

КУРС ЛЕКЦИЙ

Для изучения дисциплины «Численные методы в энергомашиностроении» в 5 и 6 семестрах на кафедре разработаны учебные пособия, имеющие гриф УМО «Допущено УМО вузов России по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 141100 – Энергетическое машиностроение» профиль «Двигатели внутреннего сгорания». Это следующие пособия.

В 5 семестре:

1. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./А.Н. Гоц. – 2-е изд., испр. и доп. Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ.– 2011 – 140 с.

2. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2013. – 208 с.

3. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.1, Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 151 с.

В 6 семестре:

1. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2013. – 208 с.

2. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.2, Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 180 с.

В связи с этим, последовательность изложения курса «Численные методы в энергомашиностроении» на лекциях будет дана блоками и основана на приведенных выше учебных пособиях, которые в достаточном количестве имеются в библиотеке ВлГУ.

В 5 семестре

Блок 1 (4 часа). Методы расчета на прочность деталей ДВС при нагрузках, переменных во времени. Детерминированные модели усталостной долговечности при стационарном нагружении. Определения коэффициента запаса прочности при одноосном напряженном состоянии. Определения коэффициента запаса прочности при сложном напряженном состоянии.

Цель лекций по этому блоку – освоение студентами основных понятий и методов расчета при переменных напряжениях по известным детерминированным моделям усталостной долговечности.

Для этого из учебного пособия [1] или [2] должны быть изложены разделы на с. 6-12; 49-61; 85-95; 99-103.

На лекциях будут изложены основные понятия, которыми мы будем оперировать в дальнейшем при расчете деталей, испытывающих переменные напряжения, а также вывод основных формул, основанных на детерминированных моделях долговечности.

Описательные разделы учебных пособий (без выводов формул и зависимостей) следует перенести на самостоятельное изучение или в период консультаций студентов по первому циклу заданий курсового проекта. Ниже приводится перечень таких вопросов.

Основные законы прочности при переменных напряжениях. Предел выносливости и опытное его определение. Понятие о физической природе процесса усталостного разрушения, Обнаружение усталостных трещин. Влияние различных факторов (степени несимметрии цикла, концентрации напряжений и абсолютных размеров детали, качества обработки поверхности) на величину предела выносливости. Практические мероприятия, принимаемые для повышения усталостной прочности материалов.

На лекциях необходимо показать, что детали поршневых двигателей, а также многие детали машин в эксплуатационных условиях подвергаются действию переменных напряжений, многократно изменяющихся во времени. Такие напряжения испытывают, например, коленчатые валы, шатуны, шатунные болты, головки цилиндров двигателей внутреннего сгорания, поршневые штоки паровых машин, валики коробок скоростей, рессоры, клапанные пружины и другие детали. По результатам экспериментальных исследований и анализам многочисленных поломок деталей машин показано, что при переменных нагрузках все материалы, из которых изготавливаются детали, разрушаются при напряжениях значительно меньших, чем при постоянных нагрузках. В большинстве случаев разрушающее напряжение может быть ниже не только предела прочности, но и предела текучести или даже упругости материала.

Предел прочности σ_b и предел текучести σ_t , полученные из статических испытаний, не могут являться характеристиками прочности материала при переменных напряжениях. При расчетах на прочность в машиностроении все большее значение приобретает другая характеристика прочности материала, а именно, **предел усталости**, или **выносливости**, определяемый на основе испытаний материала при переменных напряжениях. Можно отметить, что общепринятый термин **усталость**, введенный более полувека назад, с точки зрения терминологии, по-видимому, не самый удачный, поскольку явление разрушения

при переменных напряжениях значительно отличается от биологической усталости. До сих пор не обнаружено появление каких-либо прогрессирующих изменений в свойствах материала в процессе переменного нагружения, а разрушение зачастую может происходить внезапно без заметных признаков его приближения. Кроме того, во время «отдыха», когда на деталь не действует никакая нагрузка, не происходит «залечивание» или исчезновение эффектов предварительного циклического нагружения, т. е. повреждения в процессе усталости **накапливаются** и, как правило, являются необратимыми. Другими словами, появившиеся при циклическом нагружении трещины не только не исчезают, а могут развиваться дальше даже при меньших напряжениях.

Как показывают многочисленные исследования, разрушение при переменных напряжениях начинается с образования в наиболее напряженном сечении детали микротрещин, которые, постепенно развиваясь при нагружении, проникают вглубь поперечного сечения, объединяясь в макротрещины, тем самым все более ослабляя его. Это, в конце концов, приводит к разрушению детали по наиболее ослабленному сечению.

Свойство понижения прочности материала при переменных напряжениях за счет прогрессивно развивающихся микротрещин называется **усталостью материала**. Свойство материала сопротивляться разрушению от усталости называют **выносливостью**.

Усталость охватывает две значительно отличающиеся друг от друга области циклического нагружения и деформирования, в каждой из которых разрушение является, по-видимому, следствием действия различных физических механизмов. Одна из этих областей – циклическое нагружение, при котором во время каждого цикла возникают значительные пластические деформации. Эта область характеризуется большими по величине нагрузками и малыми долговечностями, т. е. небольшим числом циклов до усталостного разрушения. Обычно эта область называется **малоцикловой или деформационной усталостью**.

Другая область – циклическое нагружение, при котором деформация во время каждого цикла в значительной степени упруга. Для этой области характерны малые нагрузки и большие долговечности, т. е. большое число циклов до разрушения. Эта область обычно называется **многоцикловой усталостью**. Малоцикловая усталость обычно ассоциируется с областью, для которой число циклов до разрушения не превышает $10^4 \dots 10^5$, а многоцикловая усталость с областью, которая характеризуется долговечностью $10^6 \dots 10^8$ циклов. Под долговечностью понимается число циклов до разрушения образца (или до появления трещины заданных размеров).

Для уменьшения вариантов расчетов на лекции показано, что проведенный расчет коэффициентов ψ_σ и ψ_τ , учитывающих влияние средних напряжений на предельные

амплитудные напряжения, для наиболее используемых в двигателестроении сталей и высокопрочных чугунов позволяют просто вычислять запасы прочности. Точно также вычислен коэффициент постоянства нагружения χ , который в нашей справочной литературе используется редко, но он позволяет вычислить положение рабочих циклов напряжений и выбрать методы расчета – по усталостному разрушению или текучести. Это уменьшает объем расчетов, так как не требуется проводить определение запасов прочности по двум видам разрушения.

Блок 2 (4 часа). Теория напряженного состояния. Дифференциальные уравнения равновесия. Напряжение в наклонных площадках. Главные напряжения. Геометрическая теория деформаций. Уравнения неразрывности деформаций.

Цель лекций по этому блоку – освоение студентами основных понятий и методов определения напряженного и деформированного состояния в теории упругости.

Этот блок охватывает главу 1 и 2 учебного пособия [3], с. 10-31 и 38-50. Для самостоятельного изучения рекомендуется пп. 1.7, 1.8, 1.9; 2.4, 2.5.

Численные методы расчета в энергомашиностроении позволяют решать следующие основные проблемы.

- Разработку методов определения величины и характера распределения напряжений и деформаций, возникающих в конструкциях поршневых двигателей при действии заданных внешних сил. Решение этой проблемы применительно к отдельным элементам выполняется с использованием соответствующих методов сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности и других разделов механики деформируемого твердого тела.
- Исследование допускаемых напряжений: изучение факторов, влияющих на прочность основных деталей поршневого двигателя в процессе его эксплуатации, установление уровней предельно допустимых напряжений, деформаций и перемещений с полным учетом всех факторов, влияющих на прочность.
- Разработку методов расчета долговечности деталей особенно в условиях действия высоких температур, а также нагрузок, действующих циклически.
- Разработку методов численного решения напряженно-деформированного состояния наиболее нагруженных деталей тепловых двигателей с использованием методов конечных элементов, сеточного и др.

Ввиду сложности основных проблем численных методов адекватность полученных результатов может быть получена только при экспериментальных исследованиях как модельных, так и натурных.

Степень и глубина разработки указанных основных проблем численных методов расчета деталей поршневых двигателей различны. Наиболее строго и полно решена, пожалуй, первая проблема. Однако с точки зрения получения окончательных результатов все три проблемы имеют одинаковое значение. Действительно, если даже допущена неточность в определении величины

внешних нагрузок или допускаемых напряжений, результат практически один и тот же – конструкция в зависимости от знака ошибки будет иметь либо избыточную прочность, а следовательно, и массу, либо окажется недостаточно прочной. Поэтому главной задачей при расчете деталей поршневых двигателей является расширение исследований по указанным проблемам.

Следует показать, что *механика деформируемого твердого тела* – наука, изучающая напряженно-деформированное состояние реальных тел при силовом и температурном воздействиях. Она разрабатывает методы, которые используются при расчетах прочности и проектировании самых разнообразных инженерных сооружений: поршневых двигателей, самолетов, космических кораблей, машин и т. д. Эта наука служит также основой многих технологических процессов: гибки,ковки, обработки материалов резанием, давлением.

Используемый в механике деформируемого твердого тела математический аппарат базируется на общих законах механики и ряде упрощающих допущений, а также понятий.

Сечением тела называется любая мысленно проведенная поверхность, разделяющая тело на две части. Каждому сечению соответствуют две совпадающие внутренние поверхности, принадлежащие расположенным по разные стороны от сечения частям тела.

Одним из таких свойств, которым в той или иной мере обладают все конструкционные материалы, является *свойство упругости*, т. е. способность тела, изготовленного из такого материала, восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после снятия внешних нагрузок. Частный, но очень важный для практики случай упругости – это линейно-упругое тело Гука (линейная зависимость между напряжениями и деформациями для каждой температуры независимо от времени).

При этом первоначальное состояние тела предполагается ненапряженным; оно обычно именуется *естественным* состоянием тела. Предположение о естественном состоянии тела исключает из рассмотрения начальные напряжения, характер и величина которых, как правило, нам неизвестны и зависят от истории возникновения тела.

Идеально упругое тело предполагается *сплошным*, т. е. твердое тело способно заполнять объем без всяких пустот и после деформации. Таким образом, допущение о *сплошности* полагает, что материал представляет собой сплошную среду – континуум, не имеющую дискретной (молекулярной, атомной) структуры, характерной для любого реального тела. Допущение о сплошности позволяет ввести понятие напряженно-деформированного состояния в окрестности точки тела и записать условия равновесия элемента тела в виде дифференциальных уравнений. Кроме того, это допущение позволяет считать перемещения точек тела при деформации непрерывными и дифференцируемыми

функциями координат и выразить компоненты деформаций через производные этих функций.

Полученное в результате допущения о сплошности абстрактное тело наделяют некоторыми механическими свойствами, аппроксимирующими способность реальных тел сопротивляться деформированию.

Идеально упругое тело принимается *однородным*. Это значит, что во всех точках тело под действием одних и тех же напряжений деформируется одинаково. Предположение об *однородности* позволяет считать величины, характеризующие упругие свойства тела, постоянными по всему объему тела.

Идеально упругое тело предполагается *изотропным*. Под этим подразумевается, что упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки, а любая плоскость, проходящая через частицу тела, является для нее плоскостью симметрии. Если эти свойства одинаковы во всех частицах тела, то приходим к понятию однородного изотропного тела.

Реальные тела в той или иной степени отличаются от рассматриваемой модели. Поэтому приемлемость решений, получаемых в теории упругости, для реальных тел зависит от того, насколько эти тела можно считать вполне упругими, сплошными, однородными и изотропными.

Использование допущения об упругости в дополнение к допущению о сплошности привело к образованию большого самостоятельного раздела механики деформируемого твердого тела – *теории упругости*.

В классической теории упругости принимается, что перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами, а относительные удлинения и углы сдвига малы по сравнению с единицей.

Малость деформаций и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяет применять *принцип независимости действия сил*. Этот принцип при действии на тело группы сил дает возможность подсчитать воздействие каждой силы в отдельности с последующим сложением полученных результатов.

Все внешние силы, действующие на твердое тело, можно разбить на две группы: поверхностные и объемные.

Поверхностные силы – это результат контакта двух тел. Они распределены по поверхности тела, например, давление газов на поршень, давление воды на плотину и т. д. Поверхностные силы характеризуются *интенсивностью*, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которой распределена эта сила. Если размеры площади, на которой действует сила, малы по сравнению с размерами тела, то

такой площадью можно пренебречь и считать, что сила приложена в точке. Такую силу называют *сосредоточенной*.

Объемные силы действуют в каждой точке тела. К ним относятся, например, силы инерции.

Показать, что если около данной точки мысленно вырезать несколько бесконечно малых параллелепипедов, грани которых различным образом ориентированы по отношению к осям координат, то, очевидно, компоненты напряжений для одного такого элементарного параллелепипеда будут отличными от компонентов для другого, так как напряжения зависят от направления рассматриваемой площадки, проходящей через заданную точку. Однако также очевидно, что независимо от способа вырезания элемента около заданной точки при подстановке значений его компонентов напряжений в уравнение на наклонной площадке получаются одни и те же значения главных напряжений для всех таких элементарных параллелепипедов. *Главные напряжения* в данной точке существуют, и *величины их* независимы от метода их нахождения, т. е. они *инвариантны* по отношению к преобразованию координатной системы. Привести основное уравнение для определения главных напряжений.

Блок 3 (4 часа). Обобщенный закон Гука. Основные уравнения теории упругости и способы их решения. Теорема единственности, Методы решения задач теории упругости. Методы решения плоской задачи теории упругости для односвязных областей.

Цель лекций для этого блока – для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформации установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят физический характер, поэтому их иногда называют физическими уравнениями теории упругости. Действительно, рассматривая изучаемые в курсе сопротивления материалов диаграммы растяжения различных материалов, заключаем, что зависимости напряжение – деформация определяются свойствами материалов.

Этот блок охватывает главу 3, 4 и 5 учебного пособия [3], с. 52-55; 62-65; 68-71; 75-83. Для самостоятельного изучения рекомендуется пп. 3.3; 4.2, 4.3, 5.4.2.

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформации необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят физический характер, поэтому их иногда называют физическими уравнениями теории упругости. Действительно, рассматривая изучаемые в курсе сопротивления материалов диаграммы растяжения различных материалов, заключаем, что зависимости напряжение – деформация определяются свойствами материалов.

