

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего
образования

**«Владимирский государственный университет имени Александра
Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**

(ВлГУ)

В. П. Легаев

Расчет и проектирование измерительных приборов и систем
Учебное пособие

Владимир 2016 г.

Данное учебное пособие представляет собой расчет и проектирование измерительных устройств (ИУ) удовлетворяющих заданным требованиям. Подробно рассматриваются статические и динамические характеристики, задачи анализа и синтеза параметров ИУ по критериям статической и динамической точности.

Предназначена для магистров направления 12.04.01 «Приборостроение».

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Математическая модель измерительного устройства.....	5
1.1. Этапы создания математической модели ИУ.....	5
1.2. Пример создания математической модели.....	9
Глава 2. Статические характеристики измерительного устройства.....	12
2.1. Понятие о статическом режиме измерений. Виды статических характеристик ИУ.....	12
2.2. Задачи анализа и синтеза статических характеристик ИУ.....	18
2.3. Расчет статической характеристики ИУ по структурной схеме.....	19
2.4. Расчет коэффициента чувствительности ИУ.....	23
2.5. Расчет погрешности от нелинейности статической характеристики ИУ.....	26
2.5.1. Расчет прямой наименьших модулей и максимальной приведенной погрешности от нелинейности статической характеристики ИУ.....	26
Глава 3. Динамические характеристики измерительного устройства.....	31
3.1. Виды динамических характеристик.....	32
3.2. Дифференциальное уравнение ИУ.....	32
3.3. Передаточная функция ИУ.....	39
3.4. Расчет передаточной функции по структурной схеме ИУ.....	42
3.5. Переходная функция ИУ.....	46
3.6. Длительность переходного процесса.....	51
3.7. Активная длительность переходного процесса.....	53
3.10. Частотные динамические характеристики ИУ.....	56
3.11. Полоса пропускания частот ИУ.....	65
Глава 4. Анализ динамических характеристик типовых измерительных устройств.....	69
4.1. Динамические характеристики ИУ 1-го порядка.....	70
4.2. Динамические характеристики ИУ 2-го порядка.....	74
4.2.1. Относительная передаточная функция.....	74
4.2.2. Относительная переходная функция.....	75
4.2.3. Относительная импульсная переходная (весовая) функция.....	75
4.2.4. Относительная амплитудная частотная функция.....	76
4.2.5. Фазовая частотная функция.....	77
4.2.6. Длительность переходного процесса.....	78

4.2.7. Активная длительность переходного процесса.....	84
4.2.8 Перерегулирование.....	85
4.2.9. Ширина полосы пропускания частот.....	88
Глава 5. Синтез параметров измерительного устройства по критериям динамической точности.....	90
5.1. Синтез параметров ИУ 1-го порядка.....	92
5.2. Синтез параметров ИУ 2-го порядка.....	93
5.3. Синтез параметров ИУ 3-го порядка.....	102
Глава 6. Точность измерительных устройств.....	103
6.1. Виды погрешностей ИУ.....	103
6.2. Оптимальный выбор параметров ИУ из условия минимума статической погрешности.....	116
6.3. Оптимальный выбор параметров ИУ.....	121
6.4. Пример расчета и анализа погрешностей ИУ.....	123
Литература.....	129

Глава 1

Математическая модель измерительного устройства

Измерительным устройством (ИУ) называется часть измерительного прибора (установки, или системы), связанная с измерительным сигналом и имеющая обособленную конструкцию и назначение.

Основу математической модели любого ИУ составляет описание особенностей и свойств этих преобразований математическими средствами. Наличие подобной модели позволяет прогнозировать (т. е. предсказывать) результаты измерений при работе ИУ в различных условиях эксплуатации, а также оптимизировать структуру и параметры ИУ, подчиняя их выбор требованию минимальной (или заданной) погрешности результата измерений.

В идеальном случае математическая модель ИУ должна адекватно (т. е. без искажений) отражать происходящие в нем измерительные преобразования. При этом чем выше необходимая степень совпадения расчетных и фактических результатов, тем, как правило, более сложным оказывается математический аппарат, который используется при создании такой модели ИУ.

1.1. Этапы создания математической модели ИУ.

Математическую модель ИУ получают в результате математического описания измерительных преобразований, происходящих в его звеньях. Поэтому первым этапом в разработке этой модели является расчленение ИУ на отдельные (элементарные) звенья, каждое из которых выполняет отдельное (элементарное) измерительное преобразование. На этом этапе важно правильно установить последовательность физических величин и преобразований, следуя которой измеряемая физическая величина (например, давление) преобразуется в результат измерения (показания манометра). Такая последовательность физических величин и преобразований целиком зависит от выбранного метода измерения и принципиальной схемы рассматриваемого ИУ, однако степень ее детализации может быть различной.

На втором этапе каждое измерительное преобразование описывается физическими законами и соотношениями, которые отражают объективно существующие связи между величинами, участвующими в соответствующем измерительном преобразовании. Поэтому одним из условий успешного создания математической модели ИУ является знание физических законов и умение правильно их применять для

описания процессов в устройствах различной физической природы – механических, электромагнитных, тепловых, гидравлических и т.д.

Математическое описание каждого измерительного преобразования и соответственно каждого звена ИУ обычно получают в форме уравнения (алгебраического, дифференциального и др.), связывающего входной и выходной сигналы звена. В это уравнение, помимо указанных сигналов, входят величины (параметры, коэффициенты и пр.), зависящие от физических параметров звена. Поэтому, зная математическую модель звена, можно судить о влиянии параметров этого звена на результат измерительного преобразования и, значит, подчинять выбор этих параметров желаемому результату измерительного преобразования. Именно это составляет главную ценность математической модели каждого звена ИУ. Все сказанное в равной степени относится к ИУ в целом.

На третьем этапе уравнения всех звеньев ИУ приводятся к форме, удобной для последующего построения полной математической модели ИУ. При этом исходные нелинейные алгебраические или дифференциальные уравнения звеньев ИУ могут заменяться приближенными линейными уравнениями. Процесс подобной замены называется линеаризацией. Используемые при этом предположения и допущения нужно фиксировать, так как с их помощью при необходимости можно сформулировать условия, при выполнении которых построенная модель ИУ оказывается достоверной. Следует подчеркнуть, что линеаризация уравнений звеньев ИУ является необходимой лишь в той степени, в какой это нужно для успешного построения полной математической модели ИУ и ее последующего анализа доступными средствами. В некоторых случаях линеаризация этих уравнений может приводить к утрате существенных особенностей измерительных преобразований. Поэтому при разработке математической модели ИУ полезно строить различные математические модели его звеньев, начиная с простейших моделей, которые при необходимости можно постепенно усложнять, чтобы учесть дополнительные явления или связи, которые на начальном этапе были отброшены как несущественные. Возможна взаимная компенсация нелинейностей характеристик отдельных звеньев ИУ. В этом случае линеаризация уравнений этих звеньев может оказаться излишней.

Наконец, на четвертом, завершающем, этапе систему уравнений, описывающих измерительные преобразования в звеньях ИУ и связи между ними, представляют в виде структурной схемы ИУ (ССИУ). Эта схема является условным графическим изображением математической модели ИУ. В современной теории динамических систем (особенно в ТАР и ТАУ) использование структурных схем превратилось в своеобразный язык, помогающий правильно интерпретировать процессы, происходящие в реальных системах. Поэтому получение математической модели ИУ в виде его структурной схемы является важным этапом создания этой модели.

Таким образом, создание математической модели любого ИУ предполагает выполнение, как минимум, четырех основных этапов: расчленение, описание, линеаризация и структуризация ИУ.

Структурная схема ИУ обычно представляется соединением звеньев, каждое из которых отражает математическую модель отдельного элемента устройства (например, чувствительного элемента), соединение нескольких элементов или вообще любой части ИУ. Более того, некоторые звенья структурной схемы могут отражать преобразования, которые осуществляются даже вне физической схемы ИУ. Последнее характерно для ИУ, реализующих косвенный метод измерения, когда искомое значение измеряемой величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям. Звено на структурной схеме ИУ условно обозначается в виде прямоугольника с указанием входной и выходной величин, а также передаточной функции звена внутри него. Если звено является безынерционным, то вместо передаточной функции преобразования $y=f(x)$ (рис. 1.1, а), безынерционного звена с линейной функцией преобразования $y=Kx$ (рис. 1.1, б), инерционного линейного звена с передаточной функцией $W(p)$ (рис. 1.1, в). Здесь же показаны структурные схемы сумматора (рис. 1.1, г) и сравнивающего устройства (рис. 1.1, д), для которых соответственно можно записать $z=x+uy$ и $z=x-uy$. Эти устройства также можно рассматривать в качестве звеньев структурной схемы ИУ, так как в общем случае звено может иметь несколько входов и выходов (см. рис. 2.2).

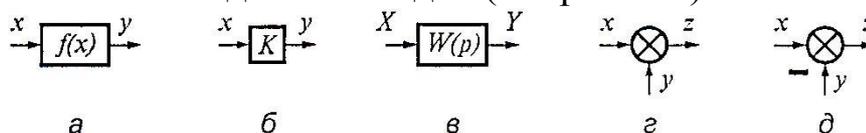


Рис. 1.1

На рис. 1.2 показан пример структурной схемы, состоящей из двух безынерционных звеньев 1,2, одного инерционного 3 (с передаточной функцией $W_3(p)=2/(p+3)$), сравнивающего устройства и сумматора, определенным образом связанных друг с другом.

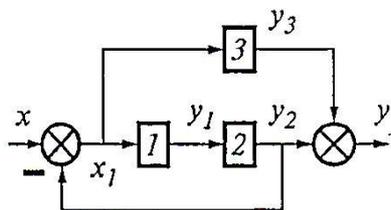


Рис. 1.2

$$y_1=f_1(x_1) \quad x_1=x-y_2;$$

$$y_2=f_2(y_1) \quad y=y_2+y_3;$$

$$dy_3/dt+3y_3=2x_1.$$

Представленная система уравнений и структурная схема ИУ эквивалентны друг другу. Однако поскольку математическое описание одинаковых измерительных преобразований может быть различным, возможны разные варианты структурной схемы одного и того же ИУ.

Различают ИУ (и структурные схемы) с типовыми и комбинированными соединениями звеньев. К типовым относятся устройства (и схемы) с последовательным, параллельным и встречно-параллельным соединениями звеньев, причем последнее может быть как с положительной, так и с отрицательной обратной связью (рис.1.3). Все остальные структурные схемы ИУ считаются схемами с комбинированным соединением звеньев.

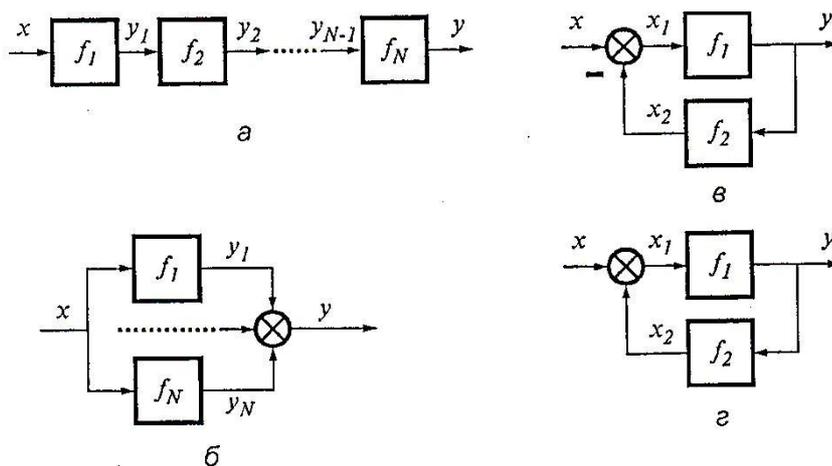


Рис. 1.3

Помимо структурной схемы, при анализе ИУ пользуются также его функциональной схемой. Она иллюстрирует состав функционально необходимых элементов (или блоков) ИУ и связи между ними. В

отличие от функциональной схемы структурная схема ИУ содержит лишь звенья, присутствующие в так называемом измерительном канале (или каналах) устройства. Поэтому она в меньшей степени привязана к физической схеме и конструкции ИУ. В известной степени это является одним из недостатков структурной схемы ИУ. Однако она позволяет в математической форме отразить последовательность, характер и сложность измерительных преобразований, происходящих в звеньях ИУ, т. е. расчетным путем определить зависимости между входными и выходными величинами для каждого звена и ИУ в целом. В частности, зная структурную схему, можно определить общую статистическую характеристику или общую передаточную функцию ИУ.

Наличие математической модели позволяет абстрагироваться (отстраниться) от физического принципа действия и конструкции ИУ, обращая главное внимание на математическую суть происходящих в нем измерительных преобразований. В результате появляется возможность трансформировать некоторые требования, предъявляемые к ИУ в целом, в требования к отдельным звеньям ИУ и тем самым свести задачу проектирования всего ИУ к множеству более простых задач проектирования его звеньев. В число этих требований входят, как правило, лишь те из них, которые влияют на выходные характеристики ИУ (прежде всего метрологические). Поэтому, зная модель ИУ, невозможно в полном объеме решить задачу проектирования (и тем более создания) ИУ, так как помимо метрологических требований к любому ИУ предъявляется целый ряд других требований: весогабаритных, экономических, эргономических конструктивно – технологических и пр.

