail.ru](mailto:hotz@mail.ru); [hotz@vlsu.ru](mailto:hotz@vlsu.ru)

## РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

### *ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

---

#### ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

##### **1.1. Объект изучения. Основные принципы классической теории упругости**

*Механика деформируемого твердого тела* – наука, изучающая напряженно-деформированное состояние реальных тел при силовом и температурном воздействиях. Она разрабатывает методы, которые используются при расчетах прочности и проектировании самых разнообразных инженерных сооружений: поршневых двигателей, самолетов, космических кораблей, машин и т. д. Эта наука служит также основой многих технологических процессов: гибки,ковки, обработки материалов резанием, давлением.

Используемый в механике деформируемого твердого тела математический аппарат базируется на общих законах механики и ряде упрощающих допущений, а также понятий.

Сечением тела называется любая мысленно проведенная поверхность, разделяющая тело на две части. Каждому сечению соответствуют две совпадающие внутренние поверхности, принадлежащие расположенным по разные стороны от сечения частям тела.

Одним из таких свойств, которым в той или иной мере обладают все конструкционные материалы, является *свойство упругости*, т. е. способность тела, изготовленного из такого материала, восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после снятия внешних нагрузок. Частный, но очень важный для практики случай упругости – это линейно-упругое тело Гука (линейная зависимость между напряжениями и деформациями для каждой температуры независимо от времени).

При этом первоначальное состояние тела предполагается ненапряженным; оно обычно именуется *естественным* состоянием тела. Предположение о естественном состоянии тела исключает из

рассмотрения начальные напряжения, характер и величина которых, как правило, нам неизвестны и зависят от истории возникновения тела.

Идеально упругое тело предполагается *сплошным*, т. е. твердое тело способно заполнять объем без всяких пустот и после деформации. Таким образом, допущение о *сплошности* полагает, что материал представляет собой сплошную среду – континуум, не имеющую дискретной (молекулярной, атомной) структуры, характерной для любого реального тела. Допущение о сплошности позволяет ввести понятие напряженно-деформированного состояния в окрестности точки тела и записать условия равновесия элемента тела в виде дифференциальных уравнений. Кроме того, это допущение позволяет считать перемещения точек тела при деформации непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и выразить компоненты деформаций через производные этих функций.

Полученное в результате допущения о сплошности абстрактное тело наделяют некоторыми механическими свойствами, аппроксимирующими способность реальных тел сопротивляться деформированию.

Идеально упругое тело принимается *однородным*. Это значит, что во всех точках тело под действием одних и тех же напряжений деформируется одинаково. Предположение об *однородности* позволяет считать величины, характеризующие упругие свойства тела, постоянными по всему объему тела.

Идеально упругое тело предполагается *изотропным*. Под этим подразумевается, что упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки, а любая плоскость, проходящая через частицу тела, является для нее плоскостью симметрии. Если эти свойства одинаковы во всех частицах тела, то приходим к понятию однородного изотропного тела.

Реальные тела в той или иной степени отличаются от рассматриваемой модели. Поэтому приемлемость решений, получаемых в теории упругости, для реальных тел зависит от того, насколько эти тела можно считать вполне упругими, сплошными, однородными и изотропными.

Использование допущения об упругости в дополнение к допущению о сплошности привело к образованию большого самостоя-

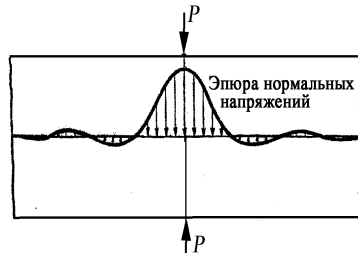
тельного раздела механики деформируемого твердого тела – *теории упругости*.

В классической теории упругости принимается, что перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами, а относительные удлинения и углы сдвига малы по сравнению с единицей.

Малость деформаций и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяет применять *принцип независимости действия сил*. Этот принцип при действии на тело группы сил дает возможность подсчитать воздействие каждой силы в отдельности с последующим сложением полученных результатов.

Большое значение при решении многих задач в теории упругости имеет *принцип локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок, или принцип Сен-Венана*. Согласно этому принципу, если к малой части тела приложена система взаимно уравновешенных нагрузок, то она вызывает лишь местные напряжения, быстро убывающие по мере удаления от места приложения нагрузок.

Высказанную мысль можно пояснить на следующем примере. При захвате проволоки клещами на нее действуют две равные и противоположно направленные силы  $P$ , приложенные в месте захвата



**Рис. 1. Распределение напряжений при точечном нагружении**

проволоки (рис. 1). Эти силы создают большие напряжения и деформации в месте захвата, быстро уменьшающиеся при удалении влево и вправо от места захвата. На рис. 1 показана эпюра нормальных напряжений вдоль оси проволоки.

Принцип Сен-Венана имеет и другую редакцию: в точках твердого тела, достаточно удаленных от места приложения нагрузок, напряжения весьма мало зависят от характера распределения этих нагрузок по поверхности тела.

На основании принципа Сен-Венана нагрузку, распределенную по небольшой части поверхности тела, можно заменять сосредото-

ченной силой.

Для многих важных в практическом отношении задач методы теории упругости позволяют получить результат, вполне достоверно оценивающий работоспособность конструкций. Однако большинство конструкционных материалов начиная с некоторого значения напряжений получают *остаточные* (пластические) деформации, которые не исчезают после снятия внешней нагрузки. При этом свойство совершенной упругости материала оказывается нарушенным. Исследованием поведения конструкций, в материале которых наряду с упругими могут появляться также и необратимые пластические деформации, уже занимается *теория пластичности* – важный раздел механики деформируемого твердого тела.

Модель упругопластического тела, которая используется в теории пластичности, предполагает независимость механических свойств материала во времени. Однако можно назвать целый ряд современных строительных материалов (титан, стеклопластики и т. п.), у которых наблюдается заметное изменение их механических прочностных свойств в зависимости от времени, хотя внешняя нагрузка при этом не изменяется. В материале с течением времени развиваются дополнительные деформации, называемые *деформациями ползучести*. С повышением температуры и уровня напряжений явление ползучести для большинства конструкционных материалов резко усиливается. Исследованием поведения конструкций с учетом свойств ползучести материала занимается *теория ползучести* – еще один раздел механики деформируемого твердого тела.

*Сопrotивление материалов*, которое студенты уже изучали, также считается разделом механики деформируемого твердого тела. Для нее как инженерной науки характерно использование приближенных и сравнительно простых расчетных методов, опирающихся на экспериментальные исследования. Область приложения таких методов ограничивается сравнительно простыми конструкциями, в то время как существует широкий класс практически важных задач, для решения которых требуется использование более строгих и точных моделей и методов. Такие уточненные исследования напряженно-деформированного состояния проводятся в зависимости от принятой уточненной модели материала тела в

рамках следующих разделов механики деформируемого твердого тела: *теории упругости; теории пластичности и теории ползучести.*

Различия в моделях, которые используются в каждом из этих разделов механики деформируемого твердого тела, порождают существенные различия и в методах исследования. Именно это и дает основание рассматривать *теорию упругости, теорию пластичности и теорию ползучести* как самостоятельные науки. Конечно, в этих науках сохранилось и много общего – структура и содержание основных уравнений.

Основное внимание в первом разделе уделено изложению главных положений теории упругости, которую можно считать основным разделом механики деформируемого твердого тела.

## **1.2. Силы и напряжения**

Все внешние силы, действующие на твердое тело, можно разбить на две группы: поверхностные и объемные.

*Поверхностные силы* – это результат контакта двух тел. Они распределены по поверхности тела, например, давление газов на поршень, давление воды на плотину и т. д. Поверхностные силы характеризуются *интенсивностью*, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которой распределена эта сила. Если размеры площади, на которой действует сила, малы по сравнению с размерами тела, то такой площадью можно пренебречь и считать, что сила приложена в точке. Такую силу называют *сосредоточенной*.

*Объемные силы* действуют в каждой точке тела. К ним относятся, например, силы инерции.

На рис. 2, а в прямоугольной (декартовой) системе координат  $xOy$  изображено твердое тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием поверхностных и объемных сил. Для исследования внутренних сил, возникающих в теле, применим метод сечений. Мысленно рассечем тело произвольной плоскостью на две части  $A$  и  $B$ , а часть  $B$  отбросим<sup>4</sup>. Положение плоскости се-

---

<sup>4</sup> Напомним, что иногда этот метод называют методом РОЗУ – разрежем, отбросим, заменим и уравновесим.

чения  $\Delta S_v$  в пространстве определяется направлением нормали  $v$  (с направляющими косинусами  $l = \cos(v, x)$ ;  $m = \cos(v, y)$ ;  $n = \cos(v, z)$ ), внешней по отношению к оставшейся части  $A$ .

Действие отброшенной части можно заменить силой  $\Delta \vec{P}_v$ <sup>5</sup> (рис. 2,б), приложенной к центру тяжести сечения площадью  $\Delta S_v$ . Если этот вектор  $\Delta \vec{P}_v$  разделить на площадь  $\Delta S_v$ , то получим среднюю интенсивность внутренних сил упругости на данной площадке – *среднее полное напряжение*:

$$\vec{p}_{\text{ср.}} = \Delta \vec{P}_v / \Delta S_v. \quad (1)$$

Перейдем к пределу в (1) при стягивании площадки  $\Delta S_v$  в точку  $C$

$$\vec{p}_v = \lim_{\Delta S_v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_v}{\Delta S_v} \quad \text{при } \Delta S_v \rightarrow 0. \quad (2)$$

Полученная при этом величина  $\vec{p}_v$  называется *полным напряжением* в данной точке по данной элементарной площадке.

Полное напряжение  $\vec{p}_v$  как векторная величина может быть задано либо модулем  $p_v$  и направляющими косинусами  $l_p = \cos(p_v, x)$ ;  $m_p = \cos(p_v, y)$ ;  $n_p = \cos(p_v, z)$ , причем  $l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1$ , либо тремя проекциями (составляющими) на координатные оси (см. рис. 2,б)

$$p_{xv} = p_v l_p; \quad p_{yv} = p_v m_p; \quad p_{zv} = p_v n_p. \quad (3)$$

Полное напряжение разлагается также на две составляющие: проекция на нормаль – нормальное напряжение  $\sigma_v$ , проекция на

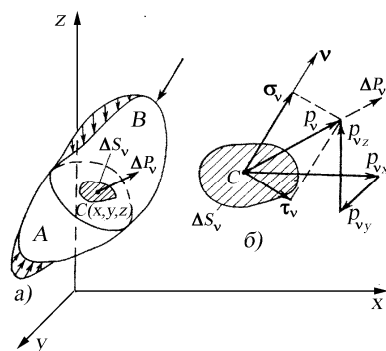


Рис. 2. Определение напряжений в окрестности точки  $C$

<sup>5</sup> В случае неравномерного распределения напряжений, кроме главного вектора сил, следует учитывать также и главные моменты [4].



плоскость площадки  $\Delta S_v$  – полное касательное напряжение  $\tau_v$  (см. рис. 2,б).

В сечениях, параллельных координатным плоскостям, индекс  $v$  можно заменить индексом координатной оси, нормальной к сечению. Например, в сечении, параллельном координатной плоскости  $yOz$  (рис. 3,а), внешняя нормаль совпадает по направлению с осью  $x$  и составляющие напряжения обозначаются так:  $p_{xx}$ ,  $p_{yx}$ ,  $p_{zx}$ .

Составляющая  $p_{xx}$  направлена перпендикулярно к сечению и называется *нормальным* напряжением  $\sigma_x$ .

Составляющие  $p_{yx}$  и  $p_{zx}$ , лежащие в плоскости сечения, называются *касательными* напряжениями  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$ .

Для нормального напряжения  $\sigma_x$  индекс  $x$  указывает ту ось, параллельно которой направлено напряжение (одновременно это является и обозначением нормали к площадке, на которой рассматривается нормальное напряжение).

Касательные напряжения обозначаются  $\tau$  с двумя индексами. Так, например,  $\tau_{yx}$  касательное напряжение, имеющее направление, параллельное оси  $y$  и действующее на площадке, нормаль к которой параллельна оси  $x$ . Таким образом, первый индекс определяет направление, а второй – адрес площадки (по направлению нормали), где оно действует. Для нормального напряжения  $\sigma_x$  второй индекс обычно опускают (хотя можно и обозначать  $\sigma_{xx}$ ), поскольку и так понятно, куда направлена нормаль к площадке, где оно действует.

На рис. 3,б показаны составляющие напряжений в сечении параллельной координатной плоскости  $zOx$ .

Из девяти составляющих напряжений на всех трех площадках, параллельных координатным плоскостям  $yOz$ ,  $zOx$  и  $xOy$ , три составляющие являются нормальными напряжениями:

$$p_{xx} = \sigma_x; \quad p_{yy} = \sigma_y; \quad p_{zz} = \sigma_z,$$

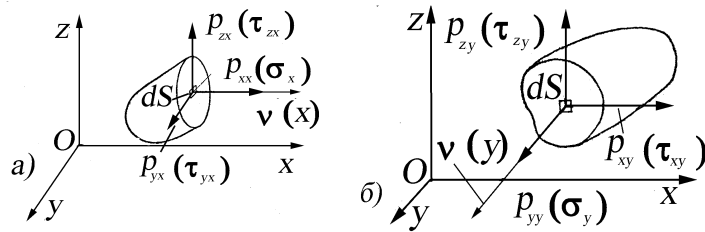


Рис. 3. Обозначение нормальных и касательных напряжений на площадках с нормальми, совпадающими с осями  $x$  (а) и  $y$  (б)

а шесть составляющих – касательными

$$P_{xy} = \tau_{xy}; P_{yx} = \tau_{yx}; P_{yz} = \tau_{yz}; P_{zy} = \tau_{zy}; P_{zx} = \tau_{zx}; P_{xz} = \tau_{xz}.$$

Для напряжений принято следующее правило знаков.

Нормальное напряжение считается положительным, если оно вызывает растяжение (в этом случае оно направлено по внешней нормали к площадке, принадлежащей рассматриваемой части тела), и отрицательным, когда оно вызывает сжатие (в последнем случае оно направлено для данной части тела по внутренней нормали).

Касательное напряжение считается положительным, если оно на площадке, нормаль к которой совпадает с положительным направлением соответствующей ей координатной оси, направлено в сторону соответствующей этому направлению координатной оси. Если внешняя нормаль совпадает с отрицательным направлением соответствующей ей координатной оси, то положительное касательное напряжение направлено в сторону, противоположную направлению соответствующей ему координатной оси.

Напряжения, возникающие в твердом теле, в общем случае могут быть различными в разных точках тела, т. е. должны быть функциями координат точек:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z); \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z); \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z); \quad \dots \end{aligned}$$

Введем понятие о тензоре напряжения. Для этой цели расположим все напряжения, определяющие напряженное состояние в данной точке в рассматриваемой точке, в виде следующей матрицы:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

В первой строке расположены все компоненты напряжений, имеющие направление, параллельное оси  $x$ , во второй строке – параллельное оси  $y$  и в третьей – параллельное оси  $z$ . Кроме того, в первом столбце сгруппированы напряжения, действующие на площадке, нормаль к которой параллельна оси  $x$ , во втором столбце – все напряжения на площадке с нормалью, параллельной оси  $y$ , и в третьем столбце – на площадке с нормалью, параллельной оси  $z$ .

Нормальные напряжения при таком способе построения расположены на главной диагонали. Ниже будет доказано, что касательные напряжения, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т. е. квадратная матрица (4) симметрична.

Приведенную выше симметричную квадратную матрицу называют *тензором напряжений*<sup>6</sup>. Напряженное состояние в точке вполне определено, если задан тензор напряжений для этой точки.

### 1.2. Дифференциальные уравнения равновесия

Выделим из тела, находящегося под действием внешних сил, бесконечно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям и ребрами длиной  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  (рис. 4). Установим зависимость между составляющими напряжений, действующих на гранях этого параллелепипеда. На каждой грани имеем три составляющие, параллельные координатным осям. Всего на шести гранях получаем восемнадцать составляющих напряжений (объемные силы не показаны).

---

<sup>6</sup> Название «тензор» введено для обозначения совокупности всех векторов напряжений, действующих на площадках, проходящих через одну и ту же точку в деформируемом теле [5].

Составляющие напряжения на параллельных гранях параллелепипеда, отстоящих друг от друга на бесконечно малом расстоянии, отличаются одно от другого на бесконечно малую величину.

Например, если на площадке  $dydz$  параллелепипеда, совпадающей с координатной плоскостью  $yOz$ , действует нормальное напряжение  $\sigma_x$ , то на площадке, находящейся на расстоянии  $dx$  от первой, действует нормальное напряжение

$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ , которое отличается на бесконечно малую величину за счет изменения координаты  $x$ . Аналогично связаны напряжения и на остальных парах параллельных граней параллелепипеда. Таким образом, из восемнадцати составляющих напряжения неизвестными являются только девять:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ .

Кроме напряжений, на параллелепипед будут действовать объемные силы (массовые или инерционные). Обозначим проекции на координатные оси массовых сил, отнесенных к единице объема тела,  $X, Y$  и  $Z$ . Составляющие массовых сил, действующих в объеме рассматриваемого параллелепипеда, будут:

$$Xdx dy dz, Ydx dy dz, Zdx dy dz.$$

Для тела, находящегося в равновесии, должны удовлетворяться шесть уравнений статики: три уравнения проекций действующих сил на координатные оси и три уравнения моментов этих сил относительно осей координат.

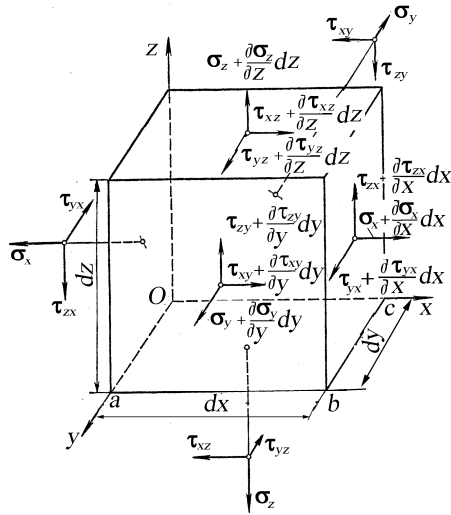


Рис. 4. Действующие компоненты напряжений по всем граням элементарного параллелепипеда

Рассмотрим уравнение проекций на ось  $x$ . На ось  $x$  дают проекции только силы, параллельные этой оси. При проектировании каждое напряжение будем умножать на величину площади, на которой оно действует. Проектируя, получаем:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dzdx - \tau_{xy} dzdx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + X dxdydz = 0.$$

После приведения подобных членов и деления на объем  $dV = dxdydz$  окончательно получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Аналогично можно составить уравнения проекций сил на оси  $y$  и  $z$ . В результате получим три дифференциальных уравнения равновесия, которые называются уравнениями Навье

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Переходим к составлению уравнений моментов действующих на параллелепипед сил (см. рис. 4) относительно координатных осей. Возьмем, например, уравнение моментов относительно оси  $y$ . Суммируя моменты всех сил относительно этой оси, получаем:

$$\begin{aligned}
& \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dz}{2} - \sigma_x dydz \frac{dz}{2} + \sigma_z dx dy \frac{dz}{2} - \\
& - \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy dz - \\
& - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) dy dz dx - \tau_{xy} dz dx \frac{dz}{2} + \\
& + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dz dx \frac{dz}{2} - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \right) dz dx \frac{dx}{2} + \\
& + \tau_{zy} dz dx \frac{dx}{2} + X dx dy dz \frac{dx}{2} - Z dx dy dz \frac{dx}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{a}$$

В полученном соотношении (a) моменты некоторых сил являются бесконечно малыми величинами третьего порядка, другие же – четвертого порядка малости.

Например, касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zx}$  создают моменты  $\tau_{xz} dx dy \cdot dz$  и  $\tau_{zx} dy dz \cdot dx$ , являющиеся величинами третьего порядка малости. Момент, создаваемый нормальными напряжениями по левой и правой граням, равен:

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dz}{2} - \sigma_x dy dz \frac{dz}{2}.$$

Этот момент оказывается величиной четвертого порядка малости. Такой же порядок малости имеют моменты массовых сил

$$X dx dy dz \frac{dz}{2} \text{ и } Z dx dy dz \frac{dx}{2}.$$

Преобразовав выражение (a) и отбросив величины четвертого порядка малости, после деления на объем рассматриваемого параллелепипеда получим:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Составляя уравнение моментов относительно осей  $z$  и  $x$ , получаем еще два аналогичных соотношения. Таким образом, из уравнений моментов вытекают три равенства

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz},$$

представляющие собой закон парности касательных напряжений. Этот закон можно выразить так: *в каждой двух взаимно перпендикулярных плоскостях компоненты касательных напряжений, направленные перпендикулярно к линии пересечения этих плоскостей, равны между собой и при этом оба направлены либо к линии пересечения, либо от нее.*

Вследствие парности касательных напряжений вместо девяти неизвестных составляющих напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, остается только шесть:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z), & \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z), \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z), & \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Кроме того, из закона парности касательных напряжений следует, что тензор напряжений (4) – симметричная матрица, так как компоненты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , где  $i, j = x, y, z$ ). Для определения шести неизвестных функций (6) получено только три дифференциальных уравнения равновесия (5).

Следовательно, уравнений статики недостаточно и задача механики деформируемого твердого тела по определению напряжений в бесконечно малом объеме является статически неопределимой. Недостающие уравнения можно получить, изучая деформации тела и учитывая его физические свойства в рамках упомянутых выше разделов механики деформируемого твердого тела.

При решении некоторых задач вместо декартовой системы координат удобно пользоваться другими системами, например цилиндрической. В цилиндрической системе координат положение любой точки определяется тремя координатами:  $x$ ,  $\theta$  и  $r$ , причем две из них  $x$  и  $r$  – прямолинейные, а третья  $\theta$  – угловая. На рис. 5 показан бесконечно малый элемент тела в цилиндрической систе-

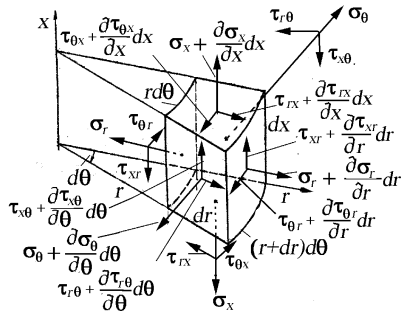


Рис. 5. Бесконечно малый элемент в цилиндрической системе координат

ме координат и напряжения, действующие на гранях этого элемента.

Из уравнений проекций, действующих на бесконечно малый элемент тела (см. рис. 5) аналогично уравнениям (5) в декартовой системе координат, получим следующие дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе коор-

динат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{\tau_{xr}}{r} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

#### 1.4. Напряжения на наклонных площадках.

##### Условия на поверхности

Для исследования напряженного состояния во всех точках упругого тела необходимо уметь находить напряжения в любой площадке, положение которой определяется нормалью  $\nu$ , направляющие косинусы которой равны  $\cos(x, \nu) = l$ ,  $\cos(y, \nu) = m$ ,  $\cos(z, \nu) = n$  (рис. 6). Наклонная площадка  $abc$  вместе с координатными площадками  $Oab$ ,  $Obc$  и  $Oca$  образует бесконечно малый тетраэдр. Обозначим площадь наклонной грани  $abc$  через  $dF$ .

Тогда площади остальных граней тетраэдра, перпендикулярных координатным осям, определим как проекции площади грани  $abc$  на соответствующие координатные плоскости: пл.  $Obc = dF \cdot l$ , пл.  $Oca = dF \cdot m$ , пл.  $Oab = dF \cdot n$ .



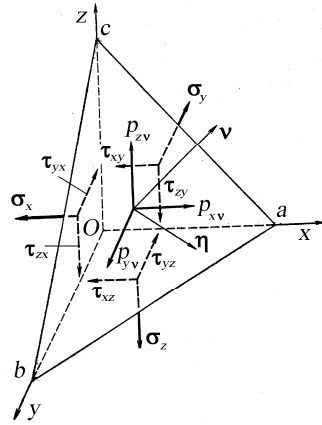


Рис. 6. Площадка с напряжениями на исходных гранях

На рассматриваемый тетраэдр действуют нагрузки: на координатных площадках шесть составляющих напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$  и  $\tau_{zx}$ , на площадке  $abc$  три составляющие полного напряжения  $p_{xv}, p_{yv}$  и  $p_{zv}$ , а также по всему объему составляющие объемной силы  $X, Y, Z$  (последние на рис. 6 не показаны). Проектируя на ось

$x$  все силы, действующие на тетраэдр  $Oabc$ , получаем:

$$p_{xv}dF - \sigma_x dFl - \tau_{xy}dFm - \tau_{xz}dFn + XdV = 0.$$

В этом уравнении последнее слагаемое, учитывающее действие объемных сил, имеет третий порядок малости (умножается на объем  $dV$ ), а остальные – второй ( $dF$ ). Пренебрегая слагаемыми третьего порядка малости и деля все члены равенства на  $dF$ , находим:

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n. \quad (a)$$

Составляя уравнения равновесия всех сил, действующих на тетраэдр  $Oabc$ , на оси  $y$  и  $z$ , получаем еще два уравнения. Таким образом, приходим к следующим трем уравнениям равновесия элементарного тетраэдра:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Уравнения (8) позволяют определить составляющие напряже-

ния на любой наклонной площадке с нормалью  $v$  с помощью шести составляющих напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям.

Если площадка  $abc$  совпадает с поверхностью тела, то составляющие напряжения  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  будут составляющими внешних сил, действующих на поверхности тела. Тогда уравнения (8) называют *условиями на контуре тела*, или *статическими граничными условиями*, так как они связывают внешние силы с внутренними напряжениями.

В уравнения (8) не входят объемные силы (силы тяжести или инерционные), потому что они являются бесконечно малыми третьего порядка, тогда как все члены уравнения (а) в его первоначальном виде – второго порядка.

Удовлетворение уравнениям (5) и (8) является необходимым и достаточным для равновесия всего тела под действием заданных внешних сил. Действительно, если составляющие напряжений (6) удовлетворяют уравнениям равновесия (5) во всех точках внутри тела, то все точки внутри тела находятся в равновесии. Если составляющие напряжений (6) удовлетворяют уравнениям (8) в точках у поверхности тела, то все точки тела у поверхности находятся в равновесии. Если же составляющие напряжений (6) одновременно удовлетворяют уравнениям (5) и (8), то все тело в целом находится в равновесии.

И, наоборот, если тело находится в равновесии под действием заданных внешних сил, то во всех точках внутри тела должны обращаться в тождества уравнения (5), а во всех точках у поверхности тела – уравнения (8). Для удобства запоминания условий (8) можно представить их в виде табл. 1.

Выделенные в табл. 1 компоненты составляют, как известно, *тензор напряжений*.

Таблица 1

Определение поверхностных компонентов внешней нагрузки

Поверхностные компоненты нагрузки	Множители		
	$l$	$m$	$n$
$p_{xv}$	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$
$p_{yv}$	$\tau_{yx}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$
$p_{zv}$	$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$	$\sigma_z$

### 1.5. Исследование напряженного состояния в данной точке тела при известном для нее тензоре напряжений

Продолжим исследование напряженного состояния в точке тела. Уравнениями (8) можно воспользоваться для вычисления напряжений в любой точке, расположенной на любой наклонной площадке внутри тела, если известны составляющие напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным координатным плоскостям (тензор напряжений (4)). Действительно, если известны нормальные и касательные напряжения по трем ортогональным граням бесконечно малого параллелепипеда, вырезанного возле данной точки, и требуется определить напряжения в какой-либо наклонной по отношению к граням параллелепипеда (рис. 7), то нужно воспользоваться зависимостью (8). Разница будет лишь в том, что составляющие  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$ , которые в (8) были известными внешними силами, в данном случае являются неизвестными составляющими внутренних сил.

Равнодействующая составляющих напряжения на наклонной площадке  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  называется *полным напряжением* на этой площадке и определяется по формуле

$$p_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2}. \quad (9)$$

Поскольку компоненты  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  не являются ни нормальными, ни касательными напряжениями и потому для суждения о прочности не совсем удобны.

Разложим полное напряжение  $p_v$  на составляющие по нормали к площадке (это будет нормальное напряжение) и по касательной к последней (это будет касательное напряжение). Итак, нормальное напряжение равно сумме проекций составляющих  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  на направление нормали  $v$

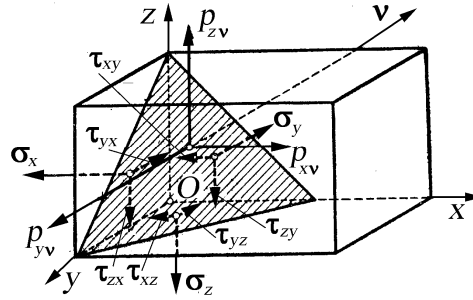


Рис. 7. Вычисление напряжений на наклонной площадке

$$\sigma_v = p_{xv}l + p_{yv}m + p_{zv}n. \quad (10)$$

Подставляя в (10) значения составляющих  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  из (8), получаем:

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl. \quad (11)$$

Формула (11) позволяет определять нормальные напряжения на любой наклонной площадке с помощью известных компонентов тензора напряжений (4) (шести составляющих напряжений на трех площадках, параллельных координатным плоскостям (см. рис. 7).