Ограничиваясь малыми деформациями упругого тела, связь между напряжениями и деформациями можно принять линейной. При этом в общем случае каждая составляющая напряжения может зависеть от всех составляющих деформации

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}, \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx}, \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{yz} + a_{36}\gamma_{zx}, \\ \tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{yz} + a_{46}\gamma_{zx}, \\ \tau_{yz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{yz} + a_{56}\gamma_{zx}, \\ \tau_{zx} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Коэффициенты a_{mn} называются упругими постоянными и в общем случае их оказывается 36.

Рассматривая только обратимые процессы деформирования, т. е. такие, при которых после снятия нагрузок форма и размеры тела полностью восстанавливаются, можно убедиться, что между коэффициентами a_{mn} существует зависимость $a_{mn} = a_{nm}$. Тогда количество упругих постоянных окажется равным 21.

В случае изотропного тела формулы (a) не должны изменяться при любых преобразованиях координат. Преобразуя координаты путем поворота осей на 180° , можно установить, что нормальные напряжения не связаны с угловыми деформациями, а касательные напряжения не связаны с линейными деформациями. Кроме того, касательные напряжения не связаны с угловыми деформациями в других плоскостях. После поворотов осей на 90° и на произвольный угол число упругих постоянных сокращается до двух. В качестве упругих постоянных можно взять постоянные, известные из курса сопротивления материалов.

При испытании стержня на растяжение установлена пропорциональность между нормальным напряжением и линейной деформацией в одном направлении

$$\varepsilon = \sigma/E,$$

называемая законом Гука. Входящая сюда упругая постоянная E называется *модулем упругости*.

Также экспериментально установлен закон, связывающий линейные деформации в продольном ε_x и поперечном ε_y направлениях:

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x. \quad (б)$$

Входящая в уравнение (б) вторая упругая постоянная μ называется коэффициентом Пуассона.

При испытании на чистый сдвиг установлена пропорциональность между касательным напряжением и угловой деформацией в плоскости действия этого напряжения

$$\gamma = \tau/G. \quad (в)$$

Здесь появляется уже третья упругая постоянная G , называемая модулем *сдвига*. Однако модуль сдвига не является новой независимой упругой постоянной, так как он выражается через первые две известной из курса сопротивления материалов зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Чтобы установить зависимости между составляющими деформации и составляющими напряжений при объемном напряженном состоянии, выделим из тела бесконечно малый параллелепипед и рассмотрим действие только нормальных напряжений σ_x , σ_y , σ_z . Разницей между напряжениями на противоположных гранях можно пренебрегать, так как она дает деформации более высокого порядка малости.

Воспользуемся принципом независимости действия сил. Так, при действии силы $P_x = \sigma_x dydz$ вдоль оси x напряжение σ_x вызывает одновременно три линейные деформации: по линии действия силы получается линейная деформация $\varepsilon_x = \sigma_x/E$, а по направлениям, перпендикулярным направлению P_x , – линейные деформации $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$.

При одновременном действии трех растягивающих нагрузок получится девять линейных деформаций, суммирующихся по направлению каждой из трех осей x , y , z . Получающиеся по каждому из этих направлений деформации могут быть объединены следующим образом.

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями согласно закону Гука при сдвиге (ϑ) можно представить независимо для каждой из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \quad (2)$$

Суммируя линейные деформации в направлении каждой оси (см. табл. 3), получим суммарные линейные деформации в трех взаимно перпендикулярных направлениях x , y , z , а также используя (2), получим шесть формул *обобщенного закона Гука*.

Они выражают линейную зависимость между составляющими деформации и составляющими напряжений в изотропном упругом теле

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\}$$

Формулы обобщенного закона Гука в цилиндрической системе координат x , θ , r получаем из полученной формулы простой заменой индексов x , y , z соответственно на

индексы x, θ, r

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r)], & \gamma_{x\theta} &= \frac{\tau_{x\theta}}{G}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_x)], & \gamma_{\theta r} &= \frac{\tau_{\theta r}}{G}, \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_x + \sigma_\theta)], & \gamma_{rx} &= \frac{\tau_{rx}}{G}. \end{aligned} \right\}$$

В теории упругости часто используют обратную форму закона Гука, которая имеет вид (вывод см. [3], пп. 3.2).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

Эти формулы называют *обратной формой закона Гука*.

После вывода обобщенного закона Гука рассматривается работа упругих сил и потенциальная энергия деформации (вывод см. [3], пп. 3.3).

Блок 4 (4 часа). Решение плоской задачи в тригонометрических рядах. Понятие о методе конечных разностей (метод сеток) для решения плоской задачи. Порядок расчета балки-стенки методом конечных разностей. Другие сеточные методы решения плоской задачи теории упругости (см. [3], пп.5.4., 5.5, 5.6, 5.7) .

Цель лекций для этого блока – показать приближенное решения основных уравнений теории упругости для определения напряженно-деформированного состояния упругого тела.

Если при каком-либо напряженном состоянии тела перемещения всех его точек могут происходить только в двух направлениях, т. е. только в одной плоскости, то такая деформация называется *плоской*. Примером может служить тело, помещенное между двумя абсолютно твердыми плитами, расстояние между которыми остается неизменным, и сжимаемое силами, параллельными плоскостям плит.

В таких же условиях фактически оказывается тело, размеры которого в одном направлении, например в направлении оси z , очень велики (например длинном цилиндрическом катке, длинной пластинке и т. д.).

Если такое длинное в направлении, например, оси z тело нагружено силами (рис. 17), не меняющимися по длине тела и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на значительном расстоянии от концов, фактически будет подвергаться плоской деформации.

Перемещения всех точек деформированного тела в таком случае происходят в плоскостях, перпендикулярных к длине тела.

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются, если напряжения параллельны одной плоскости. Так, в задаче о тонкой пластинке, нагруженной по боковой

поверхности силами, параллельными ее основаниям и равномерно распределенными по ее толщине (см. рис.), возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации.

Этот случай называется *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

На основаниях пластинки напряжения σ_z , τ_{yz} и τ_{xz} равны нулю, а так как она тонкая, то можно считать, что $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ по всему объему пластинки. По той же причине остальные напряжения можно считать постоянными по толщине пластинки, т. е.

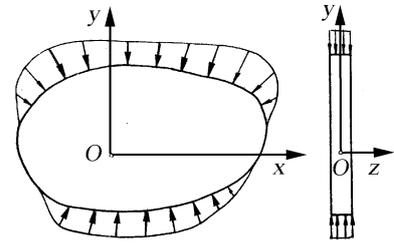


Рис. Обобщенное плоское напряженное состояние

не зависящими от координаты z . Таким образом, в тонкой пластинке, нагруженной силами, параллельными плоскости xOy , возникает напряженное состояние, для которого

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

В отношении напряжений обобщенное плоское напряженное состояние отличается от плоской деформации условием $\sigma_z = 0$. Переходя к деформациям с помощью третьей формулы закона Гука, получаем, что деформация

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Поскольку $\varepsilon_z \neq 0$, то основания пластинки не остаются плоскими, а будут искривляться.

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации: дифференциальные уравнения равновесия, условия на поверхности, формулы Коши и уравнение неразрывности деформаций (53) сохраняют такой же вид и в задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии, а формулы закона Гука примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

Тело называется *односвязным*, когда оно полностью занимает объем внутри одной замкнутой внешней поверхности. Если объем, занятый телом, заключен между двумя замкнутыми поверхностями, одна из которых полностью размещается внутри другой и образует внутреннюю полость в теле, то такое тело называется *двухсвязным*. При наличии двух, трех таких полостей тело называется соответственно *трех-, четырехсвязным* и т. п. Всякий открытый в обе стороны (сквозной) канал в теле также увеличивает степень

связности тела на единицу.

Тело считается заданным, если известны его границы (ограничивающие поверхности) и заданы некоторые механические свойства его материала.

Отыскание бигармонической функции, удовлетворяющей условиям на контуре прямоугольной области, возможно различными методами. На лекциях ограничимся рассмотрением лишь некоторых из них: решение плоской задачи в полиномах, решение плоской задачи в тригонометрических рядах, решение плоской задачи при помощи конечных разностей.

В более сложных случаях расчета прямоугольной пластинки в качестве функции напряжений для плоской задачи $\varphi(x, y)$ можно применять тригонометрические ряды. Исследуем для этого следующую тригонометрическую функцию:

$$\varphi = Y \cos \alpha x, \quad (a)$$

где Y – функция, зависящая только от координаты y ;

$$\alpha = n\pi/L, \quad (б)$$

L – длина пластинки в направлении оси x .

Исследуем, при каких условиях функция $\varphi(x, y)$ является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Подсчитаем четвертые производные от функции $\varphi(x, y)$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos \alpha x, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 Y'' \cos \alpha x, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos \alpha x.$$

Подставляя эти производные в бигармоническое уравнение, получаем:

$$\alpha^4 Y \cos \alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos \alpha x + Y^{IV} \cos \alpha x = 0$$

или

$$\cos \alpha x (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента x , если $Y(y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно представить с помощью гиперболических функций в виде [3]

$$Y = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y.$$

Подставляя это выражение в (a), получим:

$$\varphi(x, y) = \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y). \quad)$$

Полученная функция бигармоническая и может быть использована для решения плоской задачи.

Аналогично можно показать, что функция

$$\varphi(x, y) = \sin \alpha x (A_n' \operatorname{ch} \alpha y + B_n' y \operatorname{ch} \alpha y + C_n' \operatorname{sh} \alpha y + D_n' y \operatorname{sh} \alpha y)$$

также является бигармонической и может быть применена для решения плоской задачи.

При поиске количественного описания физического явления обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливую в определенной области, и налагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. На этой стадии математическая модель замкнута, и для практических применений требуется только найти решение для конкретного множества числовых данных. Здесь, однако, возникают основные трудности, так как точному решению существующими математическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются одним из немногих примеров, для которых имеются стандартные процедуры решения, но даже здесь при большом числе зависимых переменных встречаются значительные трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность воспользоваться ПЭВМ, необходимо преобразовать задачу к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды дискретизации непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При этом бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию или функции, заменяется конечным числом неизвестных параметров, и для этого процесса, вообще говоря, требуется некоторая форма аппроксимации. Среди различных возможных видов дискретизации одним из простейших является процесс перехода к конечным разностям. Рассмотрим основные понятия этого процесса, что позволит сформулировать суть метода.

Точное решение бигармонического уравнения $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$ плоской задачи

во многих случаях оказывается очень сложным. Для его решения можно применить приближенный метод конечных разностей. Его еще часто называют конечно-разностным, или методом сеток [3]. Идея метода состоит в том, чтобы решение плоской задачи через функцию напряжений φ , определяемую бигармоническим уравнением, свести к алгебраическим уравнениям.

В методе конечных разностей частные производные бигармонического уравнения

приближенно заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое.

Другие сеточные методы решения задач теории упругости можно перенести на самостоятельное изучение. Погрешности метода конечных разностей уменьшаются с увеличением количества узловых точек, однако при этом значительно возрастает объем вычислений. Так, при решении системы с восемью уравнениями приходится выполнять операций в шесть раз больше, чем при решении системы с четырьмя уравнениями.

Ряд погрешностей можно избежать, если удастся подобрать такое напряженное состояние, которое удовлетворяло бы во всех точках тела дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности тела. При таком подходе решение задачи будет зависеть лишь от того, насколько точно будут соблюдаться уравнения сплошности тела.

Блок 5 (2 часа). Плоская задача теории упругости в полярных координатах. Простое радиальное напряженное состояние. Функции напряжений для плоской задачи в полярных координатах (см. [3], пп.6.1 – 6.8).

Цель лекций для этого блока – показать методы решения задач теории упругости для тел, описываемых окружностью или частью ее.

При решении плоской задачи встречаются тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра с радиально расходящимися плоскостями. В этих случаях переход от декартовой системы координат к полярной значительно упрощает решение.

Выведем основные уравнения плоской задачи в полярных координатах: дифференциальные уравнения равновесия, уравнение сплошности, формулы Коши и формулы обобщенного закона Гука.

Вырежем из пластинки толщиной, равной единице, элемент $abcd$ (рис. 37). Для этого проведем радиус Oab под произвольным углом θ к оси абсцисс, затем дадим углу

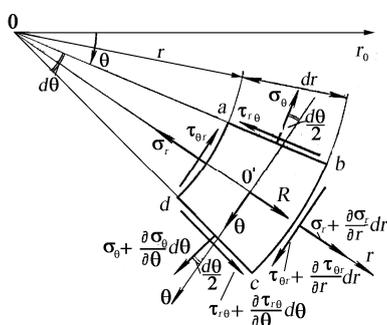


Рис. Равновесие элементарного объема в полярной системе координат

бесконечно малое приращение $d\theta$ и проведем радиус Odc . Произвольным радиусом $Oa = r$ проведем дугу ad , затем дадим радиусу r приращение $ab = dr$ и проведем вторую дугу bc . Стороны полученного элемента имеют следующие размеры:

$$ab = cd = dr; \quad ad = rd\theta, \quad bc = (r + dr)d\theta.$$

На гранях этого элемента действуют следующие составляющие напряжений: σ_r – радиальное

нормальное, σ_θ – тангенциальное нормальное напряжение, $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$ – касательные напряжения.

Дифференциальные уравнения равновесия в полярной системе координат получим как частный случай уравнений равновесия в цилиндрической системе координат.

Если положить $\sigma_x = 0$; $\tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0$, то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Особенностью этих уравнений является наличие в знаменателе r . Чем ближе к началу координат расположена рассматриваемая точка, тем быстрее будут возрастать слагаемые, содержащие множитель $1/r$. Поэтому уравнения (143) неприемлемы для точек, лежащих в начале координат.

Преобразуем к полярным координатам уравнение сплошности в плоской задаче. В декартовых координатах уравнение сплошности имело такой вид:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (a)$$

Сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам в плоской задаче является инвариантом. Действительно, подставляя в первый инвариант напряженного состояния $\sigma_z = 0$, получим, что при обобщенном плоском напряженном состоянии инвариантной величиной будет

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y.$$

При плоской деформации напряжение $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ и инвариантной величиной является

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \mu)(\sigma_x + \sigma_y).$$

Таким образом, в плоской задаче в каждой точке сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная, и можно составить следующее тождество:

$$\sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_r + \sigma_\theta.$$

Заменяя с помощью этого тождества напряжения в формуле (a), получаем уравнение сплошности для плоской задачи в полярной системе координат:

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

В развернутом виде это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

Формулы Коши можно получить как частный случай формул, сохраняя в них только составляющие деформаций и перемещений в плоскости $\theta\theta r$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\}$$

Здесь u_r – составляющая перемещения вдоль оси r , а u_{θ} – составляющая перемещения, перпендикулярная к оси r .