Наряду с выбором принципиальной схемы, создание математической модели является начальным и весьма важным этапом проектирования любого ИУ. Последующий обратный переход от математической модели ИУ к его физической схеме позволяет выбирать такие значения физических параметров (а иногда и конструкцию) звеньев, при которых ИУ в целом приобретает желаемые выходные характеристики. Этот переход составляет основу расчета и выбора физических параметров ИУ.

1.2. Пример создания математической модели.

Как уже отмечалось, процесс разработки математической модели любого ИУ можно рассматривать как переход от принципиальной

схемы, поясняющей физический принцип действия ИУ, к его структурной схеме. В качестве примера далее рассматривается разработка структурно-математической модели терморезисторного термометра – прибора, предназначенного для измерения температуры какой-либо среды (жидкости или газа), твердого тела, биологического объекта и др. Помимо построения математической модели такого ИУ, этот пример демонстрирует типичные задачи, возникающие на начальных стадиях проектирования любого средства измерений, когда ошибки проектирования обходятся дороже всего.

На рис.1.4 показана принципиальная схема рассматриваемого прибора. Роль первичного измерительного преобразователя в нем выполняет металлический терморезистор (рис.1.4,а).

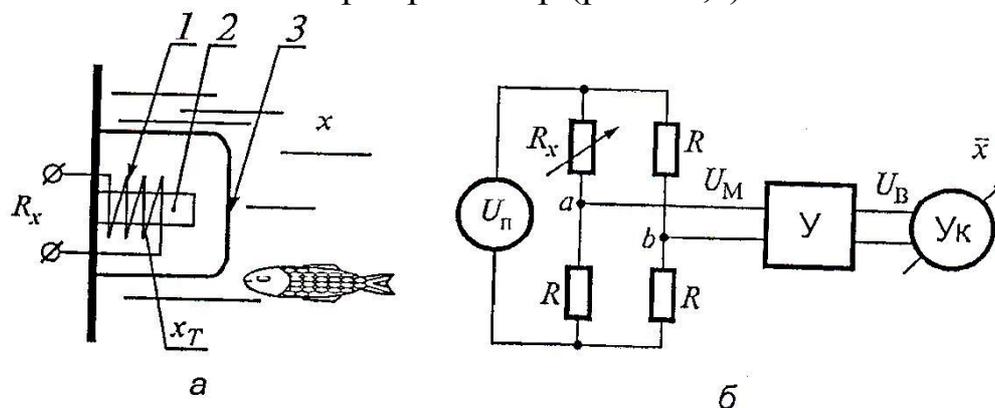


Рис. 1.4

Его чувствительным элементом является обмотка провода 1 из теплочувствительного материала (меди, платины, или никеля), размещенная на изоляционной стойке 2.

С целью предотвращения от механических повреждений и защиты от агрессивных факторов контролируемой среды проволока помещена в защитный кожух 3 (в идеале не создающий сопротивления тепловому потоку). При изменении температуры контролируемой среды X вследствие изменения температуры проволоки изменяется ее активное сопротивление, т.е. сопротивление терморезистора R_x .

Обычно можно считать, что эта зависимость с достаточной для практики точностью аппроксимируется отрезком степенного ряда

$$R_x = R_0(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \quad (1.1)$$

Где R_0 – сопротивление проволоки при температуре $x=0^{\circ}\text{C}$, зависящее от ее размеров и свойств материала,

$$R_0 = \rho_n \frac{l_n}{S_n}$$

ρ_n, l_n, S_n – соответственно удельное электрическое сопротивление, длина и площадь сечения проволоки; a_1, a_2, \dots, a_n – постоянные коэффициенты, значения которых (как и степень полинома) определяют по результатам градуировки терморезистора.

В диапазоне средних температур ($-50 \dots +200$ °С) для медных терморезисторов можно принять $a_1 = 4,28 \cdot 10^{-3}$ °С⁻¹, $a_2 = a_3 = \dots = 0$, т.е. статистическую характеристику медного терморезистора в этом диапазоне температур можно считать линейной, и при увеличении температуры на 10 °С сопротивление такого терморезистора увеличивается на 4,28%, для платиновых терморезисторов $a_1 = 5,86 \cdot 10^{-3}$ °С⁻¹, $a_2 = -5,847 \cdot 10^{-7}$ °С⁻², $a_3 = a_4 = \dots = 0$, для никелевых терморезисторов $a_1 = 5,86 \cdot 10^{-3}$ °С⁻¹, $a_2 = 8 \cdot 10^{-6}$ °С⁻², $a_3 = a_4 = \dots = 0$, т.е. их статические характеристики в диапазоне средних температур нелинейные. При высоких требованиях к точности результатов измерений пользуются индивидуальной градуировочной характеристикой терморезистора, которая в общем случае является нелинейной. Однако в целях упрощения последующего анализа будем пренебрегать нелинейными членами в формуле (1.1), полагая, что

$$R_x = a_R + b_R x \quad (1.2)$$

Где a_R, b_R – постоянные коэффициенты. Формулу (1.2) можно рассматривать как уравнение прямой (прямой наименьших модулей или прямой наименьших квадратов), которая наилучшим образом аппроксимирует семейство экспериментальных точек, полученных в результате градуировки конкретного терморезистора в заданном диапазоне температур $x_n \leq x \leq x_v$ (где x_n, x_v – границы диапазона измерений). Параметры a_R, b_R такой прямой и соответствующую погрешность аппроксимации (погрешность от нелинейности) можно вычислить методом наименьших модулей, или методом наименьших квадратов.

Последующее преобразование активного сопротивления терморезистора R_x в первичный электрический сигнал (напряжение постоянного тока U_M) выполняется с помощью схемы включения. В рассматриваемом приборе роль такой схемы выполняет мост постоянного тока (мост Уитстона), в одно из плеч которого включен терморезистор, как это показано на рис.1.4,б. Считается, что сопротивления остальных трех плеч моста не зависят от температуры контролируемой среды x и равны друг другу по величине. Предполагается, что их значения равны начальному сопротивлению терморезистора, т.е. $R = a_R$. В

этом случае при температуре $x=0$ °С (когда $R_x=R$) мост оказывается уравновешенным и напряжение U_M в его измерительной диагонали равно нулю. В остальных случаях (когда $R_x \neq R$) мост разбалансирован. Тогда в измерительной диагонали моста появляется напряжение U_M , которое является частью напряжения питания моста U_{II} . Величина и знак этого напряжения зависят от степени и направления разбаланса моста, т.е. от величины сопротивления терморезистора R_x . Для принятой схемы включения терморезистора эта зависимость имеет

$$\text{вид } U_M = U_{II} \frac{R_n(R_x - R)}{(2R_n + R) + (2R_n + 3R)R_x}$$

Где R_n – сопротивление нагрузки моста, одной из составляющих которого является входное сопротивление усилителя U .

Глава 2.

Статические характеристики измерительного устройства

2.1. Понятие о статическом режиме измерений. Виды статических характеристик ИУ.

Понятие «статический режим измерений» трактуется по-разному. Например, статическим называется такой режим измерений, при котором скорость изменения измеряемой величины во времени значительно уступает скорости тех физических процессов, которые вызываются изменением этой величины и происходят внутри ИУ. На практике это соблюдается, если измеряемая величина изменяется медленно по сравнению с собственными движениями в приборе. Отнесение измерения к динамическому или статическому довольно условное и зависит от величины динамической погрешности. Если эта погрешность велика (по сравнению с другими погрешностями ИУ), то измерение нужно относить к динамическому, если же нет, то к статическому.

Будем считать, что в статическом режиме измерения информативные параметры входного и выходного сигналов, а также помехи, действующие на ИУ, не изменяются во времени (или изменяются так, что величиной соответствующей динамической погрешности можно пренебречь).

Строго реализовать на практике статический режим измерений невозможно, так как в процессе измерения всегда присутствуют факторы, которые той или иной степени изменяются во времени. Однако

подобная идеализация оказывается удобной в тех случаях, когда величиной динамической погрешности ИУ можно пренебречь. В частности, безынерционные ИУ (которых в реальности также не бывает) сохраняют статический режим измерений при любой скорости сходного сигнала.

Следует различать статический, динамический, установившийся и переходный режимы измерений. Для пояснения различий этих режимов на рис. 2.1 показаны два примера реакции инерционного ИУ на ступенчатое и линейно нарастающее входные воздействия. В первом случае после приложения входного сигнала измеряемая величина постоянная, во втором – переменная. В обоих случаях имеет место переходный процесс, который возникает сразу же после приложения входного сигнала. Его длительность $t_{п}$ определяется моментом вхождения графика переходного процесса в так называемую трубку точности. На рис. 2.1 она показана двумя пунктирными линиями. Чем уже эта трубка, тем больше длительность переходного процесса. В течении переходного процесса режим измерений является переходным и динамическим, а после его завершения он становится установившимся и, кроме того, статическим, если измеряемая величина не изменяется во времени (в указанном выше смысле), или динамическим, если такие изменения происходят. Таким образом, статический режим измерений является частным случаем (разновидностью) установившегося режима работы ИУ.

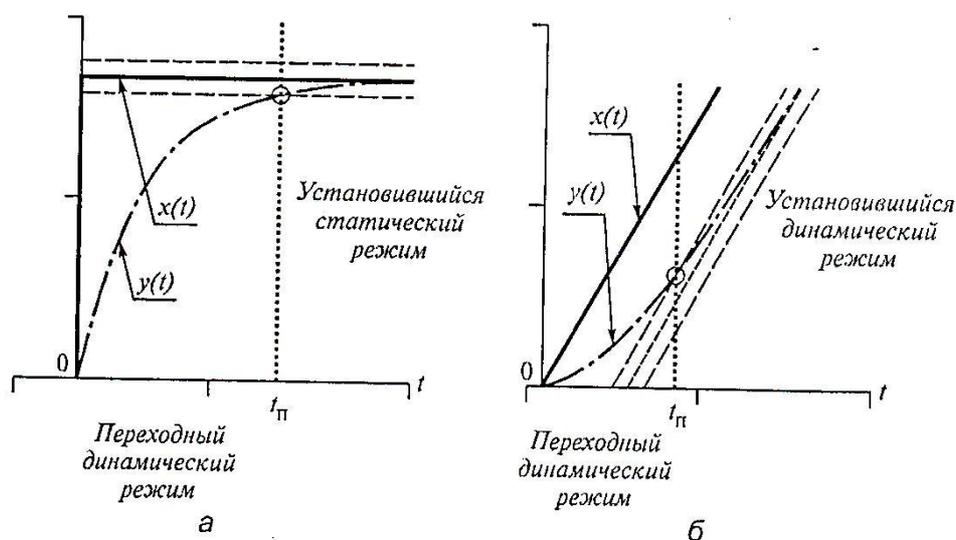


Рис. 2.1

Статической функцией преобразования ИУ называется зависимость между информативными параметрами сигналов на входе и вы-

ходе устройства, работающего в статическом режиме измерений. График этой зависимости называется статической характеристикой ИУ.

Различают прямую и обратную статические характеристики ИУ. Прямая характеристика связывает выходную величину ИУ y с входной величиной x (точнее, информативный параметр выходного сигнала ИУ с информативным параметром входного сигнала). Эта характеристика может быть задана таблицей, графиком или аналитическим выражением вида

$$y=f(x). \quad (2.1)$$

Именно в последнем случае ее называют статической функцией преобразования ИУ.

Зависимость (2.1) удобно использовать для вычисления выходной величины ИУ y , соответствующей известному значению входной величины x . Однако часто, напротив, нужно определять значение входной величины x , соответствующее известному значению выходной величины y . Для этого пользуются обратной статической характеристикой (и обратной функцией преобразования) измерительного устройства

$$x = f^{-1}(y) = \psi(y) \quad (2.2)$$

Если она существует, то ее можно получить, рассматривая выражение (2.1) как уравнение и решая это уравнение относительно переменной x . Например, если

$$y = f(x) = \frac{2x}{1+x}, \text{ то } y + yx = 2x, \\ \text{следовательно, } x = \psi(y) = \frac{y}{2-y}.$$

Таким же образом задают прямую и обратную статические характеристики отдельного звена.

Иногда не удается получить в явном виде зависимость y от x . В этих случаях статическую функцию преобразования ИУ можно задавать уравнением вида

$$F(x,y)=0 \quad (2.3)$$

Заметим, что уравнение (2.1) также можно записать в форме (2.3), если принять $F(x,y)=y-f(x)$. Статическая характеристика ИУ, имеющего два входа x_1 и x_2 и один выход y (рис. 2.2, б), представляется функцией двух переменных $y=f(x_1,x_2)$ или уравнением $F(x_1,x_2,y)=0$.

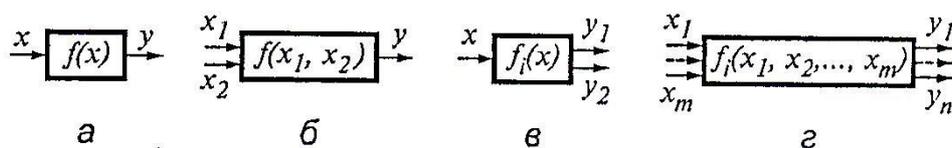


Рис. 2.2

Помимо рассмотренных выше, различают еще заданную, расчетную и градуировочную статические характеристики (и статические функции преобразования) ИУ.

Заданная (желаемая или идеальная) статическая характеристика ИУ

$$y = f_g(x) \quad (2.4)$$

Обычно определяется техническим заданием на проектирование ИУ. Если x – измеряемая физическая величина, а y – показание измерительного прибора, то эта характеристика имеет вид

$$y=x, \quad (2.5)$$

так как только в этом случае результат измерений совпадает со значением измеряемой физической величины во всех точках диапазона измерений.