Касательное напряжение на этой площадке определится из уравнения

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2. \quad (12)$$

Последняя формула дает только величину касательного напряжения, но не указывает его направление в плоскости площадки.

Найдем составляющую касательного напряжения в плоскости площадки с нормалью  $v$  по заданному направлению. Для этого зададим в плоскости рассматриваемой площадки с нормалью  $v$  (см. рис. 6) направление  $\eta$  с направляющими косинусами  $l_1, m_1, n_1$ . Так как направления  $v$  и  $\eta$  взаимно перпендикулярны, то между их направляющими косинусами существует известное соотношение

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0. \quad (13)$$

Касательное напряжение на площадке с нормалью  $v$  в направлении  $\eta$  равно сумме проекций составляющих полного напряжения  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  на этой площадке на направление  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \tau_{\eta v} = & \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{xy}(lm_1 + l_1m) + \\ & + \tau_{yz}(mn_1 + m_1n) + \tau_{zx}(nl_1 + n_1l). \end{aligned} \quad (14)$$

Формула (14) позволяет определить касательные напряжения на любой наклонной площадке в заданном направлении с помощью шести составляющих напряжений по трем площадкам, параллельным координатным плоскостям.

### 1.6. Главные напряжения

Если положение наклонной площадки (см. рис. 7) менять в пространстве, то при определенных значениях направляющих косинусов  $l_1, m_1, n_1$  полный вектор напряжений  $p_v$  будет совпадать с нормалью  $v$  к наклонной площадке  $ABC$  (рис. 8). В этом случае в

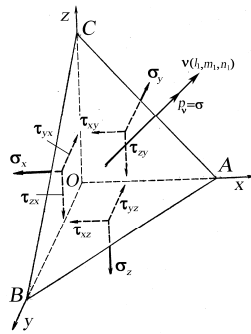


Рис. 8. Положение главной площадки

наклонной площадке  $ABC$  будет отсутствовать проекция полного вектора напряжений  $p_v$  на эту площадку, т. е. на  $ABC$  не будет касательных напряжений.

Площадка, на которой касательные напряжения равны нулю, называется *главной*, а нормальное напряжение – *главным напряжением*.

В этом случае (см. рис. 8)  $\tau_v = 0$ , а  $p_v = \sigma$ . В данном случае  $\sigma$  – искомое главное напряжение. Проектируя его на координатные оси, находим составляющие главного напряжения, параллельные координатным осям:

$$\sigma l_1 = p_{xv}; \quad \sigma m_1 = p_{yv}; \quad \sigma n_1 = p_{zv}. \quad (a)$$

Сравнивая соотношения (a) и (8), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma l_1 &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1, \\ \sigma m_1 &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{yz} n_1, \\ \sigma n_1 &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + \sigma_z n_1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Кроме того, имеем известное из аналитической геометрии соотношение между направляющими косинусами

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) содержат четыре неизвестных: главное напряжение  $\sigma_1$  и три его направляющих косинуса.

Представим уравнение (15) в виде

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1 &= 0, \\ \tau_{yx} l_1 + (\sigma_y - \sigma) m_1 + \tau_{yz} n_1 &= 0, \\ \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + (\sigma_z - \sigma) n_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Система (17) – система трех линейных однородных алгебраических уравнений не допускает тривиального решения  $l_1 = m_1 = n_1 = 0$  в силу соотношения (16). Для того чтобы однородная система (17) имела решения, отличные от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю, т. е.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Раскроем определитель (18)

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \tau_{yx}\tau_{zy}\tau_{zx} - \\ & - (\sigma_y - \sigma)\tau_{xz}^2 - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0. \end{aligned}$$

После перемножения и группировки по степеням  $\sigma$  получим кубическое уравнение

$$\begin{aligned} &\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \\ & - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Полученное кубическое уравнение имеет три корня, которые

и дают величины главных напряжений. Как известно, кубическое уравнение имеет либо три действительных корня, либо один корень действительный, а два – комплексно-сопряженных.

Докажем, что все три корня полученного кубического уравнения являются действительными величинами, следовательно, в каждой точке упругого тела существуют три главных напряжения и три главных площадки, в которых они действуют [6].

Обозначим главные напряжения через

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

где  $\sigma_1$  – наибольшее, а  $\sigma_3$  – наименьшее (в алгебраическом смысле) главные напряжения, а направляющие косинусы нормалей к главным площадкам, в которых действуют главные напряжения соответственно через  $l_1, m_1, n_1$  – для площадки с напряжением  $\sigma_1$ ,  $l_2, m_2, n_2$  – для площадки с напряжением  $\sigma_2$ ,  $l_3, m_3, n_3$  – для площадки с напряжением  $\sigma_3$ .

Для доказательства подставим значение главного напряжения  $\sigma_1$  и направляющих косинусов  $l_1, m_1$  и  $n_1$  в уравнение (17).

В результате получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0, \\ \tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0, \\ \tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Умножая далее каждое из уравнений (19) соответственно на  $l_2, m_2, n_2$  и складывая почленно, получаем:

$$\begin{aligned} &[(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1]l_2 + [\tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \\ &+ \tau_{yz}n_1]m_2 + [\tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1]n_2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя  $\sigma_2$  и направляющие косинусы для второй главной площадки  $l_2, m_2, n_2$  (вместо  $l_1, m_1, n_1$ ) в уравнение (17), получаем:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2 &= 0, \\ \tau_{yx}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2 &= 0, \\ \tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Умножая каждое из уравнений (21) соответственно на  $l_1, m_1, n_1$  и складывая их, имеем:

$$\begin{aligned} & [(\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2]l_1 + [\tau_{yx}l_2 + (\sigma_y - \sigma_1)m_2 + \\ & + \tau_{yz}n_2]m_1 + [\tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_1)n_2]n_1 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Вычитая из уравнения (20) уравнение (22), получим после преобразований:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0.$$

Так как в общем случае  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , то

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \quad (23)$$

Если предположить, что два корня  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются комплексно-сопряженными величинами, т. е.

$$\sigma_1 = a + bi \text{ и } \sigma_2 = a - bi,$$

то на основании системы уравнений (17) должны быть комплексно-сопряженными направляющие косинусы  $l_1$  и  $l_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$ ,  $n_1$  и  $n_2$ , а следовательно,

$$l_1l_2 > 0, m_1m_2 > 0, n_1n_2 > 0.$$

В таком случае левая часть уравнения (23) не может быть равна нулю.

Таким образом, предположение о том, что величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются комплексно-сопряженными, не соответствует действительности. Аналогичное доказательство можно провести для любой пары главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Следовательно, все три корня  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  кубического уравнения (18) являются действительными величинами и в любой точке упругого тела существуют:

- три главных напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ;
- три главные площадки с нормальными  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ , определяемые соответственно направляющими косинусами  $l_1, m_1, n_1$ ,  $l_2, m_2, n_2$  и  $l_3, m_3, n_3$ .

Так как уравнение (23) представляет собой условие перпендикулярности нормалей  $v_1$  и  $v_2$ , то отсюда следует, что две главные площадки, в которых имеются напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , взаимно перпендикулярны. Аналогично можно доказать, что



$l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 = 0$ , т. е. нормали  $v_1$  и  $v_3$ , а следовательно, и главные площадки с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  также взаимно перпендикулярны.

Таким образом, все три нормали  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  к главным площадкам взаимно перпендикулярны. Итак, в каждой точке упругого тела имеются три взаимно перпендикулярные главные площадки и три главных напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (в главных площадках).

Зная в заданной точке главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , можно определить нормальные и касательные напряжения в произвольной наклонной площадке, проходящей через заданную точку упругого тела, приняв главные напряжения за исходные.

Так как в главных площадках касательные напряжения отсутствуют, то, согласно формуле (11), нормальное напряжение в наклонной площадке с направляющими косинусами  $l, m, n$ , выраженное через главные напряжения, будет равно:

$$\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (24)$$

Компоненты полного вектора напряжений в наклонной площадке, выраженные через исходные главные напряжения, будут в соответствии с формулами (а) равны

$$p_{xv} = \sigma_1 l, \quad p_{yv} = \sigma_2 m, \quad p_{zv} = \sigma_3 n.$$

Следовательно,

$$p_v = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2}. \quad (25)$$

С другой стороны,

$$p_v = \sqrt{\sigma_v^2 + \tau_v^2}. \quad (в)$$

Тогда, сравнивая (25) и (в)

$$\sigma_v^2 + \tau_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \quad (26)$$

Выражения (24) и (26) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными напряжениями  $\sigma$  и  $\tau$  в наклонной площадке, которые можно определить, если задана площадка направляющими косинусами  $l, m, n$ .

### 1.7. Инварианты тензора напряжений

Если около данной точки мысленно вырезать несколько бесконечно малых параллелепипедов, грани которых различным образом ориентированы по отношению к осям координат, то, очевидно, компоненты напряжений для одного такого элементарного параллелепипеда будут отличными от компонентов для другого, так как напряжения зависят от направления рассматриваемой площадки, проходящей через заданную точку. Однако также очевидно, что независимо от способа вырезания элемента около заданной точки при подстановке значений его компонентов напряжений в уравнение (18) получаются одни и те же значения главных напряжений для всех таких элементарных параллелепипедов. *Главные напряжения* в данной точке существуют, и *величины их* независимы от метода их нахождения, т. е. они *инвариантны* по отношению к преобразованию координатной системы.

Следовательно, корни кубического уравнения (18) не зависят от системы координат  $x, y, z$ , а потому коэффициенты этого уравнения также не зависят от выбора координатной системы, т. е. эти коэффициенты являются инвариантами преобразования координат и уравнение (18) представим в виде

$$\sigma^3 - S_1\sigma^2 + S_2\sigma - S_3 = 0,$$

где  $S_1, S_2, S_3$  – инвариантные соотношения или их еще называют первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния (тензора напряжений). Итак,

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const}, \\ S_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const}, \\ S_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \text{const}. \end{aligned} \right\} (27)$$

Заметим, что первый (или *линейный*) инвариант представляет собой сумму членов, расположенных на главной диагонали в тензоре напряжений (4), которая, как будет показано ниже, пропорциональна относительной объемной деформации у рассматриваемой точки.

Контролем правильности решения кубического уравнения (18) может служить равенство

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (28)$$

Третий (*кубический*) инвариант представляет собой развернутый в строку определитель, составленный из компонентов тензора напряжений, т.е.

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Контролем правильности решения уравнения (18) может также служить равенство, составленное применительно к параллелепипеду, гранями которого являются главные площадки возле данной точки:

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (30)$$

Второй (*квадратичный*) инвариант представляет сумму миноров<sup>7</sup> определителя (29), если произвести разложение его по главной диагонали, т.е.

$$S_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Контролем правильности решения уравнения (18) может, очевидно, служить и такое равенство, составленное из (31) применительно к параллелепипеду, гранями которого являются главные площадки возле данной точки:

---

<sup>7</sup> Минором элемента  $a_{ij}$  называется определитель  $(n-1)$ -го порядка, образованный из данного определителя зачеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

$$S_2 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \quad (31a)$$

Контрольные соотношения (28) – (31a) можно использовать и для непосредственного вычисления корней кубического уравнения (18). Так, если один из корней найден непосредственно из (18), то остальные можно подсчитать при помощи (28) – (31a).

Заметим, что в теории напряжений, а также в теории деформаций инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряженного и деформированного состояний в точке; компоненты напряжений и деформаций как связанные с осями координат являются вспомогательными.

### 1.8. Наибольшие касательные напряжения

Примем для заданной точки направления главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  за направления координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тогда для любой косо́й площадки по отношению к главным направлениям нормальное и касательное напряжения определяются согласно (24), (26). Используя (25), найдем из (26) касательное напряжение

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (32)$$

Исключим теперь из уравнения (32) один из косинусов, например  $n$ , используя зависимость  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

После этого определим косинусы  $l$  и  $m$  таким образом, чтобы касательное напряжение  $\tau$  получило максимальное значение.

После подстановки  $n^2 = 1 - l^2 - m^2$  в выражение (32) составим производные последнего по  $l$  и  $m$  и приравняем эти производные нулю. Получим следующие два уравнения для направляющих косинусов  $l$  и  $m$ , определяющих положение площадок, по которым напряжение  $\tau$  получает максимальное или минимальное значение:

$$\left. \begin{aligned} l[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] &= 0, \\ m[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Одно из решений этих уравнений получим, если приравняем  $l$  и  $m$  нулю. Можно получить и решения, отличные от нуля. Так, приняв  $l = 0$ , из второго уравнения системы (33) найдем  $m = \pm\sqrt{1/2}$ , а при  $m = 0$  из первого уравнения системы (33) найдем  $l = \pm\sqrt{1/2}$ .

Повторяя приведенные выше выкладки, при исключении из выражения (33) сначала косинуса  $m$ , а затем косинуса  $l$  в конечном итоге получаем следующую таблицу шести значений косинусов углов, при которых напряжение  $\tau$  получает максимальное или минимальное значение (табл. 2). В первых трех столбцах даны площадки, совпадающие с плоскостями координат, которые являются главными площадками. По этим площадкам касательные напряжения равны нулю, т. е. выражение (33) для квадрата  $\tau$  получает минимальное значение.

В трех последних столбцах даны площадки, проходящие через одну из трех главных осей и делящие угол между двумя другими главными осями пополам (рис. 9).

Таблица 2

Значение направляющих косинусов для площадок, при которых касательное напряжение получает максимальное или минимальное значение

$l$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm\sqrt{0,5}$	$\pm\sqrt{0,5}$
$m$	0	$\pm 1$	0	$\pm\sqrt{0,5}$	0	$\pm\sqrt{0,5}$
$n$	$\pm 1$	0	0	$\pm\sqrt{0,5}$	$\pm\sqrt{0,5}$	0

Подставив направляющие косинусы, определяющие положение этих трех площадок в выражение (33), найдем следующие значения касательных напряжений (иногда называемых *главными касательными*) по этим трем плоскостям:

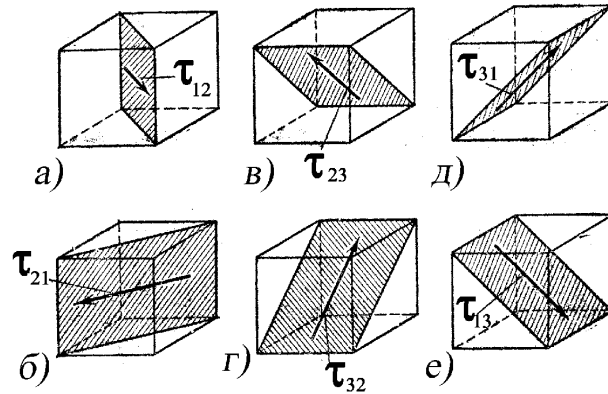


Рис. 9. Три пары площадок с относительными максимумами касательных напряжений: индексы  $i, j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) на видах  $a-e$  определяют, из разности каких главных напряжений определяется  $\tau_{ij}$

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \tau_{23} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_{31} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (34)$$

Это показывает, что наибольшее касательное напряжение действует на площадке, делящей пополам угол между наибольшим и наименьшим главными напряжениями, и что оно равно половине разности между главными напряжениями.

На площадках, на которых касательные напряжения принимают значения в соответствии с (34), действуют также нормальные напряжения, которые согласно (24) равны полусуммам соответствующих главных напряжений<sup>8</sup>

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (35)$$

<sup>8</sup>В работе [7] с использованием площадок с максимальными касательными напряжениями приведен численный расчет напряженно-деформированного состояния шатуна.

Из (35) следует, что если величина главных напряжений подчинена неравенствам  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то наибольшее касательное напряжение равно  $\sigma_1 - \sigma_3$ , т. е. полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений.

### 1.9. Октаэдрические напряжения

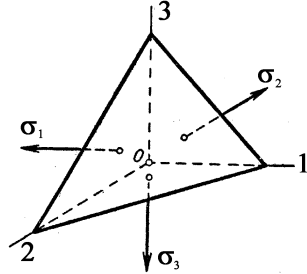


Рис. 10. Октаэдрическая площадка

Рассмотрим площадку, которая равно наклонена к главным плоскостям (рис. 10). Вычислим нормальное и касательное напряжения по площадке, называемой *октаэдрической*, или *площадкой результирующих напряжений* в данной точке.

Оси координат направим по нормальям главных площадок, т. е. вдоль главных напряжений. Направляющие косинусы, связанные соотношением  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , для октаэдрической площадки относительно осей координат (равно наклоненная), очевидно, равны между собой и составляют  $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ .

Согласно формуле (8) находим

$$p_{1v} = \sigma_1 l; \quad p_{2v} = \sigma_2 m; \quad p_{3v} = \sigma_3 n.$$

Для полного напряжения на октаэдрической площадке согласно (9) имеем уравнение

$$p_v^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),$$

т.е. *квадрат полного напряжения на октаэдрической площадке равняется среднему из квадратов главных напряжений.*

По формуле (10) для нормального напряжения на той же площадке получаем

$$\sigma_{\text{окт.}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

или

$$\sigma_{\text{окт.}} = \sigma_{\text{ср.}}, \quad (36)$$

т. е. нормальное напряжение на октаэдрической площадке равняется среднему нормальному напряжению для данной точки.

Для касательного напряжения на октаэдрической площадке имеем выражение (12)  $\tau_{\text{окт.}}^2 = p_v^2 - \sigma_{\text{окт.}}^2$ , которое в данном случае примет вид

$$\tau_{\text{окт.}}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

откуда

$$\tau_{\text{окт.}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (37)$$

Учитывая, что полуразности (см. (34))

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_{12}, \quad \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \tau_{23}, \quad \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \tau_{31}$$

являются главными касательными напряжениями, выражение (37) можем представить и так:

$$\tau_{\text{окт.}} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}, \quad (37a)$$

т.е. из (37a) квадрат касательного напряжения на октаэдрической площадке равняется 4/9 (т. е. немного меньше половины) суммы квадратов главных касательных напряжений.

Приведенные выше нормальное и касательное напряжения на октаэдрических площадках, или так называемые *октаэдрические напряжения*, одинаковы для всех восьми площадок, которые можно провести во всех октантах



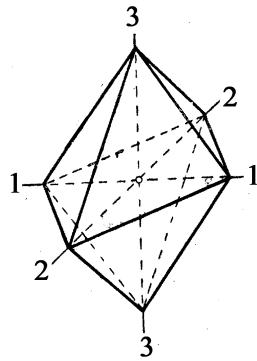


Рис. 11. Октаэдрические площадки

Если отрезки, отсекаемые площадками на главных осях 1, 2, 3, одинаковы во всех октантах, то совокупность таких равнонаклоненных площадок образует замкнутую восьмигранную фигуру – *октаэдр* (рис. 11).

В ряде случаев наступление именно пластического состояния в точке тела зависит от достижения октаэдрическим касательным напряжением некоторого определенного для данного тела предельного значения.

Октаэдрическое касательное напряжение можно представить в другом виде. Так, из (36) на основании инвариантов тензора напряжений (28) и (31a), выраженных через главные напряжения, следует

$$\tau_{\text{окт.}}^2 = \frac{2}{9}(S_1^2 - 3S_2). \quad (38)$$

Принимая для инвариантов выражения через компоненты напряжений, действующих по случайным (не главным) ортогональным площадкам, на основании (31) имеем

$$\tau_{\text{окт.}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (39)$$

Из курса сопротивления материалов известна так называемая энергетическая теория прочности, или теория энергии формоизменения. Расчетное (эквивалентное) напряжение по этой теории определяется по формуле

$$\sigma_{\text{эkv.}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (40)$$

При сопоставлении (37) и (40) видно, что октаэдрическое касательное напряжение прямо пропорционально эквивалентному на-

пряжению по энергетической теории прочности, т. е.

$$\tau_{\text{окт.}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\text{экв.}} \quad (41)$$

В теории пластичности величину  $\sigma_{\text{экв.}}$ , устанавливаемую независимо от тех соображений, которые были в сопротивлении материалов, называют *интенсивностью напряжения* (или *обобщенным напряжением*) и обозначают  $\sigma_i$ . Таким образом<sup>9</sup>,

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт.}} \quad (42)$$

### Контрольные вопросы

1. Назовите основные задачи механики деформируемого твердого тела.
2. Какова роль и допустимость использования гипотезы о сплошности в механике деформируемых тел?
3. Какие силы называются внутренними силами упругости и как доказываются их существование?
4. Какими величинами характеризуется напряженное состояние в точке тела и во всем теле?
5. Что такое главные напряжения и на каких площадках они действуют?
6. Что такое инварианты напряженного состояния?
7. Как определяются главные касательные напряжения?
8. Что такое октаэдрическое напряжение?

---

<sup>9</sup> При сложном напряженном состоянии расчеты на прочность ведут также с использованием интенсивности напряжения  $\sigma_i$ .

## ГЛАВА 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

### 2.1. Составляющие перемещения и деформации.

#### Зависимость между ними

Исследуем деформацию упругого тела. Чтобы определить ее, необходимо сравнить положения точек тела до и после приложения

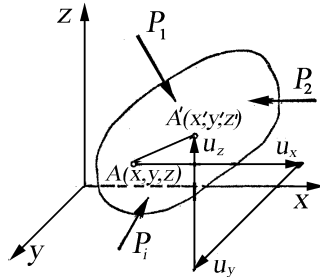


Рис. 12. Перемещение точки  $A$  под действием внешней нагрузки

нагрузки. На рис. 12 показаны некоторое упругое тело и точка  $A$ , координаты которой до деформации  $x, y, z$ . Под действием нагрузки точка  $A$  переместится в новое положение – в точку  $A'$  с координатами  $x', y', z'$ . Отрезком  $AA'$  определяется перемещение точки  $A$ .

Различают два вида перемещений: перемещение всего тела целиком без его деформации и перемещение, связанное с деформацией тела. Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике как перемещения абсолютно твердого тела.

В теории упругости рассматриваются только перемещения, связанные с деформацией тела. Проекции перемещения точки  $A$  на координатные оси  $x, y$  и  $z$  равны разности соответствующих координат точек  $A$  и  $A'$

$$u_x = x' - x; \quad u_y = y' - y; \quad u_z = z' - z$$

и являются функциями координат точки

$$u_x = u_x(x, y, z); \quad u_y = u_y(x, y, z);$$

$$u_z = u_z(x, y, z).$$

Разница в величинах перемещений в различных точках тела вызывает его деформацию.

Бесконечно малый параллелепипед  $dx dy dz$ , вырезанный из уп-

ругого тела около произвольной точки  $A$ , вследствие различия перемещений его точек деформируется, т. е. изменяется длина его ребер и искажаются первоначально прямые углы между гранями.

На рис. 13 изображены два ребра этого параллелепипеда: ребро  $AB$ , параллельное оси  $x$ , и ребро  $AC$ , параллельное оси  $z$ .

Длина ребра  $AB$  равна  $dx$ , ребра  $AC$  –  $dz$ . После деформирования точки  $A, B$  и  $C$  займут новые положения –  $A', B'$  и  $C'$ . При этом точка  $A$  получит перемещение, составляющие которого в плоскости чертежа  $u_x$  и  $u_z$ . Точка  $B$ , отстоящая от точки  $A$  на бесконечно малом расстоянии  $dx$ , получит перемещение, составляющие которого по осям  $x$  и  $z$  будут отличаться от составляющих перемещения точки  $A$  на бесконечно малые величины  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx, \frac{\partial u_z}{\partial x} dx$  за счет изменения координаты  $x$  и будут равны соответственно

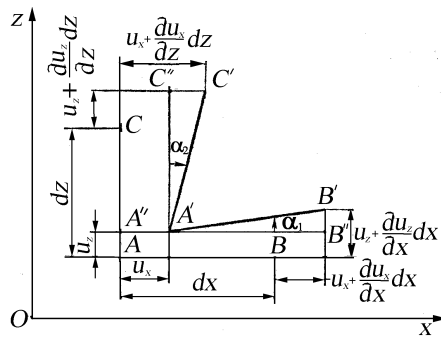


Рис. 13. Компоненты смещений концов ребер  $AB$  и  $AC$  при деформации элементарного параллелепипеда

$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx, u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx$ . Точка  $C$  будет отличаться от составляющих перемещения точки  $A$  на бесконечно малую величину за счет изменения координаты  $z$

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.$$

Длина проекции ребра  $AB$  на ось  $x$   $A'B''$  (см. рис.13) после деформации будет  $A'B'' = A''B'' - u_x$  или

$$A'B'' = dx + (u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx) - u_x = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx. \quad (43)$$

Проекция абсолютного удлинения ребра  $AB$  на ось  $x$  равна

$$\Delta AB = A'B'' - AB = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение вдоль оси  $x$  называется линейной деформацией  $\varepsilon_x$  по этому направлению. Она равна

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (a)$$

Если рассмотреть смещение ребер элементарного параллелепипеда в плоскостях  $xOy$  и  $yOz$ , то аналогично получим линейные деформации по направлениям координатных осей  $y$  и  $z$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (б)$$

Итак, *линейная деформация по любому направлению равна частной производной составляющей перемещения в этом направлении по переменной в том же направлении.*

Рассмотрим изменения углов между ребрами параллелепипеда (см. рис. 13). С использованием (43) найдем тангенс угла поворота ребра  $AB$  в плоскости  $xOz$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx) - u_z}{dx(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x})} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

Ограничиваясь рассмотрением только малых деформаций, можно полагать, что  $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$ , а также пренебречь линейной деформацией  $\varepsilon_x$  по сравнению с единицей. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (в)$$

Аналогично находим угол поворота ребра  $AC$  в этой же плоскости

$$\alpha_2 = \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (г)$$

Угол сдвига в плоскости  $xOz$ , т. е. искажение прямого угла  $BAC$ , называется угловой деформацией и определяется как сумма углов поворота ребер  $AB$  из (в) и  $AC$  в соответствии с (г)

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (д)$$

Аналогично найдем угловые деформации в двух других координатных плоскостях

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (e)$$

Итак, *угловая деформация в любой плоскости равна сумме частных производных составляющих перемещения в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.*

Формулы (a), (б), (d) и (e) дают шесть основных зависимостей составляющих линейных и угловых деформаций от составляющих перемещения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Они носят название формул Коши.

В пределе, когда ребра параллелепипеда стремятся к нулю, формулы (44) определяют линейные и угловые деформации в точке *A*.

Правило знаков для составляющих деформации:

1. Положительным линейным деформациям отвечают удлинения по соответствующим направлениям, а отрицательным – укорочения.

2. Положительным угловым деформациям соответствует уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей, а отрицательным – увеличение тех же углов.

При решении задачи теории упругости в цилиндрической системе координат  $x\theta r$  (см. рис. 5) составляющие перемещения имеют следующие значения:  $u_x$  – составляющая перемещения в направлении оси  $x$ ;  $u_\theta$  – составляющая перемещения в направлении оси  $\theta$ , т. е. перпендикулярно к плоскости  $xOr$  в каждой точке, а также  $u_r$  – составляющая перемещения в направлении оси  $r$ . Со-

ставляющие линейной деформации в цилиндрической системе координат  $xOr$  будем обозначать  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_r$ , а составляющие угловой деформации  $\gamma_{x\theta}$ ,  $\gamma_{\theta r}$  и  $\gamma_{rx}$ .

Формулы Коши в цилиндрической системе координат приведем без вывода

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; & \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \gamma_{rx} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

## 2.2. Объемная деформация

В процессе деформирования изменяется объем тела. Подсчитаем изменение объема бесконечно малого параллелепипеда, объем которого до деформирования  $dV = dxdydz$  (рис. 14).

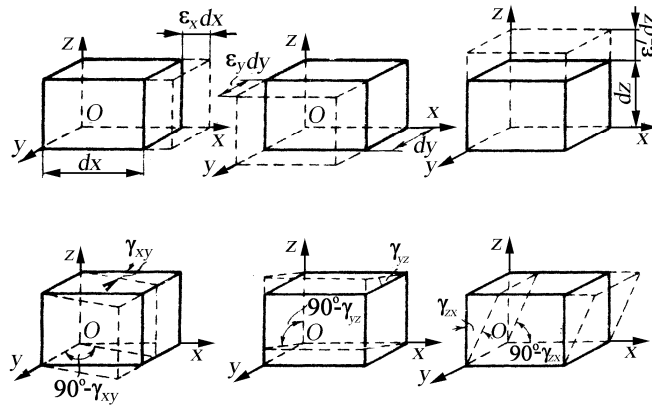


Рис. 14. Изменение объема и формы элементарного объема при упругой деформации

При указанных на рис. 14 элементарных деформациях по осям  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  изменяются объем параллелепипеда и его форма. При углах

сдвига, пренебрежимо малых по сравнению с единицей (а такие именно углы сдвига и предполагаются в классической теории упругости), можно считать, что объем параллелепипеда, получившего деформации сдвига, не изменился, а ребра не получили удлинений. С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка можно считать, что изменение объема связано только с изменением длины ребер, но не с угловыми деформациями.