Формулы закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния в полярных координатах также получим как частный случай, сохраняя только составляющие напряжений и деформаций, действующие в плоскости θOr :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= (\sigma_{\theta} - \mu \sigma_r) / E; \\ \varepsilon_r &= (\sigma_r - \mu \sigma_{\theta}) / E; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{\theta r}. \end{aligned} \right\}$$

При решении многих задач приходится иметь дело с напряженным состоянием, при котором во всех точках напряженного тела действуют только радиальные нормальные напряжения σ_r ,

а остальные составляющие напряжений $\sigma_{\theta} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$, $R = \theta = 0$. Такое напряженное состояние называется простым радиальным напряженным состоянием.

В случае простого радиального напряженного состояния первое уравнение системы (143) обратится в тождество, а второе – уравнение равновесия и уравнение сплошности (145) – значительно упростятся

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Систему уравнений (a) можно проинтегрировать в общем виде. Для этого применим метод Фурье. Представим напряжение $\sigma_r(r, \theta)$, являющееся функцией двух переменных r и θ , в виде произведения двух функций

$$\sigma_r = \varphi \cdot \psi, \quad (б)$$

одна из которых $\varphi(r)$ является функцией только одного переменного r , а другая $\psi(\theta)$ – одного переменного θ .

Использование полученного решения необходимо показать на примере клина, нагруженного в вершине сосредоточенной силой (см.[3], пп. 6.3-6.6.).

Решение плоской задачи в полярных координатах в напряжениях заключается в

отыскании трех функций: $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$ и $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ с помощью трех уравнений: двух уравнений равновесия и уравнения сплошности, удовлетворяющих условиям на поверхности.

Аналогично тому как это было сделано при решении плоской задачи в декартовых координатах, решение плоской задачи в полярных координатах можно свести к отысканию одной функции напряжений $\varphi(r, \theta)$. Введем эту функцию так, чтобы напряжения выражались через нее следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти соотношения в уравнения равновесия (143), убеждаемся, что при отсутствии объемных сил уравнения равновесия обращаются в тождества.

В 6 семестре используются пособия:

1. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2013. – 208 с.

2. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.2, Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 180 с.

Блок 1 (2 часа). Изгиб тонких пластинок. Основные понятия и гипотезы. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки.

Изложение материала лекции соответствует главе 7 учебного пособия [2], пп.7.1-7.6.

Цель лекции – ознакомить студентов с основными понятиями, принятыми при расчете тонких пластин.

Пластинкой называется призматическое или цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами в плане. Высота такого тела называется толщиной пластинки и обозначается h .

Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется *срединной плоскостью*. При изгибе пластинки срединная плоскость превращается в изогнутую срединную поверхность пластинки.

Линия пересечения боковой поверхности пластинки со срединной плоскостью называется *контуром* пластинки.

Для исследования деформаций пластинки прямоугольную систему координат будем располагать так, чтобы координатная плоскость xOy совпала со срединной плоскостью

пластинки. Ось z будем направлять вниз. При таком выборе системы координат составляющие перемещений по оси x будут u_x , оси y – u_y , а в направлении оси z – u_z , которое будет представлять собой прогиб пластинки. Положение начала координат в срединной плоскости будем выбирать в каждом рассматриваемом случае в зависимости от очертания контура пластинки и характера закрепления ее краев (рис. 1).

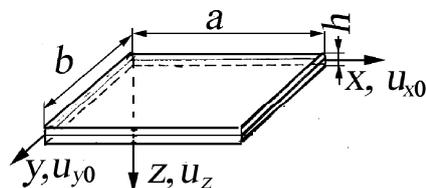


Рис. 1. Тонкая прямоугольная пластинка

При расчете пластинок различают тонкие пластинки и толстые плиты, которые применяются в строительстве.

Тонкими называются пластинки, имеющие отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане примерно в следующих пределах:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{h}{b} \geq \frac{1}{80}.$$

Величина ожидаемых прогибов w для такой пластинки не более $h/4$ (см. рис 1). Как показал Б.Г. Галеркин, теорию тонких пластинок можно использовать даже при $h/b = 1/3$.

Пластинки, у которых $h/b > 1/3$, рассчитываются по теории толстых плит, а пластинки, имеющие прогибы более $h/4$ рассчитываются по теории гибких пластинок или мембран.

Тонкие пластинки можно рассчитывать по приближенной теории – технической теории изгиба пластинок, основанной на следующих гипотезах, предложенных Кирхгофом:

1. Гипотеза прямых нормалей: любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластинки, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации и длина его не изменяется.

Любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости, направлен вдоль оси z , и, следовательно, первая часть гипотезы предполагает, что прямые углы между этим элементом и осями x и y остаются прямыми, т. е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Гипотеза о сохранении длины прямоугольного элемента предполагает, что линейная деформация в направлении оси z отсутствует:

$$\varepsilon_z = 0.$$

2. Гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости: в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига, а значит, срединная плоскость является нейтральной. Следовательно, в срединной плоскости (см. рис. 1) перемещения

$$u_{x0} = 0, u_{y0} = 0.$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки. Ввиду малости давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, напряжением σ_z по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y можно пренебречь.

Согласно первой гипотезе линейная деформация в направлении оси z $\varepsilon_z = 0$. Подставляя это условие в формулу Коши [1], получаем:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Отсюда следует, что прогибы пластинки u_z не зависят от координаты z , т. е.

$$u_z = u_z(x, y).$$

Это означает, что все точки пластинки, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости пластинки, чтобы знать прогибы всех ее точек.

Рассматривая условия для сдвигов, из формул Коши [1] получаем:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0,$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0.$$

Откуда находим производные от составляющих перемещения по осям $x - u_x$ и $y - u_y$ по координате z

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Интегрируя эти уравнения по z , получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial u_z}{\partial x} + f_1(x, y); \\ u_y &= -z \frac{\partial u_z}{\partial y} + f_2(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для вычисления функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, появившихся при интегрировании уравнений в частных производных, воспользуемся гипотезой о нерастяжимости срединной плоскости. Согласно этой гипотезе составляющие перемещения u_x и u_y на срединной плоскости $u_{x0} = 0$, а также $u_{y0} = 0$ при $z = 0$. Подставляя эти условия в формулы (a), получаем:

$$u_{x0} = f_1(x, y) = 0,$$

$$u_{y0} = f_2(x, y) = 0.$$

Тогда формулы (a) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ u_y &= -z \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, составляющие перемещения точек пластинки в направлениях осей x и y выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Составляющие деформации в пластинке, отличные от нуля, найдем с помощью формул Коши, подставляя в них значения составляющих перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Здесь составляющие деформации так же, как и составляющие перемещения, выражены через одну функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки, его обычно называют уравнение Софи Жермен:

$$D \left(\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) - q = 0$$

или

$$D \nabla^4 u_z - q = 0.$$

При интегрировании уравнения Софи Жермен появятся произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий на контуре пластинки, которые, в свою очередь, зависят от характера закрепления ее краев.

Блок 2 (2 часа). Условие на контуре пластинки. Эллиптическая пластинка. Основные уравнения изгиба круглой пластинки.

Цель лекции – научить студентов определять граничные условия при различных закреплениях краев пластинки.

На контуре пластинки в зависимости от характера закрепления краев могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы. Условия, при которых на контуре задаются перемещения, т. е. прогибы или углы поворота срединной плоскости, называются *геометрическими*. *Статическими* называются условия, при которых на контуре

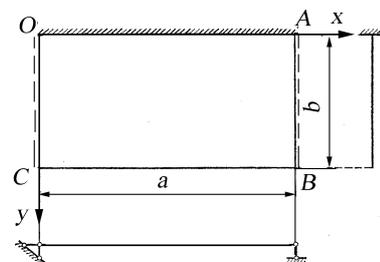


Рис. 7. Варианты закрепления краев пластинки: OA – защемление; AB и OC – шарнирное закрепление; BC – свободный край

задаются усилия, т. е. изгибающие или крутящие моменты или поперечные силы. Если же на контуре заданы одновременно и перемещения и усилия, условия называются *смешанными*. На каждом крае следует задать два граничных условия.

Сформулируем граничные условия для различных закреплений краев пластинки. Для этого рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 7).

З а щ е м л е н н ы й к р а й OA . В заземлении отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно оси x . В связи с этим имеем следующие условия:

$$\text{при } y = 0 \text{ должно быть } u_z = 0, \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Ш а р н и р н о о п е р т ы е к р а я OC и AB . На шарнирных краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, т. е. $u_z = 0$ и $M_x = 0$. Выражая изгибающий момент через прогибы пластинки согласно формулам (7.9), последнее условие можно представить так:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

Поэтому граничные условия на шарнирно опертых краях OC и AB принимают такой вид:

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \text{ должно быть } u_z = 0, \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

С в о б о д н ы й к р а й CB . На свободном краю должны обращаться в нуль изгибающий момент M_y , поперечная сила Q_y и крутящий момент H , т. е. вместо двух необходимых условий здесь появляются три условия. Такое противоречие связано с тем, что задача решается приближенно и поэтому всем граничным условиям точно удовлетворить нельзя. Однако это противоречие можно устранить, объединив два последних условия.

Покажем, что крутящий момент и поперечную силу на контуре пластинки можно заменить одной силой, статически им эквивалентной. Рассмотрим крутящий момент H , распределенный вдоль грани CB , параллельной оси x (рис. 8, а). На длине dx действует крутящий момент, равный Hdx . Этот момент можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил H с плечом dx (рис. 8, б). На соседнем элементе dx крутящий момент будет больше на бесконечно малую величину и равен $(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx)dx$. Его

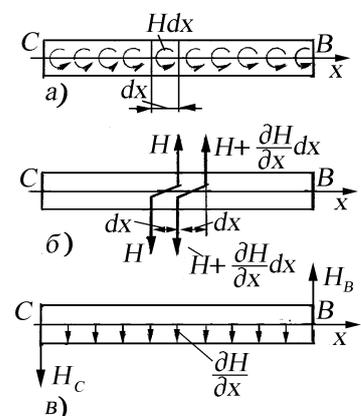


Рис. 8. Замена переменного погонного крутящего момента распределенной нагрузкой

также можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ с плечом dx . Такую замену крутящих моментов вертикальными силами можно осуществить по всей длине границы CB . На границе каждого бесконечно малого участка dx , за исключением крайних точек C и B , будут действовать по две противоположно направленные силы, разность между которыми равна $\frac{\partial H}{\partial x} dx$. Следовательно, вдоль грани CB будет действовать вертикальная распределенная по длине нагрузка интенсивностью $\frac{\partial H}{\partial x}$ (рис. 8, в). В точках же C и B будут возникать сосредоточенные силы H_C и H_B . Полученную вертикальную нагрузку можно объединить с поперечной силой Q_y и считать, что на грани CB действует приведенная поперечная сила интенсивностью

$$Q_y^{\text{прив.}} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (7.18)$$

Аналогично вдоль граней контура пластинки, параллельных оси y , будет действовать приведенная поперечная сила с интенсивностью

$$Q_x^{\text{прив.}} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (7.19)$$

Производные от функции, аппроксимирующей крутящий момент H (7.11), по x и y равны:

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{\text{прив.}} &= -D \left[\frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} \right] \\ Q_y^{\text{прив.}} &= -D \left[\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Таким образом, на каждой грани пластинки вместо трех усилий: изгибающего

момента, крутящего момента и поперечной силы, можно рассматривать только два усилия: изгибающий момент и приведенную поперечную силу.

На рис. 9 показаны положительные направления этих приведенных поперечных сил на всех гранях прямоугольной пластинки, а также сосредоточенных сил, возникающих в углах пластинки.

Следовательно, на свободной от закрепления грани

$$M_y = 0, \quad Q_y = 0, \quad H = 0$$

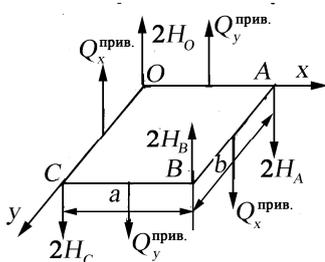


Рис. 9. Направление положительных приведенных сил

вместо трех условий

можно потребовать удовлетворения лишь двух условий

$$M_y = 0, \quad Q_y^{\text{прив.}} = 0. \quad (a)$$

Конечно, при этом граничные условия будут удовлетворяться приближенно. На основании принципа Сен-Венана такая замена поперечной силы и крутящего момента статически им эквивалентной приведенной поперечной силой вызовет лишь местные напряжения вблизи рассматриваемого края пластинки.

Внесем в условия (a) выражения изгибающего момента M_y (7.9) и приведенной поперечной силы $Q_y^{\text{прив.}} = 0$ (7.20). Тогда на свободной грани CB при $y = b$ должно быть

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Для расчета эллиптической пластинке предлагается априори выбрать уравнение изгиба срединной плоскости, а далее используя уравнение Софи Жермен и уравнения для внутренних силовых факторов, найти условия закрепления.

Для самостоятельного изучения рекомендуется [2] пп. 7.9, 7.10, 7.11 и 7.12.

Блок 3 (2 часа). Расчет симметрично нагруженных цилиндрических деталей. Расчет прессовых посадок при одинаковой длине сопрягаемых деталей.

Цель лекции.

Теория расчета цилиндров, нагруженных постоянным по длине давлением, позволяет определять напряжения в трубах, цилиндрах машин, в напрессованных деталях и т. п., когда давление распределено равномерно и концевые эффекты, связанные, например, с наличием днищ, отсутствуют. Она пригодна также и для тех случаев, когда постоянное давление распределено только по части длины детали или когда концы цилиндра закреплены. В этих случаях, однако, теория дает возможность установить лишь напряжения, возникающие на достаточном расстоянии от мест изменения давления или от концов цилиндра.

Напряжения вблизи мест изменения нагрузки или вблизи концов цилиндра могут быть определены с помощью теории расчета цилиндров, нагруженных переменным давлением.