Уравнение (2.4) может быть нелинейным. В частности, оно может описывать желаемую статическую характеристику отдельного звена, например, корректирующего звена, которое вводится в схему прибора для получения желаемого вида его общей статической характеристики. В этом случае уравнение (2.4) определяет желаемую статическую характеристику отдельного звена ИУ, а x и y – информативные параметры входного и выходного сигналов этого звена.

Расчетную статическую характеристику ИУ (РСХ ИУ) получают расчетным путем на основе анализа расчетной схемы ИУ и его работы в статическом режиме измерений. Обычно эту характеристику получают в форме алгебраического уравнения

$$y = f_p(x; q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (2.6)$$

Куда помимо измеряемой физической величины x , входит еще постоянных коэффициентов q_1, q_2, \dots, q_n , каждый из которых, в свою очередь, может зависеть от физических параметров схемы и конструкции ИУ, а также от параметров, характеризующих принятый метод измерения.

Градуировочной статической характеристикой ИУ

$$y = f_c(x) \quad (2.7)$$

Называют характеристику, которая получена опытным путем, т.е. с помощью специальных испытаний ИУ. Градуировочные характеристики даже однотипных ИУ всегда несколько отличаются друг от друга из-за наличия индивидуальных погрешностей, т.е. каждый отдельный экземпляр ИУ имеет свою индивидуальную градуировочную характеристику.

Изменение информативного параметра выходного сигнала ИУ может быть вызвано воздействием не только измеряемой физической величины x , но и влиянием других факторов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$, характеризующих условия измерений. Этими факторами могут быть давление, влажность и температура окружающей среды, частота и напряжение источника питания и др. Поэтому в общем случае вместо (2.1) следует пользоваться многомерной статической характеристикой средства измерения

$$y=f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M), \quad (2.8)$$

где в случае статического режима измерений аргументы $x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ считаются не зависящими от времени. Эта статическая характеристика ИУ также может быть расчетной или градуировочной. В последнем случае ее получают опытным путем.

Наконец, в зависимости от формы графика статической характеристики ИУ различают шесть основных видов этой характеристики: линейная (рис. 2.5, а), кусочно-линейная (рис. 2.5, б), пропорциональная (рис. 2.5, в), нелинейная (рис. 2.5, г), гистерезисная (рис. 2.5, д), дискретная (рис. 2.5, е).

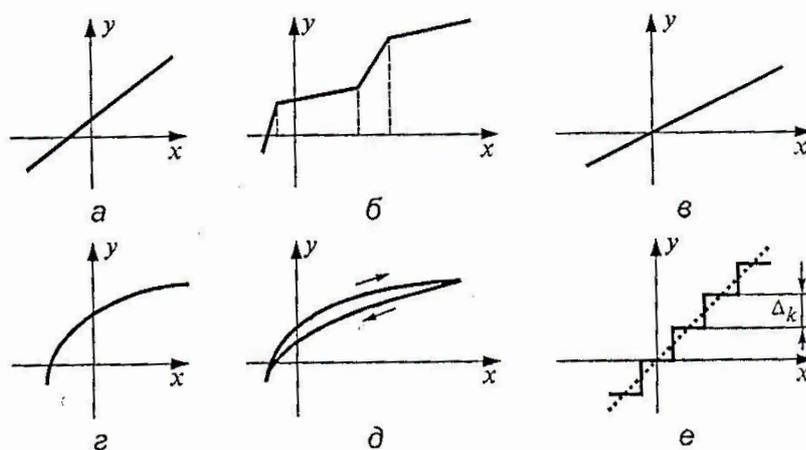


Рис. 2.5

Линейная статическая характеристика задается линейным уравнением

$$y=A+Bx \quad (2.9)$$

где A, B – постоянные коэффициенты (на рис. 2.5, а $A>0, B>0$).

Кусочно-линейная статическая характеристика состоит из нескольких линейных «кусков» (рис. 2.5, б) и может быть задана в виде

$$y = \sum_{j=1}^N H(x, j) * (A_j + B_j x) \quad (2.10)$$

Где $H(x, j)$ – логическая функция ($H(x, j)=1$, если $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ и $H(x, j)=0$, если $x_{j-1} > x > x_j$, где x_{j-1}, x_j – границы j -го участка характеристики); A_j, B_j – параметры прямой на j -м участке характеристики; N – число таких участков.

Частным случаем линейной статической характеристики ИУ является линейная пропорциональная характеристика вида

$$y=Kx. \quad (2.11)$$

График такой характеристики представляет собой прямую, которая проходит через начало координат (рис. 2.5, в) с наклоном, зависящим от значения постоянного коэффициента K , который совпадает с коэффициентом чувствительности ИУ и часто называется коэффициентом передачи ИУ (на рис. 2.5, в $K>0$).

Такой вид статической характеристики ИУ (или отдельного звена ИУ) чаще всего используется в расчетах. Однако на практике линейные зависимости (2.9) и (2.11) скорее исключение, чем правило.

Нелинейная статическая характеристика ИУ (рис. 2.5, г) задается уравнением (2.1), причем обычно предполагается, что в пределах диапазона измерений $f(x)$ – непрерывная, гладкая (дифференцируемая) и однозначная функция.

Гистерезисная статическая характеристика, напротив, описывается многозначной функцией. Она отражает запаздывание изменений выходной величины ИУ, вызванных изменениями входной величины, которое наблюдается у некоторых элементов приборов (упругих, диэлектрических, магнитных и др.). На рис. 2.5, д показан пример такой характеристики. Она содержит две кривые, которые описывают петлю гистерезиса

$$\begin{aligned} y_{\text{пр}} &= f_{\text{пр}}(x), \text{ если } x > 0, \\ y_{\text{обр}} &= f_{\text{обр}}(x), \text{ если } x < 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

т.е. гистерезисная характеристика имеет разный вид для случаев возрастания и убывания входной величины.

Дискретную статическую характеристику (рис. 2.5, е) имеют дискретные ИУ (в том числе цифровые ИУ). Подобно (2.10) дискретную характеристику можно записать в виде

$$y = \sum_{j=1}^N H(x, j)u_j \quad (2.13)$$

Где u_j – значение выходного сигнала ИУ на j -м участке характеристики. Простейшим представителем ИУ с такой статической характеристикой является обыкновенный проволочный реостат. В этом случае квантом Δ_k , определяющим минимальное приращение выходного сопротивления, является сопротивление одного витка реостата.

2.2. Задачи анализа и синтеза статических характеристик ИУ.

В процессе проектирования ИУ обычно приходится решать задачи анализа или задачи синтеза. Задачи анализа возникают при расчете тех или иных характеристик ИУ, имеющего известную структурную схему и известные значения параметров. К типовым задачам анализа статических характеристик ИУ, рассматриваемым далее, относятся:

- 1) Расчет статической характеристики по структурной схеме ИУ;
- 2) Расчет общего коэффициента чувствительности ИУ;
- 3) Расчет погрешности от нелинейности статической характеристики ИУ;
- 4) Кусочно-линейная аппроксимация статической характеристики ИУ;
- 5) Расчет градуировочной статической характеристики ИУ.

Задачи синтеза, напротив, связаны с определением таких значений параметров и такой структурной схемы ИУ, при которых выполняются заданные требования к тем или иным характеристикам ИУ. Если при этом определяются параметры ИУ, то решается задача параметрического синтеза, если же определяется структурная схема ИУ, то решается задача структурного синтеза. Далее рассматриваются постановка и способы решения только двух типовых задач синтеза:

- 1) Определение оптимальных значений параметров расчетной статической характеристики ИУ (2.8);
- 2) Определение статической характеристики корректирующего звена.

Все эти задачи непосредственно связаны с расчетом и проектированием ИУ. Поэтому приобретение практических навыков их ре-

шения является необходимым условием успешной деятельности инженера-приборостроителя.

2.3. Расчет статической характеристики ИУ по структурной схеме

В данном разделе рассматривается расчет общей прямой статической характеристики ИУ (2.1) или его общей обратной статической характеристики (2.2), если известны структурная схема ИУ и статические характеристики всех его звеньев (прямые и обратные).

Эту задачу можно решать различными методами: графическим, аналитическим, вручную или с использованием вычислительной техники, в том числе с помощью Mathcad. Графические способы решения этой задачи для ИУ с типовыми соединениями звеньев подробно описаны в [11]. Там же описаны аналитические способы. Они приводят к сравнительно простому решению задачи, если структурная схема ИУ является типовой, т.е. относится к схемам с последовательным, параллельным или встречно-параллельным соединениями звеньев (см. рис 1.3). В этих случаях для решения задачи можно пользоваться известными формулами. В частности, функция преобразования цепи N последовательно соединенных звеньев, показанной на рис. 1.3, а, имеет вид

$$y(x) = f_N\{f_{N-1}[f_{N-2} \dots f_2[f_1(x)] \dots]\} \quad (2.26)$$

Т.е. является сложной функцией (функции от функции) входной переменной x . Статическая характеристика цепи N параллельно соединенных звеньев, показанной на рис. 1.3, б, является результатом алгебраического (т.е. с учетом знаков) сложения характеристик этих звеньев

$$y(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_N(x) \quad (2.27)$$

Причем знак каждого слагаемого указывается на структурной схеме ИУ перед сумматором (на рис. 1.3, б и в формуле (2.27) все они положительные). Статическая характеристика ИУ с обратной связью определяется из неявно заданного уравнения

$$y = f_1(x \pm f_2(y)) \quad (2.28)$$

В котором знак «плюс» соответствует положительной обратной связи (рис. 1.3, в), а знак «минус» - отрицательной обратной связи (рис. 1.3, г). Решая это уравнение относительно переменной y или относительно переменной x , можно определить соответственно пря-

мую или обратную статическую характеристику цепи двух звеньев, имеющих встречно-параллельное соединение.

Покажем решение рассматриваемой задачи для типовых структурных схем ИУ на следующих примерах.

Пример 2.1

Определить статическую характеристику ИУ, структурная схема (рис.2.6) и статические характеристики звеньев которого имеют вид

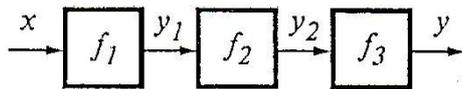


Рис. 2.6

$$\begin{aligned} \text{Где } y_1 &= f_1(x) = \frac{2x}{1+x} \\ y_2 &= f_2(y_1) = \frac{y_1}{1-y_1} \\ y &= f_3(y_2) = \operatorname{arctg}(y_2) \end{aligned}$$

Решение.

Структурная схема ИУ представлена типовым последовательным соединением трех звеньев. Поэтому в соответствии с формулой (2.26) можно записать

$$y = f_3\{f_2[f_1(x)]\} = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\frac{2x}{1+x}}{1 - \frac{2x}{1+x}} \right\} = \operatorname{arctg}[2x/(1-x)]$$

На рис. 2.7 показан график статической характеристики такого ИУ в диапазоне $|x| \leq 0.5$

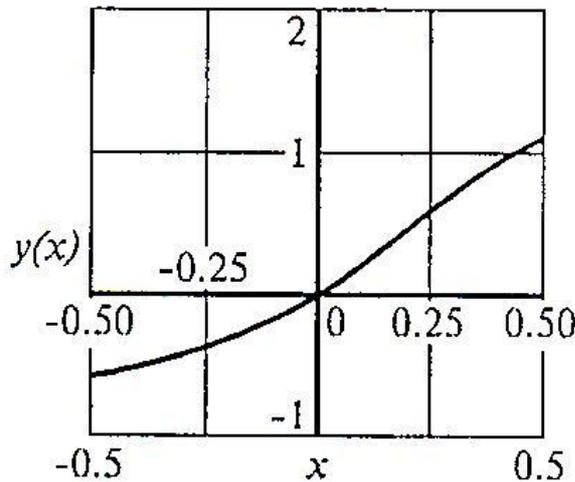
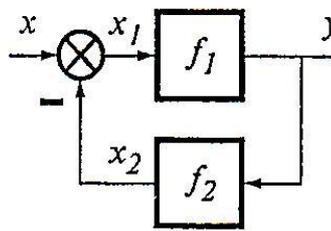


Рис. 2.7

Пример 2.2

Определить статическую характеристику ИУ, структурная схема (рис.2.8) и статические характеристики звеньев которого имеют вид



$$\text{Где } y = f_1(x_1) = \frac{x_1}{1+x_1}$$
$$x_2 = f_2(y) = \frac{y}{1-y}$$

Рис. 2.8

Решение.

Структурная схема ИУ представлена типовым встречно-параллельным соединением звеньев с отрицательной обратной связью. Поэтому согласно (2.28) можно записать

$$y = f_1(x - f_2(y)), \quad \text{т.е. } y = \frac{x - \frac{y}{1-y}}{1 + x - \frac{y}{1-y}}$$

Это уравнение имеет два решения: $y=1$ и $y=x/(2+x)$.

Первое решение не соответствует физическому смыслу решаемой задачи. Поэтому в качестве ответа нужно принять второе решение. На рис. 2.9 показан график статической характеристики рассматриваемого ИУ в диапазоне $|x| \leq 1$.

Примечания

1. При наличии нескольких решений предпочтение обычно отдается такому решению, при котором нулевое значение входного сигнала соответствует нулевому значению выходного сигнала. При наличии нескольких таких решений во внимание принимаются другие обстоятельства.
2. В точке $x=-2$ найденное решение имеет разрыв второго рода. Предполагается, что эта точка выходит за границы установленного диапазона измерений.