Длина ребра вдоль оси  $x$  (см. рис. 14), равная  $dx$  до деформации, после деформации согласно формуле (43) будет

$$dx_1 = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = dx(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}) = dx(1 + \varepsilon_x). \quad (46)$$

Аналогично вычисляются длины двух других ребер после деформации

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= dy(1 + \varepsilon_y); \\ dz_1 &= dz(1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Объем параллелепипеда после деформации найдем как произведение новых длин ребер

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$dV_1 = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z).$$

Пренебрегая в скобках величинами второго и третьего порядков малости и учитывая, что  $dx dy dz = dV$ , находим:

$$dV_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Относительная объемная деформация равна

$$\frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Обозначим относительное изменение объема (*объемную деформацию*) через  $\theta$ , тогда

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (48)$$

Таким образом, *объемная деформация равна сумме трех линейных деформаций по взаимно перпендикулярным направлениям.*

С помощью формул Коши (44) объемную деформацию можно выразить через составляющие перемещения



$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (49)$$

Условимся об обозначении угловых деформаций. Если ребро, первоначально параллельное оси  $x$ , повернулось в направлении к ребру, первоначально параллельному оси  $y$ , то происходящее при этом уменьшение угла можно обозначить  $\gamma_{xy}$  (рис. 15,а).

Если на тот же угол повернется второе ребро (параллельное оси  $y$ ) по направлению к первому (параллельному оси  $x$ ), то угол сдвига можно обозначить через  $\gamma_{yx}$  (рис. 15,б).

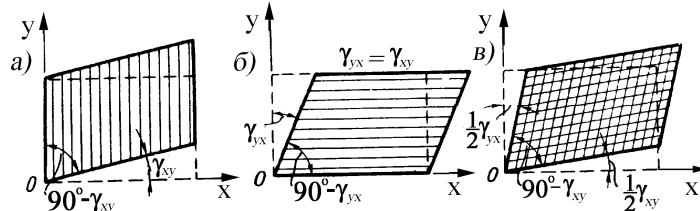


Рис. 15. Взаимность сдвигов

Тем же случаем (см. рис. 15, а, б) совершенно эквивалентен случай, изображенный на рис. 15, в. Таким образом, можно условиться в тождественности обозначений

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad (50)$$

или *взаимности сдвигов*.

Расположим все компоненты, определяющие собой деформированное состояние в рассматриваемой точке, в виде следующей таблицы аналогично тензору напряжений (углы сдвига поделим пополам в соответствии с рис. 15, в):

$$T_{\text{деф.}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (51)$$

Эту матрицу назовем тензором деформаций. В (50), если сложить все члены по главной диагонали, то получим  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta$ , т. е. относительную объемную деформацию. А так как  $\theta$  в окрестности данной точки не зависит от ориентации элементарного параллелепипеда относительно координатных осей и даже не зависит от формы элементарного объема, то, следовательно, указанная сумма диагональных членов инвариантна к ортогональному преобразованию координатной системы и называется *первым инвариантом тензора деформаций*.

Тензор (50) симметричен относительно главной диагонали.

Аналогично тензору напряжений можно найти следующие инварианты деформированного состояния:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ E_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2; \\ E_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

### 2.3. Уравнения неразрывности деформаций

Формулы Коши (44) связывают шесть составляющих деформации —  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  и  $\gamma_{zx}$ , а также три составляющих перемещения —  $u_x, u_y$  и  $u_z$ . Если заданы три составляющие перемещения, то шесть составляющих деформации определяются из этих формул однозначно. Если же заданы шесть составляющих деформации, то для определения трех составляющих перемещения необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений (44) в частных производных. При произвольном выборе шести составляющих деформации шесть уравнений с тремя неизвестными не всегда могут быть решены однозначно. Поэтому между шестью составляющими деформации должны существовать определенные зависимости. Чтобы вывести эти зависимости, необходимо исключить составляющие перемещения из формул Коши (44). Первую формулу Коши дважды продифференцируем по  $y$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2},$$

а вторую – дважды по  $x$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$$

и полученные результаты сложим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (a)$$

В выражении (а) составляющие, стоящие в скобках, согласно формулам Коши (44) определяют угловую деформацию  $\gamma_{xy}$ . Тогда вместо соотношения (а) получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (б)$$

Аналогично можно установить зависимость между деформациями и в двух других координатных плоскостях

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Уравнения (б) и (в) показывают, что если заданы две линейные деформации в перпендикулярных направлениях, то угловую деформацию в плоскости этих линейных деформаций нельзя задать произвольно.

Трех уравнений (б) и (в) оказывается недостаточно для обеспечения однозначности перемещений, так как они получены дифференцированием. При дифференцировании порядок дифференциального уравнения повышается и возможно появление новых решений, не удовлетворяющих первоначальному уравнению. Чтобы не получалось неприемлемых решений, необходимо иметь дополнительные условия.

Возьмем три последние формулы Коши (44) и продифференцируем их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Сложим в (2) две первые строки и вычтем третью

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x}.$$

Продифференцируем это выражение еще раз по  $y$  и, заметив, что

$$\frac{\partial^3 u_y}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x},$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.$$

Аналогично можно получить еще два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения свидетельствуют о том, что если заданы три угловые деформации в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, то линейные деформации не могут быть заданы произвольно.

Итак, получена следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (53)$$

Уравнения (53), выведенные Сен-Венаном, называют *уравнениями (условиями) совместности или неразрывности деформаций*.

Физический смысл этих уравнений таков. Если, задаваясь деформацией, их не учитывать и для каждого из параллелепипедов, на которые мысленно разбито тело, назначить шесть независимых составляющих деформаций, то из отдельных таких деформированных параллелепипедов нельзя сложить непрерывного деформированного тела. Иными словами, *заданное тело, сплошное и непрерывное до деформации, должно остаться сплошным и непрерывным и после деформации*.

Если условие (53) не выполняется, то в некоторых точках окажутся после деформации бесконечно малые разрывы. Уравнения (53) устанавливают зависимости между составляющими деформации, при выполнении которых тело после деформации получается сплошным. Поэтому уравнения (53) можно рассматривать как следствия принятого допущения о сплошности тела.

Если бы при решении задачи теории упругости удалось по заданным нагрузкам точно найти перемещения точек  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ , то после этого деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  можно вычислить по формулам (44). В этом случае условия неразрывности (53) будут точно удовлетворены сами по себе, так как они выведены из уравнений (44) и являются их следствием.

Если же по заданным нагрузкам определить напряжения, а затем деформации, то при этом необходимо одновременно удовлетворить и уравнениям неразрывности (53), в противном случае де-

формации будут несовместимы. В этом случае невозможно найти из уравнения (44) перемещения (после интегрирования и определения постоянных по заданным граничным условиям), так как в них будут взаимные противоречия.

Энергетический смысл уравнений (53) по доказательству Л.С. Лейбензона [8] (он называет их условиями интегрируемости) заключается в том, что осуществлению указанного принципа неразрывности деформаций соответствует в упругом теле минимальное значение накапливаемой телом потенциальной энергии деформации.

Таким образом, для упругого тела принцип наименьшей работы деформации и уравнения совместности деформаций тождественны между собой (хотя в теории и прикладных расчетах они не могут полностью заменять друг друга).

#### 2.4. Граничные условия

На поверхности упругого тела возможны различного рода условия. Во-первых, могут быть заданы значения упругих перемещений  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  по всей поверхности  $S$  упругого тела, в том числе и от времени

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \psi_1(x, y, z, t); \\ u_y &= \psi_2(x, y, z, t); \\ u_z &= \psi_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Эти условия носят *кинематический характер*.

Так как уравнения (44) имеют место по всему объему упругого тела вплоть до его поверхности, то значения  $u_x, u_y, u_z$ , полученные интегрированием уравнений (44), также имеют место по всему объему упругого тела вплоть до его поверхности. На поверхности  $S$  эти значения должны совпадать с теми, которые даны *граничными условиями* (54). Следовательно, интегралы уравнений (44) нужно подобрать так, чтобы были удовлетворены условия (54).

Во-вторых, могут быть заданы по всей поверхности упругого тела значения внешних сил, приложенных ко всем элементам этой

поверхности:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \chi_1(x, y, z, t); \\ p_{yv} &= \chi_2(x, y, z, t); \\ p_{zv} &= \chi_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Интегрируя уравнения (5), определим значения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , пригодные по всему объему упругого тела вплоть до его поверхности и на самой поверхности  $S$ . Поэтому (8) будет справедливо на поверхности и составляющие по координатным осям  $p_{xv}, p_{yv}, p_{zv}$  равны правой части (55).

Таким образом, из (8) получим условия на поверхности  $S$

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \chi_1, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = \chi_2, \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = \chi_3. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Эти условия носят *динамический характер*. Если в (55) отсутствует время  $t$ , то это будут статические граничные условия.

В-третьих, возможна на поверхности упругого тела комбинация этих условий. На одной части поверхности  $S$  могут быть заданы значения упругих перемещений. На остальные части этой поверхности могут быть известны внешние силы. Так, в отдельных точках поверхности  $S$  могут быть заданы перемещения (в частности, отдельные точки могут быть закреплены), тогда как остальная часть поверхности  $S$  может быть нагружена поверхностными силами или остальная часть – свободная от усилий, но на тело будут действовать массовые силы, например силы тяжести. Также встречаются условия, накладываемые на компоненты деформации или компоненты угловых деформаций в отдельных местах поверхности тела.

### 2.5. Начальные условия

В начале движения в момент  $t = 0$  могут быть заданы значения упругих перемещений  $u_x, u_y$  и  $u_z$ , а также их производных по времени  $t$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z, t), \\ u_y &= f_2(x, y, z, t), \\ u_z &= f_3(x, y, z, t); \end{aligned} \right\} \text{ для } t=0 \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \varphi_1(x, y, z), \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} &= \varphi_2(x, y, z), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \varphi_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \text{ для } t=0 \quad (58)$$

Интегралы уравнений (44) должны быть подобраны так, чтобы условия (57) и (58) были удовлетворены.

При удовлетворении начальных условий существенную роль играет начальное состояние тела. Предполагаем, что в естественном состоянии, когда еще нет деформации, нет напряженного состояния.

### Контрольные вопросы

1. Какова роль уравнений Коши и какие задачи они позволяют решать?
2. Какие правила знаков приняты при определении линейных и угловых деформаций?
3. Как определяется относительная объемная деформация?
4. Объясните физический смысл уравнений совместности деформаций Сен-Венана.
5. Каков энергетический смысл уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана?
6. Для чего нужны граничные условия и что они определяют?
7. В каком случае уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана выполняются после решения задачи точно?
8. Для чего определяются граничные и начальные условия?



## ГЛАВА 3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

### 3.1. Выражение составляющих деформации через составляющие напряжения

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформации необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят физический характер, поэтому их иногда называют физическими уравнениями теории упругости. Действительно, рассматривая изучаемые в курсе сопротивления материалов диаграммы растяжения различных материалов, заключаем, что зависимости напряжение – деформация определяются свойствами материалов.

Ограничиваясь малыми деформациями упругого тела, связь между напряжениями и деформациями можно принять линейной. При этом в общем случае каждая составляющая напряжения может зависеть от всех составляющих деформации

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}, \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx}, \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{yz} + a_{36}\gamma_{zx}, \\ \tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{yz} + a_{46}\gamma_{zx}, \\ \tau_{yz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{yz} + a_{56}\gamma_{zx}, \\ \tau_{zx} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} (a)$$

Коэффициенты  $a_{mn}$  называются упругими постоянными и в общем случае их оказывается 36.

Рассматривая только обратимые процессы деформирования, т. е. такие, при которых после снятия нагрузок форма и размеры тела полностью восстанавливаются, можно убедиться, что между коэффициентами  $a_{mn}$  существует зависимость  $a_{nm} = a_{mn}$ . Тогда количество упругих постоянных окажется равным 21.

В случае изотропного тела формулы (a) не должны изменяться при

любых преобразованиях координат. Преобразуя координаты путем поворота осей на  $180^\circ$ , можно установить, что нормальные напряжения не связаны с угловыми деформациями, а касательные напряжения не связаны с линейными деформациями. Кроме того, касательные напряжения не связаны с угловыми деформациями в других плоскостях. После поворотов осей на  $90^\circ$  и на произвольный угол число упругих постоянных сокращается до двух. В качестве упругих постоянных можно взять постоянные, известные из курса сопротивления материалов.

При испытании стержня на растяжение установлена пропорциональность между нормальным напряжением и линейной деформацией в одном направлении

$$\varepsilon = \sigma/E,$$

называемая законом Гука. Входящая сюда упругая постоянная  $E$  называется *модулем упругости*.

Также экспериментально установлен закон, связывающий линейные деформации в продольном  $\varepsilon_x$  и поперечном  $\varepsilon_y$  направлениях:

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x. \quad (б)$$

Входящая в уравнение (б) вторая упругая постоянная  $\mu$  называется коэффициентом Пуассона.

При испытании на чистый сдвиг установлена пропорциональность между касательным напряжением и угловой деформацией в плоскости действия этого напряжения

$$\gamma = \tau/G. \quad (в)$$

Здесь появляется уже третья упругая постоянная  $G$ , называемая модулем *сдвига*. Однако модуль сдвига не является новой независимой упругой постоянной, так как он выражается через первые две известной из курса сопротивления материалов зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (59)$$

Чтобы установить зависимости между составляющими деформации и составляющими напряжений при объемном напряженном состоянии, выделим из тела бесконечно малый параллелепипед (см. рис. 4) и рассмотрим действие только нормальных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Разницей между напряжениями на противоположных гранях можно пренебрегать, так как она дает деформации более высокого порядка малости.

Воспользуемся принципом независимости действия сил. Так, при действии силы  $P_x = \sigma_x dydz$  вдоль оси  $x$  (см. рис. 4) напряжение  $\sigma_x$  вызывает одновременно три линейные деформации: по линии действия силы получается линейная деформация  $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ , а по направлениям, перпендикулярным направлению  $P_x$ , – линейные деформации  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$ .

При одновременном действии трех растягивающих нагрузок получится девять линейных деформаций, суммирующихся по направлению каждой из трех осей  $x, y, z$ . Получающиеся по каждому из этих направлений деформации могут быть объединены следующим образом (табл. 3).

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями согласно закону Гука при сдвиге ( $\sigma$ ) можно представить независимо для каждой из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \quad (2)$$

Суммируя линейные деформации в направлении каждой оси (см. табл. 3), получим суммарные линейные деформации в трех взаимно перпендикулярных направлениях  $x, y, z$ , а также используя (2), получим шесть формул *обобщенного закона Гука*.

Таблица 3

Составляющие линейной деформации по осям

От растягивающей силы	Линейная деформация по осям		
	$x$	$y$	$z$
$P_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$
$P_y$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$
$P_z$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Они выражают линейную зависимость между составляющими деформации и составляющими напряжений в изотропном упругом теле

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Формулы обобщенного закона Гука в цилиндрической системе координат  $x, \theta, r$  (см. рис. 5) получаем из формул (60) простой заменой индексов  $x, y, z$  соответственно на индексы  $x, \theta, r$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r) \right], & \gamma_{x\theta} &= \frac{\tau_{x\theta}}{G}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_x) \right], & \gamma_{\theta r} &= \frac{\tau_{\theta r}}{G}, \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r - \mu(\sigma_x + \sigma_\theta) \right], & \gamma_{rx} &= \frac{\tau_{rx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

### 3.2. Выражение составляющих напряжений через составляющие деформации

При расчете напряженно-деформированного тела часто возникает необходимость иметь выражения составляющих напряжений через составляющие деформации.

Выведем предварительно соотношения для объемной деформации. Складывая почленно первые три формулы обобщенного закона Гука (60), находим:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (a)$$

Однако на основании соотношений (48) и (27)

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta, \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = S_1,$$

то формулу (a) можно представить так:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} S_1, \quad (62)$$

т. е. *относительная объемная деформация  $\theta$  пропорциональна первому инварианту напряженного состояния  $S_1$* . Введя модуль объемного расширения

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (63)$$

получим:

$$S_1 = 3K\theta. \quad (б)$$

Если первый инвариант напряженного состояния  $S_1$  заменить средним напряжением в точке

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1, \quad (64)$$

то вместо уравнения (б) получим

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (65)$$

Последнее соотношение можно сформулировать так: *среднее напряжение в окрестностях данной точки пропорционально объемной деформации*.

Для выражения составляющих напряжений через составляющие деформации возьмем первую формулу закона Гука (60) и в квадратной скобке прибавим и вычтем величину  $\mu\sigma_x$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \mu\sigma_x - \mu\sigma_x - (\mu\sigma_y + \sigma_z)].$$

Введя обозначение  $S_1$  первого инварианта напряженного состояния согласно формуле (27), получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_x - \mu S_1]. \quad (6)$$

Из формулы (62)

$$S_1 = \frac{E}{1 - 2\mu} \theta. \quad (2)$$

Подставляя формулу (2) в формулу (6), получаем:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu)\sigma_x - \frac{E\mu}{1 - 2\mu} \theta \right],$$

откуда находим напряжение

$$\sigma_x = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \theta + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_x. \quad (d)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (66)$$

Тогда вместо формулы (d) получим

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x. \quad (e)$$

Упругие постоянные  $\lambda$  и  $G$  называются *коэффициентами Ламе*. Они также характеризуют упругие свойства материала<sup>10</sup>.

Аналогично формуле (e) можно получить еще две формулы для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . Присоединив к ним три последние формулы для касательных напряжений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Эти формулы называют *обратной формой закона Гука*.

<sup>10</sup> В работах [5, 9] коэффициент Пуассона обозначается как  $\nu$ , а вторая постоянная Ламе –  $\mu$ . Наше обозначение соответствует принятым обозначениям в дисциплине «Сопротивление материалов».

Складывая почленно первые три формулы (67), находим

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\theta + 2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

или согласно формулам (27) и (48)

$$S_1 = (3\lambda + 2G)\theta. \quad (68)$$

Это соотношение устанавливает связь между первыми инвариантами напряженного  $S_1$  и деформированного состояния  $\theta$  через коэффициенты Ламе. Заменяя  $S_1$  средним напряжением в точке  $\sigma_0$  согласно (64), а объемную деформацию  $\theta$  – средней деформацией в точке

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{1}{3}\theta, \quad (69)$$

получаем еще одну форму закона Гука

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2G)\varepsilon_0, \quad (70)$$

т. е. *среднее напряжение в точке пропорционально среднему удлинению в этой точке.*

### 3.3. Работа упругих сил. Потенциальная энергия деформации

Выделим из тела бесконечно малый параллелепипед (см. рис. 4) и подсчитаем работу, совершаемую приложенными к нему упругими силами, на возможных перемещениях.

Рассмотрим сначала работу, совершаемую нормальными напряжениями, действующими на гранях, нормальных к оси  $Ox$ :

$$\sigma_x \text{ и } \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (a)$$

Если точкам тела сообщить какие-либо возможные перемещения, то расстояние между рассматриваемыми гранями изменится на некоторую величину  $\delta\varepsilon_x dx$ . Отбросив в выражении (a) бесконечно малую величину  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$  по сравнению с  $\sigma_x$ , найдем, что две равные и противоположно направленные силы  $\sigma_x dydz$ , приложенные к граням параллелепипеда, произведут работу

$$\sigma_x dydz \cdot \delta\varepsilon_x dx = \sigma_x \delta\varepsilon_x dx dy dz.$$

Точно так же можно подсчитать возможную работу, совершаемую продольными силами в направлениях осей  $Oy$  и  $Oz$  на соответствующих им возможных перемещениях:

$$\sigma_y \delta \varepsilon_y dx dy dz, \quad \sigma_z \delta \varepsilon_z dx dy dz.$$

Касательные напряжения, параллельные оси  $Ox$ , на вертикальных гранях (см. рис. 4) при отбрасывании бесконечно малых величин высшего порядка образуют пару сил с моментом  $\tau_{xy} dz dx \cdot dy$ . Для вычисления работы, совершаемой данной парой сил на возможных перемещениях, эту пару нужно умножить на приращение соответствующего угла сдвига  $\delta \gamma_{xy}$ :

$$\tau_{xy} dz dx dy \cdot \delta \gamma_{xy} = \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy dz.$$

Таким же путем подсчитаем работу двух других составляющих касательных напряжений на соответствующих им возможных перемещениях

$$\tau_{yz} \delta \gamma_{yz} dx dy dz, \quad \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} dx dy dz.$$

На основании принципа независимости действия сил возможную работу всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, получим как сумму возможных работ, совершаемых каждой силой в отдельности:

$$\delta(dA) = (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz.$$

Разделив это выражение на объем рассматриваемого параллелепипеда  $dx dy dz$ , получим приращение работы, отнесенной к единице объема тела в той точке, где выделен параллелепипед:

$$\delta A = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}. \quad (б)$$

На основании закона сохранения энергии будем считать, что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную энергию, накапливаемую телом при получении им упругих деформаций и возвращаемую им обратно в виде работы сил при исчезновении деформации.

Если обозначить через  $W$  удельную потенциальную энергию,



т. е. энергию, накапливаемую в единице объема деформируемого тела, то на основании принятого выше допущения приращение работы внутренних сил на возможных перемещениях полностью перейдет в потенциальную энергию, и последняя получит приращение  $\delta W = \delta A$ .

Сравнивая это соотношение с формулой (б), получаем приращение удельной потенциальной энергии в таком виде:

$$\delta W = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}. \quad (71)$$

Составляющие напряжений в выражении (71) могут быть заменены составляющими деформации с помощью формул закона Гука (67). Следовательно, удельную потенциальную энергию  $W$  можно рассматривать как функцию шести независимых составляющих деформации

$$W = W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}). \quad (в)$$

Приращение  $\delta W$  функции (в) на возможных перемещениях с точностью до величин второго порядка малости можно заменить первым полным ее дифференциалом

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx}. \quad (з)$$

Сравнивая правые части выражений (71) и (з), получаем следующие шесть соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Таким образом, составляющие напряжений выражаются через частные производные от удельной потенциальной энергии (в) по соответствующим им составляющим деформации. Эти формулы выведены впервые Гринем. Функция  $W$  называется *упругим потенциалом*.

Сопоставляя формулы (67) и (72), заключаем, что частные производные функции  $W$  по составляющим деформации представляют собой однородные линейные функции составляющих деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , следовательно, сама функция  $W$  является однородной функцией второй степени этих составляющих. Вид функции  $W$  можно получить с помощью теоремы Эйлера об однородных функциях, которая утверждает, что если  $F(x, y, z, \dots)$  есть однородная функция  $n$ -й степени, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z + \dots = nF.$$

Применив теорему Эйлера к функции  $W$ , найдем:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \varepsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \varepsilon_z + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \gamma_{zx} = 2W.$$

Заменив здесь частные производные упругого потенциала  $W$  напряжениями, согласно формулам (72) получим:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (73)$$

Следовательно, *удельная потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, равна половине суммы произведений составляющих напряжений на соответствующие им составляющие деформации*. Это соотношение называют формулой Клапейрона.

Формулу Клапейрона можно выразить через одни составляющие напряжений или только через составляющие деформации. Подставляя в зависимость (73) формулы закона Гука в виде (61), находим выражение удельной потенциальной энергии через напряжения:

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(1 + \mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (74)$$

Подставляя в зависимость (73) выражение закона Гука в фор-

ме (67), получаем выражение удельной потенциальной энергии через деформации:

$$W = \frac{1}{2}[\lambda\theta^2 + 2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (75)$$

В формуле (75) упругие постоянные Ламе  $\lambda$  и  $G$  в соответствии с формулой (66) – величины положительные, следовательно, потенциальная энергия  $W$  всегда будет величиной положительной, т. е.  $W > 0$ .

Потенциальную энергию, накапливаемую во всем теле, подсчитываем суммированием удельной потенциальной энергии по всему объему тела  $V$ :

$$U = \iiint_V W dx dy dz. \quad (76)$$

Подставляя в (76) выражение потенциальной энергии из формулы Клапейрона (73), получаем:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (77)$$

Соотношение (77) позволяет подсчитать потенциальную энергию, накапливаемую в упругом теле в процессе деформации.

#### **Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте обобщенный закон Гука.
2. Какая связь между модулем сдвига  $G$  и модулем упругости  $E$ ?
3. Что такое модуль объемного расширения?
4. Как определяются коэффициенты Ламе?
5. Сформулируйте обратную форму закона Гука.
6. Чему пропорционально среднее напряжение в окрестности данной точки упругого тела?
7. Что называется упругим потенциалом?
8. Какая связь между удельной потенциальной энергией и составляющими тензора напряжений?

## ГЛАВА 4. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 4.1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения

Рассмотренные ранее уравнения теории упругости распределим в три группы.

*А. Группа статических или динамических уравнений.*

В эту группу входят дифференциальные уравнения равновесия (5). Для динамической задачи, принимая, что перемещения  $u_x, u_y, u_z$  очень малые, а проекции ускорения на координатные оси запишутся как  $\partial^2 u_x / \partial t^2$ ,  $\partial^2 u_y / \partial t^2$ ,  $\partial^2 u_z / \partial t^2$ , удельная объемная сила по осям  $x, y, z$  будет равна:

$$-\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (a)$$

В случае динамической задачи уравнения (5) будут содержать, кроме объемных (массовых) сил  $X, Y, Z$ , отнесенных к единице объема, и инерционные силы, определяемые в соответствии с (a).

Система уравнений будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \quad (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}); \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \quad (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}); \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \quad (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Б. Геометрические уравнения (44)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

В. Физические уравнения (60)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

или в обратной форме (67)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (80a)$$

Уравнения (78) - (80) (их количество 15) содержат 15 неизвестных функций: шесть компонентов напряжений

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z),$$

$$\tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z),$$

шесть компонентов деформации

$$\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z),$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z),$$

а также три компонента перемещения

$$u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z).$$

Таким образом, с математической точки зрения задача может

быть разрешена и сводится к нахождению 15 функций, удовлетворяющих уравнениям (78), (79), (80) или (80a), а также условиям на контуре (8):

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

К ним необходимо присоединить уравнения неразрывности деформаций (53)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

При прямом решении задачи, когда используются все 15 уравнений (78) - (80), уравнения неразрывности (в) сами по себе, как вытекающие из (79), не нужны и могут выполнять роль контрольных уравнений.

Однако, если решается статическая задача теории упругости (следовательно, правая часть уравнений (78) обращается в нуль) и отыскиваются только напряжения и деформации (значит, неизвестных будет 12), целесообразно уравнения (79) подменить тремя из шести уравнениями (в) или принять первую группу уравнений неразрывности. В этом случае будем иметь три уравнения равновесия (78), шесть физических уравнений (80) и три уравнения неразрывности (в) (для линейных деформаций). Задача сводится к нахождению 12 неизвестных функций, удовлетворяющих в каждой точке упругого тела 12 уравнениям, а на поверхности тела удовлетворяющих граничным уравнениям (б).

Далее, если это потребуется, по найденным деформациям из

(80) можно вычислить компоненты перемещений  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$ . Решение указанных уравнений можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные:

1. Решение в *перемещениях*, когда за основные неизвестные приняты три составляющие перемещения:

$$u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z).$$

Этот метод часто называют методом перемещений [5]. При решении задачи используются кинематические граничные условия или граничные условия смешанного типа.

2. Решение в *напряжениях*, когда за основные неизвестные приняты шесть составляющих напряжений

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z).$$

Этот метод часто называют методом сил [5]. При решении задачи используются статические или динамические граничные условия.

3. Решение в *смешанной форме*, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений. При решении задачи используются граничные условия смешанного типа.

#### 4.2. Решение задачи теории упругости в перемещениях

При решении задачи теории упругости в перемещениях за основные неизвестные принимают три составляющие перемещения

$$u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z).$$

Для их отыскания необходимо иметь три уравнения, которые можно получить из дифференциальных уравнений равновесия (78) (в статической форме, т. е.  $\partial^2 u_i / \partial t^2 = 0$ ,  $i = x, y, z$ ), выразив в них напряжения через перемещения.