Отметим главнейшие из практических задач, решаемых этой теорией:

- определение напряжений в цилиндре, нагруженном давлением на части длины; вопрос этот является актуальным, например, при расчете цилиндров двигателя, где максимальное давление в рабочем пространстве имеет место лишь на небольшой

части хода поршня и, следовательно, воздействует только на сравнительно узкий кольцевой пояс поверхности цилиндра;

- определение напряжений около мест сопряжения полого цилиндра с днищами;
- расчет прессовых посадок в том случае, если сопрягаемые детали имеют различную длину.

В приближенной постановке рассмотрим также расчет вращающихся дисков постоянной толщины, например, маховиков, устанавливаемых на хвостовике коленчатого вала двигателей внутреннего сгорания.

Рассмотрим сначала деформации тонкой шайбы, имеющей толщину dz (рис. 17), нагруженной внутренним давлением p_1 и наружным p_2 . Боковые плоскости шайбы свободны от напряжений.

Как будет показано далее, боковые плоскости шайбы остаются плоскими и после деформации, и, следовательно, длинную трубу можно рассматривать как составленную из ряда шайб [5]. Условия работы шайбы не изменяются в зависимости от того, рассматривается ли она изолированно или как часть трубы (рис. 18).

Радиальное перемещение u_r точки, лежащей на расстоянии r от оси цилиндра, зависит только от этого расстояния

$$u_r = f(r).$$

Величину относительных деформаций в кольцевом и в радиальном направлениях легко

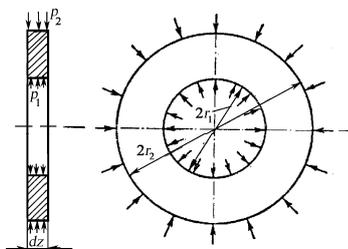


Рис. 17. Схема тонкой шайбы под действием внутреннего p_1 и внешнего p_2 давлений

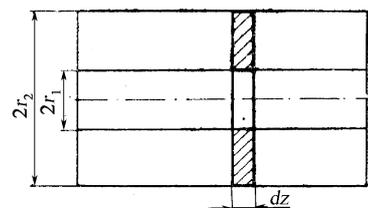


Рис. 18. Условия деформации тонкой шайбы

выразить через смещение u_r .

Рассмотрев деформацию такой тонкой шайбы, получим следующие общие формулы для напряжений в любой точке трубы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \right\}$$

Для радиальных перемещений, выражая в формуле (8.6) C_1 и C_2 через A и B , окончательно имеем:

$$u_r = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}.$$

Далее необходимо рассмотреть частные случаи нагружения цилиндров: действует только внутреннее давление или только внешнее давление, наличие продольной силы (как в случае нагружения цилиндра поршневого двигателя) (пп.8.3 и 8.4 [2]).

Блок 4 (2 часа). Крепление цилиндров. Основные понятия. Расчет скрепленного цилиндра. Расчет вращающихся дисков постоянной толщины.

При прессовой или горячей посадке цилиндрических деталей прочное соединение этих деталей достигается за счет того, что внутренний диаметр охватывающей детали делается несколько меньше, чем наружный диаметр охватываемой детали (величина разности диаметров называется натягом δ). В результате после запрессовки на поверхности прилегания сопрягаемых деталей возникает контактное давление, обеспечивающее появление сил трения, препятствующих взаимному перемещению деталей. Если сопрягаемые путем прессовой посадки детали имеют одинаковую длину, то контактное давление равномерно распределено по поверхности касания, и для расчета можно воспользоваться теорией, изложенной в предыдущем параграфе.

Поскольку после соединения деталей внутренний диаметр охватывающей детали и наружный диаметр охватываемой детали становятся одинаковыми, то очевидно, что сумма абсолютных значений радиальных перемещений обеих деталей, вызванных контактным давлением, равна разности радиусов посадочных поверхностей до запрессовки (т.е. половине натяга δ):

$$|u_{r1}| + |u_{r2}| = \frac{\delta}{2}. \quad (8.24)$$

Обозначим (рис. 25): d_1 – внутренний диаметр запрессовываемой детали; d – диаметр посадочной поверхности детали; $k_1 = d_1/d$ – отношение диаметров внутренней детали; E_1 – модуль упругости материала внутренней детали; μ_1 – коэффициент Пуассона для материала внутренней детали; d_2 – внешний диаметр охватываемой детали; $k_2 = d/d_2$; E_2 , μ_2 – соответствующие величины для охватываемой детали.

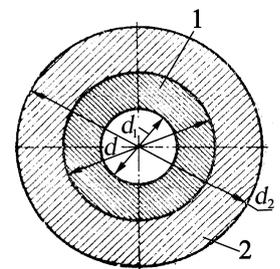


Рис. 25. Сопряжение двух деталей

На основании формулы (8.22) радиальное перемещение на посадочной поверхности внутренней детали 1 (действует только внешнее давление) по абсолютной величине равно

$$|u_{r1}| = \frac{pd}{2E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right),$$

где p – контактное давление на посадочной поверхности.

На основании формулы (8.17) радиальное перемещение на внутренней поверхности охватываемой детали 2 (действует только внутреннее давление) равно

$$|u_{r2}| = \frac{pd}{2E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right).$$

Подставляя величины u_{r1} и u_{r2} в уравнение (8.24), определяем величину контактного давления p :

$$\frac{pd}{2E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{pd}{2E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right) = \frac{\delta}{2},$$

откуда

$$p = \frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{1}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)}. \quad (8.25)$$

Следует иметь в виду, что поверхность деталей никогда не бывает абсолютно гладкой, на ней всегда имеются следы обработки – гребешки. В процессе запрессовки эти гребешки обминаются, поэтому действительный натяг δ всегда несколько меньше, чем определенный по замерам деталей до запрессовки (при шлифованных поверхностях разница между действительным и измеренным натягом составляет 10...20 мкм). Необходимо иметь в виду, что формула (8.25) выведена в предположении справедливости закона Гука и неприменима, если предел пропорциональности в одной из сопрягаемых деталей превзойден. В этом случае контактное давление оказывается меньшим, чем значение, полученное по формуле (8.25).

Если сопрягаемые детали изготавливаются из одинакового материала ($E_1 = E_2 = E$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu$), то формула (8.25) упрощается. В этом случае

$$p = \frac{E(\delta/d)}{\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}}. \quad (8.25a)$$

Если, наконец, внутренняя деталь представляет собой сплошной цилиндр ($k_1 = 0$), то

$$p = E \frac{\delta}{d} \cdot \frac{1-k_2^2}{2}. \quad (8.25b)$$

Эквивалентное напряжение в деталях определяется по формулам (8.18) и (8.23). Усилие запрессовки можно найти по формуле

$$P = fp\pi dl, \quad (8.26)$$

где f – коэффициент трения; l – длина запрессовки.

Величина коэффициента трения при наличии смазки лежит в пределах 0,06...0,1. Рассмотрим запрессовку сплошного цилиндра диаметром d в деталь весьма больших размеров (запрессовка штифта). В этом случае $k_1 = 0$ и $k_2 \cong 0$. Из формулы (8.25б) контактное давление

$$p = E(\delta/2d).$$

Около отверстия по внешней детали возникают напряжения (рис. 26) $\sigma_r = -p$ и $\sigma_\theta = p$ (см формулы (8.17)).

Поскольку в рассматриваемой точке $\sigma_r = -\sigma_\theta$, то напряженное состояние представляет собой чистый сдвиг. Действительно, если выделить вблизи отверстия элементарный объем, то по граням его действуют главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_\theta = p$ и $\sigma_2 = \sigma_r = -p$ (рис. 27).

Примем эти напряжения за исходные. Отсчитывая угол α от направления σ_1 , напишем формулы для σ_α и τ_α в произвольной площадке [8]

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (8.27)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (8.28)$$

Из (8.27) следует, что при $\alpha = \pm 45^\circ$ $\cos 2\alpha = 0$ и $\sigma_\alpha = 0$, $\sin 2\alpha = \pm 1$ и касательные напряжения равны

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm p.$$

Поскольку напряжения σ_r и σ_θ изменяются по одинаковому закону (см. рис. 27) и отличаются только знаком, то напряженное состояние чистого сдвига имеет место во всех точках наружной детали.

Эквивалентное напряжение из (8.18) ($k=0$)

$$\sigma_{\text{экр}} = p(1 + \nu). \quad (8.29)$$

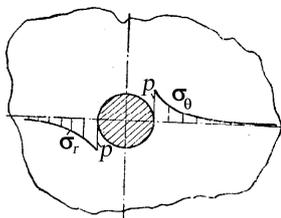


Рис. 26. Распределение напряжений около отверстия

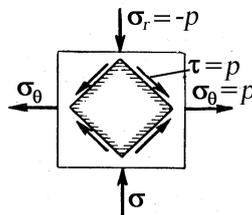


Рис. 27. Площадки максимальными касательными напряжениями

Из формулы (8.18), определяющей величину эквивалентного напряжения в опасной точке цилиндра, нагруженного внутренним давлением, видно, что это напряжение

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_\theta - \sigma_r = p \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu \right)$$

не может быть меньше определенной величины, как бы не изменялись размеры цилиндра. Действительно, даже при $k = r_1/r_2 \rightarrow 0$, что соответствует бесконечно большому наружному диаметру цилиндра (см. зависимость (8.29)), эквивалентное напряжение в опасной точке

$$\sigma_{\text{экв}} = p(1 + \nu).$$

Таким образом, если руководствоваться условием, что эквивалентное напряжение не должно достигать предела текучести σ_T , то невозможно изготовить цилиндр на давление большее, чем $\sigma_T/(1+\nu)$ (для стали $\sigma_T/2$, поскольку $\nu = 1$) ни при каком выборе толщины его стенок. Причиной этого является то обстоятельство, что в толстостенных цилиндрах, нагруженных внутренним давлением, напряжения σ_r и σ_θ очень быстро затухают с удалением от внутренней поверхности цилиндра и наружные слои материала являются малоактивными, поэтому утолщение стенок цилиндра не сопровождается пропорциональным увеличением его прочности.

В случае если цилиндр должен выдержать весьма большое давление, его делают составным из двух или более труб, которые с натягом надевают друг на друга (обычно с помощью горячей посадки). Окружные напряжения, возникающие при посадке, во внутренней трубе являются напряжениями сжатия, а во внешней – растяжения. Эпюры распределения напряжений, возникающих после посадки, представлены на рис 28, а. Если теперь составной цилиндр подвергнуть внутреннему давлению, то в нем возникнут дополнительные напряжения, причем в наружном цилиндре они будут складываться с начальными напряжениями посадки, а во внутреннем – вычитаться из них.

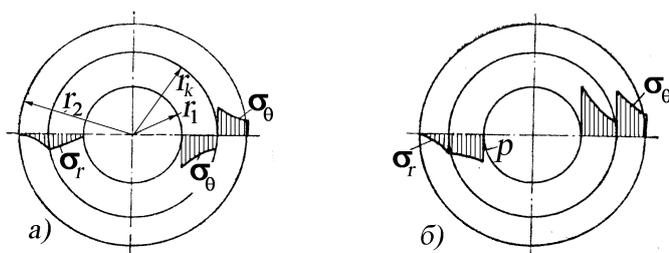


Рис. 28. Эпюры напряжений: а – после запрессовки двух труб; б – при наличии внутреннего давления

Суммарные эпюры напряжений после приложения давления будут иметь вид, примерно представленный на рис. 28, б (точная эпюра напряжений зависит от соотношений давлений запрессовки и внутреннего давления).

Таким образом, благодаря скреплению удастся разгрузить внутренние волокна цилиндра за счет более интенсивного использования наружных.

Таким образом, благодаря скреплению удастся разгрузить внутренние волокна цилиндра за счет более интенсивного использования наружных.

В [2] для самостоятельного изучения рекомендуется пп. 8.3, 8.4, 8.5 и 8.6.

Блок 5 (2 часа). Метод конечных элементов. Перемещения, деформации и напряжения в конечном элементе. Матрицы жесткости конечного элемента. (глава 10 [2])

Цель лекции – дать основные понятия метода конечных элементов. Для самостоятельного изучения рекомендуется изучить пп.10 (основные соотношения теории

упругости в матричной форме).

Метод конечных элементов является мощным современным средством приближенного решения разнообразных задач математической физики, ориентированным на эффективное использование ЭВМ. В задачах теории упругости он позволяет распространить принципы расчета стержневых систем на случай непрерывных тел и сложных конструкций. С другой стороны, его можно трактовать как специфическую форму метода Рэлея – Ритца, что дает ключ к теоретическому обоснованию метода конечных элементов.

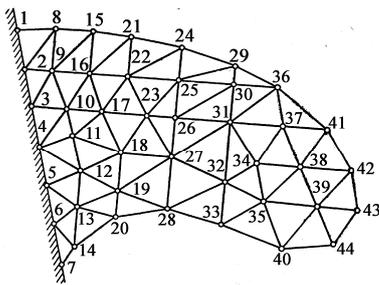


Рис. 47. Пример разбиения на элементы двумерного тела и нумерация узлов

Рассмотрим тело, которое нагружено произвольной нагрузкой. С помощью секущих плоскостей (или криволинейных поверхностей) разобьем его на отдельные части (рис. 47). Получаемые подобласти имеют хотя и малые, но все же конечные размеры, откуда и происходит их название «конечные элементы».

Таким образом, непрерывное тело представляется в виде совокупности конечных элементов, жесткостные свойства каждого из которых рассматриваются затем независимо от остальных. На границах между конечными элементами выбираются некоторые точки – узлы; перемещения узлов в направлении координатных осей (а иногда и производные от перемещений) принимаются в качестве основных неизвестных. Такое решение в строительной механике называют методом перемещений. Существует разновидность метода конечных элементов, в которой в качестве основных неизвестных принимают силы взаимодействия между элементами (метод сил); возможна также смешанная формулировка.

Поскольку за основные неизвестные принимаются узловые перемещения, то этот метод может быть легко реализован для стержневых систем. Для случая непрерывных (сплошных) тел возникает целый ряд затруднений, которые можно преодолеть лишь с помощью некоторых введенных гипотез.

Прежде всего встает вопрос о том, как найти перемещения (а следовательно, деформации и напряжения) внутри каждого конечного элемента, зная перемещения принадлежащих ему узлов. Для случая стержневых систем расчет может базироваться на использовании технической теории растяжения, изгиба и кручения бруса, которая позволяет выразить перемещения и напряжения в любом сечении бруса через узловые перемещения. Для сплошного тела эта задача может быть решена только приближенно, если сделать те или иные предположения о характере поля перемещений в элементе.