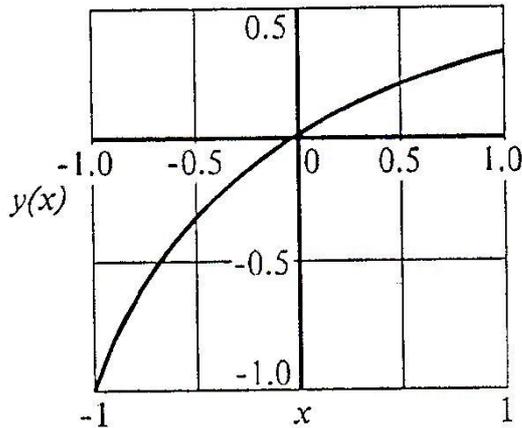


Рис. 2.9

Пример 2.3

Определить статическую характеристику ИУ, структурная схема (2.10) и статические характеристики звеньев которого имеют вид

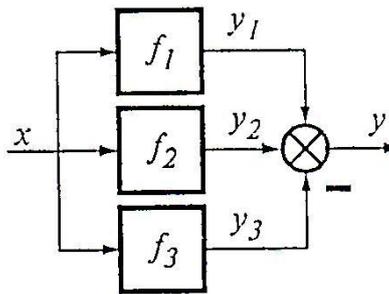


Рис. 2.10

$$\text{Где } y_1 = f_1(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$x = f_2^{-1}(y_2) = \frac{y_2}{2 + y_2}$$

$$y_3 = f_3(x) = \frac{x}{1 - x}$$

Решение.

Структурная схема ИУ представлена типовым параллельным соединением трех звеньев. С учетом знаков на входах сумматора, а также того, что звено 2 задано своей обратной характеристикой, общую статическую характеристику ИУ найдем из уравнения

$$y = y_1 + y_2 - y_3, \text{ т.е. } y = \frac{x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = \frac{2x}{1-x^2}$$

На рис. 2.11 показан график статической характеристики такого ИУ в диапазоне $0 \leq x \leq 0,5$.

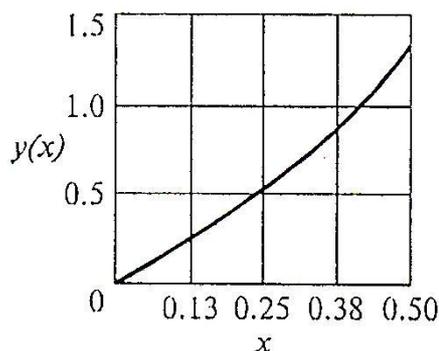


Рис. 2.11

При комбинированном (т.е. смешанном) соединении звеньев расчет общей статической характеристики ИУ можно выполнять поэтапным методом или методом исключения промежуточных переменных. В первом случае задача решается в несколько этапов, на каждом из которых определяется статическая характеристика отдельной группы звеньев, имеющих какое либо типовое соединение. В результате исходная сложная структурная схема ИУ постепенно приводится к одной из типовых схем, показанных на рис. 1.3. Подобный процесс преобразования структурной схемы ИУ иногда называют ее «сворачиванием». Он затруднен в тех случаях, когда в структурной схеме ИУ имеются перекрестные связи и статические характеристики всех или некоторых звеньев нелинейные.

Более эффективным методом решения задачи является метод исключения промежуточных переменных. При использовании этого метода составляется система алгебраических уравнений, описывающая исходную структурную схему ИУ. Она состоит из уравнений звеньев и уравнений связей между звеньями ИУ. Общее число таких уравнений на единицу больше числа входящих в нее переменных, которыми являются входной и выходной сигналы ИУ, а также все промежуточные переменные, т.е. все переменные, заключенные между x и y . Поэтому, исключая из такой системы уравнений промежуточные переменные, можно определить зависимость y от x или, наоборот, x от y , т.е. прямую или обратную статические характеристики ИУ. Этот метод особенно удобен для реализации в Mathcad.

2.4. Расчет коэффициента чувствительности ИУ

Коэффициентом чувствительности ИУ называется отношение приращения Δy информативного параметра выходного сигнала ИУ

вызвавшему его малому приращению Δx информативного параметра входного сигнала.

В соответствии с этим определением расчет коэффициента чувствительности ИУ сводится к вычислению производной от выходного сигнала y по выходному сигналу x , т.е.

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \quad (2.32)$$

Где $f(x)$ – функция преобразования ИУ.

Коэффициент чувствительности ИУ в заданной точке $x=x_*$ можно определить графическим способом. Для этого нужно провести касательную КК к графику статической характеристики ИУ в этой точке, как показано на рис. 2.13, и определить тангенс угла наклона касательной $\text{tg}(\alpha)$. Затем можно вместо (2.32) воспользоваться формулой

$$k = \frac{m_x}{m_y} \text{tg}(\alpha) \quad (2.33)$$

Где m_x, m_y – масштабы по соответствующим осям координат на рис. 2.13.

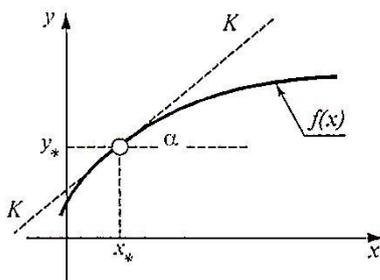


Рис. 2.13

В случае нелинейной статической характеристики ИУ коэффициент чувствительности (2.32) зависит от переменной x , т.е. $k=k(x)$. Напротив, коэффициент чувствительности ИУ с линейной статической характеристикой или с пропорциональной характеристикой не зависит от x и представляет собой постоянное число $k=K=B$ (положительное или отрицательное), характеризующее способность ИУ реагировать на изменение информативного параметра входного сигнала. Если $k>0$, то этот параметр возрастает с ростом x (чем быстрее, тем больше значение k) и, напротив, если $k<0$, то он с ростом x убывает.

Если известна обратная статическая характеристика ИУ $x=\psi(y)$ (2.2), то коэффициент чувствительности ИУ в точке $x=x_*$ можно вычислить по формуле

$$k = \frac{1}{d\psi(y)/dy} \quad (2.34)$$

Где значение производной в знаменателе формулы (2.34) вычисляется в точке $y_*=f(x_*)$.

Часто все звенья ИУ в первом приближении имеют линейные пропорциональные статические характеристики вида

$$y_i = k_i x_i \quad (2.35)$$

Где y_i, x_i – соответственно входной и выходной сигналы i -го звена ИУ; k_i – коэффициент чувствительности i -го звена.

В этом случае общая статическая характеристика ИУ также оказывается линейной пропорциональной, т.е. связь между входным и выходным сигналами в таком ИУ имеет вид

$$y = Kx \quad (2.36)$$

Обратное утверждение является неверным, т.е. ИУ может иметь линейную статическую характеристику (2.36) и в том случае, когда статические характеристики его звеньев (всех или нескольких) – нелинейные. Общий коэффициент чувствительности K такого ИУ можно определить, зная структурную схему устройства и коэффициенты чувствительности k_i всех звеньев. При типовых соединениях звеньев эта задача решается с применением следующих формул:

- 1) При последовательном соединении N звеньев (рис. 1.3, а)

$$K = k_1 * k_2 * \dots * k_N \quad (2.37)$$

- 2) При параллельном соединении N звеньев (рис. 1.3, б)

$$K = k_1 + k_2 + \dots + k_N \quad (2.38)$$

- 3) При встречно-параллельном соединении двух звеньев (рис. 1.3, в)

$$K = \frac{k_1}{1 \pm k_1 k_2} \quad (2.39)$$

Где знак «плюс» используется в случае отрицательной обратной связи, а знак «минус» - в случае положительной обратной связи.

При комбинированном соединении звеньев расчет общего коэффициента чувствительности такого ИУ можно выполнять поэтапным методом или методом составления эквивалентной структурной схемы ИУ. Второй метод не требует запоминания формул (2.37)-(2.39). Он равносителен рассмотренному методу исключения промежуточных переменных и сводится к такому преобразованию структурной схемы ИУ, при котором все измерительные преобразования происходят в ней лишь в одном прямом направлении. Для этого все разветвления и обратные связи в исходной структурной схеме ИУ обрываются и заменяются эквивалентными сигналами. Описывая прохождение измерительного сигнала x по такой эквивалентной схеме, несложно получить уравнение (2.36), из которого можно определить ис-

комый коэффициент чувствительности ИУ $K=y/x$. Эта задача легко решается в среде Mathcad, так как в конечном счете она сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, описывающих структурную схему ИУ.

2.5. Расчет погрешности от нелинейности статической характеристики ИУ

Погрешность от нелинейности статической характеристики ИУ $y=f(x)$ в числовой форме выражает степень близости графика этой характеристики к графику аппроксимирующей прямой $y_a=A+Bx$. В зависимости от способа построения этой прямой рассматриваемую погрешность можно оценивать в форме максимальной приведенной погрешности от нелинейности (МППН) или в форме среднеквадратической приведенной погрешности от нелинейности (СППН). В первом случае аппроксимирующей прямой является прямая наименьших модулей (ПНМ), во втором – прямая наименьших квадратов (ПНК). Расчет параметров A, B этих прямых и соответствующих погрешностей рассматривается далее.

2.5.1. Расчет прямой наименьших модулей и максимальной приведенной погрешности от нелинейности статической характеристики ИУ

Прямой наименьших модулей (по отклонению к кривой $y=f(x)$) называется прямая $y_a=A+Bx$, максимальное отклонение которой от кривой $y=f(x)$ на интервале $x_n \leq x \leq x_v$ является минимальным. Параметры такой прямой определяются из условия минимальной величины ее максимального отклонения от кривой, т.е. из условия

$$\max_{\text{mod}}(A, B) = \max |f(x) - (A + Bx)| = \min, \quad x_n \leq x \leq x_v \quad (2.43)$$

Где минимум неявно заданной функции двух переменных $\max_{\text{mod}} = \max_{\text{mod}}(A, B)$ достигается подбором значений ее аргументов A, B – параметров прямой наименьших модулей $y_a=A+Bx$. Поясним физический смысл этих параметров. Каждой паре вещественных чисел A, B соответствует прямая $y_a=A+Bx$, которая определенным образом ориентирована относительно графика кривой $y=f(x)$ (см. рис. 2.18 и рис. 2.25). Существуют такие значения этих чисел, при которых

максимальное отклонение прямой $y_a = A + Bx$ от кривой $y = f(x)$ оказывается минимальным. Эта прямая и есть прямая наименьших модулей.

Критерий минимакса (2.43) равносильно условиям равномерного приближения функций $y = f(x)$ и $y_a = A + Bx$. Эти условия можно записать в виде следующей системы $M + N - 1$ нелинейных алгебраических уравнений

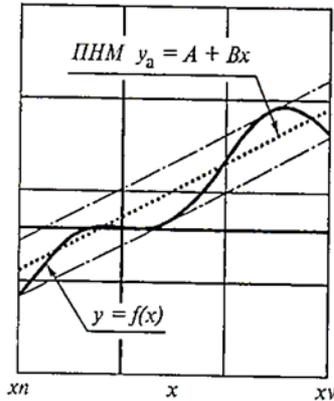


Рис. 2.18

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_N$$

$$\frac{d}{dx_j} pp(x_j, A, B) = 0, j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.44)$$

Здесь $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_N$ — максимальное значение модуля абсолютной погрешности приближения

$$pp(x, A, B) = f(x) - (A + Bx) \quad (2.45)$$

Число N которых зависит от особенностей функции $f(x)$; x_j — абсциссы точек выравниваемых экстремумов погрешностей этой функции. Например, для функции, график которой показан на рис. 2.18, $M = 2$, $N = 4$.

Решая систему уравнений (2.44), находят параметры A и B прямой наименьших модулей и, кроме того, абсциссы x_j точек экстремумов погрешности приближения (2.45), зная которые можно вычислить максимальные значения модуля этой погрешности. При правильном решении задачи все они равны максимальной погрешности приближения Δ_{\max} , т.е.

$$\Delta_{\max} = \Delta_1 = \dots = \Delta_N \quad (2.46)$$

Выполнение этих условий означает, что при правильном расчете параметров ПНМ график статической характеристики ИУ $y = f(x)$ должен оказаться заключенным между двумя параллельными прямыми, отстоящими от графика ПНМ на одинаковую величину, равную максимальному значению модуля абсолютной погрешности приближения Δ_{\max} . На рис. 2.18 эти прямые показаны двумя параллельными штрихпунктирными линиями. Видно также, что не обязательно, чтобы все экстремумы погрешности приближения (2.45) были равны друг другу по величине. Число M таких экстремумов, как отмечалось ранее, зависит от особенностей функции $y = f(x)$.

Таким образом, расчет параметров A и B прямой наименьших модулей может выполняться, во-первых, путем решения системы уравнений (2.44), выражающих условия равномерного приближения

кривой $f(x)$ к прямой $y_a=A+Bx$, и, во-вторых – путем определения координат (А, В) точки глобального минимума неявно заданной функции двух переменных (2.43). На практике обе указанные возможности применяются вместе, взаимно дополняя друг друга.

Степень близости графика ПНМ к графику статической характеристики ИУ оценивается по величине максимальной приведенной погрешности от нелинейности (МППН), которая вычисляется по формуле

$$\gamma_n = \frac{\Delta_{max}}{|y_{av}-y_{an}|} = \frac{\Delta_{max}}{|B|(xv-xn)} \quad (2.47)$$

Где $y_{av} = A + Bxv$, $y_{an} = A + Bxn$ – граничные координаты ПНМ, Δ_{max} – максимальное отклонение ПНМ от графика статической характеристики ИУ, определяется по формуле (2.46).