Возьмем первое уравнение равновесия (5) и подставим в него напряжения из формул закона Гука в форме (80a) (обратная форма закона Гука):  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ . Дифференцируя их в соответствии с (80a), получим:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}.$$

Внесем полученные решения в первое уравнение группы (78). После группировки находим

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) +$$

$$+ G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + X = 0. \quad (a)$$

Выражение, заключенное в первой скобке, может быть короче записано так:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Введем для краткости письма обозначение

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nabla^2 u_x \quad (81)$$

(читается «набла два»), называемое также оператором Лапласа над функцией  $u_x(x, y, z)$ . Тогда уравнение (a) после группировки подобных членов будет иметь вид

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + X = 0. \quad (б)$$



Аналогично преобразуем и два других дифференциальных уравнения равновесия (78)<sup>11</sup>. Таким образом, получаем группу уравнений для решения задачи теории упругости в перемещениях

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + X &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 u_y + Y &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 u_z + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Уравнения (82) называются уравнениями Ламе. Они объединяют все три группы уравнений (78) - (80). Действительно, они содержат условия равновесия, геометрические характеристики деформаций,  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$  и физические характеристики материала  $\lambda$  и  $G$ .

Поверхностные условия (8) также можно преобразовать, выразив напряжения через перемещения. Для этого подставим в первое уравнение (8) (или (б) п. 4.1) на место напряжений  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  выражение для них в форме (80а). Получим

$$p_{xv} = (\lambda \theta l + 2G \varepsilon_x) l + G \gamma_{xy} m + G \lambda_{xz} n. \quad (в)$$

Подставим в (в) вместо линейных и угловых деформаций их значения из формул Коши (79) и сгруппируем следующим образом:

$$p_{xv} = \lambda \theta l + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_x}{\partial y} m + \frac{\partial u_x}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_y}{\partial x} m + \frac{\partial u_z}{\partial x} n \right). \quad (з)$$

Выражение в первой скобке уравнения (з) представляет собой производную по направлению нормали  $v$  от функции  $u_x(x, y, z)$  [10]. Действительно, вычисляя частную производную сложной

<sup>11</sup> Можно и сразу написать результат, сделав в (б) круговую подстановку букв  $x, y, z$ .

функции  $u_x(x, y, z)$  по  $v$ , получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial v} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dv}.$$

Производные координат по  $v$  представляют собой соответствующие направляющие косинусы нормали  $v$

$$\frac{dx}{dv} = l, \quad \frac{dy}{dv} = m, \quad \frac{dz}{dv} = n.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u_x}{\partial v} = \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_x}{\partial y} m + \frac{\partial u_x}{\partial z} n$$

и формула (2) принимает следующий вид:

$$p_{xv} = \lambda \theta l + G \frac{\partial u_x}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_y}{\partial x} m + \frac{\partial u_z}{\partial x} n \right).$$

Точно так же можно преобразовать два других уравнения из условий на поверхности (8). В результате приходим к следующим трем условиям на поверхности, выраженным через перемещения:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \lambda \theta l + G \frac{\partial u_x}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_y}{\partial x} m + \frac{\partial u_z}{\partial x} n \right), \\ p_{yv} &= \lambda \theta m + G \frac{\partial u_y}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} l + \frac{\partial u_y}{\partial y} m + \frac{\partial u_z}{\partial y} n \right), \\ p_{zv} &= \lambda \theta n + G \frac{\partial u_z}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} l + \frac{\partial u_y}{\partial z} m + \frac{\partial u_z}{\partial z} n \right). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Составим план решения задачи теории упругости в перемещениях. Для определения трех составляющих перемещения  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$  необходимо проинтегрировать три уравнения Ламе (82) и удовлетворить условиям на поверхности (83). По найденным перемещениям из формул Коши (79) определяют составляющие деформаций, а затем из формул закона Гука

(80a) – составляющие напряжений. Заметим, что для динамической задачи правая часть уравнений (82) равна  $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  ( $u_i = x, y, z$ ).

### 4.3. Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объемных сил

Ограничим круг рассматриваемых задач случаями статического равновесия, когда объемные силы постоянны по всему объему тела или равны нулю. Эти ограничения позволяют значительно упростить некоторые уравнения при решении задач в напряжениях, так как все производные от составляющих объемных сил по координатам  $x, y, z$  обращаются в нуль. Рассмотрим свойства функций  $\theta$  и  $S_1$  при постоянстве объемных сил.

Продифференцируем первое уравнение Ламе из зависимости (82) по  $x$ , второе – по  $y$ , третье – по  $z$  и сложим почленно. В результате получим

$$(\lambda + G) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + G \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_x + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_y + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 u_z \right) = 0. \quad (a)$$

Выражение, стоящее в первых скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \nabla^2 \theta.$$

Вторые скобки преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_x + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_y + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 u_z = \nabla^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \nabla^2 \theta.$$

Тогда вместо уравнения (a) получим

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \theta = 0,$$

или

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (84)$$

Функция, подчиняющаяся условию (84), называется *гармонической функцией*.

Следовательно, при постоянстве объемных сил объемная деформация есть функция гармоническая.

Подставляя формулу (62) для объемной деформации  $\theta$  в уравнение (84), получаем:

$$\nabla^2 S_1 = 0, \quad (85)$$

т. е. при постоянстве объемных сил первый инвариант напряженного состояния есть функция гармоническая.

При решении задачи теории упругости в напряжениях за основные неизвестные принимают шесть составляющих напряжений:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ . Для их отыскания трех уравнений равновесия (78) недостаточно и поэтому к ним нужно добавить еще шесть уравнений неразрывности деформаций (53). Так как в последние входят составляющие деформации, то их необходимо предварительно выразить через напряжения.

Подставляя в первое уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

значения  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  из формул закона Гука (80), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) - \\ & - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (б)$$

Преобразуем (б), исключив из него касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Для этого продифференцируем первое уравнение равновесия (статическое) (78) по  $x$ , второе – по  $y$ , третье – по  $z$ . Складывая почленно два первых из полученных уравнений и вычитая третье, находим:

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}. \quad (в)$$

Подставляя полученное решение (в) в уравнение (б), получаем:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \mu \nabla^2 \sigma_z = 0.$$

Прибавим и вычтем в этом уравнении  $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}$ ,  $\nabla^2 \sigma_z$ . Тогда с учетом уравнения (85) получим

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0. \quad (z)$$

Аналогично можно преобразовать остальные уравнения неразрывности деформаций (53) (или можно сделать круговую подстановку букв  $x, y, z$  в уравнении (z)). В результате получим уравнения Бельтрами – Митчела:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} = 0, & \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} = 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} = 0, & \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} = 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0, & \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Эти уравнения получены Бельтрами в 1892 г. В 1899 г. Митчел вывел эти уравнения для случая, когда объемные силы не постоянны, и, следовательно, в правую часть уравнений (86) вместо нулей входят члены, содержащие производные от объемных сил.

Таким образом, для решения задачи теории упругости в напряжениях необходимо проинтегрировать девять уравнений: три равновесия (78) и шесть (86). Наличие трех лишних уравнений необходимо для получения однозначного решения и обсуждалось при выводе уравнений неразрывности деформаций (53), следствием которых являются уравнения Бельтрами-Митчела. Полученные после интегрирования шесть составляющих напряжений должны удовлетворять условиям на поверхности (8). После этого по формулам закона Гука (80) определяют составляющие деформации, а из формул Коши (79) – составляющие перемещения  $u_x, u_y, u_z$ .

#### 4.4. Теорема единственности. Методы решения задач теории упругости

При решении задач теории упругости может возникнуть вопрос о том, является ли полученное решение однозначным, т. е. могут ли заданным объемным и поверхностным силам соответствовать одна или несколько различных систем напряжений.

Докажем следующую теорему.

*Для тела, находящегося в естественном состоянии, решение задачи теории упругости единственно, если справедлив принцип независимости действия сил.*

Предположим обратное: под действием заданных поверхностных  $p_{xv}, p_{yv}, p_{zv}$  и объемных  $X, Y, Z$  сил возможны две различные системы напряжений

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx} \text{ и } \sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{xy}, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}.$$

Обе эти системы напряжений должны удовлетворять уравнениям статического равновесия (78)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}''}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}''}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}''}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}''}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z''}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

и условиям на поверхности (8)

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x' l + \tau_{xy}' m + \tau_{xz}' n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx}' l + \sigma_y' m + \tau_{yz}' n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx}' l + \tau_{zy}' m + \sigma_z' n, \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x'' l + \tau_{xy}'' m + \tau_{xz}'' n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx}'' l + \sigma_y'' m + \tau_{yz}'' n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx}'' l + \tau_{zy}'' m + \sigma_z'' n. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Вычтя почленно соответствующие уравнения систем (а) и (б), получим новую систему уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x' - \sigma_x'') + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}' - \tau_{xy}'') + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}' - \tau_{xz}'') &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx}' - \tau_{yx}'') + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y' - \sigma_y'') + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy}' - \tau_{zy}'') &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zx}' - \tau_{zx}'') + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{zy}' - \tau_{zy}'') + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z' - \sigma_z'') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

и условий на поверхности (в) и (г)

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (\sigma'_x - \sigma''_x)l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})n, \\ 0 &= (\tau'_{yx} - \tau''_{yx})l + (\sigma'_y - \sigma''_y)m + (\tau'_{yz} - \tau''_{yz})n, \\ 0 &= (\tau'_{zx} - \tau''_{zx})l + (\tau'_{zy} - \tau''_{zy})m + (\sigma'_z - \sigma''_z)n. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

На основании принципа независимости действия сил разности напряжений, входящих в системы уравнений (e) и (z), можно принять за новую систему напряжений. Однако согласно уравнениям (e) и (z) полученная новая система напряжений возникает при отсутствии объемных и поверхностных сил. Для тела, находящегося в естественном состоянии, эти напряжения равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x - \sigma''_x &= 0, \quad \tau'_{xy} - \tau''_{xy} = 0, \quad \tau'_{xz} - \tau''_{xz} = 0, \\ \sigma'_y - \sigma''_y &= 0, \quad \sigma'_z - \sigma''_z = 0, \quad \tau'_{yz} - \tau''_{yz} = 0 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma''_x, \quad \tau'_{xy} = \tau''_{xy}, \quad \tau'_{xz} = \tau''_{xz}, \\ \sigma'_y &= \sigma''_y, \quad \sigma'_z = \sigma''_z, \quad \tau'_{yz} = \tau''_{yz}. \end{aligned}$$

Следовательно, обе системы напряжений совпадают, и решение задачи теории упругости, когда заданы объемные и поверхностные силы, единственно.

Точно так же можно доказать единственность решения задачи теории упругости и в случае, когда на поверхности упругого тела заданы перемещения.

Из доказанной теоремы следует, что так как решение задачи теории упругости единственно, то безразлично, каким математическим методом решена задача.

Можно указать три основных метода математического решения задачи теории упругости:

1. *Прямой метод.* Этот метод заключается в непосредственном интегрировании уравнений теории упругости совместно с заданными условиями на поверхности (54) - (56).

2. *Обратный метод.* В этом случае задаются функциями пе-



ремещений или напряжений, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям совместности деформаций или равновесия, и определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений.

3. *Полуобратный метод Сен-Венана.* При решении задачи этим методом делают допущения о виде некоторых из функций напряжений или перемещений. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет особых трудностей. Полуобратный метод является одним из наиболее эффективных методов решения задачи теории упругости.

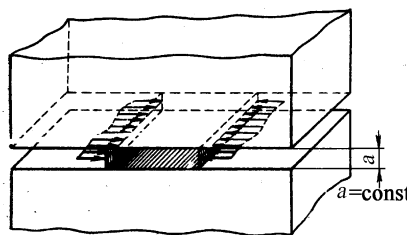
### **Контрольные вопросы**

1. Сколько неизвестных функций необходимо определить при решении пространственной задачи теории упругости?
2. Является ли с математической точки зрения разрешимой задача определения компонентов перемещения, напряжений и деформаций?
3. Укажите способы решения задач теории упругости.
4. Как решается задача теории упругости в перемещениях?
5. Синтезом каких уравнений являются уравнения Ламе?
6. Укажите план решения задачи теории упругости в перемещениях.
7. В чем суть решения задачи теории упругости в напряжениях?
8. Какая функция является гармонической?
9. Описываются ли гармоническими функциями объемная деформация и первый инвариант тензора напряжений?

**ГЛАВА 5. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ**

**5.1. Плоская деформация**

Если при каком-либо напряженном состоянии тела перемещения всех его точек могут происходить только в двух направлениях, т. е. только в одной плоскости, то такая деформация называется *плоской*. Примером может служить тело, помещенное между двумя абсолютно твердыми плитами (рис. 16), расстояние между которыми остается неизменным, и сжимаемое силами, параллельными плоскостям плит.



**Рис. 16. Плоская деформация**

В таких же условиях фактически оказывается тело, размеры которого в одном направлении, например в направлении оси  $z$ , очень велики (например длинном цилиндрическом катке, длинной пластинке и т. д.).

Если такое длинное в направлении, например, оси  $z$  тело нагружено силами (рис. 17), не меняющимися по длине тела и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на значительном расстоянии от концов, фактически будет подвергаться плоской деформации.

Перемещения всех точек деформированного тела в таком случае происходят в плоскостях, перпендикулярных к длине тела.

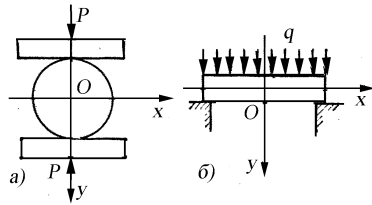


Рис. 17. Плоская деформация при нагружении цилиндрического катка (а) и длинной пластины (б)

Итак, в упругом теле возникает *плоская деформация*, если перемещения будут происходить только параллельно одной плоскости, например  $xOy$ :

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0. \quad (a)$$

Подставляя составляющие перемещения (а) в формулы

Коши (79), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y), & \varepsilon_z &= 0, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y), & \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y), & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Отсутствие линейных деформаций в направлении оси  $z$  ведет к появлению нормальных напряжений  $\sigma_z$ . Эти напряжения зависят от напряжений, действующих в плоскости  $xOy$ . Действительно, из третьей формулы закона Гука (80) при отсутствии деформации  $\varepsilon_z$  следует, что

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (87)$$

Подставляя соотношение (87) в первые две формулы закона Гука (80), находим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Из анализа формул (б), (в) и (80) следует, что  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , а

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

На основании формулы (87) напряжение  $\sigma_z$  также является функцией только двух координат  $\sigma_z = \sigma_z(x, y)$ .

Таким образом, основные уравнения теории упругости в случае плоской деформации значительно упрощаются. Из дифференциальных уравнений равновесия (78) остаются только два

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

а третье превращается в тождество.

Так как на боковой поверхности упругого тела везде направляющий косинус  $n = 0$ , то из условий на поверхности (8) остаются также только два

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Формулы Коши (79) сведутся к трем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций (53) остается только одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (91)$$

а остальные обращаются в тождества.

Из шести формул закона Гука (80) с учетом соотношений (б) и (в) остаются только три

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти формулы примут более удобный вид, если ввести новые упругие постоянные

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E/(1-\mu^2); \\ \mu_1 &= \mu/(1-\mu). \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

В данном случае выражение коэффициента пропорциональности в третьем уравнении (2) через новые упругие постоянные не изменяется

$$2(1+\mu)/E = 2(1+\mu_1)/E_1.$$

С учетом этого результата и формул (92) формула закона Гука для плоской деформации примет вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu_1 \sigma_y)/E_1; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu_1 \sigma_x)/E_1; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu_1)}{E_1} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

## 5.2. Обобщенное плоское напряженное состояние

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются, если напряжения параллельны одной плоскости. Так, в задаче о тонкой пластинке, загруженной по боковой поверхности силами, параллельными ее основаниям и равномерно распределенными по ее толщине (рис. 18), возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации.

Этот случай называется *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

На основаниях пластинки напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$  равны нулю, а так как она тонкая, то можно считать, что  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  по всему объему пластинки. По той же причине остальные напряжения можно считать постоянными по толщине пластинки, т. е. не зависящими от координаты  $z$ . Таким образом, в тонкой пластинке, нагруженной силами, параллельными плоскости  $xOy$ , возникает напряженное состояние, для которого

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

В отношении напряжений обобщенное плоское напряженное состояние отличается от плоской деформации условием  $\sigma_z = 0$ . Переходя к деформациям с помощью третьей формулы закона Гука (80), получаем, что деформация

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Поскольку  $\varepsilon_z \neq 0$ , то основания пластинки не остаются плоскими, а будут искривляться.

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации: дифференциальные уравнения равновесия (5), условия на поверхности (8), формулы Коши (44) и уравнение неразрывности деформаций (53) сохраняют такой же вид и в задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии, а формулы закона Гука (60) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

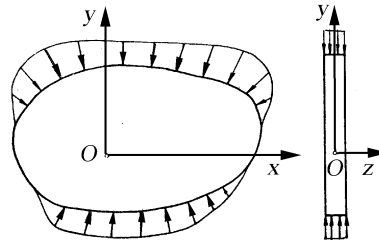


Рис. 18. Обобщенное плоское напряженное состояние

Эти формулы отличаются от формул закона Гука для плоской деформации (93) только значениями упругих постоянных. Следовательно, при решении задач о плоской деформации и обобщенном плоском напряженном состоянии можно пользоваться одними и теми же уравнениями и объединять обе задачи в одну: *плоскую задачу теории упругости*.

В плоской задаче теории упругости неизвестными являются восемь функций: три составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ; три составляющие деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ , а также две составляющие перемещений  $u_x$  и  $u_y$ . Уравнений для решения задачи также восемь: два дифференциальных уравнения равновесия (88), три формулы Коши (90) и три формулы закона Гука (93) или (94).

Если по условию задачи перемещения искать не нужно, то остается шесть неизвестных: три составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , а также три составляющие деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ . В таком случае остается шесть уравнений: два дифференциальных уравнения равновесия (88), три формулы закона Гука (93) или (94) и одно уравнение неразрывности деформаций (91), достаточных для решения задачи.

### **5.3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений**

Решение плоской задачи в напряжениях сводится к отысканию трех неизвестных функций  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$ . Для отыскания этих трех функций имеются два дифференциальных уравнения равновесия (88). К ним следует добавить уравнение неразрывности деформаций (91), заменив в нем деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  на напряжения.

Возьмем уравнение (91) и подставим в него деформации из формул закона Гука (94) для обобщенного плоского напряженного состояния. После упрощения получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (a)$$

Исключим из этого уравнения касательное напряжение  $\tau_{xy}$ . Для этого первое уравнение равновесия (88) продифференцируем по  $x$ , а второе – по  $y$  и сложим почленно. Считая, как и в пространственной задаче, объемные силы  $X$  и  $Y$  постоянными по всему объему, найдем:

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Подставив это соотношение в уравнение (a), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

или через оператор Лапласа

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (95)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений в плоской задаче есть функция гармоническая.*

Это уравнение носит название уравнения Мориса Леви и выведено для обобщенного плоского напряженного состояния. Оно не содержит упругих постоянных, поэтому и для случая плоской деформации имеет такой же вид.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости при постоянстве объемных сил сведено к интегрированию трех уравнений: двух уравнений равновесия (88) и уравнения неразрывности деформаций (95) при обязательном удовлетворении условий на поверхности (89).

Решение плоской задачи можно упростить, сведя ее к отысканию одной функции  $\varphi(x, y)$ . Функция  $\varphi(x, y)$  называется *функцией напряжений Эри*. Ее выбирают таким образом, чтобы дифференциальные уравнения равновесия (88) обращались в тождества. Этим



условиям можно удовлетворить, если напряжения выразить через функцию Эри следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Действительно, подставляя эти выражения в (88), получаем тождества, т. е. принятая таким образом функция напряжений  $\varphi(x,y)$  является решением системы двух уравнений равновесия (88).

Подставляя теперь напряжения (96) в уравнение неразрывности деформаций (95), находим:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (б)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией  $\varphi(x,y)$ . Поэтому уравнение (б) может быть представлено с помощью оператора Лапласа так:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 0$$

или

$$\nabla^4 \varphi(x, y) = 0. \quad (в)$$

Читается левая часть соотношения (в) так: «набла четыре ф» и называется двойным оператором Лапласа над функцией  $\varphi$ .

Функция, подчиняющаяся уравнению (в), называется бигармонической, а само уравнение (в) – бигармоническим уравнением.

Представим бигармоническое уравнение в развернутом виде. Уравнение (б) имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (г)$$

После дифференцирования (г) найдем

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (97)$$

Условия на поверхности (89) для плоской задачи выразим через функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  с помощью уравнений (96)

$$p_{xv} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) m,$$

$$p_{yv} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m.$$

Итак, плоская задача теории упругости сведена к отысканию одной бигармонической функции  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей заданным условиям на контуре.

#### 5.4. Методы решения плоской задачи для прямоугольных односвязных областей

Тело называется *односвязным*, когда оно полностью занимает объем внутри одной замкнутой внешней поверхности. Если объем, занятый телом, заключен между двумя замкнутыми поверхностями, одна из которых полностью размещается внутри другой и образует внутреннюю полость в теле, то такое тело называется *двухсвязным*. При наличии двух, трех таких полостей тело называется соответственно *трех-*, *четырёхсвязным* и т. п. Всякий открытый в обе стороны (сквозной) канал в теле также увеличивает степень связности тела на единицу.

Тело считается заданным, если известны его границы (ограничивающие поверхности) и заданы некоторые механические свойства его материала.

Отыскание бигармонической функции, удовлетворяющей условиям на контуре прямоугольной области, возможно различными методами. Здесь ограничимся рассмотрением лишь некоторых из них: решение плоской задачи в полиномах, решение плоской задачи в тригонометрических рядах, решение плоской задачи при помощи конечных разностей.

### 5.4.1. Решение плоской задачи в полиномах

Решение плоской задачи можно осуществить обратным методом, задаваясь сначала аналитической формой функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению (97), а затем определить, каким нагрузкам на контуре она соответствует. В качестве бигармонической функции можно выбирать алгебраические полиномы разных степеней.

Полином первой степени

$$\varphi_1 = a_1x + b_1y$$

как функция напряжений нас не удовлетворяет, так как напряжения, подсчитанные по формулам (96), окажутся равными нулю.

Возьмем функцию напряжений в виде полинома второй степени

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2. \quad (98)$$

Четвертые производные от этой функции

$$\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} = 0$$

и, следовательно, уравнение (97) обращается в тождество при любых значениях коэффициентов  $a_2, b_2, c_2$ .

Если функцию напряжений  $\varphi(x,y)$  взять в виде полинома третьей степени

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1}x^2y + \frac{c_3}{1 \cdot 2}xy^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3}y^3, \quad (99)$$

то уравнение (97) по-прежнему будет обращаться в тождество при произвольных значениях коэффициентов  $a_3, b_3, c_3$  и  $d_3$  (выше четвертой степени нет ни одной переменной), т. е. полином третьей степени является бигармонической функцией и также может быть применен для решения плоской задачи.

Возьмем функцию напряжений  $\varphi(x,y)$  в виде полинома четвертой степени

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2}x^3y + \frac{c_4}{2 \cdot 2}x^2y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3}xy^3 + \frac{e_4}{3 \cdot 4}y^4. \quad (100)$$

Четвертые производные этой функции равны

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 2a_4, \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4, \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Подставляя эти производные в бигармоническое уравнение (97), получаем:

$$2a_4 + 2c_4 + 2e_4 = 0,$$

откуда находим:

$$e_4 = -a_4 - c_4. \quad (a)$$

Следовательно, не все коэффициенты полинома четвертой степени можно брать произвольными. Независимыми коэффициентами могут быть только четыре, например  $a_4, b_4, c_4$  и  $d_4$ , а пятый –  $e_4$  следует взять из соотношения (a). Следовательно, для того чтобы полином четвертой степени был бигармонической функцией, он должен иметь такой вид:

$$\varphi_4 = a_4 \left( \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + c_4 \left( \frac{x^2 y^2}{2 \cdot 2} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{d_4}{2 \cdot 3} xy^3.$$

Рассмотрим полином пятой степени

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{2 \cdot 3} x^2 y^3 + \frac{e_5}{3 \cdot 4} xy^4 + \frac{f_5}{4 \cdot 5} y^5. \quad (101)$$

Четвертые производные этой функции равны

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^4} = 6a_5 x + 2b_5 y,$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^2 \partial y^2} = 2c_5 x + 2d_5 y,$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial y^4} = 2e_5 x + 6f_5 y.$$

Подставляя эти производные в бигармоническое уравнение (97) и группируя слагаемые по аргументам  $x$  и  $y$ , получаем:

$$2(3a_5 + 2c_5 + e_5)x + 2(b_5 + 2d_5 + 3f_5)y = 0.$$

Чтобы это уравнение обращалось в тождество при любых значениях аргументов  $x$  и  $y$ , необходимо, чтобы коэффициенты при этих переменных были равны нулю, т. е.

$$3a_5 + 2c_5 + e_5 = 0; \quad b_5 + 2d_5 + 3f_5 = 0. \quad (б)$$

Если принять независимыми коэффициенты  $a_5, b_5, c_5$  и  $d_5$ , то остальные два выразятся через них согласно уравнениям (б) следующим образом:

$$e_5 = -3a_5 - 2c_5; \quad f_5 = \frac{1}{3}b_5 - \frac{2}{3}d_5.$$

Внося коэффициенты  $e_5$  и  $f_5$  из соотношений (б) в формулу (101), находим:

$$\begin{aligned} \varphi_5 = & \frac{a_5}{5 \cdot 4}(x^5 - 5xy^4) + \frac{b_5}{4 \cdot 3}(x^4y - \frac{1}{5}y^5) + \\ & + \frac{c_5}{3 \cdot 2}(x^3y^2 - xy^4) + \frac{d_5}{2 \cdot 3}(x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5). \end{aligned} \quad (102)$$

В такой форме полином пятой степени будет бигармонической функцией и сможет быть применен к решению плоской задачи. С помощью алгебраических полиномов можно решить ряд простых задач: чистый изгиб балки, изгиб консольной балки под действием сосредоточенной силы, изгиб балки на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки и др.

Для решения произвольной плоской задачи с применением полиномов используется их набор, чтобы они моделировали внешнюю нагрузку на контуре односвязной области. В работе [11] приведены полиномы разных степеней и показано их использование при решении конкретных задач.

Приведем примеры решения плоской задачи с помощью полиномов.

**Пример 1.** Для тонкой пластинки длиной  $L$ , высотой  $h$  и толщиной в единицу (рис. 19) задана функция напряжений в виде полинома второй степени  $\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2$ . Известно, что внешние силы, приложенные по кромкам пластинки, равномерно распределены по их толщине и, таким образом, создают обобщенное плоское напряженное состояние. Объемные силы отсутствуют. Для такой функции напряжений:

- проверить возможность существования ее, используя формулу (97);
- по функции напряжений найти выражения для компонентов

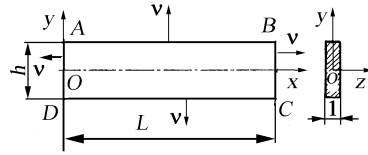


Рис. 19. Эскиз пластинки с нормальми  $v$  к граням

место найденная система напряжений;

- дать эскиз распределения по контурам внешних нагрузок, отвечающих исследуемой функции напряжений.

**Решение.** В соответствии с (98) функция может быть использована в качестве функции напряжений, поскольку она удовлетворяет уравнению (97).

Определим компоненты напряжений, используя уравнения (96):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = a_2, \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (e)$$

Используем контурные условия (89) для выяснения характера внешних нагрузок, которые вызовут напряжения (e).

На верхней грани  $AB$  (см. рис. 19) с направляющими косинусами  $l = \cos(v, x) = \cos 90^\circ = 0$ ,  $m = \cos(v, y) = \cos 0 = 1$  в соответствии с (89) контурные условия, при которых будет иметь место найденная система напряжений, имеют вид

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = c_2 \cdot 0 - b_2 \cdot 1 = -b_2, \quad (e)$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = -b_2 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2.$$

На нижней грани  $CD$  с направляющими косинусами  $l = \cos(v, x) = \cos(-90^\circ) = 0$ ,  $m = \cos(v, y) = \cos 180^\circ = -1$  в соответствии с (89) контурные условия имеют вид

$$p_{xv} = c_2 \cdot 0 + (-b_2)(-1) = b_2, \quad (d)$$

$$p_{yv} = (-b_2) \cdot 0 + a_2(-1) = -a_2.$$

На левой грани  $AD$  с направляющими косинусами  $m = 0$ ,  $l = \cos 180^\circ = -1$  контурные условия имеют вид

напряжений на основании уравнения (96);

- используя контурные условия (89), выяснить характер внешних нагрузок, при которых будет иметь

$$p_{xv} = c_2(-1) + (-b_2)0 = -c_2,$$

$$p_{yv} = (-b_2)(-1) + a_2 \cdot 0 = b_2. \quad (e)$$

Наконец, на правой грани  $BC$  с направляющими косинусами  $m = 0, l = 1$  контурные условия имеют вид

$$p_{xv} = c_2 \cdot 1 + (-b_2)0 = c_2,$$

$$p_{yv} = (-b_2)1 + a_2 \cdot 0 = -b_2. \quad (ж)$$

Используя контурные условия по граням (e) - (ж), дадим эскиз распределения по контурам внешних нагрузок, отвечающих исследуемой функции напряжений  $\varphi_2 = \frac{a_2}{2}x^2 + b_2xy + \frac{c_2}{2}y^2$  (рис. 20).