Точнее, необходимо выбрать некоторые функции, которые смогли бы аппроксимировать поле перемещений внутри конечного элемента по известным узловым перемещениям. Выбор аппроксимирующих функций является одним из наиболее ответственных и важных этапов в методе конечных элементов. Заметим, что такая функция не может являться единственно возможной, так как это зависит также от погрешности вычисления, возможности вычисления концентраторов напряжений и т. д.¹. Если такой выбор сделан, то, как будет показано ниже, деформированное и напряженное состояние элемента будет однозначно определяться узловыми перемещениями. Поэтому под *конечным элементом* следует понимать не просто некоторую малую область тела, а область тела в совокупности с заданными в ней аппроксимирующими функциями.

Вторая трудность возникает при объединении конечных элементов в единую систему (для всего тела). Если бы мы рассчитывали стержневые конструкции, то объединение производилось бы путем составления уравнений равновесия для узловых точек, в которых конструктивные элементы соединяются друг с другом. В сплошном теле число точек соединения между узловыми точками бесконечно. Поэтому, задаваясь распределением перемещений внутри каждого конечного элемента, тем самым задаем и распределение напряжений во всех его точках, в том числе и в узловых. Однако на границах раздела смежных элементов напряжения, найденные для каждого из них независимо, не будут совпадать. Следовательно, не будет обеспечено выполнение условий равновесия на всей поверхности раздела конечных элементов.

Чтобы обойти возникшее затруднение, можно напряжения, действующие по границе каждого элемента, условно заменить эквивалентными сосредоточенными узловыми силами; тогда уравнения равновесия узловых сил в направлении узловых перемещений (или координатных осей) могут быть составлены обычным образом (как равенство нулю суммы проекций узловых сил на выбранное направление).

При этом для каждого элемента *эквивалентные узловые силы определяются из условия: производимая ими на узловых перемещениях работа должна равняться работе действительных напряжений на перемещениях точек граничной поверхности элемента.*

Еще одна трудность связана с нагружением упругого тела распределенными поверхностными и объемными силами. *Эти силы могут быть учтены также заменой их на эквивалентные узловые силы, если их работа на действительных перемещениях будет равна работе узловых сил на соответствующих узловых перемещениях.*

¹ В работе [16] только для 9 различных типов конечных элементов приводятся свыше 20 аппроксимирующих функций.

После введения указанных упрощений тело можно рассматривать как дискретную систему, т. е. как совокупность элементов, соединенных между собой в узловых точках. Разбиение конструкции на подобласти и выбор аппроксимирующих функций для каждой из них можно осуществить различными способами. При этом должны быть учтены особенности геометрии тела и обеспечена хорошая аппроксимация перемещений, деформаций и напряжений для всего тела в целом. В этом случае решение, полученное по методу конечных элементов, будет в пределе (при уменьшении размеров элементов) стремиться к точному.

При решении задачи методом конечных элементов используются конечные элементы различных типов.

Простейшим среди элементов является одномерный элемент. Схематически он обычно изображается в виде отрезка (рис. 48, *а*), хотя и имеет поперечное сечение. Площадь поперечного сечения может изменяться по длине, но во многих встречающихся задачах она считается постоянной.

Наиболее часто такой элемент используется в одномерных задачах распространения тепла и в задачах строительной механики при расчете стержневых систем.

Простейший одномерный элемент имеет два узла, по одному на каждом конце. Элементами более высокого порядка являются трехузловые (квадратичные) и четырехузловые (кубические)². На рис. 48, *б* и *в*) изображены такие элементы. Одномерный элемент может быть криволинейным (рис. 48, *в*) при условии, что длина дуги входит в уравнения, определяющие элементы. При построении дискретной модели двумерной области (например плоской задачи теории упругости) используются два основных семейства элементов: треугольники и четырехугольники. Стороны линейных элементов каждого семейства представляют собой прямые линии (рис. 49, *а*).

Квадратичные и кубические элементы могут иметь как прямолинейные, так и криволинейные стороны или те и другие. Возможность моделирования криволинейных границ достигается добавлением узлов в середину сторон элементов. Оба семейства элементов могут быть использованы одновременно внутри области, если только они имеют одинаковое число узлов на стороне (см. рис. 49, *в*). Толщина элемента может быть или постоянной, или являться функцией координат.

² Как будет показано ниже, название конечных элементов (квадратичное или кубическое) определяется видом аппроксимирующей функции.

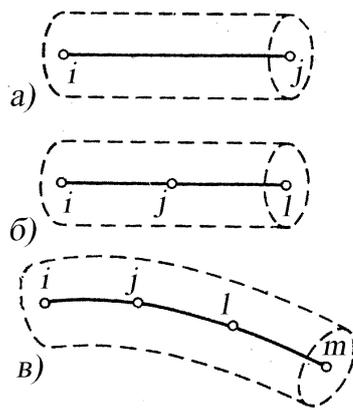


Рис. 48. Одномерные конечные элементы: а – линейный двухузловой; б – квадратичный трехузловой; в – кубический четырехузловой

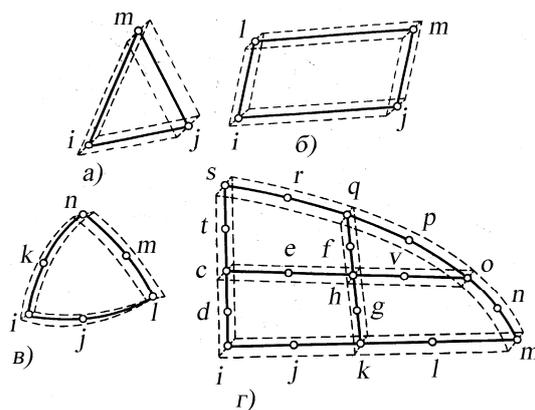


Рис. 49. Некоторые двумерные конечные элементы: а – треугольный, 3 узла; б – прямоугольный, 4 узла; в – криволинейный треугольный, 6 узлов; г – сочетание элементов

Наиболее часто встречающимися трехмерными элементами являются тетраэдр и параллелепипед (рис. 50). В обоих случаях линейные элементы ограничены прямолинейными сторонами (плоскостями), тогда как элементы более высокого порядка могут иметь в качестве границ криволинейные поверхности. При разбиении трехмерного тела трудно наглядно представить расположение элементов в дискретной модели, поэтому более желательным из этих двух типов элементов является параллелепипед.

На рис. 51 показан другой вид элементов, которые используются при рассмотрении осесимметричных тел. Эти элементы подобны двумерному треугольнику и позволяют учесть изменение напряжений или деформаций вдоль третьей координаты.

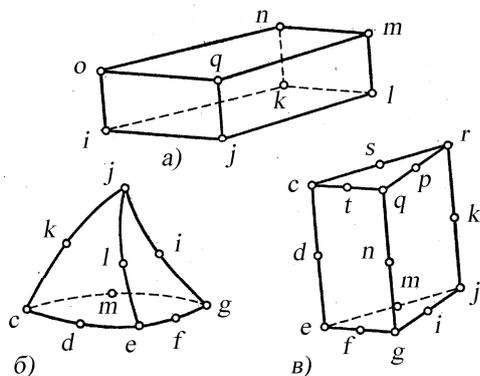


Рис. 50. Некоторые трехмерные конечные элементы: а – параллелепипед, 8 узлов; б – тетраэдр, 10 узлов; в – пентаэдр, 15 узлов

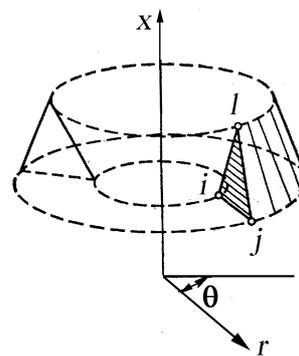


Рис. 51. Осесимметричный конечный элемент (треугольной линейной кольцевой типа)

Действительно, в случае симметричной задачи, к которой сводится расчет, например, днища поршня бензинового двигателя, втулки и клапана, конечно-элементная модель образуется поворотом на 360° треугольника (см. рис. 51) или прямоугольника, являясь, таким образом, телом вращения. Важно подчеркнуть, что осесимметричные задачи относятся к классу двумерных, так как переменными служат только две координаты r и x , хотя аппроксимируемая область является пространственной.

После выбора в соответствии с классом задачи типа элемента производится разбиение тела на элементы и нумерация элементов и их узлов. На рис. 52 приведен пример разбивки

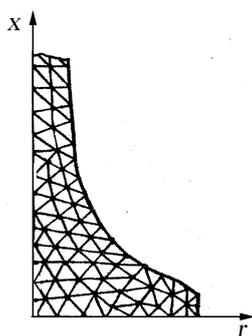


Рис. 52. Разбивка на конечные элементы треугольного типа меридионального сечения клапана

меридионального сечения клапана на элементы треугольного типа. При разбиении тело сначала делится на зоны с каким-либо характерным признаком (особенностью геометрии, нагружения, свойствами материала и т. д.)

Равномерное разбиение, когда все элементы имеют одинаковую форму и размеры, обычно не проводится, потому что при решении задач механики твердого тела необходимо учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты и т. п. Так, например, при расчете днища головки цилиндров потребуется более мелкая разбивка в районах межклапанных перемычек и отверстия под форсунку. Точно так же при расчете поршня потребуется более мелкая разбивка на конечные элементы в районе кольцевых канавок. Возможность варьировать размеры элемента – важное достоинство метода конечных элементов. Наиболее простой способ существенного изменения размеров элементов заключается в применении четырехугольных подобластей с неравным числом узлов на противоположных сторонах.

Рассмотрим типовой конечный элемент упругого тела, имеющий узлы i, j, \dots . Обозначим через v_i, v_j, \dots матрицы перемещений соответствующих узлов. Количество элементов в этих матрицах зависит от характера задачи. Так, в случае пространственной задачи матрица v_r обычно включает в себя три компоненты:

$$\{v_r\} = \begin{Bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \\ v_{rz} \end{Bmatrix},$$

где v_{rx}, v_{ry}, v_{rz} – проекции перемещений узла r на координатные оси x, y, z (рис. 53).

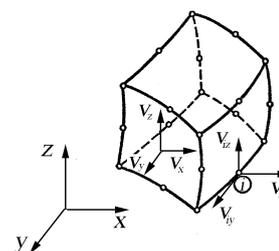


Рис. 53. Трехмерный 20-узловой конечный элемент в общей системе координат

В плоской задаче компонентами матрицы $\{v_r\}$ будут v_{rx}, v_{ry} . В некоторых конечных элементах матрицы $\{v_r\}$ содержат помимо линейных также и угловые перемещения или производные от перемещений. Все узловые перемещения элемента образуют матрицу-столбец³

$$\{v^e\} = \begin{bmatrix} \{v_i\} & \{v_j\} & \dots \end{bmatrix}.$$

³ В матрице $\{v^e\}$ индекс «e» означает, что данный параметр относится к единичному конечному элементу.

Рассмотрим теперь произвольную точку внутри элемента. Перемещения этой точки в направлении координатных осей образуют матрицу-столбец, которую обозначим $\{u\}$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix},$$

где u_x, u_y, u_z – смещение рассматриваемой точки в направлении осей x, y, z (см. рис. 53).

В плоской задаче матрица $\{u\}$ содержит два элемента. Подчеркнем, что компоненты матрицы $\{u\}$ представляют собой функции координат.

Как говорилось выше, в методе конечных элементов принимается допущение, согласно которому перемещения всех точек элемента однозначно определяются его узловыми перемещениями. В матричных обозначениях это означает существование равенства

$$\{u\} = \{\alpha\}\{v^e\}. \quad (10.24)$$

Здесь $\{\alpha\}$ – прямоугольная матрица, в которой количество строк равно числу компонент матрицы $\{u\}$, а количество столбцов – числу компонент матрицы $\{v^e\}$. Элементами матрицы $\{\alpha\}$ являются некоторые функции координат (аппроксимирующие функции). Выбор подходящих функций, как отмечалось ранее, представляет собой важный этап в методе конечных элементов. Для некоторых элементов этот вопрос будет рассмотрен ниже. На данном этапе изучения теоретических основ метода конечных элементов будем предполагать, что аппроксимирующие функции нам уже известны.

Воспользовавшись формулами Коши, можно выразить деформации в каждой точке конечного элемента через его узловые перемещения. По формуле (10.6) имеем $\{\varepsilon\} = \{L\}\{u\}$, что с учетом (10.24) дает

$\{\varepsilon\} = \{L\}\{\alpha\}\{v^e\}$. Эту связь между $\{\varepsilon\}$ и $\{v^e\}$ будем записывать в виде

$$\{\varepsilon\} = \{\beta\}\{v^e\}, \quad (10.25)$$

где через $\{\beta\}$ обозначена прямоугольная матрица

$$\{\beta\} = \{L\}\{\alpha\}. \quad (10.26)$$

Число строк матрицы $\{\beta\}$ равно числу компонент матрицы $\{\varepsilon\}$.

В общем случае пространственного тела, когда матрица $\{u\}$ содержит три компонента u_x, u_y, u_z , из зависимости (10.24) следует, что матрицу $\{\alpha\}$ можно представить в виде

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \\ \{\alpha_z\} \end{Bmatrix}. \quad (10.27)$$

В этой записи $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – матрицы-строки, элементами которых являются известные аппроксимирующие функции. Матричный оператор $\{L\}$ дается в этом случае выражением

$$\{\beta\} = \{L\}\{\alpha\} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \\ \{\alpha_z\} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \{\partial\alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial z \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial y + \{\partial\alpha_y\}/\partial z \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial z \end{vmatrix}. \quad (10.28)$$

В плоской задаче компонентами $\{u\}$ будут перемещения u_x, u_y , а матрица $\{\alpha\}$ имеет соответственно две строки

$$\{\alpha\} = \begin{vmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{vmatrix}. \quad (10.29)$$

Матрица $\{L\}$ в этом случае определяется выражением

$$\{\beta\} = \{L\}\{\alpha\} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \{\partial\alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial y \end{vmatrix}. \quad (10.30)$$

Вспользуемся далее законом Гука в так называемой форме Ляме (обратная форма закона Гука) $\{\sigma\} = \{k\}\{\varepsilon\}$, где $\{\sigma\}$ – матрица-столбец напряжений; $\{k\}$ – матрица упругих постоянных. Подставляя сюда соотношение $\{\varepsilon\} = \{\beta\}\{v^e\}$, имеем:

$$\{\sigma\} = \{k\}\{\beta\}\{v^e\} \quad (10.31)$$

Формулы (10.24), (10.25), (10.31) показывают, что при известной матрице аппроксимирующих функций $\{\alpha\}$ напряженное и деформированное состояние конечного элемента однозначно определяется узловыми перемещениями $\{v^e\}$.