В практических приложениях выбор уравнения прямой наименьших модулей выполняют с учетом следующих ограничений:

- 1) Если $f(0)=0$, т.е., если график статической характеристики ИУ проходит через начало координат и, кроме того $xn=0$, то принимают

$$y_a(x) = Bx \quad (2.48)$$

Т.е. считают, что $A=0$ (рис. 2.19, а), хотя расчет в этом случае дает завышенное значение МППН;

- 2) если $f(x)=-f(-x)$, т.е. если статическая характеристика ИУ нечетная и, кроме того, $xn=-xv$, то также принимают $y_a=Bx$ (рис. 2.19, б);

- 3) во всех остальных случаях принимают $y_a=A+Bx$.

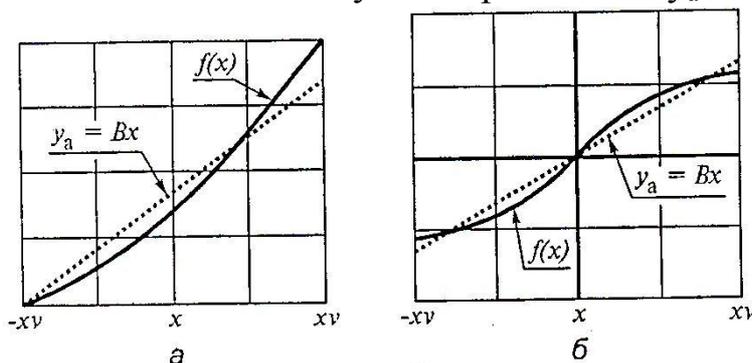


Рис. 2.19

В любом случае исходными для расчета являются функция преобразования ИУ $y=f(x)$ и границы диапазона измерений (xn, xv), а сам расчет рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

- 1) Строится схематический график статической характеристики ИУ, т.е. такой график, который отражает не точные значения ординат

функция $f(x)$, а только лишь форму графика этой функции на интервале (x_n, x_v) . Такой график строится с целью получения общего представления о форме статической характеристики ИУ и правильного выбора уравнения ПНМ;

- 2) С учетом указанных выше рекомендаций выбирается уравнение ПНМ (т.е. принимается $y_a = Vx$ или $y_a = A + Vx$ в зависимости от формы статической характеристики ИУ) и строится предполагаемый график ПНМ (на рис. 2.19 он показан пунктиром). При построении этого графика стремятся добиться графика ПНМ с графиком статической характеристики ИУ;
- 3) Составляется аналитическое выражение для погрешности приближения (2.45);
- 4) Вычисляются параметры ПНМ, т.е. вычисляются две величины A и V , если уравнение ПНМ выбрано в виде $y_a = A + Vx$, или только одна величина V , если это уравнение имеет вид $y_a = Vx$. Для этого составляет система уравнений (2.44), после чего она решается относительно искомых параметров ПНМ;
- 5) Строится график погрешности приближения (2.45) в интервале (x_n, x_v) , с помощью которого проверяется выполнение условий равномерного приближения (2.44), и вычисляется максимальная погрешность приближения (2.46);
- 6) Вычисляется значение МППН по формуле (2.47).

Пример

Определить прямую наименьших модулей (ПНМ) и максимальную приведенную погрешность от нелинейности (МППН) статической характеристики ИУ $y = x^2$, заданной на интервале $0 \leq x \leq 1$ (т.е. $x_n = 0, x_v = 1$).

Решение.

1. Строим схематический график статической характеристики ИУ в заданном интервале (рис. 2.20).

Примечание – В данном случае это часть параболы, размещенная в первом квадранте системы координат.

2. Выбираем уравнение аппроксимирующей прямой в виде $y_a(x) = Vx$, (так как $f(0) = 0$ и $x_n = 0$) и предполагаемый вид графика ПНМ наносим на схематический график рассматриваемой статической характеристики ИУ (на рис. 2.20 он показан пунктиром).

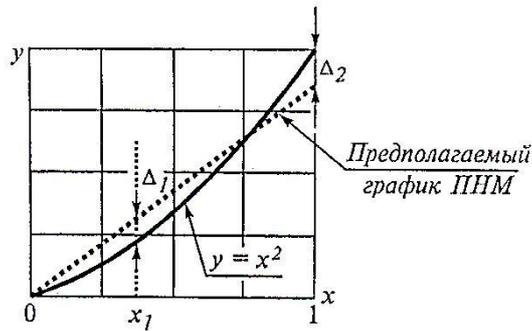


Рис. 2.20

3. Составляем аналитическое выражение для погрешности приближения (2.45)

$$pp(x, B) = x^2 - Bx \quad (2.49)$$

4. С помощью рис. 2.20 записываем условия равномерного приближения (2.44)(УРП)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_2, \\ \frac{d}{dx_1} pp(x_1, B) &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Где Δ_1, Δ_2, x_1 – максимальные значения модуля абсолютной погрешности приближения (2.49) и соответственно абсцисса точки экстремума этой погрешности. В данном случае имеем (см. рис. 2.20)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -pp(x_1, B) = -x_1^2 + Bx_1; \\ \Delta_2 &= pp(xv, B) = xv^2 - Bxv = 1 - B; \\ \frac{d}{dx_1} pp(x_1, B) &= 2x_1 - B. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Подставляя (2.51) в (2.50), приходим к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} Bx_1 - x_1^2 &= 1 - B \\ 2x_1 - B &= 0 \end{aligned}$$

Исключая из второго уравнения $x_1 = B/2$, находим $B^2 + 4B - 4 = 0$. Отбрасывая отрицательный корень этого уравнения (как не соответствующий рис. 2.20), получаем

$$x_1 = \sqrt{2} - 1 = 0,414, \quad B = 2(\sqrt{2} - 1) = 0.828,$$

Т.е. уравнение прямой наименьших модулей имеет вид

$$y_a(x) = 0.828x \quad (2.52)$$

5. Строим график погрешности приближения (2.49), соответствующий найденному значению коэффициента наклона ПНМ (рис. 2.21).

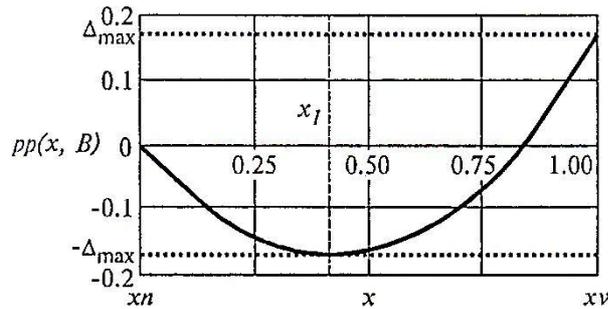


Рис. 2.21

Видно, что условия равномерного приближения выполняются, так как модули максимальных отклонений кривой $y=x^2$ от найденной прямой (2.52) равны друг другу по величине, т.е.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_{max} = 1 - B = 3 - 2\sqrt{2} = 0.172$$

6. Вычисляем МППН по формуле (2.47)

$$\gamma_n = \frac{\Delta_{max}}{|B|(xv - xn)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} - 1) * (1 - 0)} = 0.207 \approx 21\%$$

Таким образом, нелинейность функции $y=x^2$ на интервале $0 \leq x \leq 1$ оказывается весьма существенной.

Глава 3. Динамические характеристики измерительного устройства.

Отличительной чертой современного этапа измерительной техники является расширение областей применения устройств для измерения физических величин, изменяющихся во времени. Это связано с появлением новых областей применения средств измерений и усложнением решаемых с их помощью задач, а также с необходимостью контроля объектов в процессе их работы (в режиме реального времени). Кроме того, повышаются требования к точности результатов измерений и появляется необходимость исследовать все более тонкие физические явления и процессы окружающего материального мира. При этом ранее «постоянные» физические величины приходится рассматривать как величины, изменяющиеся во времени.

Способность ИУ реагировать на изменяющиеся во времени воздействие оценивают в количественной форме с помощью динамических характеристик этого устройства. Эти характеристики относятся к метрологическим характеристикам средства измерений, так как влияют на погрешность результатов измерений.

3.1. Виды динамических характеристик.

В соответствии с ГОСТ 8.009-84 различают так называемые полные и частные динамические характеристики линейного ИУ. К полным динамическим характеристикам такого ИУ относят дифференциальное уравнение, передаточную функцию, переходную и весовую функции, а также амплитудно-фазовую частотную функцию. Все эти динамические характеристики ИУ будут подробно рассмотрены далее. Пока лишь отметим следующее:

Во-первых, все полные динамические характеристики ИУ взаимосвязаны друг с другом, т.е. зная одну из них, можно определить любую другую (полную или частную) динамическую характеристику ИУ;

Во-вторых, зная какую-либо полную динамическую характеристику ИУ, можно полностью восстановить оператор преобразования, осуществляемого ИУ, в том числе определить реакцию ИУ $y(t)$ на заданный входной сигнал $x(t)$. Эта задача имеет важное практическое значение и рассматривается далее в качестве основной задачи динамики ИУ.

К частным динамическим характеристикам обычно относят такие числовые показатели динамической точности ИУ, которые удобно находить опытным путем и использовать при проектировании групп ИУ различного назначения. Ими могут быть разные показатели качества переходного процесса (длительность, перерегулирование, время установления показаний, интегральные оценки качества и пр.), ширина полосы пропускания частот, собственная частота, частота среза и др. Все частные динамические характеристики ИУ можно определить, если известна какая-либо одна из его полных динамических характеристик. В качестве последней обычно используют передаточную функцию ИУ или дифференциальное уравнение ИУ.

3.2. Дифференциальное уравнение ИУ.

При описании процесса преобразования измеряемой физической величины, происходящего в любом ИУ, важное значение имеет оператор этого преобразования, который в математической форме описывает связь между сигналами $x=x(t)$ и $y=y(t)$ на входе и выходе ИУ (рис.3.1).



Рис. 3.1

В общем случае связь между этими сигналами может описываться системой дифференциальных уравнений или одним уравнением произвольного вида

$$F(y, \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t); x, \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t), t) = 0 \quad (3.1)$$

Если это уравнение алгебраическое, т.е. если $y=f(x)$

То соответствующее ИУ называется безынерционным устройством, а осуществляемое им преобразование – функциональным. Тогда для любого момента времен t можно записать $y(t)=f[x(t)]$,

Т.е. значение сигнала на выходе безынерционного ИУ в данный момент времени t зависит от значения входного сигнала только в тот же момент времени. На практике ИУ не могут мгновенно реагировать на изменение входного сигнала, так как в них всегда присутствуют инерционные элементы, работа которых связана с накоплением энергии или ее преобразованием из одного вида в другой. В таких инерционных ИУ связь между сигналами на входе и выходе устройства описывается не алгебраическим, а дифференциальным уравнением. Соответствующий режим измерений называется динамическим режимом, а измерительное преобразование – инерционным. В динамическом режиме измерений значение сигнала на выходе ИУ в данный момент времени зависит от значений входного сигнала во все предшествующие моменты времени, т.е. инерционные ИУ обладают своеобразной «памятью».

Для рассматривания далее линейных, стационарных, инерционных ИУ уравнение, связывающего мгновенные значения входного и выходного сигналов, представляет собой обыкновенное неоднородное линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$, зависящими только от параметров ИУ, которые у стационарных ИУ не изменяются во времени, т.е. дифференциальное уравнение следующего вида (3.2)

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned}$$

Правая часть этого уравнения показывает, на что реагирует ИУ, а левая – чем «уравновешивается» входное воздействие. Будучи линейным, это уравнение описывает преобразование входного сигнала в устройствах, в которых выполняется принцип суперпозиции, а также в устройствах с линейной статической характеристикой (3.1). Это значительно сужает класс рассматриваемых ИУ. Однако именно свойство линейности уравнения (3.2) позволяет исследовать его решения в аналитическом виде. Следует также иметь в виду, что линейность дифференциального уравнения ИУ часто является следствием тех приближений, которые допускаются при его получении. Поэтому какие-либо допущения при выводе этого уравнения желательно сопровождать указанием области их применимости.

Дифференциальное уравнение ИУ, подобное уравнению (3.2), получают на основе анализа принципиальной схемы и работы ИУ в условиях, когда измеряемая величина изменяется во времени. В разд. 1.2 подобное дифференциальное уравнение получено в результате анализа работы терморезисторного термометра (см.(1.33)). Учитывая важное значение перехода от принципиальной схемы ИУ к его математической модели, покажем еще раз вывод дифференциального уравнения ИУ. На этот раз рассматриваемым ИУ будет *акселерометр* — прибор, предназначенный для измерения ускорения движения материальных объектов. На рис.3.2 показана принципиальная схема такого прибора.