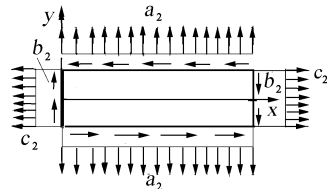


Рис. 20. Внешние нагрузки по контуру пластинки

ми напряжениями  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -b_2$ .

**Пример 2[12].** На рис. 21 изображены три случая нагружения по кромкам пластинки.

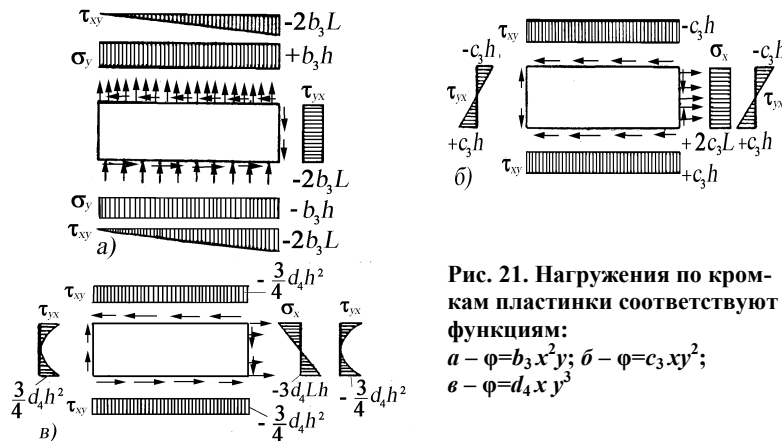


Рис. 21. Нагружения по кромкам пластинки соответствуют функциям:  
 $a - \varphi = b_3 x^2 y$ ;  $б - \varphi = c_3 x y^2$ ;  
 $в - \varphi = d_4 x y^3$

Каждая из приведенных эпюр отвечает какой-либо из функций (98) - (101) (или частей этих функций). Выяснить, соответствуют ли приведенным функциям напряжений изображенные на рис. 21 эпюры нагрузок.

Решение при помощи целых полиномов применимо только в тех случаях, когда нагрузка по краям полосы непрерывно и монотонно возрастает или убывает по какому-либо алгебраическому закону.

Если же нагрузка не является непрерывной или же закон ее не может быть представлен алгебраической функцией, решение можно искать в виде тригонометрического ряда.

#### 5.4.2. Решение плоской задачи в тригонометрических рядах

В более сложных случаях расчета прямоугольной пластинки в качестве функции напряжений для плоской задачи  $\varphi(x, y)$  можно применять тригонометрические ряды. Исследуем для этого следующую тригонометрическую функцию:

$$\varphi = Y \cos \alpha x, \quad (a)$$

где  $Y$  – функция, зависящая только от координаты  $y$ ;

$$\alpha = n\pi/L, \quad (б)$$

$L$  – длина пластинки в направлении оси  $x$ .

Исследуем, при каких условиях функция  $\varphi(x, y)$  является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению (97)

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Подсчитаем четвертые производные от функции  $\varphi(x, y)$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos \alpha x, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 Y'' \cos \alpha x, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos \alpha x.$$

Подставляя эти производные в уравнение (97), получаем:

$$\alpha^4 Y \cos \alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos \alpha x + Y^{IV} \cos \alpha x = 0$$

или

$$\cos \alpha x (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) = 0.$$



Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента  $x$ , если  $Y(y)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно представить с помощью гиперболических функций в виде [13]

$$Y = A_n \operatorname{ch}\alpha y + B_n y \operatorname{ch}\alpha y + C_n \operatorname{sh}\alpha y + D_n y \operatorname{sh}\alpha y. \quad (103)$$

Подставляя это выражение в (а), получим:

$$\varphi(x, y) = \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch}\alpha y + B_n y \operatorname{ch}\alpha y + C_n \operatorname{sh}\alpha y + D_n y \operatorname{sh}\alpha y). \quad (104)$$

Функция (104) бигармоническая и может быть использована для решения плоской задачи.

Аналогично можно показать, что функция

$$\varphi(x, y) = \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch}\alpha y + B'_n y \operatorname{ch}\alpha y + C'_n \operatorname{sh}\alpha y + D'_n y \operatorname{sh}\alpha y) \quad (105)$$

также является бигармонической и может быть применена для решения плоской задачи.

Если числу  $n$  в формуле (б) давать различные значения, то будут получаться новые функции, отличающиеся значениями параметра  $\alpha$  и постоянных  $A_n, B_n, C_n, D_n$ . Поэтому общее решение бигармонического уравнения (97) может быть представлено как сумма всех его возможных частных решений, т. е. в виде бесконечного ряда из решений (104) и (105)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [\cos \alpha x (A_n \operatorname{ch}\alpha y + B_n y \operatorname{ch}\alpha y + C_n \operatorname{sh}\alpha y + D_n y \operatorname{sh}\alpha y) + \\ + \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch}\alpha y + B'_n y \operatorname{ch}\alpha y + C'_n \operatorname{sh}\alpha y + D'_n y \operatorname{sh}\alpha y)]. \end{aligned} \quad (106)$$

Постоянные  $A_n, B_n, \dots, C'_n, D'_n$  определяются из условий на контуре. Нагрузка по контуру (рис. 22) должна быть разложена в бесконечные тригонометрические ряды Фурье по синусам и косинусам и иметь вид

$$q = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos \alpha x + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin \alpha x. \quad (107)$$

Коэффициенты, входящие в формулу, зависят от порядковых

номеров членов ряда и определяются согласно теории рядов.

Если некоторая функция разлагается в ряд в промежутке от  $-L$  до  $+L$ , то коэффициенты

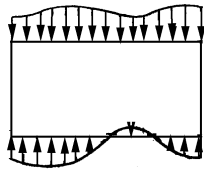


Рис. 22. Нагрузка по контуру пластинки

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx; \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \alpha x dx; \\ B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin \alpha x dx. \end{aligned} \quad (108)$$

Функция, стоящая в подынтегральном выражении в нашем случае является заданной нагрузкой, которая зависит от  $x$ . Обозначим ее через  $q(x)$ . Таким образом, из (108)

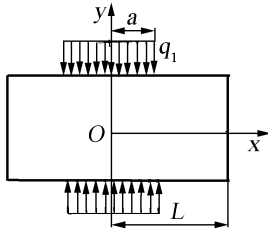


Рис. 23. Равномерно распределенная нагрузка на участке  $-a > x < +a$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} q(x) dx; \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \cos \alpha x dx; \\ B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \sin \alpha x dx. \end{aligned} \quad (109)$$

Предположим, например, что равномерная нагрузка на пластинку длиной  $2L$  расположена сверху и снизу только на участке  $2a$  (рис. 23).

В этом случае в пределах от  $-L$  до  $-a$ , а также от  $+a$  до  $+L$  нагрузка  $q(x) = 0$ . В пределах от  $-a$  до  $+a$   $q(x) = q_1$ . Коэффициенты согласно (109)

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} q(x) dx = \frac{q_1}{2L} \int_{-a}^{+a} dx = \frac{q_1 a}{2L}; \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \cos \alpha x dx = \frac{q_1}{L} \int_{-a}^{+a} \cos \alpha x dx = \frac{2q_1}{\alpha L} \sin \alpha a. \end{aligned} \quad (110)$$

Члены  $B_n \sin \alpha x$  в выражении для нагрузки в данном случае

отпадают вследствие симметрии

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \sin \alpha x dx = \frac{q_1}{L} \int_{-a}^{+a} \sin \alpha x dx = 0.$$

Таким образом, нагрузка, положим, по верхнему краю (напомним, что  $\alpha = n\pi/L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, n$ ) в соответствии с (107)

$$\begin{aligned} q &= 2q_1 \left[ \frac{a}{2L} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha L} \cos \alpha x \right] = \\ &= 2q_1 \left[ \frac{a}{2L} + \frac{\sin\left(\frac{1\pi a}{L}\right)}{\frac{1\pi}{L}} \cos\left(\frac{1\pi x}{L}\right) + \frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{L}\right)}{\frac{2\pi}{L}} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots \right] = \\ &= \frac{2q_1}{\pi} \left[ \frac{\pi a}{2L} + \sin\left(\frac{\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Такое же выражение будет и для нагрузки по нижнему краю. Вычисляя, легко убедиться, что при  $-a < x < +a$  нагрузка равна  $q_1$ , а на остальном протяжении – нулю.

Для того чтобы написать граничные условия, следует составить выражение напряжений, дифференцируя функцию  $\phi$  (формула (97)) соответственно формулам (96), и установить связь между напряжениями на контуре и внешней нагрузкой.

При помощи рядов могут быть найдены решения для очень многих задач.

Так, исследование случая, приведенного на рис. 24, приводит к заключению, что вблизи концов пластинки напряжения распределяются крайне неравномерно, но затем они выравниваются и на достаточно большом расстоянии становятся почти равномерными [14]. Напряжения  $\sigma_y$  при таком нагружении определяются по формуле [14]

$$\sigma_y = -\frac{P}{2L} - \frac{P}{L} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{n\pi}{L}(c-y) + 1 \right] e^{-\frac{n\pi(y-c)}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Распределение напряжений в средних сечениях мало зависит от того, каким способом осуществляется передача сжимающих сил по концам. Это служит лишним подтверждением правильности принципа Сен-Венана. Применение тригонометрических функций все же не является универсальным методом, так как далеко не всегда удается удовлетворить граничным условиям по боковым граням.

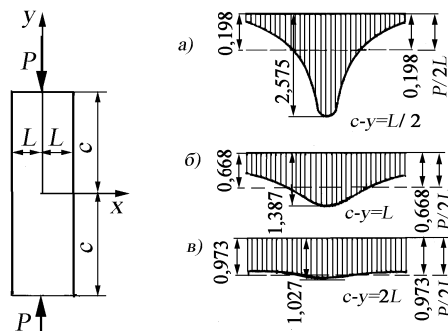


Рис. 24. Распределение напряжений в сечениях: а –  $c-y=L/2$ ; б –  $c-y=L$ ; в –  $c-y=2L$

#### 5.4.3. Понятие о методе конечных разностей (методе сеток) для решения плоской задачи

При поиске количественного описания физического явления обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливую в определенной области, и налагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. На этой стадии математическая модель замкнута, и для практических применений требуется только найти решение для конкретного множества числовых данных. Здесь, однако, возникают основные трудности, так как точному решению существующими математическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются одним из немногих примеров, для которых имеются стандартные процедуры решения, но даже здесь при большом числе независимых переменных встречаются значительные трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность вос-

пользоваться ПЭВМ, необходимо преобразовать задачу к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды дискретизации непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При этом бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию или функции, заменяется конечным числом неизвестных параметров, и для этого процесса, вообще говоря, требуется некоторая форма аппроксимации. Среди различных возможных видов дискретизации одним из простейших является процесс перехода к конечным разностям. Рассмотрим основные понятия этого процесса, что позволит сформулировать суть метода.

Точное решение бигармонического уравнения (97) плоской задачи во многих случаях оказывается очень сложным. Для его решения можно применить приближенный метод конечных разностей. Его еще часто называют конечно-разностным, или методом сеток [15]. Идея метода состоит в том, чтобы решение плоской задачи через функцию напряжений  $\varphi$ , определяемую бигармоническим уравнением (97), свести к алгебраическим уравнениям.

В методе конечных разностей частные производные бигармонического уравнения *приближенно* заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое.

Установим зависимости между производными функции в произвольной точке и значениями функции в этой, а также в соседних точках. На рис. 25 изображена кривая  $\varphi(x)$  и показаны пять точек, абсциссы которых отличаются на малую величину  $\Delta x$ . По определению производная функции  $\varphi(x)$  в точке 0 равна

$$\varphi'_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_{-1}}{2\Delta x}.$$

Если интервал между точками

$h = \Delta x$  мал, то производную в точке 0 приближенно можно предста-

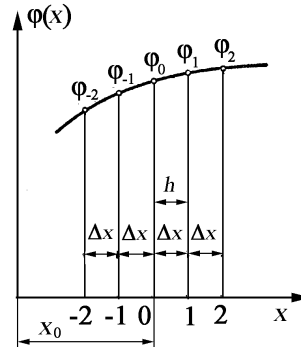


Рис. 25. К определению производных функции  $\varphi(x)$

вить так<sup>12</sup>:

$$\varphi'_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_{-1}). \quad (a)$$

Аналогично можно представить производную в точке 1

$$\varphi'_1 = \frac{1}{2h}(\varphi_2 - \varphi_0)$$

и в точке -1

$$\varphi'_{-1} = \frac{1}{2h}(\varphi_0 - \varphi_{-2}).$$

Для промежуточных точек (+1/2) и (-1/2) первые производные по аналогии с (a) можно записать так:

$$\varphi'_{1/2} = \frac{1}{h}(\varphi_1 - \varphi_0), \quad \varphi'_{-1/2} = \frac{1}{h}(\varphi_0 - \varphi_{-1}). \quad (б)$$

Сравнивая (a) и (б), замечаем, что для промежуточных точек (+1/2) и (-1/2) погрешность при вычислении производных уменьшается в 2 раза.

Тогда вторая производная для точки 0 будет иметь следующий вид, если выразить ее через разности первых производных в точках (+1/2) и (-1/2)

$$\varphi''_0 = (\varphi')'_0 = \frac{1}{h}(\varphi'_{1/2} - \varphi'_{-1/2}) = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}). \quad (в)$$

Третью производную в точке 0 представим через разности вторых производных в двух соседних точках (+1) и (-1)

$$\varphi'''_0 = \frac{1}{2h}(\varphi''_1 - \varphi''_{-1}),$$

где в соответствии с (в)

$$\varphi''_1 = \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0), \quad \varphi''_{-1} = \frac{1}{h^2}(\varphi_0 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2}).$$

После подстановки значений  $\varphi''_1$  и  $\varphi''_{-1}$  имеем

$$\varphi'''_0 = \frac{1}{2h^3}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}).$$

---

<sup>12</sup> Во всех полученных ниже формулах знак равенства означает  $\approx$ .

Для получения выражения четвертой производной в точке 0 сначала найдем третьи производные в промежуточных точках  $(+1/2)$  и  $(-1/2)$

$$\begin{aligned}\varphi_{1/2}''' &= \frac{1}{h}(\varphi_1'' - \varphi_0'') = \frac{1}{h^3}[(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0) - (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1})] = \\ &= \frac{1}{h^3}(\varphi_2 - 3\varphi_1 + 3\varphi_0 - \varphi_{-1}), \\ \varphi_{-1/2}''' &= \frac{1}{h}(\varphi_0'' - \varphi_{-1}'') = \frac{1}{h^3}[(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}) - (\varphi_0 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2})] = \\ &= \frac{1}{h^3}(\varphi_1 - 3\varphi_0 + 3\varphi_{-1} - \varphi_{-2}).\end{aligned}$$

Четвертую производную в точке 0 представим через разности третьих производных в точках  $(+1/2)$  и  $(-1/2)$

$$\varphi_0^{IV} = \frac{1}{h}(\varphi_{1/2}''' - \varphi_{-1/2}''') = \frac{1}{h^4}(\varphi_2 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_{-1} + \varphi_{-2}).$$

Таким образом, мы получили для некоторой точки 0 выражения для первых четырех производных, представленных через значения функции  $\varphi(x)$  в соседних точках. Расстояние между соседними точками (шаг аргумента) принято равным  $h$ . Особенность полученных выражений для производных в том, что они получены через так называемые центральные разности – через разности значений функции  $\varphi(x)$  или ее производных справа и слева от точки 0.

Выпишем сводку полученных значений производных через конечные разности

$$\left. \begin{aligned}\varphi_0' &= \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_{-1}); \quad \varphi_0'' = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}); \\ \varphi_0''' &= \frac{1}{2h^3}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}); \\ \varphi_0^{IV} &= \frac{1}{h^4}(\varphi_2 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_{-1} + \varphi_{-2}).\end{aligned}\right\} \quad (111)$$

Если функция зависит не от одной, а от двух переменных, то частные производные этой функции могут быть получены так же, как это было показано выше.

Пусть  $\varphi = \varphi(x, y)$  является функцией двух переменных. Нанесем на область  $Oklm$  вблизи точки  $O$ , для которой определяются производные, сетку с шагом  $h$  в направлении осей  $x$  и  $y$  (рис. 26). В общем случае шаги сетки по осям  $x$  и  $y$  могут быть различными.

Первые и вторые производные в точке  $O$  по одной из координат легко составить по аналогии с формулами (111)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 &= \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_3); \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 &= \frac{1}{2h}(\varphi_2 - \varphi_4), \end{aligned} \right\} ($$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4). \end{aligned} \right\} z)$$

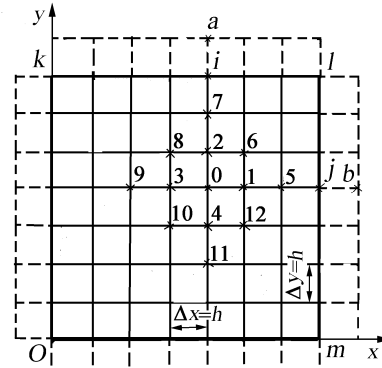


Рис. 26. Пластинка с нанесенными на нее равномерной сеткой и нумерацией узлов вокруг точки  $O$  (против хода часовой стрелки)

Вторую смешанную производную в точке  $O$  найдем, применив дважды формулы (z):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h} \left[ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{2h} \left[ \frac{1}{2h}(\varphi_6 - \varphi_8) - \frac{1}{2h}(\varphi_{12} - \varphi_{10}) \right] = \\ &= \frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (d)$$

Четвертые частные производные по одной из координат в точке  $O$  составим согласно формуле (111)



$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9), \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Четвертую смешанную производную найдем, применив дважды формулу (д):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \left[ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_2 - 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[ \frac{1}{h^2}(\varphi_0 - 2\varphi_2 + \varphi_8) - \frac{2}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3) + \frac{1}{h^2}(\varphi_{12} - 2\varphi_4 + \varphi_{10}) \right] = \\ &= \frac{1}{h^4} [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12})]. \end{aligned} \quad (ж)$$

Связь между функциями в тринадцати рассматриваемых точках установим с помощью бигармонического уравнения плоской задачи (97). В точке 0 оно принимает вид

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 = 0.$$

Подставляя в бигармоническое уравнение четвертые производные из формул (е) и (ж), получаем<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned} 20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \\ + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0. \end{aligned} \quad (112)$$

Напряжения в точке 0 найдем с помощью формул (96) без учета объемных сил

---

<sup>13</sup> Дифференциальное уравнение Мориса Леви взято в качестве примера решения методом конечных разностей. В конструировании ДВС при расчете смазочного слоя подшипников скольжения этим методом решается, например, уравнение Рейнольдса [16] с заданными граничными условиями.

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \quad \sigma_y = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 = \\
&= \frac{1}{h^2} (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3), \\
\tau_{xy} &= - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 = - \frac{1}{4h^2} (\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}).
\end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Уравнение вида (112) можно составить для каждого из узлов внутри контура. При этом в часть уравнений в соответствии с формулами (е) и (ж) войдут и значения функции  $\varphi$  на контуре и для узлов, расположенных на расстоянии одного шага сетки вне контура. На рис. 26 внеконтурная сетка показана штриховыми линиями.

Значения функции  $\varphi$  на контуре и вне контура находят из граничных условий. Таким образом, неизвестных значений функции окажется столько, сколько узлов внутри контура, но столько же можно составить уравнений вида (112). Следовательно, для решения задачи уравнений достаточно.

Однако, когда уравнения типа (112) составляются для внутриконтурных точек, лежащих, например, на расстоянии  $h$  от границы контура  $kl$  (точка 7), то в уравнение войдут значения функции на контуре (точка  $i$ ) и вне его (точка  $a$ , см. рис. 26). Аналогично при составлении уравнения для точки 5 необходимо определить функции напряжений в точках  $j$  и  $b$ .

Если знать на контуре значения производной по перпендикулярному к нему направлению, то значения функции  $\varphi$  законтурных точек могут быть выражены через значения функции  $\varphi$  ближайших внутриконтурных точек на основе зависимостей (з).

Для верхнего края (рис. 27, а)

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i = \frac{1}{2h} (\varphi_a - \varphi_c).$$

Отсюда для законтурной точки  $a$  верхнего края получим

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i. \quad (114)$$

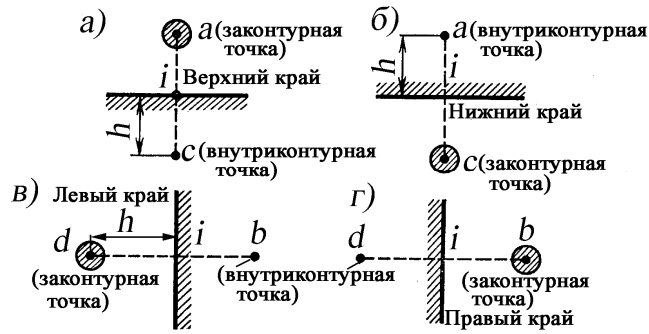


Рис. 27. К определению функции напряжений в законтурных точках

Для законтурной точки  $c$  нижнего края (рис. 27, б)

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i = \frac{1}{2h} (\varphi_a - \varphi_c).$$

Отсюда

$$\varphi_c = \varphi_a - 2h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i. \quad (115)$$

Для законтурной точки  $d$  левого края (рис. 27, в)

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{2h} (\varphi_b - \varphi_d).$$

Отсюда

$$\varphi_d = \varphi_b - 2h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i. \quad (116)$$

Для законтурной точки  $b$  правого края (рис. 27, г)

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{2h} (\varphi_b - \varphi_d).$$

Отсюда

$$\varphi_b = \varphi_d + 2h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i. \quad (117)$$

Точность полученных результатов решения задачи зависит от размеров шага  $h$ . По мере уменьшения шага точность возрастает, но одновременно возрастает и число уравнений, которые нужно решать для определения функции напряжений в узловых точках (или любой другой функции). При замене производных конечными центральными разностями ошибка пропорциональна  $h^2$ . Поэтому точность вычисления быстро возрастает с уменьшением шага. Вместе с тем примерно пропорционально  $1/h^2$  возрастает число уравнений.

Современные ПЭВМ позволяют без особого труда решать большие системы линейных алгебраических уравнений. Для их решения имеются стандартные программы. Поэтому метод конечных разностей (метод сеток) получил в настоящее время широкое распространение для решения многих прикладных задач [17].

Для сокращения количества уравнений, подлежащих решению, целесообразно использовать условия симметрии, если они имеют место. Рассмотрим в качестве примера случай расчета балки-стенки, которой называют очень высокую и узкую балку, нагруженную по внешней стороне силами, лежащими в одной плоскости.

### 5.5. Расчет балок-стенок

Пусть на каждой стороне балки-стенки приложены распределенные перпендикулярные  $q_n$  и касательные  $q_t$  к стороне нагрузки (рис. 28, а).

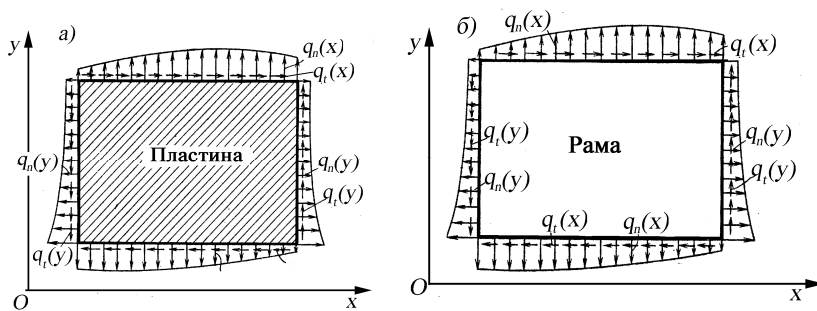


Рис. 28. Балка-стенка (а) с приложенной внешней нагрузкой и заменяющая ее рама (б)

Их направления совпадают с положительными направлениями нормальных и касательных напряжений на каждой стороне балки-стенки (см. п. 1.2).

Рассмотрим верхнюю сторону балки-стенки (см. рис. 28, а), на которой координата  $y$  – величина постоянная. Для нее граничные условия на  $i$ -м участке можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yi} &= \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \right) = q_{ni}(x), \\ \tau_{xyi} &= - \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \right) = q_{ti}(x). \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Проинтегрировав уравнения (118), в общем виде получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int dx \int \sigma_y(x, y) dx + x f_1(y) + f_2(y), \\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} &= - \int \tau_{xy}(x, y) dx + f_3(y). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Так как на верхней стороне пластины координата постоянна, то в соответствии с (118) и (a) для произвольной  $i$ -й точки получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= \int dx \int q_{ni}(x) dx + A_i x + B_i; \\ \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} &= \int q_{ni}(x) dx + A_i; \quad \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} = - \int q_{ti}(x) dx + C_i. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Выражения (119) справедливы и для нижней стороны.

Аналогично для боковых сторон (на которых координата  $x$  – величина постоянная)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= \int dx \int q_{ni}(y) dy + A_i y + B_i; \\ \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} &= \int q_{ni}(y) dy + A_i; \quad \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} = - \int q_{ti}(y) dy + C_i. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Поскольку для вычисления напряжений используются вторые производные, то к функции  $\varphi$  в трех любых точках могут быть назначены произвольно добавлением  $\Delta\varphi = ax + by + c$ .

Для определения значений функции на контуре, а также производных  $\partial\varphi/\partial x$  и  $\partial\varphi/\partial y$  на границе балки-стенки пользуются

рамной аналогией, разработанной А.П. Сеницыным, П.Л. Пастернаком, П.М. Варваком [17]. В этом случае  $\varphi$  для контурных точек получается непосредственно, а для законтурных точек – через  $\varphi$  внутриконтурных точек.

Изобразим контур балки-стенки в виде рамы с той же действующей нагрузкой (рис. 28, б). Составим по каждой стороне балки-стенки граничные условия, а для каждого соответствующего стержня рамы – дифференциальные зависимости продольных сил и изгибающих моментов от нагрузки и сопоставим эти уравнения с граничными условиями.

### Верхняя сторона:

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ )

$$\sigma_{yi} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} = q_{ni}(x), \quad (б)$$

$$\tau_{xyi} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) = q_{ti}(x). \quad (в)$$

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного в верхней стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, а). Спроектировав все силы, действующие на элементарный участок стержня на оси  $x$  и  $y$ , а также взяв сумму моментов всех сил относительно точки  $A$  (см. рис. 29, а), получим следующую систему уравнений:

$$\sum X = 0, \quad -N + N + dN + q_{ti}(x)dx = 0, \quad (з)$$

$$\sum Y = 0, \quad Q - Q - dQ + q_{ni}(x)dx = 0, \quad (д)$$

$$\sum M_A = 0, \quad -M + M + dM - (Q + dQ)dx - q_{ni}(x)dx \cdot dx / 2 = 0. \quad (е)$$

В соответствии с уравнением (з) получим

$$dN / dx = -q_{ti}(x). \quad (ж)$$

Сравнивая левые части равенств (в) и (ж), запишем:

на контуре

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) = -q_{ii}(x).$$

дифференциальная зависимость

$$\frac{dN}{dx} = -q_{ii}(x)$$

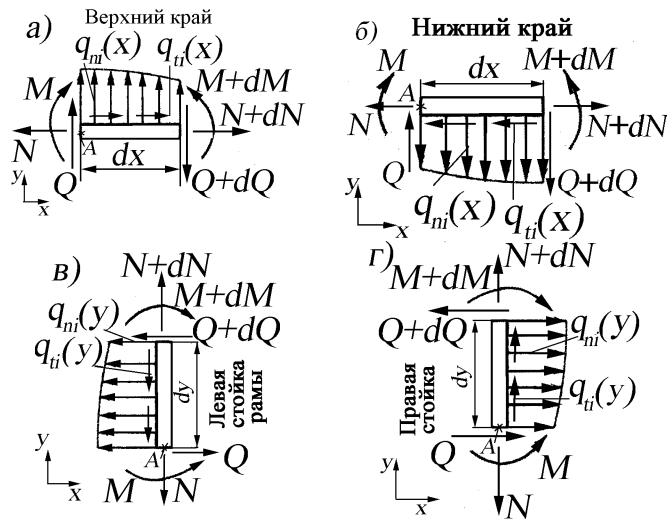


Рис. 29. К выводу дифференциальных зависимостей для верхнего края (а), нижнего – (б), левой (в) и правой (г) стойки рамы

Сопоставляя граничные условия на контуре балки-стенки и дифференциальные зависимости для верхнего участка стержня рамы, можно установить, что для произвольной точки  $i$ :

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{\text{на контуре}} = N_i \text{ (в раме)} \quad (121)$$

Из уравнений (д) и (е), отбросив бесконечно малые второго порядка малости, получим:

$$\frac{dQ}{dx} = q_{ni}(x) \text{ и } Q = \frac{dM}{dx}.$$

Откуда

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q_{ni}(x). \quad (3)$$

Сравнивая (б) и (3), получим для произвольной точки  $i$  верхнего края:

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = M_i \text{ (в раме)}. \quad (122)$$

Следовательно, значения функции  $\varphi$  на контуре балки-стенки определяются изгибающими моментами в раме, стороны которой совпадают с контуром балки-стенки, а частная по перпендикулярному к контуру направлению определяется продольной силой в раме. В этом состоит рамная аналогия. Такие же рассуждения проводим и для остальных сторон балки-стенки.