Блок 6 (2 часа). Конечные элементы сплошной среды. Плоский треугольный элемент. Определение матрицы жесткости для плоского треугольного элемента. ([2] пп. 10.3).

Цель лекции – ознакомить студентов с простейшими конечными элементами при плоском напряженно-деформированном состоянии.

В п. 10.2.2 показаны некоторые из конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости, а также для расчета трехмерных тел. Основное различие между ними заключается в характере аппроксимации перемещений, а также в способе описания геометрии. Естественно, что наилучшим способом считается выбор таких аппроксимирующих функций, в которых описание геометрии и деформации проводится в помощью одних и тех же соотношений. Это позволяет построить одно-, дву- и трехмерные конечные элементы произвольной конфигурации, обеспечивающие совместность конечноэлементной модели.

Рассмотрим простейший конечный элемент, применяемый для решения плоской задачи теории упругости – треугольный с тремя узлами, расположенными в вершинах

треугольника (рис. 60). Матрицы перемещений для каждого узла состоят из двух компонент⁴. Так, для узла i имеем

$$\{v_i\} = \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{Bmatrix}.$$

При составлении матрицы $\{v^e\}$ условимся обходить узлы против часовой стрелки.

Тогда $\{v^e\} = \{v_i\} \{v_j\} \{v_m\}$.

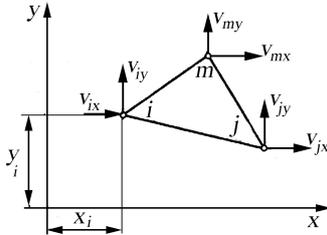


Рис. 60. Треугольный конечный элемент в общей системе координат

Точки конечного элемента получают перемещения u_x, u_y в направлении осей x, y . Поэтому матрица $\{u\}$ имеет вид

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}.$$

Для получения матрицы $\{\alpha\}$, связывающей $\{u\}$ и $\{v^e\}$, предположим, что перемещения u_x и u_y в пределах конечного элемента аппроксимируются простейшим законом

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y; \quad u_y = f_4 + f_5x + f_6y, \quad (10.51)$$

где f_r – некоторые постоянные ($r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

В вершинах треугольника перемещения u_x и u_y должны совпадать с узловыми перемещениями. Это дает шесть уравнений для определения постоянных f_r ($r = 1 \dots 6$)

$$\left. \begin{aligned} f_1 + f_2x_i + f_3y_i &= v_{ix}; \\ f_1 + f_2x_j + f_3y_j &= v_{jx}; \\ f_1 + f_2x_m + f_3y_m &= v_{mx}; \end{aligned} \right\} (a) \quad \left. \begin{aligned} f_4 + f_5x_i + f_6y_i &= v_{iy}; \\ f_4 + f_5x_j + f_6y_j &= v_{jy}; \\ f_4 + f_5x_m + f_6y_m &= v_{my}. \end{aligned} \right\} (б)$$

Решая первую группу уравнений (а), приходим к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2F^e} (c_i v_{ix} + c_j v_{jx} + c_m v_{mx}); \\ f_2 &= \frac{1}{2F^e} (b_i v_{ix} + b_j v_{jx} + b_m v_{mx}); \\ f_3 &= \frac{1}{2F^e} (a_i v_{ix} + a_j v_{jx} + a_m v_{mx}), \end{aligned} \quad (10.52)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= x_m - x_j; & a_j &= x_i - x_m; & a_m &= x_j - x_i; \\ b_i &= y_j - y_m; & b_j &= y_m - y_i; & b_m &= y_i - y_j; \\ c_i &= x_j y_m - x_m y_j; & c_j &= x_m y_i - x_i y_m; & c_m &= x_i y_j - x_j y_i. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Выражения для f_4, f_5 и f_6 имеют вид

⁴ Мы не рассматриваем характеристики каждого конечного элемента в местной системе координат, а также матрицу преобразования координат для перехода к общей системе [16], поскольку в современных вычислительных комплексах это делается автоматически. В переводной литературе местную систему координат называют локальной, а общую – глобальной.

$$\begin{aligned}
f_4 &= \frac{1}{2F^e}(c_i v_{iy} + c_j v_{jy} + c_m v_{my}); \\
f_5 &= \frac{1}{2F^e}(b_i v_{iy} + b_j v_{jy} + b_m v_{my}); \\
f_6 &= \frac{1}{2F^e}(a_i v_{iy} + a_j v_{jy} + a_m v_{my}).
\end{aligned} \tag{10.54}$$

В выражении (10.52) и (10.54) величина F^e – площадь треугольника ijm (см. рис. 51) и может быть вычислена через координаты узлов x_r и y_r ($r = i, j, m$) с помощью определителя

$$2F^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}. \tag{10.55}$$

Если раскрыть определитель (10.55), то с учетом (10.53), получим

$$2F^e = c_i + c_j + c_m. \tag{10.56}$$

Подставляя (10.52) в формулы (10.51), получим:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y) v_{ix} + (c_j + b_j x + a_j y) v_{jx} + \\
&\quad + (c_m + b_m x + a_m y) v_{mx}];
\end{aligned} \tag{10.57}$$

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y) v_{iy} + (c_j + b_j x + a_j y) v_{jy} + \\
&\quad + (c_m + b_m x + a_m y) v_{my}].
\end{aligned} \tag{10.58}$$

Формулы (10.57) и (10.58) позволяют найти перемещения u_x и u_y в любой точке конечного элемента через его узловые перемещения x_r и y_r ($r = i, j, m$).

Представим (10.57) и (10.58) в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix} \{v^e\},$$

где

$$\begin{aligned}
\{\alpha_x\} &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y) \quad 0 \quad (c_j + b_j x + a_j y) \quad 0 \mapsto (\bar{b}) \\
&\quad \mapsto (c_m + b_m x + a_m y) \quad 0];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\alpha_y\} &= \frac{1}{2F^e} [0 \quad (c_i + b_i x + a_i y) \quad 0 \quad (c_j + b_j x + a_j y) \mapsto (\bar{b}) \\
&\quad \mapsto 0 \quad (c_m + b_m x + a_m y)].
\end{aligned}$$

Равенства (\bar{b}) и (\bar{b}) перепишем в другой форме, поскольку подматрицы $\{\alpha_x\}$ и $\{\alpha_y\}$ можно представить в виде блоков, зависящих от координат узловых точек конечного элемента

$$\{\alpha_x\} = \left\| \{\alpha_{xi}\} \quad \{\alpha_{xj}\} \quad \{\alpha_{xm}\} \right\|; \quad \{\alpha_y\} = \left\| \{\alpha_{yi}\} \quad \{\alpha_{yj}\} \quad \{\alpha_{ym}\} \right\|, \tag{10.59}$$

где

$$\{\alpha_{xr}\} = \|\psi_r \quad 0\|; \quad \{\alpha_{yr}\} = \|0 \quad \psi_r\|; \quad (10.60)$$

$$\psi_r = \frac{1}{2F^e}(c_r + b_r x + a_r y) \quad (r = i, j, m). \quad (10.61)$$

Формулы (10.59) - (10.61) определяют искомую матрицу аппроксимирующих функций

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix},$$

которую представим в блочном виде, зависящих от координат узловых точек

$$\{\alpha\} = \|\{\alpha_i\} \quad \{\alpha_j\} \quad \{\alpha_m\}\|,$$

где

$$\{\alpha_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{Bmatrix} \quad (r = i, j, m).$$

Далее по (10.30) вычисляем матрицу $\{\beta\}$

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \partial\{\alpha_x\}/\partial x \\ \partial\{\alpha_y\}/\partial x \\ \partial\{\alpha_y\}/\partial x + \partial\{\alpha_x\}/\partial y \end{Bmatrix}.$$

С учетом (10.59) - (10.61) получим

$$\{\beta\} = \|\{\beta_i\} \quad \{\beta_j\} \quad \{\beta_m}\|,$$

где

$$\{\beta_r\} = \frac{1}{2F^e} \begin{Bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & a_r \\ a_r & b_r \end{Bmatrix} \quad (r = i, j, m). \quad (10.62)$$

В данном случае элементы матрицы $\{\beta\}$ не зависят от координат. Это означает, что деформации (следовательно, и напряжения) в пределах рассматриваемого конечного элемента постоянны, а при переходе от одного элемента к другому они изменяются скачком.

Теперь найдем матрицу жесткости элемента, пользуясь формулой

$$\{k^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\} d\tau.$$

Поскольку матрица $\{\beta\}$ представлена в стандартной блочной форме, то в соответствии с (10.37), (10.38) для матрицы жесткости рассматриваемого треугольного элемента получим

$$\{k^e\} = \begin{Bmatrix} \{k_{ii}^e\} & \{k_{ij}^e\} & \{k_{im}^e\} \\ \{k_{ji}^e\} & \{k_{jj}^e\} & \{k_{jm}^e\} \\ \{k_{mi}^e\} & \{k_{mj}^e\} & \{k_{mm}^e\} \end{Bmatrix},$$

где типовая подматрица

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau.$$

Подынтегральное выражение не зависит здесь от координат и может быть вынесено за знак интеграла. В случае обобщенного плоского напряженного состояния рассматриваемый конечный элемент представляет собой пластину. Если его толщина постоянна и равна h^e , то объем элемента τ^e площадью F^e равен $F^e h^e$. Таким образом, в этом случае

$$\{k_{rs}^e\} = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} \quad (r, s = i, j, m). \quad (10.63)$$

Формулой (10.63) можно воспользоваться для вычисления матрицы жесткости конечного элемента гладкой пластины. Элементы типовой подматрицы $\{k_{rs}^e\}$ представим в аналитической форме. Как известно, для обобщенного плоского напряженного состояния матрица упругости имеет вид

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{Bmatrix}.$$

Подставляя в выражение для $\{k_{rs}^e\}$ формулы для отдельных подматриц, получаем

$$\begin{aligned} \{k_{rs}^e\} &= F^e h^e \frac{1}{2F^e} \begin{Bmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{Bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{Bmatrix} \frac{1}{2F^e} \begin{Bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{Eh^e}{4F^e(1-\mu^2)} \begin{Bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} a_r a_s & \mu b_r a_s + \frac{1-\mu}{2} a_r b_s \\ \mu a_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r a_s & a_r a_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

В работе [12] матрица упругости $\{\kappa\}$ представлена в виде двух слагаемых

$$\{\kappa\} = \{\kappa_E\} + \{\kappa_G\},$$

где

$$\{\kappa_E\} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \quad \{\kappa_G\} = G \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (10.65)$$

Здесь модуль сдвига G

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Тогда

$$\{k_{rs}^e\} = \{k_{rs}^e\}_E + \{k_{rs}^e\}_G, \quad (10.66)$$

где

$$\{k_{rs}^e\}_E = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa_E\} \{\beta_s\}; \quad \{k_{rs}^e\}_G = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa_G\} \{\beta_s\}. \quad (d)$$

Подставляя в (d) формулы для отдельных подматриц, получаем

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{Eh^2}{4(1-\mu^2)F^e} \begin{vmatrix} b_r b_s & \mu b_r a_s \\ \mu a_r b_s & a_r a_s \end{vmatrix}, \quad (10.67)$$

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{Gh^e}{4F^e} \begin{vmatrix} a_r a_s & a_r b_s \\ b_r a_s & b_r b_s \end{vmatrix}. \quad (10.68)$$

Матрицы $\{k_{rs}^e\}_E$, $\{k_{rs}^e\}_G$ представляют собой вклады, даваемые соответственно деформациями от действия нормальных напряжений и деформациями сдвига в матрицу $\{k_{rs}^e\}$.

Для того чтобы получить матрицу жесткости для случая плоской деформации, следует принять $h^e = 1$ и заменить в (10.64) и (10.67) модуль упругости E на $E/(1-\mu^2)$, а коэффициент Пуассона μ – на $\mu/(1-\mu)$.

Перемещения u_x и u_y , определяемые выражением (10.31), изменяются по линейному закону вдоль любой прямой в плоскости xu , в том числе по сторонам треугольника. Линейная функция полностью определяется какими-либо двумя ее параметрами. Значит, перемещения u_x и u_y на каждой стороне треугольника будут однозначно определены, если известны их значения в узлах, лежащих на соответствующей стороне. Так как узловое перемещение является общим для соседних элементов, то при переходе от одного элемента к другому перемещения не будут иметь разрыва. Следовательно, треугольные элементы с линейным полем перемещений относятся к категории совместных.

Недостатком рассмотренного элемента считается то, что напряжения в пределах треугольника постоянны, и поэтому для получения достаточной точности решения часто приходится использовать весьма густую сетку (особенно в областях с быстроменяющимся напряженным состоянием). Это может привести к системе уравнений слишком высокого порядка и соответственно к чрезмерным затратам времени на решение задачи. Тем не менее этот элемент широко используется, поскольку он очень прост и позволяет составлять конечно-элементные модели для плоских тел довольно сложной конфигурации (например, шатуна поршневого двигателя [18]).

Блок 7 (2 часа). Решение плоской задачи МКЭ. Совместный прямоугольный элемент. (пп. 10.3.2 [2]).

Цель лекции – ознакомить с другими плоскими КЭ. Для самостоятельного изучения – пп. 10.3.3 в [2].