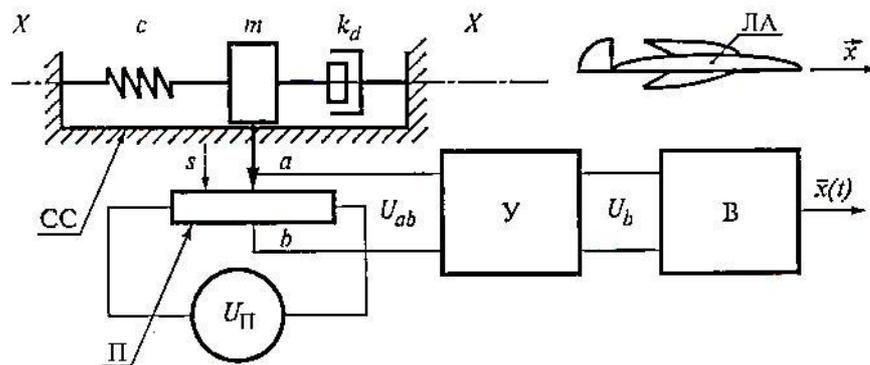


Рис. 3.2

Рассмотрим принцип его действия. Пусть некоторый объект, например летательный аппарат ЛА (на рис.3.2 самолет), движется в направлении оси ХХ с ускорением x (напомним, что в случае покоя или прямолинейного равномерного движения уско-

рение $x = 0$). На объекте закреплена (и движется вместе с объектом) сейсмическая система СС, состоящая из пружины жесткостью c с закрепленными на ней грузиком массой m и демпфером с коэффициентом демпфирования k_d , причем ось ХХ этой системы, называемая осью чувствительности прибора, совпадает с направлением вектора ускорения объекта x (в противном случае измеряется проекция вектора ускорения на ось чувствительности прибора). При движении объекта в направлении оси чувствительности с ускорением x на грузик действует инерционная сила $F_{и} = mx$, направленная в сторону, противоположную вектору ускорения. Под действием этой силы грузик перемещается относительно корпуса сейсмической системы (т.е. относительно объекта) на величину s , причем если измеряемое ускорение изменяется во времени, т.е. если $x = x(t)$, то величина смещения грузика также зависит от времени, т.е. $s = s(t)$. Связь между этими двумя функциями времени определяется дифференциальным уравнением движения грузика, являющимся следствием второго закона Ньютона. Учитывая переносное движение грузика, запишем это уравнение в виде

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -k_d \frac{ds(t)}{dt} - cs(t) + mx(t)$$

Или (3.3)

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K_{cc} \omega_0^2 x(t),$$

где ξ — относительный коэффициент демпфирования,

ω_0 — собственная частота,

K_{cc} — коэффициент чувствительности сейсмической системы.

темы.

Все они зависят от параметров этой системы

$$\xi = \frac{k_d}{2\sqrt{m \cdot c}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad K_{cc} = \frac{m}{c}. \quad (3.4)$$

При записи уравнения (3.3) предполагалось, что силы, развиваемые пружиной и демпфером, строго пропорциональны соответственно относительному перемещению s и относительной скорости s грузика. На практике это означает, что пружина должна работать в линейной зоне своей упругой характеристики (что ограничивает величину максимальной деформации пружины), а демпфер — создавать силы вязкого сопротивления, строго пропорциональные скорости относительного движения грузика. В действительности эти допущения могут не выполняться, что, как показано далее, приводит к недостоверности результатов, полученных с помощью линейной математической модели акселерометра. Как видно из рис. 3.2, грузик кинематически связан с подвижным контактом a (щеткой) потенциометра $П$ и его перемещение s вызывает появление напряжения U_{ab} между контактом щетки и средней точкой потенциометра b . Пренебрегая нелинейностью статической характеристики схемы включения потенциометра (это очередное допущение), можно считать, что напряжение U_{ab} пропорционально перемещению щетки s , т.е.

$$U_{ab} = K_{ce}s \quad (3.5)$$

Где K_{ce} - коэффициент чувствительности схемы включения, зависящий от ее физических параметров: полного сопротивления потенциометра, величины рабочего участка обмотки потенциометра, напряжения питания U_n и пр.

Примечание— При более детальном анализе схемы включения можно вместо (3.5) получить другое (нелинейное) уравнение

$$U_{ab} = \frac{K_{ce}s}{1 - b_{ce}^2 s^2} \quad (3.6)$$

где b_{ce} — постоянный коэффициент, также зависящий от параметров схемы включения.

В случае малых ускорений (и соответственно малых перемещений грузика s) напряжение U_{ab} нуждается в усилении. Выходное напряжение усилителя

$$U_B = K_y U_{ab} \quad (3.7)$$

где K_y — коэффициент усиления по напряжению, подается на отсчетное устройство, например, цифровой или стрелочный вольтметр B . Его шкала отградуирована в единицах измеряемого ускорения. Если шкала вольтметра равномерная, то его показания (и значит показания прибора x) пропорциональны напряжению U_{ab} , т.е.

$$\vec{x} = K_B U_B \quad (3.8)$$

Где K_B – коэффициент передачи вольтметра.

С помощью формул (3.3)—(3.8) несложно получить уравнение, связывающее показание рассматриваемого прибора $\bar{x} = \bar{x}(t)$ с измеряемым ускорением $x = x(t)$ для каждого момента времени t ,

$$\frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{d\bar{x}(t)}{dt} + \omega_0^2 \bar{x}(t) = K\omega_0^2 x(t). \quad (3.9)$$

Где $K=K_{cc}K_{cb}K_yK_B$ - общий коэффициент чувствительности прибора, который должен быть равен единице, так как в статическом режиме измерений, когда

$\ddot{\bar{x}}(t) = \dot{\bar{x}}(t) = 0$, должно выполняться равенство $\bar{x} = x$. На практике это условие

обеспечивается подбором соответствующего значения коэффициента усиления усилителя K_y .

Таким образом, при выполнении отмеченных допущений дифференциальное уравнение рассматриваемого прибора имеет вид (3.9).

Это уравнение можно получить из обобщенного дифференци-

$$y(t) = \bar{x}(t); \quad n = 2, m = 0; \quad a_2 = 1, a_1 = 2\xi\omega_0, \quad a_0 = \omega_0^2; \quad b_0 = K\omega_0^2.$$

ального уравнения ИУ (3.2), если принять в нем

Поэтому уравнение (3.2) может служить прототипом для дифференциальных уравнений линейных стационарных измерительных устройств различного назначения. Именно это дифференциальное уравнение положим в основу последующего анализа динамических характеристик рассматриваемых ИУ.

Продолжим анализ характеристик рассматриваемого прибора. Зная дифференциальное уравнение и параметры акселерометра, можно определить (и значит предсказать) изменение его показаний при движении объекта, на котором установлен прибор, по заданному закону $s_p = s_p(t)$, где s_p — путь, пройденный объектом за время t . Пусть, например, объект движется по закону

$$s_p(t) = \frac{1}{\pi} \left[t - \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) \right], \quad \text{где } 0 \leq t \leq 2 \text{ с.} \quad (3.10)$$

В этом случае мгновенные скорость и ускорение объекта равны соответственно

$$v(t) = \frac{ds_p(t)}{dt} = \frac{1}{\pi} [1 - \cos(\pi t)], \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ с,}$$

$$x(t) = \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sin(\pi t), \quad \text{где также } 0 \leq t \leq 2 \text{ с.}$$

На рис.3.3, а, б, в показаны графики этих функций времени. Видно, что объект сначала разгоняется до скорости $v_{\max} = 2/\pi$ м/с, а затем тормозит вплоть до полной остановки при $t = 2$ с. Путь, пройденный объектом за это время, равен $2/\pi$ м. Ускорение $x(t)$ на участке разгона положительное, а на участке торможения — отрицательное.

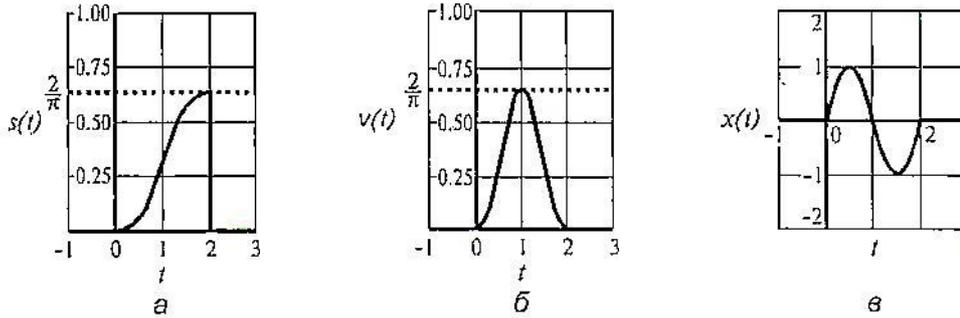


Рис. 3.3

На рис. 3.4 показано, как в этом случае изменяются показания прибора $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (3.9). Графики построены для двух значений относительного коэффициента демпфирования $\xi = 0.6$ (рис. 3.4, а) и $\xi = 0.2$ (рис. 3.4, б) и трех значений собственной частоты прибора $\omega_0 = 1, 5, 10$ с.

Если характеристика пружины линейная, а статическая характеристика схемы включения нелинейная (т.е. $\beta=0$, а в формуле (3.6) коэффициент $b_{ce} \neq 0$), то это также влечет за собой изменения в структурной схеме прибора. В этом случае сейсмическая система отображается линейным инерционным звеном с передаточной функцией $W_{cc}(p)$ (см. рис. 3.5, б), а схема включения — нелинейным безынерционным звеном с характеристикой $U_{ab} = f(s)$. Соответствующая связь между показаниями прибора $x(t)$ и измеряемым ускорением $x(t)$ описывается нелинейным алгебраическим уравнением

$$\bar{x}(t) = \frac{u(t)}{1 - \varepsilon^2 u(t)^2},$$

Где ε - постоянный коэффициент ($\varepsilon = b_{ce} / s_{\max}$, s_{\max} — смещение грузика, соответствующее максимальному ускорению), а функция времени $u(t)$ определяется решением линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 x(t).$$

На рис. 3.6, б сплошной кривой 1 показаны результаты расчета по этим формулам для случая, когда $u(0) = u(0) = 0$, $\xi = 0.6$, $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 0.5 \text{ с}^2/\text{м}$. Пунктирная кривая 2 соответствует линейной модели акселерометра, когда $\varepsilon = 0 \text{ с}^2/\text{м}$. При уменьшении параметра ε кривая 1 также приближается к кривой 2 и по-прежнему сохраняются динамические искажения формы входного сигнала, обусловленные инерционностью сейсмической системы прибора.

Видно также, что изменения показаний прибора, вызванные нелинейностью его дифференциального уравнения, имеют разные знаки. Поэтому разные факторы, вызывающие нелинейность этого уравнения, могут компенсировать друг друга.

3.3. Передаточная функция ИУ

В отличие от дифференциального уравнения (3.2), связывающего мгновенные значения сигналов $x(t)$ и $y(t)$ на входе и выходе ИУ, передаточная функция ИУ $W = W(p)$ описывает связь между изображениями по Лапласу этих сигналов. При нулевых начальных условиях эта связь имеет форму линейного операционного уравнения

$$Y(p) = W(p)X(p), \quad (3.11)$$

где p — комплексная переменная;

$X(p)$, $Y(p)$ — изображения по Лапласу сигналов на входе и выходе ИУ.

Из (3.11) следует, что передаточную функцию ИУ можно определить как отношение изображения по Лапласу выходного сигнала $Y(p)$ к изображению по Лапласу входного сигнала $X(p)$ при нулевых начальных условиях, т.е.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.11) похоже на уравнение линейной статической характеристики ИУ (2.23)

$$y = Kx, \quad (3.13)$$

где K — коэффициент чувствительности ИУ. Исходя из этой аналогии, передаточную функцию ИУ $W(p)$ иногда называют опера-

торным коэффициентом передачи или комплексной чувствительностью ИУ.

Учитывая, что в формуле (3.12) фигурируют изображения входного и выходного сигналов, напомним основные свойства преобразования Лапласа. Согласно преобразованием по Лапласу (изображением) функции вещественной переменной $x = x(t)$ называется функция $X = X(p)$ комплексной переменной $p = \alpha + j\omega$, вычисляемая по формуле

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (3.14)$$

Функция $x(t)$, подвергаясь преобразованию Лапласа (3.14), называется оригиналом. Она должна обладать следующими тремя свойствами:

- 1) $x(t)$ непрерывна вместе со своими производными достаточно высокого порядка (не ниже $(m-1)$ -го порядка, где m — порядок старшей производной в правой части дифференциального уравнения ИУ (3.2)) на всей оси t , кроме отдельных точек, в которых функция $x(t)$ или ее производные могут иметь разрывы 1-го рода, причем на каждом конечном интервале оси t таких точек имеется лишь конечное число;
- 2) $x(t) = 0$ при $t < 0$;
- 3) существуют такие положительные числа M и c , что $|x(t)| < M e^{ct}$ при $0 \leq t < \infty$, т. е. функция $x(t)$ растет не быстрее показательной функции.

Примечание — Число называется показателем роста функции $x(t)$. Его можно вычислить по формуле

$$c = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t}.$$

Если функция $x(t)$ является оригиналом (т. е. удовлетворяет указанным выше трем условиям) и $X(p)$ служит ее изображением, то в любой точке своей непрерывности функция $x(t)$ равна

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} X(p) e^{pt} dp, \quad (3.15)$$

где j — мнимая единица ($j^2 = -1$), а интеграл (3.15) берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} \{p\} = a > c$ и понимается как предел интеграла вдоль отрезка $(a - jb, a + jb)$ при $b \rightarrow \infty$.

Вместо вычисления интегралов (3.14) и (3.15) на практике пользуются заранее составленными таблицами преобразования Лапласа. Их можно найти во многих литературных источниках.