**Нижняя сторона:**

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ ) определяем уравнениями (б) и (в).

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного (также в произвольной точке  $i$ ) в нижней стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, б). После рассмотрения условий равновесия аналогично (з) - (е) получим

$$\frac{dN}{dx} = q_{ti}(x), \quad (u)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_{ni}(x). \quad (к)$$

Сопоставляя уравнения (б) и (к), а также (в) и (л), получим для произвольной точки нижнего края:

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{\text{на контуре}} = -N_i \text{ (в раме)}, \quad (123)$$

и  $\varphi_i \text{ (на контуре)} = -M_i \text{ (в раме)}. \quad (124)$

**Левая боковая сторона:**

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ )

$$\sigma_{xi} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = \frac{d^2 \varphi_i}{dy^2} = q_{ni}(y), \quad (л)$$



$$\tau_{yxi} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = -\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = q_{ti}(y). \quad (m)$$

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного (также в произвольной точке  $i$ ) в левой боковой стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, в). После рассмотрения условий равновесия аналогично (з) - (е) получим

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_{ni}(y), \quad (n)$$

$$\frac{dN}{dy} = q_{ti}(y). \quad (o)$$

Сопоставляя уравнения (л) и (м), а также (н) и (о), получим для произвольной точки для левой боковой стороны:

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{\text{на контуре}} = -N_i \text{ (в раме)}, \quad (125)$$

и

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = -M_i \text{ (в раме)}. \quad (126)$$

#### **Правая боковая сторона:**

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ ) описываются уравнениями (л) и (м).

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного (также в произвольной точке  $i$ ) в правой боковой стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, з). После рассмотрения условий равновесия аналогично (з) - (е) получим

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q_{ni}(y), \quad (n)$$

$$\frac{dN}{dy} = -q_{ti}(y). \quad (p)$$

Сопоставляя уравнения (л) и (м), а также (н) и (р), получим для произвольной точки для правой боковой стороны:

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{\text{на контуре}} = N_i \text{ (в раме)}, \quad (127)$$

и

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = M_i \text{ (в раме)}. \quad (128)$$

Из приведенных сопоставлений следует, что если ординаты эпюры изгибающих моментов отложены на сжатой стороне стержня (как это принято для машиностроителей), то есть ординаты располагаются вне контура рамы (рис. 30), то

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = M_i \text{ (в раме)}. \quad (129)$$

На рис. 30 знаком плюс отмечены растянутые волокна стержней, составляющих раму, а знаком минус – сжатые (ординаты эпюры располагаются вне контура рамы). Штриховыми линиями условно показана деформация рамы под действием внешней нагрузки. Знак изгибающего момента определяется знаком кривизны упругой линии стержня, которую он создает в заданной системе координат  $xOy$ .

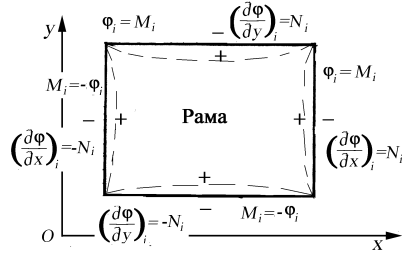


Рис. 30. Граничные условия на контуре балки-стенки, полученные из стержневой аналогии

Поэтому слева и снизу  $M_i < 0$ , на верхнем стержне и справа  $M_i > 0$ . Таким образом для всех граничных условий приходим к условию (129). Поскольку  $\varphi$  есть непрерывная функция, к которой может быть добавлена некоторая функция  $\Delta\varphi = Ax + By + C$  (поскольку эта добавка не влияет на величину напряжений), то в некоторых точках функции напряжений можно назначать произвольно.

При положительной (растягивающей) продольной силе  $N$  (см. рис. 30) сопоставление формул (121), (123), (125), (127) дает:

$$\text{для верхнего края пластины } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N,$$

$$\text{для нижнего края пластины } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -N,$$

$$\text{для левого края пластины } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -N,$$

для правого края пластины  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = N$ .

Формулы (114) - (117) (см. рис. 27) можно представить так:

- для верхнего края пластины  $\varphi_a = \varphi_c + 2hN_{\text{верх. б}} ; \quad (130)$

- для нижнего края  $\varphi_c = \varphi_a + 2hN_{\text{ниж. б}} ; \quad (131)$

- для левого края  $\varphi_d = \varphi_b + 2hN_{\text{лев. ст.}} ; \quad (132)$

- для правого края  $\varphi_b = \varphi_d + 2hN_{\text{прав. ст.}} . \quad (133)$

Из формул (130) - (133) следует, что для определения  $\varphi$  в законтурных точках необходимо знать в условной раме эпюру продольных сил  $N$  (верхней и нижней балках, левой и правой стойках).

Таким образом, после нахождения значений функции напряжений  $\varphi$  для контурных и законтурных точек по эпюрам изгибающих моментов в условной раме  $M$  и продольных сил  $N$  неизвестными будут только значения  $\varphi$  для внутриконтурных точек. Для их определения можно составить достаточное число уравнений (112).

Ниже покажем пример расчета балки-стенки методом сеток. В приложении приведены примеры расчета замкнутых рам, к которым приводятся балки-стенки.

### **5.6. Порядок расчета балки-стенки методом конечных разностей**

Для расчета балок-стенок методом конечных разностей или методом сеток можно рекомендовать следующий порядок.

1. Заменяем контур балки-стенки в виде рамы (замкнутого контура) с той же действующей нагрузкой. Выбираем основную систему для данного замкнутого контура и, применяя метод сил, раскрываем статическую неопределимость рамы (см. п. 5.6). Строим в заданной системе суммарные эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил по общеизвестной методике. Последняя эпюра (поперечных сил) строится для проверки правильности построения эпюры изгибающих моментов (ввиду их дифференциально-интегральной зависимости –  $Q = dM/dx$ ). Заметим, что обычно оси координат совмещают с осями стержней, составляющих раму или замкнутый контур. В нашем случае координатная

система остается неизменной, как она была выбрана для балки-стенки.

2. Нанесем на пластину (балку-стенку) квадратную сетку<sup>14</sup> с заранее выбранным шагом. Назначая шаг сетки, необходимо иметь в виду, что при уменьшении шага сетки точность решения повышается, но одновременно с этим растет громоздкость решения.

Пронумеруем узлы сетки с учетом свойств прямой или обратной симметрии (ориентируясь на эпюру изгибающих моментов).

3. Используя ординаты эпюры изгибающих моментов для замкнутого контура (рамы), определяем функции напряжений  $\varphi_i$  по контуру балки-стенки. Для этого используем зависимости (122), (124), (126), (128) или рекомендации рис. 30 и формулы (129). Напомним, что ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются на сжатой стороне стержней.

4. Используя эпюру продольных сил  $N$  в стержнях замкнутого контура и зависимости (121), (123), (125) и (127) или при положительном значении  $N$  (130) - (133), выражаем функции напряжений в

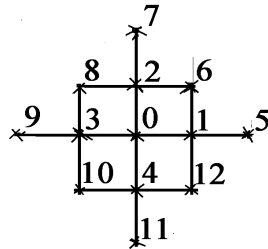


Рис. 31. Шаблон для составления разностных уравнений

в соответствии с (112) записывается в виде

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0.$$

законтурных точках через функции внутри контура и частные производные по соответствующему направлению.

5. Для составления разностных уравнений используем шаблон (рис. 31). После этого уравнение Мориса Леви в нулевой точке

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 = 0$$

<sup>14</sup> В пособии рассматривается только равномерная по осям  $x$  и  $y$  сетка. В случае неравномерной сетки решение немного усложняется (см., например, [18, 19]).

Составим разностные уравнения для всех внутриконтурных точек (число уравнений в точности равно числу внутриконтурных точек).

6. Решив полученную систему алгебраических линейных уравнений, находим значения функции напряжений  $\varphi_i$  в точках внутри контура (на контуре и в законтурных точках  $\varphi_i$  определены в п. 3 и 4).

7. Для проверки правильности решения необходимо подставить найденные значения функции напряжений  $\varphi_i$  в исходные алгебраические уравнения (п. 5). Погрешность в каждом из уравнений между положительными и отрицательными значениями не должна превышать 5 %.

8. Используя шаблон (см. рис. 31), определяем нормальные и касательные напряжения в окрестностях всех узловых точек в соответствии с зависимостями (113).

9. Строим распределение напряжений по линиям сетки, используя вычисленные в п. 8 значения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в узловых точках.

10. Из условия равновесия проверяем правильность построения эпюр  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ . Для удобства составления условий равновесия эпюра внутренних сил, действующих по нелинейному закону (эпюра криволинейная), заменяется равновеликими им (по площади) силами, равномерно распределенными по каждому участку.

**Пример 3.** Определить методом конечных разностей напряженное состояние в пластинке толщиной  $b = 1$ , нагруженную, как показано на рис. 32. Решение проведем в общем виде, придерживаясь предложенного алгоритма решения таких задач.

1. Заменяем контур пластинки (рис. 32, *a*) рамой с той же приложенной нагрузкой. Поскольку рама имеет четыре оси симметрии, то основную систему выбираем путем сквозного разреза по одной из линий симметрии конструкции и нагрузки (вертикальной).

На рис. 32, *б* показана основная система, эквивалентная заданной – в сечении разреза приложены внутренние силовые факторы, которые при этом могут возникнуть.

Продольные силы  $N = P/2$  определяются из условия равновесия половины рамы. Поперечные силы отсутствуют ввиду симметрии<sup>15</sup>.

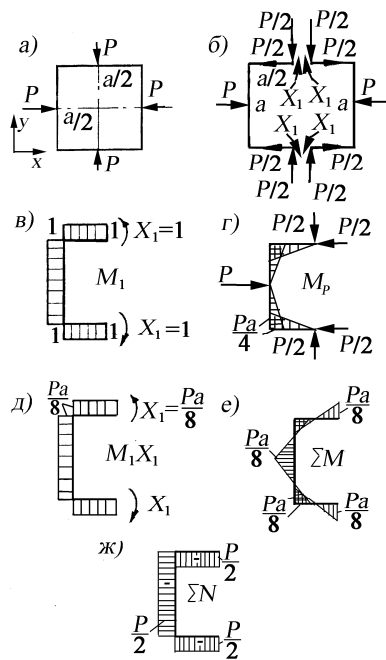


Рис. 32. Расчет рамы, равной по контуру балке-стенке

в каноническом уравнении (а):

$$EI\delta_{11} = 1 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot a \cdot 1 = 2a; \quad EI\Delta_{1,P} = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{4} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{Pa^2}{4}.$$

Подставив полученные значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1,P}$  в уравнение (а), получим:

Для рассматриваемой основной системы запишем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1,P} = 0. \quad (a)$$

Физический смысл полученного уравнения заключается в том, что в случае приложения в сечении разреза неизвестных пока моментов  $X_1$  плоскость разреза не будет разомкнута.

Для основной системы на рис. 32, в построена эпюра изгибающих моментов от единичной силы  $X_1=1$   $M_1$ , а на рис. 32, г – от заданной нагрузки  $M_P$  (ее еще называют грузовой).

Используя построенные на рис. 32, в и г эпюры, по правилу Верещагина определим коэффициенты  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1,P}$

<sup>15</sup> Для проверки можно выбрать основную систему путем разреза в одном сечении рамы (например внизу) и приложить все три внутренних силовых фактора. После составления канонических уравнений и определения коэффициентов при неизвестных метода сил получим: поперечные силы  $Q=0$ .

$$2aX_1 - \frac{Pa^2}{4} = 0.$$

Откуда

$$X_1 = \frac{Pa}{8}.$$

После определения неизвестного значения  $X_1$  строим эпюру  $M_1X_1$  (рис. 32, *д*). Суммарная эпюра изгибающих моментов для заданной системы (см. рис. 32, *е*) может быть построена суммированием ординат эпюр  $M_P$  и  $M_1X_1$

$$\sum M = M_P + M_1X_1.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов  $\sum M$  построена для половины замкнутого контура (для второй половины она будет симметричной относительно вертикальной оси).

Эпюра продольных сил построена на рис. 32, *ж*.

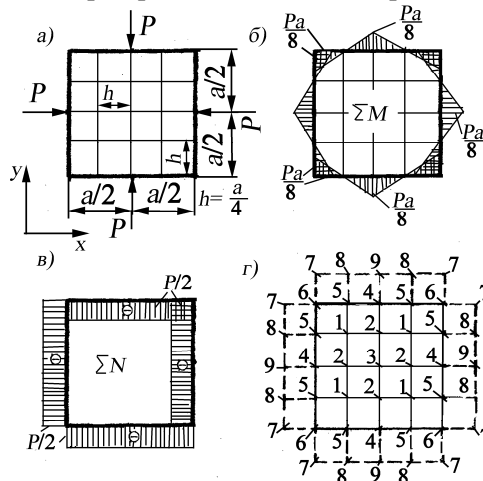


Рис. 33. Пластика с нанесенной сеткой (*а*) и обозначением узловых точек (*з*), эпюры моментов (*б*) и продольных сил (*в*) после замены контура пластики рамой

свойств прямой симметрии (эпюра моментов симметрична относительно четырех осей).

3. Используя ординаты эпюры изгибающих моментов для замкнутого контура, определяем функции напряжений  $\varphi_i$  по кон-

2. Нанесем на пластину (балку-стенку) квадратную сетку с шагом  $a/4$  (рис. 33, *а*). Для определения функции напряжений в узловых точках контура, а также в законтурных точках на рис. 33, *б* приведена эпюра  $\sum M$ , а на рис. 33, *в* – суммарная эпюра продольных сил  $\sum N$ .

Пронумеруем узлы сетки с учетом

туру балки-стенки. Для этого используем зависимости (122), (124), (126), (128) или рекомендации рис. 30 и формулы (129). Напомним, что ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются на сжатой стороне стержней.

Из эпюр (см. рис. 33, б) следует, что в узловых точках контура функция напряжений имеет следующие значения:

$$\varphi_4 = \frac{Pa}{8}, \quad \varphi_5 = 0, \quad \varphi_6 = -\frac{Pa}{8}. \quad (\delta)$$

4. Используя эпюру продольных сил  $N$  (см. рис. 33, в) для замкнутого контура и зависимости (121), (123), (125) и (127), выражаем функции напряжений в законтурных точках через функции внутри контура и частные производные по соответствующему направлению:

$$\begin{aligned} \varphi_9 &= \varphi_2 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = \varphi_2 - \frac{Pa}{4}, \\ \varphi_8 &= \varphi_1 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = \varphi_1 - \frac{Pa}{4}, \\ \varphi_7 &= \varphi_5 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = -\frac{Pa}{4}. \end{aligned} \quad (\epsilon)$$

5. Используя рис. 31 как шаблон для решения уравнения Мориса Леви (в нулевой точке), составляем разностные уравнения (112) для всех внутриконтурных точек (число уравнений в точности равно числу внутриконтурных точек):

$$\begin{aligned} 20\varphi_1 - 8(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_5) + 2(\varphi_4 + \varphi_6 + \varphi_4 + \varphi_3) + \\ + (\varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_8 + \varphi_1) &= 0; \\ 20\varphi_2 - 8(\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_3) + 2(\varphi_5 + \varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_2) + \\ + (\varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_5 + \varphi_2) &= 0; \\ 20\varphi_3 - 8(\varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2) + 2(\varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1) + \\ + (\varphi_4 + \varphi_4 + \varphi_4 + \varphi_4) &= 0. \end{aligned} \quad (\zeta)$$

Подставляя найденные значения функции напряжений в контурных (б) и законтурных (в) точках в выражение (з) и группируя подобные члены, получим следующую систему линейных уравнений:



$$\left. \begin{aligned} 24\varphi_1 - 16\varphi_2 + 2\varphi_3 - 0,25Pa &= 0, \\ -16\varphi_1 + 26\varphi_2 - 8\varphi_3 - 1,25Pa &= 0, \\ 8\varphi_1 - 32\varphi_2 + 20\varphi_3 + 0,5Pa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

6. Решив систему алгебраических линейных уравнений (d), находим значения функции напряжений  $\varphi_i$  в точках внутри контура. Для этого используем, например, схему Гаусса [20]. Решая, находим:

$$\varphi_1 = 0,1215Pa; \quad \varphi_2 = 0,1974Pa; \quad \varphi_3 = 0,243Pa.$$

Из уравнений (e) также получим

$$\varphi_9 = -0,0526Pa; \quad \varphi_8 = -0,1285Pa; \quad \varphi_7 = -0,25Pa.$$

7. Для проверки правильности решения необходимо подставить найденные значения функции напряжений  $\varphi_i$  в исходные алгебраические уравнения (d):

$$6,356Pa - 6,3168Pa \approx 0;$$

$$-5,186Pa + 5,1324Pa \approx 0;$$

$$3,474Pa - 3,408Pa \approx 0.$$

Хотя полученные уравнения не обращаются в нуль, но расхождение (между положительными и отрицательными значениями) составляет: в первом –  $[(6,332 - 6,3168) / 6,3168]100 \approx 0,2\%$ , во втором –  $[(5,1324 - 5,138) / 5,1324]100 = 0,1\%$ , в третьем –  $[(3,408 - 3,402) / 3,402]100 = 0,2\%$ , что объясняется принятыми в процессе решения округлениями (допускается до 5 %).

8. Используя шаблон (см. рис. 31), определяем нормальные и касательные напряжения в окрестностях всех узловых точек в соответствии с зависимостями (113). Определим, например, напряжения  $\sigma_x$  по сечению 4-4 (см. рис. 33,  $z$  – вертикальная линия)

$$\sigma_{x4} = (\varphi_9 - 2\varphi_4 + \varphi_2) / (0,25a)^2 = -1,683 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{x2} = (\varphi_4 - 2\varphi_2 + \varphi_3) / (0,25a)^2 = -0,429 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{x3} = (\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_2) / (0,25a)^2 = -1,459 \frac{P}{a}.$$

Поскольку на балку-стенку действует нагрузка, симметричная

относительно осей симметрии балки-стенки (см. рис. 33, з), то нормальные напряжения  $\sigma_y$  по горизонтальному сечению 4-4 будут равны  $\sigma_{y4} = -1,683 \frac{P}{a}$ ;  $\sigma_{y2} = -0,429 \frac{P}{a}$ ;  $\sigma_{y3} = -1,459 \frac{P}{a}$ .

По горизонтальному сечению 5-5 нормальные напряжения  $\sigma_y$

$$\sigma_{y5} = (\varphi_8 - 2\varphi_5 + \varphi_1) / (0,25a)^2 = 0,016 \frac{P}{a} \approx 0;$$

$$\sigma_{y1} = (\varphi_5 - 2\varphi_1 + \varphi_2) / (0,25a)^2 = -0,73 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{y2} = (\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_1) / (0,25a)^2 = -2,45 \frac{P}{a}.$$

По горизонтальной линии 6-6

$$\sigma_{y6} = (\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7) / (0,25a)^2 = 0;$$

$$\sigma_{y5} = (\varphi_4 - 2\varphi_5 + \varphi_6) / (0,25a)^2 = 0;$$

$$\sigma_{y4} = (\varphi_5 - 2\varphi_4 + \varphi_5) / (0,25a)^2 = 4 \frac{P}{a}.$$

Если воспользоваться шаблоном (см. рис. 31) и зависимостью для вычисления касательных напряжений  $\tau_{xy} = -\frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12})$ , то по сечениям 4-4 в балке-стенке как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях  $\tau_{xy} = 0$ . Действительно, для  $\tau_{yx4}$  по вертикальному сечению 4-4

$$\tau_{yx4} = -(\varphi_8 - \varphi_8 + \varphi_1 - \varphi_1) / [4(0,25)^2] = 0.$$

Нетрудно заметить, что аналогичный результат получим для всех точек по сечению 4-4.

Для вертикального сечения 5-5

$$\tau_{yx5} = -(\varphi_7 - \varphi_9 + \varphi_2 - \varphi_5) / [4(0,25a)^2] = 0;$$

$$\tau_{yx1} = -(\varphi_6 - \varphi_4 + \varphi_3 - \varphi_4) / [4(0,25a)^2] = 0,528 \frac{P}{a};$$

$$\tau_{yx2} = -(\varphi_5 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_5) / [4(0,25a)^2] = 0;$$

$$\tau_{yx1} = -(\varphi_4 - \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_6) / [4(0,25a)^2] = -0,528 \frac{P}{a}.$$

Построенные по расчетным данным эпюры напряжений (знак напряжений указан знаком плюс или минус) приведены на рис. 34.

Для удобства проверки из условия равновесия эпюры  $\sigma_x$  построены по вертикальным сечениям, а эпюры  $\sigma_y$  – по горизонтальным. Проверка правильности построения эпюр  $\tau_{xy}$  не требуется, так как сумма площадей для этих эпюр равна нулю, то есть оно выполняется по сечениям тождественно.

В силу симметрии эпюр  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , очевидно, достаточно проверить только эпюру нормальных напряжений  $\sigma_y$ . Рассмотрим равновесие отсеченных частей, приведенных на рис. 35.

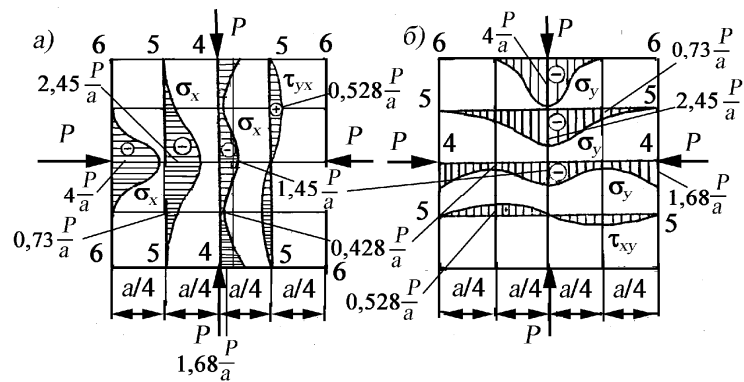
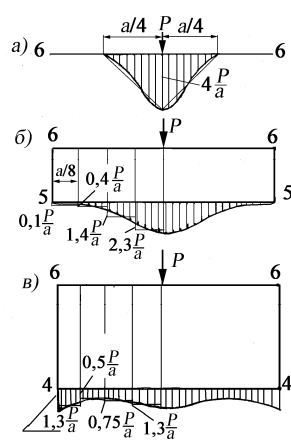


Рис. 34. Эпюры напряжений  $\sigma_x$  (а) и  $\sigma_y$  (б), построенных по расчетным данным



**Рис. 35. К равновесию отсеченных частей балки-стенки**

(чтобы площади под эпюрами были одинаковыми). Тогда для сечения 5-5 имеем

$$2\left(0,1\frac{P}{a} + 0,4\frac{P}{a} + 1,4\frac{P}{a} + 2,3\frac{P}{a}\right)\frac{a}{8} - P \approx 0.$$

Для сечения 4-4:

$$2\left(1,3\frac{P}{a} + 0,5\frac{P}{a} + 0,75\frac{P}{a} + 1,3\frac{P}{a}\right)\frac{a}{8} - P \approx 0.$$

Таким образом, равновесие по всем сечениям выполняется.

### 5.7. Другие сеточные методы решения плоской задачи теории упругости

В п. 5.4.3 был рассмотрен один из приближенных методов – метод конечных разностей. Погрешность этого метода зависит главным образом от того, что уравнения равновесия и сплошности в нем удовлетворяются *только в некоторых (узловых) точках*, а дифференциалы функций заменены разностями функций в смежных точках тела.

Погрешности метода конечных разностей уменьшаются с увеличением количества узловых точек, однако при этом значи-

Если заменить на рис. 35, а площадь эпюры напряжений  $\sigma_y$  площадью треугольника, то, используя уравнения равновесия в форме  $\sum Y = 0$ , получим для сечения 6-6:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \frac{P}{a} \cdot \frac{a}{2} - P = 0.$$

Для удобства составления условий равновесия по сечениям 5-5 (рис. 35, б) и 4-4 (рис. 35, в) разобьем эпюру внутренних сил, изменяющихся по нелинейному закону, на участках длиной  $a/8$  равновеликими равномерно распределенными силами

тельно возрастает объем вычислений. Так, при решении системы с восемью уравнениями приходится выполнять операций в шесть раз больше, чем при решении системы с четырьмя уравнениями. Ряд погрешностей можно избежать, если удастся подобрать такое напряженное состояние, которое удовлетворяло бы во всех точках тела дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности тела. При таком подходе решение задачи будет зависеть лишь от того, насколько точно будут соблюдаться уравнения сплошности тела. Проиллюстрируем возможность такого метода решения на примере прямоугольной пластинки (рис. 36), на гранях которой при  $x = \pm a$  приложена нагрузка  $P(y) = P_0(1 - y^2/b^2)$ .

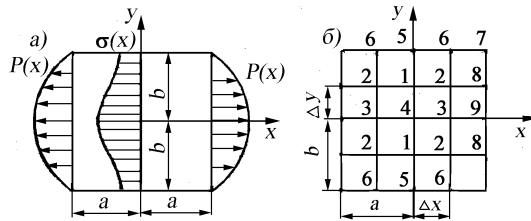


Рис. 36. Прямоугольная пластинка с приложенной по сторонам нагрузкой (а) и расчетная сетка (б)

Предварительный выбор напряженного состояния для такого тела легко осуществить путем наложения двух напряженных состояний: *основного и корректирующего*.

*Основное* напряженное состояние определяется только нагрузкой, приложенной к телу; оно должно удовлетворять уравнениям равновесия и граничным условиям. Для рассматриваемого примера такое напряженное состояние можно задать так:

$$\sigma_x^{(0)} = P(y) = P_0(1 - y^2/b^2); \quad \sigma_y^{(0)} = \tau_{xy}^{(0)} = 0. \quad (134)$$

*Корректирующее* напряженное состояние должно быть самоуравновешенным и, кроме уравнений равновесия, оно должно удовлетворять нулевым граничным условиям (условиям отсутствия внешней нагрузки). В то же время следует иметь в виду, что при симметричной нагрузке касательные напряжения  $\tau_{xy}^{(k)}$  на осях симметрии должны обращаться в нуль. *Корректирующее* напряженное состояние по своему назначению должно помочь так скорректировать суммарное напряженное состояние, чтобы это по-

следнее совпадало или было бы близко с фактическим. Этого можно достичь введением в выражения для корректирующих напряжений достаточного числа независимых друг от друга неопределенных коэффициентов  $\alpha_i$ .

Корректирующее напряженное состояние можно выбрать по-разному. Например, задаться касательными напряжениями в виде

$$\tau_{xy}^{(k)} = (\alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{a} + \alpha_3 \frac{y}{b} + \dots) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right), \quad (135)$$

а нормальные напряжения найти из дифференциальных уравнений равновесия (88) (без учета объемных сил)

$$\sigma_x^{(k)} = -\int \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} dx + f(y); \quad \sigma_y^{(k)} = -\int \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} dy + f(x). \quad (136)$$

Функции  $f(x)$  и  $f(y)$  определяются из условия равенства нулю нагрузки на контуре тела. Корректирующее напряженное состояние можно задать и такой функцией напряжений:

$$\varphi(x, y) = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 x^2 y^2 + \dots). \quad (137)$$

Сами же напряжения можно получить дифференцированием согласно (96)

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= a^4 b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left[4 \left(\frac{\alpha_1}{b^2} + \alpha_2 \frac{x^2}{b^2}\right) \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \right. \\ &+ \left. (\alpha_3 + \alpha_4 x^2) \left(30 \frac{y^4}{b^4} - 24 \frac{y^2}{b^2} + 2\right) \dots\right]; \\ \sigma_y^{(k)} &= a^4 b^4 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \left[4 \left(\frac{\alpha_1}{a^2} + \alpha_2 \frac{y^2}{a^2}\right) \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 1\right) + \right. \\ &+ \left. (\alpha_2 + \alpha_4 y^2) \left(30 \frac{x^4}{a^4} - 24 \frac{x^2}{a^2} + 2\right) \dots\right]; \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \tau_x^{(k)} &= -8a^3 b^3 \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) \left[2\alpha_1 + a^2 \alpha_2 \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 1\right) + \right. \\ &+ \left. b^2 \alpha_3 \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{a^2 b^2}{2} \alpha_4 \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \dots\right]. \end{aligned}$$

Из (138) можно определить, что напряжения  $\sigma_x^{(k)}$  равны нулю на сторонах  $x = \pm a$ , а  $\sigma_y^{(k)}$  – на сторонах  $y = \pm b$ ,  $\tau_{xy}^{(k)}$  равны нулю на всех четырех сторонах и на осях симметрии пластинки.