Рассмотрим прямоугольный четырехузловой плоский элемент (рис. 61). Матрица узловых перемещений такого элемента может быть записана в виде

$$\{v^e\} = \left\{ \{v_i\} \{v_j\} \{v_l\} \{v_m\} \right\},$$

где

$$\{v_r\} = \begin{Bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{Bmatrix} \quad (r = i, j, l, m).$$

Для приближенного представления поля перемещений конечного элемента возьмем функции

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y + f_4xy; \quad u_y = f_5 + f_6x + f_7y + f_8xy, \quad (10.69)$$

в которых содержится восемь постоянных. Для их определения можно так же, как и в случае треугольного элемента, записать в

каждом узле условия равенства перемещений перемещения u_x и u_y их узловым значениям. Тогда снова появятся две группы уравнений относительно неизвестных

f_1, f_2, f_3, f_4 через перемещения v_{rx} ($r=i, j, l, m$), а

f_5, f_6, f_7, f_8 – через v_{ry} . В этом случае матрица аппроксимирующей функции $\{\alpha\} = \left\{ \{\alpha_i\} \{\alpha_j\} \{\alpha_l\} \{\alpha_m\} \right\}$ будет иметь такие же блоки, как и в случае треугольного элемента

$$\{\alpha_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{Bmatrix}, \quad (10.70)$$

где через ψ_r обозначены некоторые функции координат.

В работе [12] показано, что, используя (10.70), ψ_r можно найти путем подбора. Для этого запишем зависимость $\{u\} = \{\alpha\} \{v^e\}$ в развернутом виде

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_l & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_l & 0 & \psi_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{jx} \\ v_{jy} \\ v_{lx} \\ v_{ly} \\ v_{mx} \\ v_{my} \end{Bmatrix}. \quad (10.71)$$

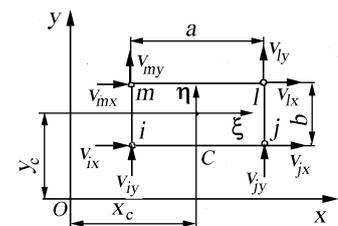


Рис. 61. Прямоугольный четырехузловой плоский элемент

Из полученного матричного соотношения после перемножения получим следующее выражение для u_x :

$$u_x = \psi_i v_{ix} + \psi_j v_{jx} + \psi_l v_{lx} + \psi_m v_{mx}. \quad (a)$$

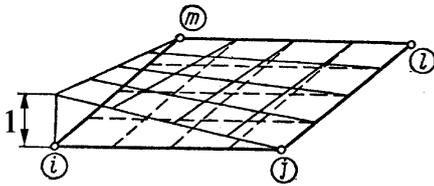


Рис. 62. Схема деформации конечного элемента

Представим, что $v_{ix} = 1$, а перемещения остальных узлов равны нулю. Тогда из (a) получим, что $u_x = \psi_i$. Следовательно, ψ_i – функция координат x и y , которая дает распределение перемещений в конечном элементе при единичном смещении узла i и при неподвижных остальных узлах.

Обобщая эти рассуждения, можно сказать, что каждая из функций ψ_r дает распределение перемещений в конечном элементе (рис. 62) при единичном смещении узла r и при неподвижных остальных узлах.

Чтобы записать функции ψ_r , перейдем к системе безразмерных координат ξ и η , начало которой находится в центре масс (точка C) прямоугольника (см. рис. 61). Примем

$$\xi = 2(x - x_c)/a; \quad \eta = 2(y - y_c)/b, \quad (б)$$

где a и b – размеры сторон прямоугольника; x_c и y_c – координаты его центра масс.

Тогда новые координаты ξ и η будут принимать на сторонах прямоугольного конечного элемента значения ± 1 . Так, например, для узла i можем записать

$$x_c = x_i + a/2; \quad y_c = y_i + b/2; \quad \xi_i = \frac{2[x_i - (x_i + a/2)]}{a} = -1;$$

$$\eta_i = \frac{2[y_i - (y_i + b/2)]}{b} = -1.$$

Таким образом, в новой системе $\xi\eta$ узловые точки имеют координаты: $\xi_i = -1; \eta_i = -1; \xi_j = 1; \eta_j = -1; \xi_l = 1; \eta_l = 1; \xi_m = -1; \eta_m = 1$.

Учитывая, что перемещения согласно (10.69) должны изменяться по линейному закону вдоль прямых $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$, можно функции ψ_r искать в виде произведений $(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$. Условия в узлах будут удовлетворены, если в каждой узловой точке принять значения ψ_r ($r = i, j, l, m$)

$$\begin{aligned} \psi_i &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4; & \psi_j &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4; \\ \psi_l &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4; & \psi_m &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4. \end{aligned} \quad (в)$$

Действительно, если, например, в первое соотношение из (в) подставить значения $\xi_i = -1$ и $\eta_i = -1$, то получим из (a) $u_x = v_{ix}$ и т.д.

Поэтому все эти функции можно записать с помощью одного выражения (с учетом того, что ξ_r и η_r в каждом узле принимают значения ± 1)

$$\psi_r = (1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta)/4 \quad (r = i, j, l, m). \quad (10.72)$$

Вычислим далее матрицу $\{\beta\} = \left\{ \{\beta_i\} \quad \{\beta_j\} \quad \{\beta_l\} \quad \{\beta_m\} \right\}$. По формуле (10.30) имеем

$$\{\beta\} = \left\| \begin{array}{c} \{\partial\alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial y \end{array} \right\|,$$

где $\{\alpha_x\}$ и $\{\alpha_y\}$ – соответственно первая и вторая строки матрицы $\{\alpha\}$.

Из соотношения (6) получим $dx = (a/2)d\xi$; $dy = (b/2)d\eta$. Учитывая блочную структуру матрицы $\{\alpha\}$ (см. формулу (10.48)), для типовой подматрицы $\{\beta_r\}$ получим:

$$\{\beta_r\} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial\psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial y} & \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{a} \frac{\partial\psi_r}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \frac{\partial\psi_r}{\partial \eta} \\ \frac{2}{b} \frac{\partial\psi_r}{\partial \eta} & \frac{2}{a} \frac{\partial\psi_r}{\partial \xi} \end{array} \right\|. \quad (2)$$

Подставляя в (2) значения ψ_r из (49), получим

$$\{\beta_r\} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} \xi_r(1+\eta_r\eta)/a & 0 \\ 0 & \eta_r(1+\xi_r\xi)/b \\ \eta_r(1+\xi_r\xi)/b & \xi_r(1+\eta_r\eta)/a \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} b_r(\eta) & 0 \\ 0 & a_r(\xi) \\ a_r(\xi) & b_r(\eta) \end{array} \right\|, \quad (10.73)$$

где

$$a_r(\xi) = \eta_r(1+\xi_r\xi)/b; \quad b_r(\eta) = \xi_r(1+\eta_r\eta)/a. \quad (10.74)$$

Тогда матрица жесткости рассматриваемого конечного элемента для случая обобщенного плоского напряженного состояния:

$$\{k^e\} = \left\| \begin{array}{cccc} \{k_{ii}^e\} & \{k_{ij}^e\} & \{k_{il}^e\} & \{k_{im}^e\} \\ \{k_{ji}^e\} & \{k_{jj}^e\} & \{k_{jl}^e\} & \{k_{jm}^e\} \\ \{k_{li}^e\} & \{k_{lj}^e\} & \{k_{ll}^e\} & \{k_{lm}^e\} \\ \{k_{mi}^e\} & \{k_{mj}^e\} & \{k_{ml}^e\} & \{k_{mm}^e\} \end{array} \right\|,$$

где

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\xi d\eta. \quad (10.75)$$

Так же как и в случае треугольного элемента, удобно разбить подматрицу

$$\{k_{rs}^e\} = \{k_{rs}^e\}_E + \{k_{rs}^e\}_G.$$

Здесь

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa_E\} \{\beta_s\} d\xi d\eta;$$

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa_G\} \{\beta_s\} d\xi d\eta,$$

где матрицы упругих коэффициентов $\{\kappa_E\}$ и $\{\kappa_G\}$ определены равенствами (10.65).

Подстановка выражений для $\{\kappa_E\}$, $\{\beta_r\}$ и $\{\beta_s\}$ в формулу для $\{k_{rs}^e\}_E$ дает

$$\begin{aligned} \{k_{rs}^e\}_E &= \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{vmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \\ &\times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{vmatrix} d\xi d\eta = \frac{Ehab}{16(1-\mu^2)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{vmatrix} b_r b_s & \mu b_r a_s \\ \mu a_r b_s & a_r a_s \end{vmatrix} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Вычислим необходимые интегралы, учитывая (10.74):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 a_r(\xi) d\xi &= \frac{\eta_r}{b} \int_{-1}^1 (1 + \xi_r \xi) d\xi = \frac{2\eta_r}{b}; \\ \int_{-1}^1 a_r(\xi) a_s(\xi) d\xi &= \frac{\eta_r \eta_s}{b^2} \int_{-1}^1 (1 + \xi_r \xi)(1 + \xi_s \xi) d\xi = \\ &= \frac{\eta_r \eta_s}{b^2} \left(1 + \frac{\xi_r \xi_s}{3} \right). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются интегралы по η от $b_r(\eta)$ и от произведения $b_r(\eta) b_s(\eta)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 b_r(\eta) d\eta &= \frac{\xi_r}{a} \int_{-1}^1 (1 + \eta_r \eta) d\eta = \frac{2\xi_r}{a}; \\ \int_{-1}^1 b_r(\eta) b_s(\eta) d\eta &= \frac{\xi_r \xi_s}{a^2} \int_{-1}^1 (1 + \eta_r \eta)(1 + \eta_s \eta) d\eta = \\ &= \frac{\xi_r \xi_s}{a^2} \left(1 + \frac{\eta_r \eta_s}{3} \right). \end{aligned}$$

В итоге для $\{k_{rs}^e\}_E$ имеем

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} c\xi_r \xi_s (1 + \eta_r \eta_s / 3) & \mu \xi_r \eta_s \\ \mu \eta_r \xi_s & (1/c)\eta_r \eta_s (1 + \xi_r \xi_s / 3) \end{vmatrix}, \quad (10.76)$$

где через $c=b/a$ – отношение сторон элемента.

Подобным же образом находим

$$\begin{aligned} \{k_{rs}^e\}_G &= \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{vmatrix} G \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \\ &\times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{vmatrix} d\xi d\eta = \frac{Ghab}{16} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{vmatrix} a_r a_s & a_r b_s \\ b_r a_s & b_r b_s \end{vmatrix} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

откуда

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{Gh}{4} \begin{vmatrix} (1/c)\eta_r \eta_s (1 + \xi_r \xi_s / 3) & \eta_r \xi_s \\ \xi_r \eta_s & c\xi_r \xi_s (1 + \eta_r \eta_s / 3) \end{vmatrix}. \quad (10.77)$$

В рассмотренном прямоугольнике перемещения u_x и u_y , определяемые формулой (10.69), изменяются по линейному закону вдоль прямых $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ и, в частности, вдоль его сторон. Рассуждая так же, как и в случае треугольных элементов, заключаем отсюда, что введенные выше прямоугольные конечные элементы являются совместными. Заметим, что они совместны также с треугольными элементами, так как перемещения вдоль сторон изменяются по линейному закону.

Треугольные и прямоугольные конечные элементы одни из простейших. Однако прямоугольный конечный элемент при одинаковом числе узлов (т. е. при одинаковом порядке полученных уравнений) дает более точное решение, чем при идеализации тела прямоугольными элементами. Однако с помощью одних только прямоугольников можно идеализировать лишь такие области, которые ограничены прямыми линиями, параллельными осям x и y . Для более сложных областей можно использовать прямоугольные элементы в сочетании с треугольными, но это усложняет подготовку исходных данных. Поэтому для расчета тел произвольной формы обычно применяют конечные элементы в виде четырехугольников произвольной формы.

В работе [13] показано, что прямоугольный конечный элемент дает заниженное значение при определении углов поворота, т. е. является слишком жестким. Источником чрезмерной жесткости конечного элемента при изгибе является появление деформаций сдвига γ_{xy} , которые в точном решении равны нулю. Для удовлетворительного решения необходимо увеличить количество конечных элементов или использовать так называемый несовместный элемент [13]. При составлении конечно-элементной модели сложной формы часто приходится использовать разнообразные конечные элементы [19...22], поскольку аппроксимировать детали сложной формы простейшими элементами часто не удается.

Блок 8 (2 часа). Вариационные методы решения задач теории упругости. Метод Рэлея-Ритца (глава 9 [2]).

Цель лекции – дать основные понятия о вариационных методах решения задач теории упругости.

Решение большинства задач теории упругости сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Точного решения очень многих важных для практики задач до сих пор не получено, так как удается решать их лишь приближенными методами, среди которых важное место занимают вариационные методы и в первую очередь те, которые основаны на применении начала возможных перемещений Лагранжа.

В последние годы большое количество решений задач прикладной теории упругости получено с помощью метода конечных элементов, рассмотренного нами в гл. 10.

Широкое использование вычислительных машин существенно увеличило возможности численных методов решения дифференциальных уравнений, таких как конечно-разностный метод (метод сеток), метод конечных объемов, метод граничных элементов и др.

В настоящей главе будут рассмотрены лишь наиболее часто применяемые при решении задач прикладной теории упругости вариационные методы (Рэлея – Ритца, Бубнова – Галеркина, Канторовича – Власова).

Прежде чем излагать суть вариационных методов, поясним некоторые основные понятия. В инженерной практике наряду с задачами, в которых отыскивается экстремум некоторой функции $y = f(x)$, встречаются и такие, в которых необходимо отыскать экстремум такой переменной Z , которая сама зависит от выбора функции $f(x)$. Такие переменные Z называются *функционалами*.

В простейшем случае функционал Z представляется в виде интеграла $Z = \int_a^b F(x, y, y') dx$, где a, b определяют интервал изменения аргумента x .

Сравнивая функционал и функцию, можно заметить, что они являются переменными, однако первый зависит от вида функции $y(x)$, а вторая – от величины аргумента x . В одном случае, изменяя вид функции $y(x)$, т. е. варьируя саму функцию, мы изменяем величину функционала, а во втором – изменяя величину независимого переменного x , влияем на величину функции.

При отыскании экстремума функции мы отыскиваем такое значение аргумента x , которое сообщает функции $y(x)$ максимум или минимум.

В вариационных задачах необходимо отыскать такой вид функции $y(x)$, при котором функционал Z приобретает максимальное или минимальное значение.

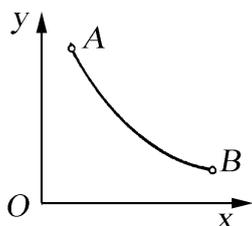


Рис. 44. Линия
быстрейшего ската

Классическим примером вариационной задачи служит задача о брахистохроне – линии быстрейшего ската, предложенная в 1696 г. И. Бернулли. Между точками A и B , не лежащими на вертикали, требуется провести линию, по которой материальная точка в минимальное время скатится из точки A в точку B (рис. 44). Здесь роль функционала выполняет время t перемещения из точки A в точку B , а уравнение $y(x)$ кривой,

проходящей через точки A и B , – искомая функция.