Прямое и обратное преобразования Лапласа символически записывают так

$$X(p) = L\{x(t)\} \text{ и } x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$$

Приведем изображения по Лапласу для некоторых функций, часто встречающихся в практике инженерных расчетов:

$$1. L\{\delta(t)\} = 1;$$

$$2. L\{1(t)\} = \frac{1}{p};$$

$$3. L\{t^n \cdot 1(t)\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$4. L\{e^{-at} \cdot 1(t)\} = \frac{1}{p+a};$$

$$5. L\{\sin(\omega t) \cdot 1(t)\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$6. L\{\cos(\omega t) \cdot 1(t)\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$7. L\{e^{-at} \sin(\omega t) \cdot 1(t)\} = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2};$$

$$8. L\{e^{-at} \cos(\omega t) \cdot 1(t)\} = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}.$$

(3.16)

Здесь $l(t)$ — единичная функция (равная единице при $t \geq 0$ и нулю, если $t < 0$);

$t < 0$); $\delta(t) = \frac{d l(t)}{dt}$ - дельта-функция, которая относится к классу так называемых обобщенных функций.

Эта функция обладает особыми свойствами. В частности, изображения по Лапласу производных δ — функции имеют вид

$$L\{\dot{\delta}(t)\} = p, L\{\ddot{\delta}(t)\} = p^2, \dots, L\{\delta^{(m)}(t)\} = p^m \quad (3.17)$$

Соответственно

$$L\{\dot{l}(t)\} = 1, L\{\ddot{l}(t)\} = p, \dots, L\{l^{(m)}(t)\} = p^{m-1}, \quad (3.18)$$

3.4. Расчет передаточной функции по структурной схеме ИУ

Расчет передаточной функции ИУ, имеющего известную структурную схему, является одной из наиболее распространенных задач анализа. Этот расчет аналогичен расчету коэффициента чувствительности ИУ, рассмотренному ранее в разд. 2.4. Его можно выполнять поэтапным методом, методом структурных преобразований, методом построения графа структурной схемы ИУ или методом исключения промежуточных переменных. Первые три метода широко применяются в теории автоматического регулирования. Их недостатком является необходимость запоминания ряда сведений, а именно формул для передаточных функций типовых соединений звеньев, правил преобразования структурных схем, правил построения графа структурной схемы и формулы Мейсона.

Метод исключения промежуточных переменных не имеет этих недостатков. При решении задачи этим методом составляется эквивалентная структурная схема ИУ, все измерительные преобразования в которой происходят лишь в одном прямом направлении. Для этого в исходной структурной схеме ИУ обрываются все разветвления и обратные связи, которые заменяются соответствующими эквивалентными сигналами. Последние, если это возможно, выражаются через входной и/или выходной сигналы ИУ. В противном случае эквивалентные сигналы обозначаются как z_1, z_2, \dots, z_N , а точки, соответствующие этим сигналам, указываются на эквивалентной структурной схеме ИУ. В результате она разбивается на $N+1$ участков: x — z_1, z_1

— z_2, \dots, z_N — y , где N — число промежуточных переменных. Опираясь на построенную таким образом эквивалентную структурную схему ИУ, составляют систему $N+1$ линейных алгебраических уравнений, описывающих прохождение измерительного сигнала по упомянутым участкам эквивалентной структурной схемы ИУ. Число уравнений этой системы всегда на единицу меньше числа входящих в нее неизвестных величин: $x, z_1, z_2, \dots, z_N, y$. Поэтому, исключая из этой системы уравнений все промежуточные переменные z_1, z_2, \dots, z_N , можно определить зависимость y от x , которая, будучи линейной, легко приводится к виду (3.11). Передаточную функцию ИУ определяют как отношение y/x .

В качестве примера определим передаточную функцию ИУ, структурная схема которого показана на рис.3.8, полагая, что передаточные функции трех ее звеньев W_1, W_2 и W_3 известны. ИУ с такой структурной схемой относится к средствам измерений, в которых используется нониусный метод повышения точности, когда результат измерений y образуется суммированием грубого и точного отсчетов (на рис.3.8 это переменные y_2 и y_1 соответственно). Попытка непосредственно определить передаточную функцию такого ИУ наиболее распространенным поэтапным методом не приводит к успеху, так как в исходной структурной схеме ИУ (рис. 3.8) отсутствуют группы звеньев, имеющие какое либо типовое соединение (последовательное, параллельное или встречно-параллельное, показанные на рис. 1.3).

Можно преобразовать структурную схему ИУ, например, перенести узел x_1 за звено 2, как это показано на рис. 3.9. Такое преобразование структурной схемы является не единственно возможным. Тогда в преобразованной схеме появляются четыре группы звеньев с типовыми соединениями: встречно-параллельным с отрицательной обратной связью (группа I), последовательным (группа II), параллельным (группа III) и вновь последовательным (группы I и III).

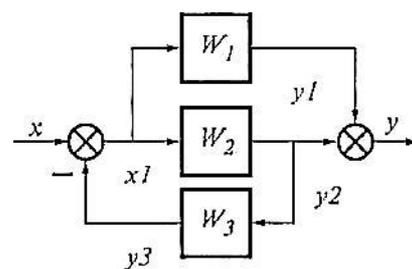


Рис. 3.8

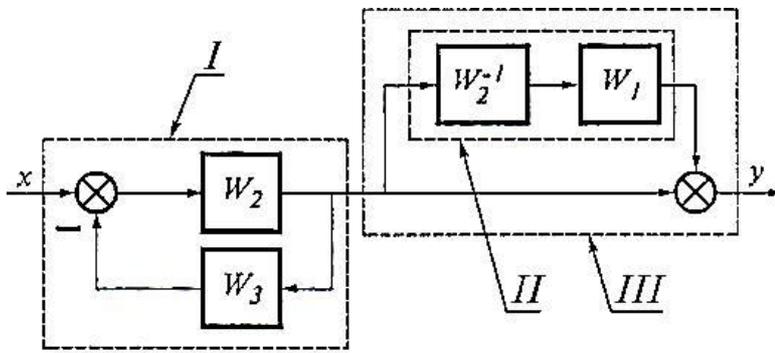


Рис. 3.9

Используя известные формулы для передаточных функций устройств с типовыми соединениями звеньев (см. рис. 1.3 и формулы (2.37)—(2.39)), можно искомую передаточную функцию ИУ записать в виде

$$W(p) = W_1 W_{III} = \frac{W_2}{1 + W_2 W_3} \left[\frac{W_1}{W_2} + 1 \right] = \frac{W_1 + W_2}{1 + W_2 W_3}. \quad (3.45)$$

Покажем решение этой задачи методом исключения промежуточных переменных. В качестве промежуточной переменной примем сигнал ошибки $z = xI$, т. е. сигнал на входах первого и второго звеньев

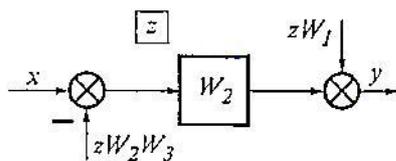


Рис. 3.10

$$x - z W_2 W_3 = z,$$

$$z W_2 + z W_1 = y,$$

(использование такой промежуточной переменной является не единственно возможным). Соответствующая эквивалентная

структурная схема ИУ показана на рис. 3.10. При ее построении оборваны сигнал обратной связи u_3 и сигнал точного отсчета y_1 (см. рис. 3.8). На схеме рис. 3.10 эти сигналы заменены соответствующими эквивалентными сигналами zW_2W_3 и zW_1 . В результате получается эквивалентная структурная схема ИУ (рис. 3.10), в которой преобразование измерительного сигнала происходит лишь в одном прямом направлении. Проследивая по этой схеме прохождение входного сигнала от входа ИУ до промежуточной переменной z (участок $x-z$) и далее от этой переменной до выхода ИУ y (участок $x-y$), получаем систему двух линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными величинами x, y, z

Исключая из второго уравнения этой системы промежуточную переменную z и подставляя полученный результат в первое уравнение, найдем зависимость y от x

Отсюда получаем искомую передаточную функцию ИУ как отношение y/x

$$W(p) = \frac{W_1(p) + W_2(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)},$$

$$y = \frac{W_1 + W_2}{1 + W_2 W_3} x.$$

что совпадает с прежним результатом (3.45).

Расчет передаточной функции по структурной схеме ИУ легко выполнять в Mathcad. В примере 3.2 это показано для случая, когда передаточные функции звеньев ИУ на рис. 3.8 имеют вид

$$W_1(p) = \frac{2}{p+1}, \quad W_2(p) = \frac{6}{p+2}, \quad W_3(p) = \frac{4}{p+3}. \quad (3.47)$$

ПРИМЕР 3.2

Определить передаточную функцию ИУ, имеющего структурную схему заданного вида (см. рис. 3.8).

Решение.

Составляем систему уравнений, описывающих структурную схему ИУ, дополняем эту систему уравнением $x = 1$, и решая ее относительно переменной y , находим передаточную функцию $W(p) = y$

Given $y_1 = W_1 \cdot x$, $y_2 = W_2 \cdot x_1$, $y_3 = W_3 \cdot y_2$ — уравнения звеньев

$x_1 = x$ — $y_3 = y$, $1 + y_2$ — уравнения связей

$x = 1$ — дополнительное уравнение

$$\text{Find}(y, y_1, y_2, y_3, x, x_1) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(W_1 + W_2)}{(1 + W_2 \cdot W_3)} \\ \frac{W_1}{(1 + W_2 \cdot W_3)} \\ \frac{W_2}{(1 + W_2 \cdot W_3)} \\ W_3 \cdot \frac{W_2}{(1 + W_2 \cdot W_3)} \\ 1 \\ \frac{1}{(1 + W_2 \cdot W_3)} \end{bmatrix}$$

Видно, что в результате решения системы уравнений, описывающих структурную схему ИУ, в Mathcad можно определить передаточную функцию рассматриваемого ИУ не только по входному сигналу

$$W_{y,x} = \frac{W1 + W2}{1 + W2 \cdot W3}, \quad (3.48)$$

но и по всем *промежуточным сигналам* — переменным, перечисленным в списке аргументов функции *Find*. Например, передаточ-

$$W_{x1,x} = \frac{1}{1 + W2 \cdot W3},$$

ная функция, связывающая сигналы x_1 и x , имеет вид

так как переменная x_1 является последней в списке аргументов функции *Find*. Подставляя в формулу (3.46) передаточные функции звеньев (3.47), приходим к окончательному результату

$$W(p) = \frac{8p^2 + 34p + 30}{p^3 + 6p^2 + 35p + 30}. \quad (3.48, a)$$

3.5. Переходная функция ИУ

Переходной функцией ИУ называется функция времени $h=h(t)$, описывающая реакцию устройства на *единичное ступенчатое* входное воздействие $x(t) = 1(t)$ при нулевых начальных условиях (рис. 3.11).

Изображение по Лапласу переходной функции ИУ можно вычислить по формуле

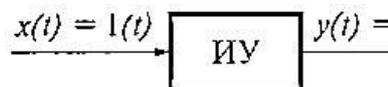


Рис. 3.11

$$H(p) = L\{h(t)\} = \frac{W(p)}{p}, \quad (3.49)$$

где $W(p)$ — передаточная функция ИУ (3.32), и следовательно

$$h(t) = L^{-1}\{W(p) / p\},$$

т. е. расчет переходной функции ИУ, имеющего известную передаточную функцию $W(p)$, сводится к определению изображения (3.49) и поиску соответствующего оригинала (3.50).

Приведем пример такого расчета средствами Mathcad (пример 3.3). Результат вычислений — сплошная кривая 1 на рис.3.12.

Подобно (3.37) переходную функцию позиционного ИУ, у которого $K \neq 0$, можно записать в виде

$$h(t) = K h_0(t), \quad (3.51)$$

Где K — коэффициент чувствительности ИУ; $h_0(t)$ — относительная переходная функция ИУ, вычисляемая по формуле

$$h_0(t) = L^{-1} \{ W_0(p) / p \}. \quad (3.52)$$

Здесь $W_0(p)$ — операторная часть передаточной функции ИУ $W_0(p) = W(p)/W(0)$.

Пример 3.3

Определить переходную функцию ИУ, имеющего заданную передаточную функцию (см. (3.48a))

$$W(s) := \frac{8 \cdot s^2 + 34 \cdot s + 30}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 35 \cdot s + 30} \quad H1(s) := \frac{1}{s} \cdot \frac{8 \cdot s^2 + 34 \cdot s + 30}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 35 \cdot s + 30}$$

has inverse Laplace transform

$$\begin{aligned} h1(t) := & \frac{-2}{13} \cdot \exp(-t) + 1 - \frac{11}{13} \cdot \exp\left(\frac{-5}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{95} \cdot t\right) + \\ & + \frac{149}{1235} \cdot \exp\left(\frac{-5}{2} \cdot t\right) \cdot \sqrt{95} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{95} \cdot t\right) \\ h(t) := & h1(t) \cdot \Phi(t) \end{aligned}$$

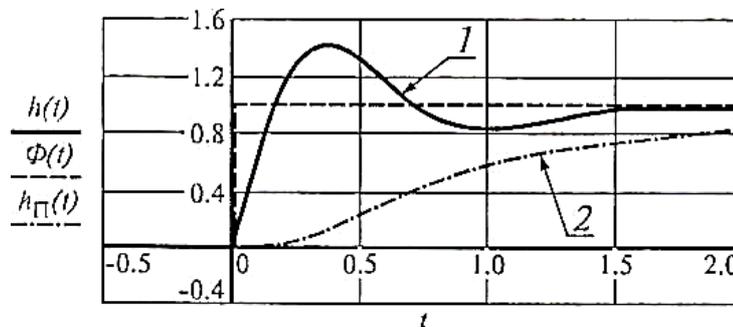


Рис. 3.12

График переходной функции $h(t)$ называется *переходной характеристикой ИУ*. Очевидно, что этот график и график относительной переходной функции $h_0(t)$ имеют одинаковую форму, т.е. подобны друг другу. На рис. 3.13 показаны возможные формы этого графика для простых ИУ относительно невысокого порядка (у которых $m=0$, $n \leq 3$). В зависимости от формы этого графика различают следующие четыре типа переходных процессов в таких ИУ: идеальный (1); монотонный (2); колебательный (3); монотонно-периодический.