Полные напряжения в теле будут равны алгебраической сумме основных и корректирующих

$$\sigma = \sigma^{(o)} + \sigma^{(k)}.$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  будем находить из уравнения сплошности (95). Подобрать так удачно коэффициенты  $\alpha_i$ , чтобы всюду в области тела уравнение (95) обращалось в нуль, практически невозможно. Рассмотрим два приближенных способа решения, основанные на удовлетворении уравнению сплошности дискретно в конечном числе внутренних точек тела – точках коллокации. Этот способ решения краевых задач теории упругости получил название метода коллокаций. Второй способ основан на выполнении энергетического смысла уравнений сплошности и поэтому называется энергетическим.

**Метод коллокаций** [21, 22, 23]. При решении плоской задачи непосредственно в напряжениях (см. п. 5.3) получены уравнения

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (a)$$

и

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (b)$$

Заметив в уравнении (a) второй член в квадратных скобках через (b), получим:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (139)$$

При дискретном выполнении этого уравнения следует вторые производные заменить вторыми центральными разностями. Для регулярной сетки (с равноотстоящими узловыми точками в направлении оси  $x$  на  $\Delta x$  и в направлении  $y$  на  $\Delta y$ ) на основании соотношений (z) и (d) для нулевой точки (см. рис. 26) получим следующие приближенные равенства:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x^{(0)}}{\partial y^2} \approx \frac{\sigma_x^{(2)} - 2\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(4)}}{\Delta y^2}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y^{(0)}}{\partial x^2} \approx \frac{\sigma_y^{(1)} - 2\sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(3)}}{\Delta x^2}; \quad (7)$$

$$-\frac{\partial^2 \tau_{xy}^{(0)}}{\partial x \partial y} \approx \frac{\tau_{xy}^{(6)} - \tau_{xy}^{(8)} + \tau_{xy}^{(10)} - \tau_{xy}^{(12)}}{4\Delta x \Delta y}. \quad (8)$$

Теперь уравнение (139) в центральных разностях в соответствии с (6) – (8) для 0-й точки (см. рис. 33) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_x^{(2)} - 2\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(4)}}{\Delta y^2} + \frac{\sigma_y^{(1)} - 2\sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(3)}}{\Delta x^2} - \\ & - \frac{\tau_{xy}^{(6)} - \tau_{xy}^{(8)} + \tau_{xy}^{(10)} - \tau_{xy}^{(12)}}{2\Delta x \Delta y} = 0. \end{aligned} \quad (140)$$

Уравнение, аналогичное (140), составляют для каждой внутренней узловой точки сетки, которой разделяют исследуемое тело.

При решении показанного на рис. 36, а примера примем  $a = b$  и  $\Delta x = \Delta y = 0,5a$ . В силу симметрии (конструкции и нагрузки) составим уравнение только для четырех точек (см. рис. 36, б). Прежде чем записывать эти уравнения, составим выражения для полных напряжений во всех узловых точках в виде функции от  $\alpha_i$ , приняв за корректирующие напряжения выражения (138). Тогда, подставляя в формулы (134) и (138) координаты каждой узловой точки (см. рис. 36, б), получим выражения, представленные в табл. 4. Для удобства вычисления в табл. 4 введены обозначения

$$c_1 = \alpha_1/a^2; \quad c_2 = \alpha_2; \quad c_3 = \alpha_3; \quad c_4 = \alpha_4 a^2. \quad (141)$$

Запишем для всех внутренних точек (1, 2, 3, 4) разностные уравнения типа (140).



Таблица 4

Выражения для напряжений в узловых точках сетки

Номер точки (координаты)	$\sigma_x/a^8$	$\sigma_y/a^8$	$\tau_{xy}/a^8$
5(0, a)	$8(c_1 + c_2)$	0	0
6(a/2, a)	$\frac{18}{16}(4c_1 + c_2 + 4c_3 + c_4)$	0	0
7(a, a)	0	0	0
8(a, a/2)	$0,75 \cdot \frac{P_0}{a^8}$	$\frac{18}{16}(4c_1 + c_2 + 4c_3 + c_4)$	0
9(a, 0)	$\frac{P_0}{a^8}$	$8(c_1 + c_2)$	0
1(0, a/2)	$0,75 \frac{P_0}{a^8} - c_1 - 2,125c_3$	$-\frac{9}{16}(4c_1 + \frac{8,5}{4}c_2 + \frac{c_3}{4} + \frac{8,5}{16}c_4)$	0
2(a/2, a/2)	$0,75 \frac{P_0}{a^8} - \frac{9}{16}(c_1 + \frac{c_2}{4} + \frac{8,5}{4}c_3 + \frac{8,5}{16}c_4)$	$-\frac{9}{16}(c_1 + \frac{8,5}{4}c_2 + \frac{c_3}{4} + \frac{8,5}{16}c_4)$	$-\frac{9}{16}(4c_1 + \frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{2} + \frac{c_4}{16})$
3(a/2, 0)	$+\frac{8,5}{4}c_3 + \frac{8,5}{16}c_4)$	$+\frac{c_3}{4} + \frac{8,5}{16}c_4)$	0
4(0, 0)	$\frac{P_0}{a^8} - \frac{9}{16}(4c_1 + c_2 - 2c_3 - \frac{c_4}{2})$	$-c_1 - \frac{8,5}{4}c_2$	0
	$\frac{P_0}{a^8} - 4c_1 + 2c_3$	$-4c_1 + 2c_2$	0

Для точки 1 (см. рис. 33 и 36, б)

$$\frac{\sigma_x^{(5)} - 2\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(4)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(2)} - 2\sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(6)} - \tau_{xy}^{(6)} + \tau_{xy}^{(3)} - \tau_{xy}^{(3)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (ж)$$

Для точки 2

$$\frac{\sigma_x^{(6)} - 2\sigma_x^{(2)} + \sigma_x^{(3)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(8)} - 2\sigma_y^{(2)} + \sigma_y^{(1)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(7)} - \tau_{xy}^{(5)} + \tau_{xy}^{(4)} - \tau_{xy}^{(9)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (е)$$

Для точки 3

$$\frac{\sigma_x^{(2)} - 2\sigma_x^{(3)} + \sigma_x^{(2)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(9)} - 2\sigma_y^{(3)} + \sigma_y^{(4)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(8)} - \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(1)} - \tau_{xy}^{(8)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (3)$$

Для точки 4

$$\frac{\sigma_x^{(1)} - 2\sigma_x^{(4)} + \sigma_x^{(1)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(3)} - 2\sigma_y^{(4)} + \sigma_y^{(3)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(2)} - \tau_{xy}^{(2)} + \tau_{xy}^{(2)} - \tau_{xy}^{(2)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (u)$$

Подставляя теперь в уравнения (e) - (u) напряжения в узловых точках 1-9 согласно табл. 4 и учитывая закон парности касательных напряжений  $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$ , получим следующие уравнения сплошности:

$$9,3750c_1 - 4,6406c_2 + 15,0938c_3 - 1,1602c_4 = 0,5000 \frac{P_0}{a^8};$$

$$12,0000c_1 + 15,7500c_2 + 15,7500c_3 + 7,1250c_4 = 0,8889 \frac{P_0}{a^8};$$

$$9,3750c_1 + 15,0938c_2 - 4,8406c_3 - 1,1602c_4 = 0,5000 \frac{P_0}{a^8};$$

$$8,2500c_1 - 4,5312c_2 - 4,4062c_3 + 0,0352c_4 = 0,2500 \frac{P_0}{a^8}.$$

Решая полученную систему, находим:

$$c_1 = 0,0420 \frac{P_0}{a^8}; \quad c_2 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad c_3 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad c_4 = 0,0062 \frac{P_0}{a^8}.$$

Если подставить полученные значения  $c_i$  в соотношения (141), то легко определяются коэффициенты  $\alpha_i$

$$\alpha_1 = 0,0420 \frac{P_0}{a^6}; \quad \alpha_2 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad \alpha_3 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad \alpha_4 = 0,0062 \frac{P_0}{a^{10}}.$$

Используя теперь зависимости (134), а также (135) - (136) и (138) с применением для последнего случая данных табл. 4, подсчитаем напряжения в узловых точках, а по формулам (134) и (138) – в любой точке пластинки. В табл. 5 приведены величины напряжения  $\sigma_x$  для сечения 5-5 (см. рис. 36), а на рис. 36, а построена их эпюра.

Если за корректирующие напряжения взять соотношения (135) - (136), то, поступив подобным же образом, определим:

$$\alpha_1 = 0,03376P_0; \alpha_2 = \alpha_3 = -0,07315P_0; \alpha_4 = -0,1168P_0.$$

Напряжения  $\sigma_x$  в сечении 5-5, подсчитанные по формулам (134) и (135) - (136), приведены во второй строке табл. 5.

Таким образом, выбор корректирующих напряжений в виде (135) - (136) или (137) - (138) незначительно сказывается на точности: разница в величинах напряжений лежит в пределах погрешности вычислений.

Таблица 5

Значения напряжений  $\sigma_x/P_0$  в сечении 5-5

Способ вычисления		Номер точки		
		5	1	4
Дискретный	Зависимости (137)-(138)	0,3888	0,6914	0,8590
	Зависимости (135)-(136)	0,4037	0,6663	0,8592
	С использованием непрерывных производных	0,4027	0,6883	0,8593

В тех случаях, когда выражения для основных и корректирующих напряжений можно продифференцировать дважды, нет необходимости заменять производные конечными разностями, ибо такая замена неизбежно внесет дополнительные погрешности в решение, особенно в местах резкого изменения поля напряжений. Так, в рассматриваемом примере, выполнив двухкратное дифференцирование и определив производные от напряжений, как это требует (139), получим уравнение сплошности в функции от параметров  $\alpha_i$ , пригодное для любых точек исследуемого тела. Подставив для  $x$  и  $y$  координаты тех же четырех точек, что и раньше, получим для коэффициентов  $\alpha_i$  значения:

$$\alpha_1 = 0,04023 \frac{P_0}{a^{10}}; \alpha_2 = 0,01012 \frac{P_0}{a^8}; \alpha_3 = 0,01012 \frac{P_0}{a^8}; \alpha_4 = 0,00962 \frac{P_0}{a^{10}}.$$

Эти значения весьма близкие, которые были найдены ранее при замене производных конечными разностями. Напряжения, вычисленные по этим коэффициентам и приведенные в третьей стро-

ке табл. 5, практически совпадают с ранее найденными. Это произошло потому, что в рассматриваемом случае нагружения все напряжения во всей области тела изменяются весьма плавно и разница между их производными и конечными разностями мала.

**Энергетический метод.** В зависимости (75) было рассмотрено значение удельной потенциальной энергии упругой деформации, которое для обобщенного плоского напряженного состояния будет иметь вид

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2].$$

Выполнив интегрирование по всему объему (приняв, что размер по направлению оси  $z$  равен единице), получим выражение для полной энергии деформации  $U$ , накопленной во всем теле:

$$U = \frac{1}{2E} \iint [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2] dx dy. \quad (142)$$

На основании теоремы Лагранжа-Дирихле [8] доказывается принцип минимума потенциальной энергии: *из всех мыслимых перемещений упругого тела перемещения, удовлетворяющие условиям равновесия, сообщают потенциальной энергии системы минимальное значение.* При этом уравнения сплошности (95) вытекают как следствие из условия минимума потенциальной энергии в сплошном деформируемом теле.

Значит, для упругого тела принцип наименьшей энергии деформации и уравнения сплошности тождественны между собой. Поэтому в задачах определения напряжений требование соблюдения сплошности можно заменить требованием минимальной величины энергии деформации.

Ранее было показано, что напряжения в теле могут быть представлены в функции свободных параметров  $\alpha_i$  (см. зависимости (135) - (138)). Значит, энергия деформации согласно выражению (142) будет также функцией этих коэффициентов  $U = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . Следовательно, их можно определить из условия

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (\kappa)$$

Учитывая, что при отсутствии массовых сил распределение напряжений в плоской задаче не зависит от упругих постоянных материала (см. формулу (95)), что позволяет упростить вычисление, приняв в формуле (142)  $\mu=0$ . Тогда, выполняя дифференцирование в соответствии с (к) по параметрам  $\alpha_i$  под знаком интеграла, получим следующие уравнения:

$$\iint (\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial \alpha_i} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial \alpha_i} + 2\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \alpha_i}) dx dy = 0,$$

$$\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

Уравнения применим к решению задачи – определение напряжений в прямоугольной пластине (см. рис. 36, а) для случая  $a = b$ , ограничившись в (137) только  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Подставляя в это уравнение напряжения согласно формулам (134) - (138), а также их производных, а затем выполняя интегрирование по всей площади пластины, получим систему трех уравнений, линейных относительно  $\alpha_i$ :

$$\begin{aligned} 23,5103\alpha_1 + 2,1373a^2\alpha_2 + 2,1373a^2\alpha_3 &= \frac{P_0}{a^6}; \\ 14,9611\alpha_1 + 32,0960a^2\alpha_2 + 1,6624a^2\alpha_3 &= \frac{P_0}{a^6}; \\ 14,9611\alpha_1 + 1,6624a^2\alpha_2 + 32,0960a^2\alpha_3 &= \frac{P_0}{a^6}. \end{aligned} \quad (л)$$

Решив систему (л), получим:

$$\alpha_1 = 0,04040 \frac{P_0}{a^6}; \quad \alpha_2 = 0,01174 \frac{P_0}{a^8}; \quad \alpha_3 = 0,01174 \frac{P_0}{a^8}.$$

Для сравнения с предыдущим решением найдем напряжения  $\sigma_x$  в сечении 5-5. Для этого необходимо в формулах (137) - (138) для корректирующих напряжений положить  $x=0$  и прибавить еще основные напряжения по формулам (134). В результате вычисления получим следующие значения  $\sigma_x$  в точках 5, 1, 4:

$$\sigma_{x,5} = 0,4172P_0; \quad \sigma_{x,1} = 0,6846P_0; \quad \sigma_{x,4} = 0,8619P_0.$$

Полученные результаты указывают на примерно одинаковую точность рассмотренных выше методов (см. табл. 5).

Вычисление напряжений в такой же пластинке через функцию напряжений методом конечных разностей показало, что для достижения такой же точности необходимо брать сетку в два раза мельче, чем при решении методом коллокаций [24, 25, 26].

#### **Контрольные вопросы**

1. Что называется плоской деформацией?
2. Какое напряженное состояние называется обобщенным плоским?
3. Как записываются уравнения равновесия в случае обобщенного плоского напряженного состояния?
4. Как выглядит условие неразрывности Сен-Венана в случаях плоского напряженного состояния и плоской деформации?
5. Какой вид приобретает условие неразрывности в случае применения функции напряжений (функции Эри)?
6. Как записать статические условия на границах тела через функцию напряжений?
7. Покажите, что при использовании функции напряжений уравнения равновесия плоской задачи удовлетворяются тождественно.
8. В чем преимущество применения тригонометрических рядов вместо полиномов для функции напряжений  $\varphi$  при решении плоской задачи?
9. Как можно представить производные через конечные разности функций?
10. Каким образом дифференциальное уравнение Мориса Леви можно представить в конечно-разностном виде?

## ГЛАВА 6. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

### 6.1. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах

При решении плоской задачи встречаются тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра с радиально расходящимися плоскостями. В этих случаях переход от декартовой системы координат к полярной значительно упрощает решение.

Выведем основные уравнения плоской задачи в полярных координатах: дифференциальные уравнения равновесия, уравнение сплошности, формулы Коши и формулы обобщенного закона Гука.

Вырежем из пластинки толщиной, равной единице, элемент  $abcd$  (рис. 37). Для этого проведем радиус  $Oab$  под произвольным углом  $\theta$  к оси абсцисс, затем дадим углу бесконечно малое приращение  $d\theta$  и проведем радиус  $Odc$ . Произвольным радиусом  $Oa = r$  проведем дугу  $ad$ , затем дадим радиусу  $r$  приращение  $ab = dr$  и проведем вторую дугу  $bc$ . Стороны полученного элемента имеют следующие размеры:

$$ab = cd = dr; \quad ad = rd\theta, \quad bc = (r + dr)d\theta.$$

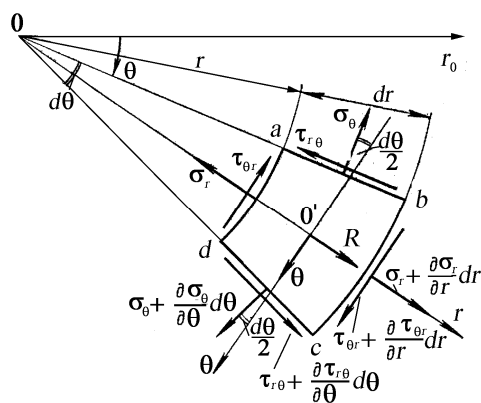


Рис. 37. Равновесие элементарного объема в полярной системе координат

На гранях этого элемента действуют следующие составляющие напряжений:  $\sigma_r$  – радиальное нормальное,  $\sigma_\theta$  – тангенциальное нормальное напряжение,  $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$  – касательные напряжения.

Дифференциальные уравнения равновесия в по-

лярной системе координат получим как частный случай уравнений равновесия (7) в цилиндрической системе координат.

Если в (7) положить  $\sigma_x = 0$ ;  $\tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0$ , то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

Особенностью этих уравнений является наличие в знаменателе  $r$ . Чем ближе к началу координат расположена рассматриваемая точка, тем быстрее будут возрастать слагаемые, содержащие множитель  $1/r$ . Поэтому уравнения (143) неприемлемы для точек, лежащих в начале координат.

Преобразуем к полярным координатам уравнение сплошности в плоской задаче. В декартовых координатах уравнение сплошности (95) имело такой вид:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (a)$$

Сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам в плоской задаче является инвариантом. Действительно, подставляя в первый инвариант напряженного состояния (27)  $\sigma_z = 0$ , получим, что при обобщенном плоском напряженном состоянии инвариантной величиной будет

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y.$$

При плоской деформации согласно формуле (87) напряжение  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$  и инвариантной величиной является

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \mu)(\sigma_x + \sigma_y).$$

Таким образом, в плоской задаче в каждой точке сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная, и можно составить следующее тождество:

$$\sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_r + \sigma_\theta.$$

Заменяя с помощью этого тождества напряжения в формуле (a), получаем уравнение сплошности для плоской задачи в полярной системе координат:



$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (144)$$

В развернутом виде это уравнение имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (145)$$

Формулы Коши можно получить как частный случай формул (45), сохраняя в них только составляющие деформаций и перемещений в плоскости  $\theta 0r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Здесь  $u_r$  – составляющая перемещения вдоль оси  $r$ , а  $u_\theta$  – составляющая перемещения, перпендикулярная к оси  $r$ .

Формулы закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния в полярных координатах также получим как частный случай из формул (61), сохраняя только составляющие напряжений и деформаций, действующие в плоскости  $\theta 0r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= (\sigma_\theta - \mu\sigma_r)/E; \\ \varepsilon_r &= (\sigma_r - \mu\sigma_\theta)/E; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\theta r}. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

В случае плоской деформации упругие постоянные  $E$  и  $\mu$  в формулах (147) должны быть соответственно заменены на упругие постоянные  $E_1$  и  $\mu_1$  согласно формулам (92).

## 6.2. Простое радиальное напряженное состояние

При решении многих задач приходится иметь дело с напряженным состоянием, при котором во всех точках напряженного тела действуют только радиальные нормальные напряжения  $\sigma_r$ ,

а остальные составляющие напряжений  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$ ,  $R = \theta = 0$ . Такое напряженное состояние называется простым радиальным напряженным состоянием.

В случае простого радиального напряженного состояния первое уравнение системы (143) обратится в тождество, а второе – уравнение равновесия и уравнение сплошности (145) – значительно упростятся

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Систему уравнений (a) можно проинтегрировать в общем виде. Для этого применим метод Фурье. Представим напряжение  $\sigma_r(r, \theta)$ , являющееся функцией двух переменных  $r$  и  $\theta$ , в виде произведения двух функций

$$\sigma_r = \varphi \cdot \psi, \quad (б)$$

одна из которых  $\varphi(r)$  является функцией только одного переменного  $r$ , а другая  $\psi(\theta)$  – одного переменного  $\theta$ .

Подставляя функцию (б) в уравнения (a), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения с двумя неизвестными функциями  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi' \psi + \frac{1}{r} \varphi \psi &= 0; \\ \varphi'' \psi + \frac{1}{r} \varphi' \psi + \frac{1}{r^2} \varphi \psi'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Первое уравнение (в) после деления на  $\psi$  дает

$$\varphi' + \varphi/r = 0,$$

откуда после разделения переменных получаем

$$\varphi'/\varphi = -1/r.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln \varphi = -\ln r + \ln C, \quad \text{или} \quad \ln \varphi = \ln \frac{C}{r}.$$

Потенцируя, находим:

$$\varphi = C/r. \quad (z)$$

Для отыскания функции  $\psi$  подставим найденную функцию  $\varphi$  во второе уравнение (б)

$$\frac{2C}{r^3}\psi + \frac{1}{r}\left(-\frac{C}{r^2}\right)\psi + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{C}{r} \psi'' = 0.$$

После деления на дробь  $C/r^3$  получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi'' + \psi = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения представляется в таком виде:

$$\psi = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (d)$$

Подставляя решения (z) и (d) в выражение (б), находим:

$$\sigma_r = \frac{C}{r}(A \cos \theta + B \sin \theta). \quad (e)$$

Для удобства дальнейших выкладок введем новые произвольные постоянные  $k$  и  $\theta_0$

$$C \cdot A = -k \cos \theta_0;$$

$$C \cdot B = -k \sin \theta_0.$$

Тогда функция (e) примет вид

$$\sigma_r = -\frac{k}{r}(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0) \quad (148)$$

или, если применить тригонометрическую формулу преобразования косинуса разности двух углов,

$$\sigma_r = -\frac{k}{r} \cos(\theta - \theta_0).$$

Следовательно, простое радиальное напряженное состояние представляется следующими составляющими напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{k}{r} \cos(\theta - \theta_0); \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Полученный результат можно использовать при решении ряда задач; при этом произвольные постоянные  $k$  и  $\theta_0$  определяются из граничных условий.

### 6.3. Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой

Решение (149) можно применить к задаче о клине, к вершине которого приложена сила  $P$  произвольного направления (рис. 38). Угол раствора клина равен  $2\alpha$ . Начальный радиус-вектор совпадает с биссектрисой угла  $2\alpha$ . Направление линии действия силы  $P$  с начальным радиусом-вектором составляет угол  $\beta$ . Покажем, что в этом случае клин находится в простом радиальном напряженном состоянии.

Для этого возьмем составляющие напряжений для простого

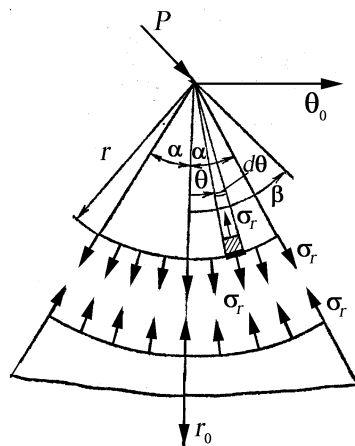


Рис. 38. Нагружение на участок клина произвольной силой

радиального напряженного состояния в форме (148) и определим постоянные  $k$  и  $\theta_0$ , при которых эти напряжения удовлетворяют граничным условиям поставленной задачи. Из рассмотрения исключим закрепление нижней кромки клина, которое оказывает влияние на распределение напряжений только вблизи кромки, а на боковых поверхностях клина при  $\theta = \pm \alpha$  должно быть  $\sigma_\theta = \tau_{r,\theta} = 0$ .

Из (148) и (149) следует, что эти условия тождественно выполняются во всех точках боковой поверхности за исключением полюса  $O$ . В полюсе при  $r = 0$  формула (148) неприемлема. Для включения в граничные условия силы  $P$  на основании принципа Сен-Венана заменим эту силу эквивалентной ей нагрузкой, рас-

пределенной по дуге радиусом  $r$ , проведенной из полюса  $O$  (см. рис. 38) и рассмотрим равновесие элемента клина.

Спроектируем все силы, действующие на этот элемент, на вертикальную и горизонтальную оси. В результате получим

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r d\theta \cdot \cos \theta + P \cos \beta = 0;$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r d\theta \cdot \sin \theta + P \sin \beta = 0.$$

После подстановки значения  $\sigma_r$  из формулы (148) получим

$$-k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta - k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta + P \cos \beta = 0;$$

$$-k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta - k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta + P \sin \beta = 0.$$

Проинтегрировав, получаем систему двух уравнений для определения постоянных  $k$  и  $\theta_0$ :

$$-k \cos \theta_0 [\alpha + (\sin 2\alpha)/2] + P \cos \beta = 0;$$

$$-k \sin \theta_0 [\alpha + (\sin 2\alpha)/2] + P \sin \beta = 0,$$

откуда находим

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta_0 &= \frac{P \cos \beta}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}; \\ k \sin \theta_0 &= \frac{P \sin \beta}{\alpha - (\sin 2\alpha)/2}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Разделив почленно второе уравнение (a) на первое, получаем условие для определения постоянной  $\theta_0$ :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} \beta \frac{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}{\alpha - (\sin 2\alpha)/2}. \quad (150)$$

Возведем оба выражения в (a) в квадрат, сложим, а после извлечения квадратного корня находим

$$k = P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{[\alpha + (\sin 2\alpha)/2]^2} + \frac{\sin^2 \beta}{[\alpha - (\sin 2\alpha)/2]^2}}. \quad (151)$$

Таким образом, удалось удовлетворить граничным условиям и, следовательно, рассматриваемый клин находится в простом радиальном напряженном состоянии.

#### 6.4. Сжатие клина

Задачу о сжатии клина сосредоточенной силой, приложенной к его вершине (рис. 39), можно рассматривать как частный случай решения в п. 6.3 при  $\beta = 0$ . Постоянные  $\theta_0$  и  $k$  из формул (150) и (151) получают следующие значения:

$$\theta_0 = 0, \\ k = \frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}.$$

Внося эти значения постоянных в формулы (149), получаем

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \\ \sigma_r = -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos \theta}{r}. \quad (152)$$

Эпюра распределения радиальных напряжений  $\sigma_r$  в сечении  $r = \text{const}$  показана на рис. 39.