Отметим, что методы решения вариационных задач, т. е. задач отыскания функций, сообщающих функционалу максимум или минимум, во многом сходны с исследованием функций на максимум и минимум.

В задачах на максимум и минимум независимому переменному x дается приращение $\Delta x = x - x_1$, равное дифференциалу dx . В вариационных задачах дается приращение (или вариация) δy искомой функции $y(x)$, равное $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

Как в дифференциальном исчислении дифференциал функции представляет собой линейную по отношению к приращению аргумента Δx часть приращения функции, так и в вариационном исчислении вариация функционала δZ представляет собой линейную по отношению к вариации функции δy часть функционала.

Если функция $y = f(x)$ достигает экстремума внутри заданного интервала значений аргумента x , дифференциал функции $dy = 0$. Аналогично, если функционал достигает экстремума, то его вариация равна нулю: $\delta Z = 0$.

Приближенные методы, которые позволяют найти решение задачи минуя процесс интегрирования дифференциальных уравнений, либо сводя их к решению системы алгебраических уравнений относятся к так называемым *прямым методам*.

Перейдем к непосредственному рассмотрению некоторых прямых вариационных методов.

Метод Рэля – Ритца является одним из наиболее мощных прямых методов вариационного исчисления. Он основан на использовании известного из курса теоретической механики принципа возможных перемещений: для того, чтобы система, подчиненная идеальным удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении равнялась нулю.

Пусть работа внешних сил (объемных и поверхностных) на каком-либо возможном перемещении равна δA . Под действием внешних сил происходит деформация упругого тела, а внутренние силы при этом выполняют работу δU , которая представляет собой приращение потенциальной энергии системы на том же возможном перемещении (взятом с обратным знаком по отношению к работе внешних сил). Тогда принцип возможных перемещений для тела, находящегося в равновесии, можно представить следующим образом:

$$\delta A - \delta U = 0. \quad (a)$$

Определим значения δA и δU из условия, что на систему действуют объемные силы X , Y и Z , а также поверхностные силы X_v , Y_v и Z_v (v – нормаль к некоторой поверхности s , на которой действуют указанные поверхностные силы). Дадим частицам тела возможные

перемещения, составляющие которых δu_x , δu_y , δu_z . Подсчитаем работу внешних сил на этих возможных перемещениях. Элементарная работа составляющей объемных сил X , приходящейся на единицу объема, равна произведению этой силы на объем бесконечно малого элемента $dx dy dz$ и на возможное перемещение δu_x в направлении этой силы:

$$X \cdot dx dy dz \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определим элементарные работы составляющих объемных сил Y и Z (и в направлении этих сил) на соответствующих возможных перемещениях δu_y и δu_z

$$Y \cdot dx dy dz \cdot \delta u_y, Z \cdot dx dy dz \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая объемными силами во всем объеме тела V , равна интегралу по этому объему от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих объемной силы:

$$\iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) dx dy dz. \quad (б)$$

Элементарная работа составляющей поверхностных сил p_{xv} , которая действует на бесконечно малом элементе поверхности ds , равна произведению равнодействующей этой составляющей на площадке ds на возможное перемещение δu_x в направлении этой составляющей

$$p_{xv} \cdot ds \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определяются и элементарные работы двух других составляющих поверхностных сил

$$p_{yv} \cdot ds \cdot \delta u_y, p_{zv} \cdot ds \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая поверхностными силами, действующими на всей поверхности тела s , равна интегралу по всей поверхности тела от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих поверхностных сил:

$$\iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds. \quad (в)$$

Таким образом, возможная работа всех внешних сил на возможных перемещениях равна сумме работ объемных (б) и поверхностных (в) сил:

$$\begin{aligned} \delta A = & \iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) dx dy dz + \\ & + \iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds. \end{aligned} \quad (г)$$

При вычислении возможной работы внешних сил варьировались только перемещения u_x , u_y и u_z , а объемные и поверхностные силы оставались постоянными, поэтому оператор δ в формуле (г) можно вынести из-под знаков интегралов, сделав общим для обоих интегралов:

$$\delta A = \delta \left[\iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dx dy dz + \right. \\ \left. + \iint_s (p_{x\nu} \delta u_x + p_{y\nu} \delta u_y + p_{z\nu} \delta u_z) ds \right]. \quad (d)$$

Поскольку потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, вычисляется по формуле $U = \iiint_V W dx dy dz$ [1], то приращение потенциальной энергии δU в формуле (a) равно

$$\delta U = \iiint_V \delta W dx dy dz, \quad (e)$$

где $W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$ – удельная потенциальная энергия.

Представляя в соотношении (a) оператор δ общим для обоих слагаемых, получаем:

$$\delta(A - U) = 0. \quad (ж)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой работу всех внешних и внутренних сил, приложенных к телу. Эта величина, взятая с обратным знаком, является потенциальной энергией системы внешних и внутренних сил, действующих на упругое тело:

$$\mathcal{E} = U - A. \quad (9.1)$$

Вводя это обозначение вместо условия (ж), получаем следующее соотношение:

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (з)$$

Так как первая вариация δ с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка равна первому дифференциалу, то вместо условий (e) можно написать

$$d\mathcal{E} = 0.$$

Полученное условие означает, что при равновесии упругой системы потенциальная энергия \mathcal{E} достигает экстремального значения.

На основании теоремы Лагранжа – Дирихле [2] можно сформулировать следующий принцип минимума потенциальной энергии: *из всех мыслимых перемещений упругого тела перемещения, удовлетворяющие условиям устойчивого равновесия, сообщают потенциальной энергии системы минимальное значение.*

Таким образом, потенциальная энергия системы \mathcal{E} (9.1)

$$\mathcal{E} = U - A = \min. \quad (9.2)$$

При этом потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, определяется по формуле (ж), а работа объемных и поверхностных сил согласно формуле (d)

$$A = \iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dx dy dz + \iint_s (p_{xv}\delta u_x + p_{yv}\delta u_y + p_{zv}\delta u_z) ds. \quad (u)$$

В соответствии с методом Рэлея – Ритца представим перемещения u_x , u_y и u_z в виде ряда функций, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям. Пусть, например,

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_k a_k \varphi_k(x, y, z); & u_y &= \sum_k b_k \psi_k(x, y, z); \\ u_z &= \sum_k c_k \chi_k(x, y, z), \end{aligned} \quad (9.3)$$

где φ_k , ψ_k , χ_k – функции, удовлетворяющие граничным условиям, а a_k , b_k , c_k – произвольные параметры, подлежащие определению из условий стационарности энергии (з) ($k = 1, 2, 3, \dots, n$).

Потенциальная энергия деформаций W может быть представлена через перемещения u_x , u_y и u_z . Действительно, если в уравнении (е) [1]

$$W = \frac{1}{2} [\lambda \theta^2 + 2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]$$

компоненты деформации заменить через перемещения u_x , u_y и u_z согласно формулам Коши [1], а также использовать постоянные Ламе

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

то после преобразований получим для W следующее выражение:

$$\begin{aligned} W = G \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Теперь полная энергия системы \mathcal{E} может быть представлена как некоторая функция параметров a_k , b_k , c_k , т. е.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_k, b_k, c_k).$$

Как следует из (u) работа внешних сил A является линейной функцией параметров a_k , b_k , c_k , а приращение потенциальной энергии U , как и потенциальная энергия \mathcal{E} (что следует из (9.4)) является квадратичной функцией этих же параметров.

Из условия стационарности энергии $\delta \mathcal{E} = 0$, имея в виду, что все параметры a_k , b_k , c_k произвольны, следует, что нулю должны равняться частные производные от энергии \mathcal{E} по всем варьируемым параметрам a_k , b_k , c_k , т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_k} = 0. \quad (9.5)$$

В итоге получим столько уравнений, сколько произвольных параметров содержится в выражениях (9.3).

Пример решения задачи изучить самостоятельно в п.9.2.

Блок 9 (2 часа). Метод Бубнова-Галеркина (п. 9.3.[2]).

Цель лекции – дать представления о методе Бубнова-Галеркина для решения некоторых задач теории упругости.

Если в вариационном уравнении (9.6) вместо вариаций перемещений $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ подставить выражения

$$\begin{aligned} \delta u_x &= \sum_k \delta a_k \varphi_k(x, y, z); \quad \delta u_y = \sum_k \delta b_k \psi_k(x, y, z); \\ \delta u_z &= \sum_k \delta c_k \chi_k(x, y, z) \end{aligned}$$

и учесть, что вариации параметров $\delta a_k, \delta b_k, \delta c_k$ произвольны и линейно независимы между собой, то в связи с этим каждый член, имеющий множители $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ уравнения (9.6), должен быть равен нулю. В результате получим систему из трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \varphi_k(x, y, z) dx dy dz - \right. \\ & \left. - \iint_s (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - p_{xv}) \varphi_k(x, y, z) ds = 0; \right. \\ & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \psi_k(x, y, z) dx dy dz - \right. \\ & \left. - \iint_s (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - p_{yv}) \psi_k(x, y, z) ds = 0; \right. \\ & \left. \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \chi_k(x, y, z) dx dy dz - \right. \right. \\ & \left. \left. - \iint_s (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - p_{zv}) \chi_k(x, y, z) ds = 0 \right] \right. \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Полученные уравнения и есть уравнения *обобщенного метода Бубнова – Галеркина*.

В основе этого метода, как и метода Рэлея – Ритца, лежит принцип возможных перемещений. Выражения для перемещений (9.6) при использовании обобщенного метода Бубнова – Галеркина могут, как и в методе Рэлея – Ритца, не удовлетворять силовым граничным условиям: достаточно лишь выполнение кинематических граничных условий на части поверхности s .

Таким образом, обобщенный метод Бубнова – Галеркина и метод Рэлея – Ритца являются двумя различными формами записи принципа возможных перемещений. Их использование приводит к одной и той же системе разрешающих уравнений для определения неизвестных параметров a_k, b_k, c_k в выражении (9.6). И все же в вычислительном отношении обобщенный метод Бубнова – Галеркина проще, поскольку позволяет сразу выписать систему разрешающих уравнений без вычисления потенциальной энергии.

Процедура применения обобщенного метода Бубнова–Галеркина для решения задач теории упругости на базе использования уравнений (9.17) состоит в следующем. Сначала задаемся компонентами перемещений u_x, u_y, u_z в форме рядов (9.6). Используя далее кинематические соотношения между перемещениями u_x, u_y, u_z и деформациями (формулы Коши), определяем компоненты деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Подставляя найденные значения компонентов деформации в закон Гука (или принятый физический закон связи между компонентами деформаций и компонентами напряжений), получаем выражения для компонентов напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ в каждой точке тела как некоторые сложные функции неизвестных параметров a_k, b_k, c_k .

Подставляя теперь найденные выражения для компонентов напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ непосредственно в уравнения метода (9.16) и выполняя все необходимые операции (дифференцирование и интегрирование по объему и части поверхности тела), находим необходимое число алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k .

Для линейной задачи, т.е. когда материал тела подчиняется закону Гука и используются соотношения линейной теории упругости, эта система уравнений линейна.

Если выбранные выражения для перемещений наряду с кинематическими граничными условиями удовлетворяют также и силовым условиям (7.9), то в уравнениях (9.17) поверхностные интегралы исчезают и они принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \varphi_k(x, y, z) dx dy dz = 0; \\ \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \psi_k(x, y, z) dx dy dz = 0; \\ \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \chi_k(x, y, z) dx dy dz = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$

Приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на использовании зависимостей вида (9.18), предложили в 1913 г. И.Г. Бубнов в своем отзыве на одну из работ С.П. Тимошенко и независимо от него в 1915 г. Б.Г. Галеркин.

Уравнения (9.18) принято называть *уравнениями метода Бубнова – Галеркина* [8]. Они получены из принципа возможных перемещений, в силу чего может показаться, что этот метод применим лишь для краевых задач, связанных с некоторой вариационной проблемой.

Можно показать, что указанный метод применим для приближенного решения дифференциальных уравнений, не обязательно связанных с какой-либо вариационной проблемой [11].

Пусть рассматриваемая краевая задача описывается дифференциальным уравнением $2m$ -го порядка (в некотором объеме V)

$$L^{(2m)}[u_z(x, y, z)] - q(x, y, z) = 0 \quad (9.19)$$

при граничных условиях (на некоторой поверхности s)

$$Q_i[u_z(x, y, z)] = f_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (9.20)$$

где $L^{(2m)}$ и Q_i – заданные дифференциальные операторы; $q(x, y, z)$ и $f_i(x, y, z)$ – заданные функции⁵.

Пусть при приближенном решении дифференциального уравнения (9.18) запишем выражение для $u_z(x, y, z)$ в форме суммы

$$u_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y, z). \quad (9.21)$$

Систему линейно независимых функций $\varphi_i(x, y, z)$ выберем так, чтобы все граничные условия (9.20) тождественно выполнялись. Параметры a_i подлежат определению.

Дальнейшее решение основано на свойстве ортогональности функций. В курсе математического анализа дается следующее определение ортогональности функций: если имеется семейство непрерывных функций

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x), \dots, \psi_n(x) \quad (a)$$

и интеграл от произведения любых двух различных функций этого семейства в промежутке $[a, b]$ равен нулю

$$\int_a^b \psi_k(x) \psi_i(x) dx = 0, \quad (9.22)$$

то функции (a) образуют в промежутке $[a, b]$ ортогональную систему.

⁵ В качестве уравнения (9.19) можно представить, например, уравнение упругой линии балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 45).

Например, семейство тригонометрических функций

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \quad (б)$$

является ортогональной системой в промежутке $[-\pi, +\pi]$.

Действительно интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lxdx &= 0 \quad (k \neq l), \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lxdx &= 0 \quad (k \neq l), \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lxdx &= 0 \quad (k \neq l). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Это исчерпывает все возможные варианты комбинирования двух различных функций семейства (б) и доказывает, что оно образует ортогональную систему в промежутке $[-\pi, +\pi]$.

На основании леммы из курса математического анализа следует, что если одна из функций тождественно равна нулю, например $\psi_k(x) \equiv 0$, то она ортогональна ко всем без исключения функциям, так как условие (9.22) выполняется.