Для исследования напряженного состояния в сжатом клине удобно перейти к поперечным и продольным сечениям клина. Если ось  $x$  совместить с осью симметрии клина, а ось  $y$  направить вправо (см. рис. 39), то составляющие напряжений в поперечном сечении клина будут  $\sigma_x$  и  $\tau_{yx}$ , а в продольном —  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

Связь между составляющими напряжений в декартовой и полярной системах координат для

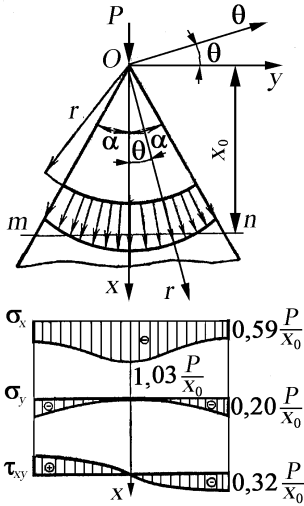


Рис. 39. Сжатие клина сосредоточенной силой

напряжений в декартовой и полярной системах координат для

плоской задачи получим из формул (11) и (14) с учетом того, что  $n = n_1 = 0$ , направляющие косинусы  $l$  и  $m$  – косинусы углов между осями  $x$  и  $r$ , а также  $\theta$  (см. рис. 39); направляющие косинусы  $l_1$  и  $m_1$  – косинусы углов между осями  $y$  и  $r$ , а также  $\theta$  (соответственно вместо направления  $v$  в первом случае принимается ось  $x$ , а во втором случае –  $y$ ). Кроме того, в уравнениях (11) и (14) исходными служат компоненты тензора напряжений (4) (для плоской задачи, когда  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ). Тогда уравнения (11) и (14) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r l^2 + \sigma_\theta m^2 + 2\tau_{r\theta} lm; \\ \sigma_y &= \sigma_r l_1^2 + \sigma_\theta m_1^2 + 2\tau_{r\theta} l_1 m_1; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \sigma_r l l_1 + \sigma_\theta m m_1 + \tau_{r\theta} (l m_1 + l_1 m). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

В этих формулах направляющие косинусы  $l$  и  $m$  определяют направление оси  $x$  соответственно по отношению к осям  $r$  и  $\theta$

$$l = \cos(r, x) = \cos \theta; \quad m = \cos(\theta, x) = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta, \quad (б)$$

а направляющие косинусы  $l_1$  и  $m_1$  – оси  $y$

$$l_1 = \cos(r, y) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta; \quad m_1 = \cos(\theta, y) = \cos \theta. \quad (в)$$

После подстановки в (а) значений  $l$ ,  $m$ ,  $l_1$  и  $m_1$  из (б) и (в) получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Используя (152) и (153), определим составляющие напряжений, возникающие при сжатии клина в его горизонтальном и вертикальном сечениях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{r}; \\ \sigma_y &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (z)$$

Перейдем в правой части полученных соотношений от полярной системы координат к декартовой. Связь между координатами в этих системах выражается следующим образом:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставляя их значения в формулы (z), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Исследуем полученные формулы на примере клина с углом  $\alpha = \pi/6$  (см. рис. 39). В сечении  $mn$  этого клина, находящегося на расстоянии  $x_0$  от вершины, напряжения в соответствии с (154) равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{0,957} \cdot \frac{x_0^3}{(x_0^2 + y^2)^2}; \quad \sigma_y = -\frac{P}{0,957} \cdot \frac{x_0 y^2}{(x_0^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{0,957} \cdot \frac{x_0^2 y}{(x_0^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Эпюры этих напряжений изображены на рис. 39.

Для сравнения приведем решение, получаемое методами сопротивления материалов, где принимают при сжатии  $\sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0$ ,

$\sigma_x^0$  – распределено равномерно по сечению



$$\sigma_x^0 = -\frac{P}{F_{mn}} = -\frac{P}{2x_0 \operatorname{tg} \alpha} = -0,866 \frac{P}{x_0}. \quad (155)$$

Сравнивая эти напряжения с  $(\sigma)$ , заключаем, что  $\sigma_x^0$ , полученное методами сопротивления материалов, отличается от максимального  $\sigma_x$ , полученного методами теории упругости, на 17 %. С увеличением угла раствора  $\alpha$  эта разница растёт.

### 6.5. Действие сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости

На рис. 40 изображена упругая среда, ограниченная плоскостью  $AB$  и простирающаяся неограниченно вниз. В точке  $O$  приложена сила  $P$ , перпендикулярная к плоскости  $AB$ . Эта задача будет плоской в двух случаях. Если протяженность среды в направлении,

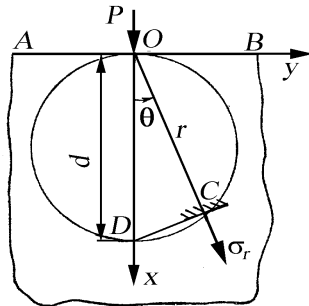


Рис. 40. Действие силы  $P$  на упругую полуплоскость

перпендикулярном к плоскости чертежа, весьма мала, то имеем дело с обобщенным плоским напряженным состоянием. Если же протяженность среды в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, велика, то имеем дело с плоской деформацией и в этом случае сила  $P$  представляет собой нагрузку, равномерно распределенную вдоль прямой, перпендикулярной к плоскости чертежа.

В случае плоской задачи рассматриваемая среда называется упругой полуплоскостью или полубесконечной пластинкой.

Полуплоскость можно рассматривать как частный случай клина при угле раствора  $2\alpha = \pi$ . Полагая также  $\beta = 0$ , так как сила  $P$  направлена вдоль оси  $x$ , из формул (150) и (151) получаем постоянные

$$\theta_0=0; k = \frac{P}{2\pi}.$$

Подставляя эти постоянные в формулы (149), находим напряжения в точках упругой полуплоскости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

Ж.В. Буссинеском предложено следующее графическое представление напряженного состояния внутри полуплоскости: если провести окружность, касающуюся границы полуплоскости в точке  $O$  приложения нагрузки  $P$ , то эта окружность будет представлять собой геометрическое место точек с одинаковыми радиальными напряжениями  $\sigma_r$  (круг Буссинеска). Для доказательства этого проведем через точку  $O$  (см. рис. 40) провести окружность диаметром  $OD = d$ , касательную границы полуплоскости  $AOB$ , а из точки  $O$  – произвольный радиус-вектор  $OC = r$ . Из треугольника  $OCD$  следует

$$r = d \cos \theta; \quad \text{или} \quad \frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d}.$$

Подставляя это соотношение в формулу (156), получаем:

$$\sigma_r = -(2P)/(\pi d). \quad (157)$$

Таким образом, во всех точках проведенной окружности радиальные напряжения  $\sigma_r$  одинаковы.

### **6.6. Приложение теории плоской задачи к определению напряжений в основании фундамента**

Результаты, полученные в предыдущем пункте, можно применять для определения напряжений в основании фундамента. Основанием фундамента чаще всего бывает грунт, не обладающий уп-

ругими свойствами. Однако практически для всех грунтов при небольших внешних давлениях можно принимать линейную зависимость между деформациями и напряжениями и использовать уравнения теории упругости.

В инженерной практике при расчете фундаментов необходимо знать распределение напряжений в глубине грунта по горизонтальному и вертикальному сечениям, поэтому в предыдущей задаче от напряжений в полярной системе координат перейдем к напряжениям в декартовой системе координат  $xOy$ . Подставляя напряжения из формул (156) в формулы (153), получаем:

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi r} \cos^3 \theta; \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta \sin^2 \theta; \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r} \cos^2 \theta \sin \theta.$$

Используя формулы перехода от одной системы координат к другой (154), выразим эти напряжения через декартовы координаты:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Эпюры нормальных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и касательных  $\tau_{xy}$  напряжений для двух горизонтальных уровней показаны на рис. 41.

Как следует из полученных значений напряжений  $\sigma_x$  (рис. 41, а),  $\sigma_y$  (рис. 41, в) и  $\tau_{xy}$  (рис. 41, б) по мере удаления от точки приложения нагрузки они затухают не только по линии действия силы и в сторону от этого направления.

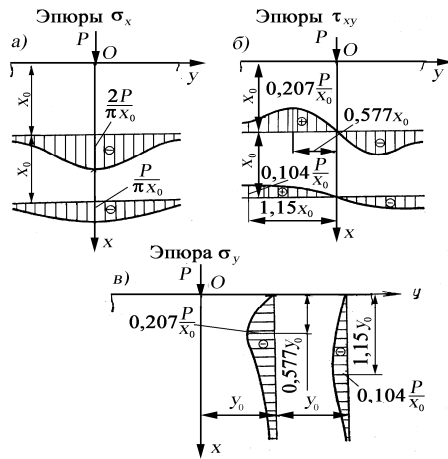


Рис. 41. Эпюры нормальных и касательных напряжений при действии силы на полуплоскость

Так, нормальные напряжения  $\sigma_x$  (см. рис. 41, а), действующие в горизонтальных сечениях, достигают максимума под силой: при значении  $x_0$  напряжения  $\sigma_x = -\frac{2P}{\pi x_0}$ , при

$$2x_0 - \sigma_x = -\frac{P}{\pi x_0}.$$

Другими словами, они затухают при удалении от точки приложения силы  $P$  как в стороны, так и в глубину.

### 6.7. Функция напряжений для плоской задачи в полярных координатах

Решение плоской задачи в полярных координатах в напряжениях заключается в отыскании трех функций:  $\sigma_r(r, \theta)$ ,  $\sigma_\theta(r, \theta)$  и  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  с помощью трех уравнений: двух уравнений равновесия (143) и уравнения сплошности (144), удовлетворяющих условиям на поверхности.

Аналогично тому как это было сделано при решении плоской задачи в декартовых координатах, решение плоской задачи в полярных координатах можно свести к отысканию одной функции напряжений  $\varphi(r, \theta)$ . Введем эту функцию так, чтобы напряжения выражались через нее следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения равновесия (143), убеждаемся, что при отсутствии объемных сил уравнения равновесия обращаются в тождества. Чтобы преобразовать уравнение сплошности (144), сложим почленно формулы для нормальных напряжений (159)

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}.$$

В правой части этой суммы согласно формуле (145) стоит оператор Лапласа над функцией  $\varphi(r, \theta)$ . Следовательно,

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \nabla^2 \varphi.$$

Подставляя это соотношение в уравнение сплошности (144), получаем:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (160)$$

В развернутом виде это уравнение представляется следующим образом:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (161)$$

Таким образом, функция напряжений  $\varphi(r, \theta)$  для плоской задачи в полярных координатах должна быть функцией бигармонической.

### 6.8. Осесимметричные задачи. Решение в перемещениях

Остановимся на плоских задачах, в которых напряжения не зависят от полярного угла  $\theta$ . Как следует из зависимостей (159) в

этих задачах функцию напряжений можно считать не зависящей от  $\theta$ . Бигармоническое уравнение (161) примет более простой вид

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

или после дифференцирования

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (162)$$

Также упростятся выражения напряжений через функцию  $\varphi(r)$  из (159)

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr}; \quad \sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (163)$$

Из уравнений равновесия (143) при отсутствии объемных сил останется только одно

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (164)$$

Формулы Коши (147) упростятся, так как составляющая перемещения  $u_\theta = 0$  в силу симметрии

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}; \quad \gamma_{r\theta} = 0. \quad (165)$$

Из формул (148) закона Гука останутся лишь две

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta). \quad (166)$$

Осесимметричную задачу в перемещениях можно решить в общем виде. Для этого из формул (166) находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

С помощью формул Коши (165) исключаем из уравнений (a) составляющие относительных деформаций  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_r$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr} \right). \quad (б)$$

Подставляя (б) в уравнение равновесия (164), получаем следующее дифференциальное уравнение относительно составляющей перемещения  $u_r$ :

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (167)$$

Это дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Для решения приведем его к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью подстановки

$$t = \ln r \quad (в)$$

или

$$r = e^t. \quad (з)$$

Дифференцируя соотношение (в) по переменной  $r$ , получаем:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}. \quad (д)$$

Найдем связь между производными от функции  $u_r$  по старой и новой переменным

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{du_r}{dt} \cdot \frac{dt}{dr}.$$

С учетом соотношения (д) получаем

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dt}. \quad (е)$$

Вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_r}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left( \frac{du_r}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dt} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{du_r}{dt} + \\ &+ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{du_r}{dt} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{du_r}{dt} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 u_r}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dr} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{d^2 u_r}{dt^2} - \frac{du_r}{dt} \right). \end{aligned} \quad (ж)$$

Подставляя производные (е) и (ж) в уравнение (167), находим:

$$\frac{d^2 u_r}{dt^2} - u_r = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_r = Ae^t + Be^{-t}.$$

Переходя к старой переменной  $r$  согласно зависимостям (в) и (з), получаем следующее решение уравнения (167):

$$u_r = Ar + \frac{B}{r}. \quad (168)$$

Так как  $\frac{du_r}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$ , то после подстановки в уравнение (165)

значения  $u_r$  и ее производной по  $r$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= A - \frac{B}{r^2}; \\ \varepsilon_\theta &= A + \frac{B}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

а из формул (б) – составляющие напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A - (1-\mu)\frac{B}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A + (1-\mu)\frac{B}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий.

#### Контрольные вопросы

1. Что называется простым радиальным напряженным состоянием?
2. Как определяются постоянные интегрирования после решения уравнений равновесия и сплошности для клина, нагруженного продольной силой?
3. В чем смысл задачи Буссинеска?
4. Что такое круг Буссинеска и каковы его свойства?
5. Как записываются функции напряжений для плоской задачи теории упругости в полярных координатах?



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии приведены основные понятия классической математической теории упругости, а также некоторые численные методы решения краевых задач, в частности сеточные. Для лучшего усвоения излагаемого материала приведены примеры решения плоской задачи теории упругости для прямоугольных односвязных областей в полиномах и методом конечных разностей.

Принимая во внимание, что студенты только что закончили изучение курса «Механика материалов и конструкций» («Сопротивление материалов»), в котором особенно подробно рассматривалась проблема внутренних сил, в приложении дается краткое объяснение метода сил в применении к замкнутым контурам. Это требуется для решения методом конечных разностей балки-стенки.

Выражаю свою искреннюю признательность официальным рецензентам, а также коллегам по работе, оказавшим неоценимую помощь при подготовке рукописи.

Заранее благодарю читателей, которые выскажут свои замечания и пожелания по дальнейшему улучшению излагаемых в пособии разделов, и прошу направлять их по адресу:

600000, Владимир, ул Горького, 87, кафедра «Тепловые двигатели и энергетические установки».

E-mail: [hotz@mail.ru](mailto:hotz@mail.ru); [hotz@vlsu.ru](mailto:hotz@vlsu.ru)

РАСЧЕТ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ<sup>16</sup>**1. Замкнутые контуры с одноосной симметрией**

Плоские стержневые системы, имеющие вид жесткого замкнутого контура, представляют собой безопорную конструкцию, работающую под действием самоуравновешенной нагрузки. Решение системы такого рода возможно только с помощью разреза. Теоретически для получения основной системы можно производить разрез заданного замкнутого контура в любом сечении, однако и в этих случаях разрез по линии симметрии позволяет сократить решение.

Рассмотрим, например, прямоугольный замкнутый контур (рис. П1, *a*), нагруженный двумя сосредоточенными равными и прямо противоположными силами  $P$ .

Заданная система симметрична относительно двух взаимно перпендикулярных осей, нагрузка же симметрична только относительно одной вертикальной оси. В подобных случаях для образования основной системы целесообразно применять *разрез по линии симметрии как рамы, так и нагрузки* и только в одном месте (рис. 1, *б*). Удобнее делать разрез в сечении, наиболее удаленном от нагрузки, так как в противном случае эпюры изгибающих моментов  $M_p$  захватывают большую часть стержней, что может усложнить подсчеты перемещений по правилу Верещагина при определении коэффициентов канонических уравнений<sup>17</sup>.

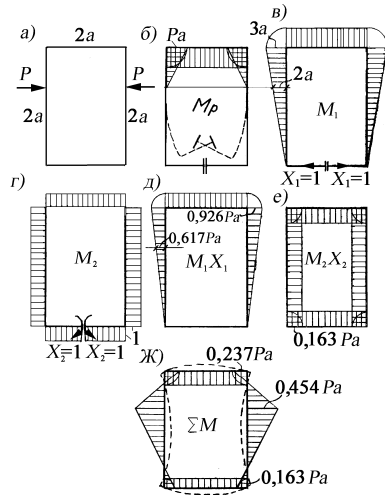
Представив себе деформацию заданной системы, вызываемую действующей нагрузкой в случае разреза по центральному сечению нижнего стержня, согласно рис. 1, *б*, заключаем, что в плоскости разреза существуют только осевые силы и изгибающие моменты, поперечные же силы отсутствуют. На первом этапе выбора основной системы можно приложить в сечении разреза все три силы.

---

<sup>16</sup> Расчет замкнутых контуров методом сил рассматривается в курсе «Механика материалов и конструкций».

<sup>17</sup> Предполагается, что студенты уже прослушали курс «Механика материалов и конструкций» и знакомы с расчетом статически неопределимых систем методом сил и умеют составлять канонические уравнения (см., например, [6]).

Однако при определении коэффициентов канонического уравнения метода сил автоматически получим, что поперечные силы отсутствуют. Следовательно, для решения потребуется система двух канонических уравнений с двумя неизвестными продольной силой  $X_1$  изгибающим моментом  $X_2$ .



**Рис. 1. Схема расчета замкнутого контура с одноосной симметрией** (в направлении моментов  $X_2$ ). Другими словами, при действии неизвестных пока сил  $X_1$  и моментов  $X_2$  основная система (с разрезом по нижнему стержню, см. рис. 1, б) будет эквивалентна заданной (см. рис. 1, а), т. е. сечения в разрезе не будут иметь ни линейных, ни угловых перемещений.

На рис. 1, б, в и г построены эпюры моментов  $M_p, M_1$  и  $M_2$ . Напомним, что после построения эпюр  $M_p, M_1$  и  $M_2$  необходимо определить перемещения от действия каждой неизвестной силы или, другими словами, для определения  $\delta_{11}$  в (а) перемножить эпюру  $M_1$  саму на себя, для  $\delta_{12} = \delta_{21}$   $M_1$  – на  $M_2$ , а далее – для определения  $\Delta_{1,p}$  и  $\Delta_{2,p}$  необходимо  $M_p$  перемножить соответственно на  $M_1$  и  $M_2$ , используя, например, правило Верещагина. Оно гласит, что линейное или угловое перемещение определяется разделенным на жесткость стержня произведением площади эпюры,

Система канонических уравнений для этих двух неизвестных будет иметь вид [6]

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1,p} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2,p} &= 0. \end{aligned} \right\} (a)$$

Первое из уравнений системы представляет собой сумму относительных линейных перемещений в направлении оси условно разрезанного стержня (в направлении сил  $X_1$ ), а второе – сумму относительных угловых перемещений, получающихся при условном разрезе

построенной от заданной нагрузки, на ординату второй эпюры от единичной нагрузки, получившуюся под центром тяжести первой эпюры. Обе эпюры должны иметь общую длину  $l$ .

Вычисляя перемещения по этому правилу, определяем коэффициенты системы канонических уравнений (а):

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2}3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3}3a \cdot 2 + 3a \cdot 2a \cdot 3a = 36a^2;$$

$$EI\delta_{22} = 2 \cdot 3a \cdot 1 + 2 \cdot 2a \cdot 1 = 10a;$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = 2 \cdot \frac{1}{2}3a \cdot 3a \cdot 1 + 3a \cdot 2a \cdot 1 = 15a^2;$$

$$EI\Delta_{1,P} = -\frac{1}{2}Pa \cdot a \cdot \frac{8}{3}a \cdot 2 - Pa \cdot 2a \cdot 3a = -\frac{26}{3}Pa^3;$$

$$EI\Delta_{2,P} = -\frac{1}{2}Pa \cdot a \cdot 1 \cdot 2 - Pa \cdot 2a \cdot 1 = -3Pa^2.$$

Система канонических уравнений (а) примет вид

$$\left. \begin{aligned} 36a^2 X_1 + 15a^2 X_2 &= \frac{26}{3}Pa^3, \\ 15a^2 X_1 + 10aX_2 &= 3Pa^2. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Решение системы (б) дает величины

$$X_1 = \frac{25}{81}P = 0,309P \quad \text{и} \quad X_2 = -\frac{22}{135}Pa = -0,163Pa.$$

На рис. 1, д и е построены эпюры  $M_1X_1, M_2X_2$ , а на рис. 1, ж – суммарная эпюра для заданной статически неопределимой системы, которая строится суммированием ординат от заданной нагрузки, а также найденных нагрузок  $X_1$  и  $X_2$ :  $\Sigma M = M_p + M_1X_1 + M_2X_2$ . Проверка правильности построения эпюры  $\Sigma M$  проводится путем перемножения этой эпюры с любой единичной. Если суммарная эпюра сложной формы, то перемножать можно эпюры  $M_p, M_1X_1, M_2X_2$ , например, на эпюру  $M_2$  (ординаты ее постоянны). В нашем случае угловое перемещение в сечении разреза (см. рис. 1) равно:

$$EI\theta = -2 \frac{1}{2}Pa \cdot a \cdot 1 - Pa \cdot 2a \cdot 1 + 2 \frac{1}{2}0,926Pa \cdot 2a \cdot 1 + 0,926Pa \cdot 2a \cdot 1 - 2 \cdot 0,163Pa \cdot 2a \cdot 1 - 2 \cdot 0,163Pa \cdot 3a \cdot 1 = -4,63 + 4,63 \equiv 0.$$

Таким образом, решение проведено правильно.

Наибольший изгибающий момент  $M_{\max} = 0,454Pa$  получается в сечениях, совпадающих с точками приложения сосредоточенных сил  $P$ . Напомним, что по суммарной эпюре моментов можно представить себе форму стержней после деформации (эпюра моментов строится на сжатой стороне стержня, а нулевая точка на эпюре моментов соответствует месту перегиба упругой линии). На рис. 1, ж форма упругой линии показана пунктиром.

### 1.2. Закрытые контуры с двухосной симметрией

В тех частных случаях, когда заданный замкнутый контур симметричен относительно двух взаимно перпендикулярных осей как

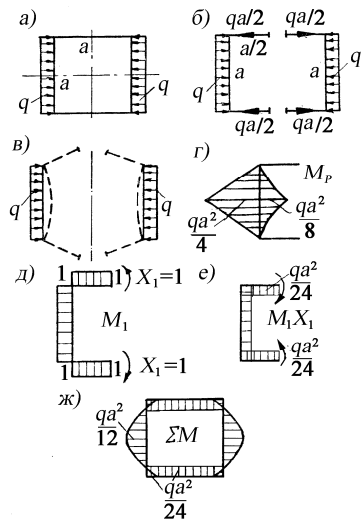


Рис. 2. Метод решения замкнутого контура с двухосной симметрией

по конструкции, так и по составу нагрузки, для решения целесообразно применять сквозной разрез по линии симметрии, разделяя контур на две отдельные части. Например, система в виде квадратного замкнутого контура (рис. 2, а), а пусть стержни, составляющие контур – постоянной жесткости. Рама загружена самоуравновешенной сплошной нагрузкой, равномерно распределенной по боковым стержням, и решается с помощью основной системы, показанной на рис. 2, б. По условиям симметрии, неизвестные силовые факторы в этом случае получатся в верхнем и нижнем

сечении одинаковыми, причем осевые силы  $N = qa/2$  определяются непосредственно по схеме основной системы как силы, уравновешивающие заданную нагрузку.

На рис. 2, в после условного разреза заданная система показана в деформированном состоянии. Согласно предыдущему, замеча-

ем, что в данном случае в плоскости разреза могут существовать изгибающие моменты  $M_1$ , а поперечные силы отсутствуют.

В итоге в рассматриваемом случае приходим к следующим выводам:

- в плоскости разреза не может быть поперечных сил вследствие симметрии;
- осевые силы определяются непосредственно по условиям равновесия основной системы под заданной нагрузкой (в данном случае они равны нулю);
- изгибающие моменты  $X_1$  определяются из канонического уравнения

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1,P} = 0. \quad (a)$$

Тем самым замкнутый контур, являющийся по определению трижды статически неопределимой системой, в данном частном случае решается как система с одним лишним неизвестным.

На рис. 2, *з*, *д* построены эпюры моментов  $M_p$ ,  $M_1$  для левой половины основной системы, показанной на рис. 2, *в* (эпюра  $M_p$  построена по правилам расслоения – относительно среднего сечения определяются моменты отдельно от продольной силы и распределенной нагрузки).

Согласно эпюрам, по правилу Верещагина получим

$$EI\delta_{11} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{a}{2} = 2a;$$

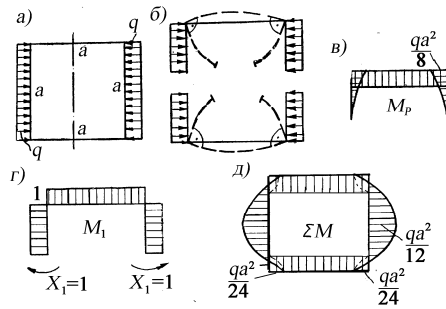
$$EI\Delta_{1,P} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{4} \cdot \frac{a}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{qa^3}{12},$$

а потому согласно (a)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1,P}}{\delta_{11}} = -\frac{qa^3}{12 \cdot 2a} = -\frac{qa^2}{24}.$$

Вследствие симметрии вычисления проводили только на половину системы.

На рис. 2, *е* построена эпюра  $M_1X_1$  и на рис. 2, *ж* – эпюра  $\Sigma M$ , ординаты которой получены на прежних основаниях по формуле  $\Sigma M = M_p + M_1X_1$ .



**Рис. 3. Варианты выбора основной системы при двухосной симметрии**

Если сквозной разрез заданной системы (рис. 3, а) сделать по другой оси симметрии и тоже представить полученную таким образом основную систему в деформированном состоянии (рис. 3, б), то придем к заключению, что в плоскости разреза в заданной системе могут

существовать только моменты  $M$ , продольные же и поперечные силы отсутствуют. Эпюра  $M_p$  для основной системы построена на рис. 3, в, а от единичного момента  $M_1$  – на рис. 3, г. Следует обратить внимание, что если по ходу решения мы захотели бы теперь в плоскости разреза приложить осевые силы  $X=1$ , то это оказалось бы невозможным, так как в пределах отдельно взятой половины основной системы такие силы не могли бы уравновеситься.

При обоих вариантах решения суммарная эпюра изгибающих моментов получается, конечно, одинаковой (рис. 3, д).

Подобным же образом решаются замкнутые круговые контуры (как кривой брус большой кривизны).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гоц, А. Н. Кинематика и динамика кривошипно-шатунного механизма поршневых двигателей: учеб. пособие / А.Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 104 с. – ISBN 5-89368-664-0.
2. Гоц, А. Н. Анализ уравновешенности и методы уравновешивания автомобильных и тракторных двигателей: учеб. пособие / А.Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 124 с. – ISBN 5-89368-725-6.
3. Базанчук, Г. А. 100 лет специальности «Двигатели внутреннего сгорания» в МГТУ им. Н.Э. Баумана / Г.А. Базанчук [и др.]; под ред. Н.А. Иващенко – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 296 с. – ISBN 978-5-7038-3058-1.
4. Савин, Г. Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости / Г.Н. Савин. – Киев: Изд-во Киевского гос. ун-та, 1965. – 263 с.
5. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
6. Глушков, Г. С. Курс сопротивления материалов / Г.С. Глушков, В.А. Синдеев. – М.: Высш. шк., 1965. – 768 с.
7. Гоц, А. Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учеб. пособие / А.Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2005. – 118 с. – ISBN 5-89368-550-4.
8. Лейбензон, Л. С. Курс теории упругости / Л.С. Лейбензон. – 2-е изд. – М.: Гостехиздат, 1947. – 464 с.
9. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности : учеб. пособие / В.И. Самуль. – М.: Высш. шк., 1970. – 288 с.
10. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн; под ред. И.Г. Арамановича; пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
11. Жемочкин, Б. Н. Теория упругости: учеб. пособие / Б.Н. Жемочкин. – 2-е изд., перераб. – М.: Госстройиздат, 1957. – 256 с.
12. Безухов, Н. И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1965. – 320 с.
13. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; пер. с нем. С.В. Фомина. – 3-е изд. – М.: Наука, 1965. – 704 с.



14. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер; под ред. Г.С. Шапиро; пер. с англ. М.И. Рейтмана. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
15. Теребушко, О. И. Основы теории упругости и пластичности / О.И. Теребушко. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
16. Вырубов, Д. И. Двигатели внутреннего сгорания: конструирование и расчет на прочность поршневых и комбинированных двигателей / Д.И. Вырубов [и др.]; под ред. А.С. Орлина, М.Г. Круглова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1984. – 384 с.
17. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
18. Киселев, В. А. Плоская задача теории упругости: учеб. пособие / В.А. Киселев. – М.: Высш. шк., 1976. – 151 с.
19. Годунов, С. К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
20. Березин, И. С. Методы вычислений. В 2 т. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
21. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1968. – 660 с.
22. Постнов, В. А. Численные методы расчета судовых конструкций / В.А. Постнов. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
23. Глявин, Ю. В. Строительная механика элементов машин / Ю.В. Глявин, И.И. Мокеев, М.Г. Пономарев. – Горький: Изд-во ГПИ, 1969. – 220 с.
24. Варвак, П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок: в 2 ч. / П.М. Варвак. – Киев: АН УССР – Ч. 1. – 1949. – 252 с.; Ч. 2. – 1952. – 275 с.
25. Гоц, А. Н. Об одном способе нагружения бесконечного плоского тела с эллиптическим отверстием / А.Н. Гоц, Л. А. Ворожцов // АН УССР. Прикладная механика. – Т. VII.– Вып. 11. – 1971. – С. 16-19.
26. Гоц, А. Н. Частные решения одной обратной краевой задачи плоской теории упругости / А.Н. Гоц, Л. А. Ворожцов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 1. – С. 12-16.

*Учебное издание*

**Гоц Александр Николаевич**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
В ЭНЕРГОМАШИНОСТРОЕНИИ**

Учебное пособие  
В двух частях  
Часть 1

Подписано в печать 17.01.12  
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 9,07. Тираж 100 экз.  
Заказ №  
Издательство  
Владимирского государственного университета.  
600000, г. Владимир, ул. Горького, 87