Чем выше порядок n характеристического уравнения ИУ, тем более разнообразными оказываются возможные в нем формы переходных процессов. Так, в зависимости от значений параметров, в простом ИУ 3-го порядка возможны все показанные на рис.3.13 формы

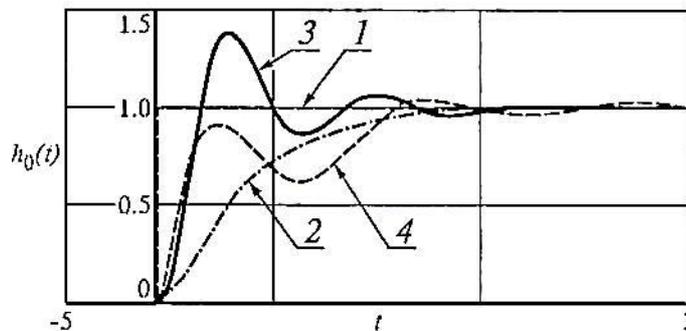


Рис. 3.13

переходных процессов, в простом ИУ 2-го порядка — только монотонный (2), колебательный (2) и идеальный (1) переходные процессы, а в простом ИУ 1-го порядка - только монотонный (2) и идеальный (1) переходные процессы.

ИУ общего вида, у которых $n > m \geq 0$ и $K \neq 0$, обладают еще большим разнообразием форм переходных процессов. Если известная переходная функция соответствующего простого ИУ

$$h_{\Pi}(t) = L^{-1} \{ b_0 / pA_n(p) \} \quad (3.53)$$

то переходную функцию ИУ общего вида (с передаточной функцией (3.32)) можно вычислить по формуле

$$h(t) = \frac{b_m}{b_0} h_{\Pi}^{(m)}(t) + \frac{b_{m-1}}{b_0} h_{\Pi}^{(m-1)}(t) + \dots + \frac{b_1}{b_0} \dot{h}_{\Pi}(t) + h_{\Pi}(t), \quad (3.54)$$

т. е. расчет переходного процесса в таком (сложном) ИУ сводится к расчету перепереходного процесса в соответствующем простом ИУ. Например, переходную функцию ИУ с передаточной функцией (3.48, а) можно вычислить по формуле

$$h(t) = \frac{8}{30} \ddot{h}_\Pi(t) + \frac{34}{30} \dot{h}_\Pi(t) + h_\Pi(t),$$

$$\text{где } h_\Pi(t) = L^{-1} \{30/p(p^3 + 6p^2 + 35p + 30)\} = \{1 - \frac{15}{13} e^{-t} -$$

$$- \frac{2}{247} e^{-\frac{5}{2}t} [2\sqrt{95} \sin(\frac{\sqrt{95}}{2}t) - 19 \cos(\frac{\sqrt{95}}{2}t)]\} \cdot 1(t).$$

На рис. 3.12 примера 3.3 график этой функции показан штрихпунктирной кривой 2. Видно, что наличие нулей у передаточной функции рассматриваемого ИУ привело к тому, что переходный процесс приобрел колебательность и перерегулирование. Этот вывод оказывается общим для всех рассматриваемых ИУ.

Из графиков на рис.3.13 может сложиться *неверное представление* о том, что график переходной функции ИУ всегда «выходит из начала координат» (т. е. из точки (0,0)) и обязательно с нулевым значением правой производной $dh(t)/dt_{0+}$. Это представление может сложиться также из приведенного определения переходной функции ИУ, где присутствует фраза «... при нулевых начальных условиях». На самом деле такими свойствами обладают переходные функции только простых ИУ, у которых $m = 0$ и $n > 2$. Если же $m > 0$, то переходная функция ИУ может при $t = 0_+$ иметь скачок и/или ненулевое значение правой производной

$d^{(k)}h(t)/dt^k_{0+}$, $k=1, 2, \dots$. Это связано с наличием операций дифференцирования входного ступенчатого сигнала в правой части дифференциальных уравнений таких ИУ.

В качестве примера на рис. 3.14 показан график относительной переходной функции ИУ с передаточной функцией

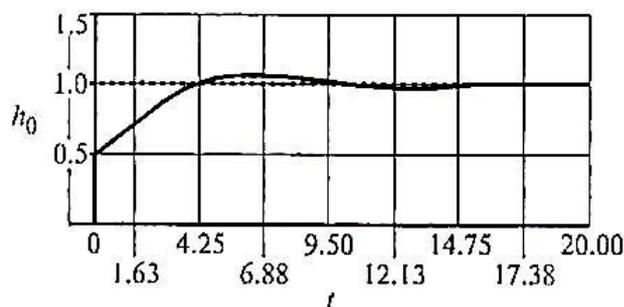


Рис. 3.14

$$W(p) = \frac{6p^2 + 5p + 4}{3p^2 + 2p + 1}.$$

Переходная функция ИУ общего вида (с передаточной функцией (3.32)) обладает двумя важными свойствами:

1. Установившееся значение переходной функции (если оно есть) равно коэффициенту чувствительности ИУ K , т.е.

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = K.$$

Примечание — Соответствующее свойство относительной переходной функции позиционного ИУ можно записать в виде

$$h_0(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_0(t) = 1.$$

2. Зная переходную функцию ИУ $W(p)$, можно определить передаточную функцию ИУ $H(p)$ по формуле

$$W(p) = p H(p), \quad (3.57)$$

где $H(p) = L\{h(t)\}$ — изображение по Лапласу переходной функции ИУ.

Это означает, что, зная реакцию ИУ на единичный скачок $x(t) = 1(t)$, можно определить реакцию ИУ на детерминированный сигнал $x = x(t)$ любой другой формы. Именно по этой причине переходную функцию ИУ можно считать полной динамической характеристикой этого устройства.

В заключение приведем формулу, позволяющую непосредственно связать входной и выходной сигналы с помощью переходной функции ИУ

$$y(t) = h(t)x(0) + \int_0^t h(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau. \quad (3.58)$$

3.6. Длительность переходного процесса

Из рис. 3.13 видно, что во всех случаях (т. е. независимо от формы переходного процесса) в позиционном ИУ всегда имеет место *относительная переходная погрешность*

$$\Delta_d(t) = 1(t) - h_0(t), \quad (3.59)$$

модуль которой $|\Delta_d(t)|$ с течением времени убывает, т. е. фактический переходный процесс всегда отличается от идеального переходного процесса.

Время t_p , по истечении которого эта (переходная) погрешность становится (и остается далее) меньше допустимого значения относительной переходной погрешности Δ , называется длительностью переходного процесса (ДПП).

По истечении этого времени переходный процесс можно считать завершенным (с заданной точностью Δ). Исходя из приведенного определения, длительность переходного процесса можно определить

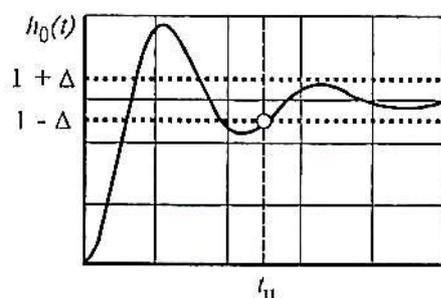


Рис.3.15

графическим способом так, как это показано на рис.3.15.

Здесь она определяется как абсцисса точки окончательного вхождения графика *относительной переходной функции* ИУ $h_0(t)$ (3.52) в трубку точности $1 \pm \Delta$ или, что то же самое, как абсцисса точки последнего пересечения этим графиком границ трубки точности.

На рис. 3.16 показана схема соответствующего (графического) способа расчета длительности переходного процесса для позиционного ИУ с известной передаточной функцией $W(p)$. Видно, что исходными данными для расчета ДПП являются передаточная функ-

ция ИУ $W(p)$ (или любая другая полная динамическая характеристика ИУ, позволяющая определить $W(p)$, например, структурная схема ИУ (см. ниже пример 3.4)) и величина допустимой относительной переходной погрешности Δ . В ходе расчетов последовательно определяются операторная часть передаточной функции ИУ $W_0(p)$ (3.38), изображение по Лапласу относительной переходной функции $H_0(p) = W(p)/p$ и соответствующий оригинал $h_0(t)$ (3.52). Затем строится график относительной переходной функции $\Gamma_{h_0(t)}$, на который накладывается трубка точности $1 \pm \Delta$. Абсцисса точки вхождения этого графика в трубку точности определяет искомую длительность переходного процесса t_n .

Примечание — Для определения длительности переходного процесса можно вместо графика относительной переходной функции $h_0(t)$ (3.52) строить график «обычной» переходной функции ИУ $h(t)$ (3.51). Однако в этом случае трубку точности $1 \pm \Delta$ следует заменить трубкой $K(1 \pm \Delta)$, где K — коэффициент чувствительности ИУ.

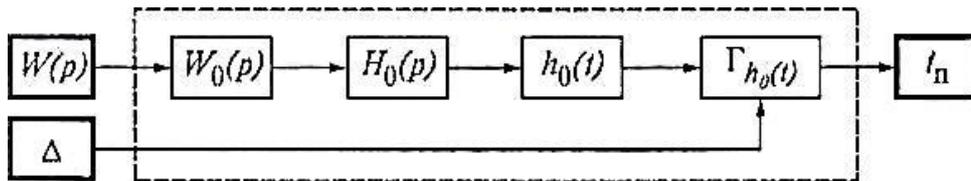


Рис. 3.16

В примере 3.4 показано применение Mathcad к расчету ДПП для ИУ, структурная схема которого содержит три звена с известными динамическими характеристиками разного вида — переходной функцией $h_1(t)$ звена 1, весовой функцией $g_2(t)$ звена 2 и передаточной функцией $W_3(p)$ звена 3 (рис. 3.17). Допустимое значение относительной переходной погрешности ИУ Δ принимается равным 2 %.

ПРИМЕР 3.4

Определить длительность переходного процесса в ИУ, имеющем структурную схему заданного вида (см. рис. 3.17).

Исходные данные:

1. Структурная схема ИУ (рис. 3.17)

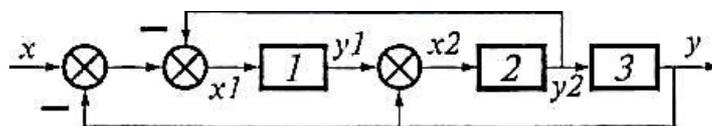


Рис. 3.17

2. Динамические характеристики звеньев:

переходная функция звена 1 $hl(t) = 9 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right) \cdot \Phi(t);$

Если в результате расчета получено значение $tr=tv$, то следует увеличить ожидаемое значение длительности переходного процесса tv .

Описанная процедура расчета показана в разд. 4.2 на примере анализа зависимости длительности переходного процесса в простом ИУ 2-го порядка от параметров передаточной функции такого ИУ. Она является достаточно универсальной. Однако в случае единичного определения ДПП проще пользоваться схемой графического расчета, показанной на рис.3.16, как это сделано в примере 3.4.

3.7. Активная длительность переходного процесса

Длительность переходного процесса является весьма распространенным числовым показателем динамической точности ИУ. Однако, к сожалению, ее расчет часто вызывает сложности, особенно при высоких требованиях к точности расчета и сложной передаточной функции ИУ. В данном разделе предлагается альтернативная оценка длительности переходного процесса, которая формируется на основе понятия «активная длительность сигнала».

Известно, что активной длительностью сигнала $x(t)$ является такой интервал времени T_x , в котором сосредоточена основная часть полной энергии этого сигнала. Пусть сигнал $x(t)$ описывает относительную переходную погрешность ИУ (3.59), т. е.

$$x(t) = \Delta_d(t) = 1 - h_0(t), \quad t \geq 0, \quad (3.61)$$

где $h_0(t) = L^{-1}\{W_0(p)/p\}$ — относительная переходная функция ИУ.

На рис.3.21 показана типичная форма графика такого сигнала

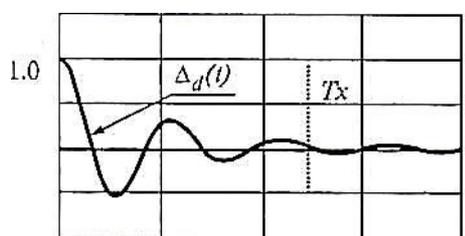


Рис.3.21

(для колебательного переходного процесса). Его активная длительность T_x может служить альтернативой для рассмотренной ранее «обычной» длительности переходного процесса t_n . Последняя, как отмечалось, с трудом поддается аналитическому расчету и, кроме того, может быть разрыв-

ной функцией некоторых параметров ИУ из-за использования при ее определении понятия трубки точности $1 \pm \Delta$.

Активная длительность T_x сигнала (3.61) вычисляется из уравнения

$$\int_0^{T_x} [1 - h_0(t)]^2 dt = k * \int_0^{\infty} [1 - h_0(t)]^2 dt \quad (3.62)$$

где k — постоянный коэффициент, определяющий долю полной энергии сигнала (3.61), приходящуюся на интервал времени, равный активной длительности этого сигнала. Особенностью этого уравнения является то, что искомая величина T_x является верхним пределом интеграла в левой части уравнения. Тем не менее, решая это уравнение (в том числе средствами Mathcad), можно определить активную длительность переходного процесса T_x для ИУ с известной относительной переходной функцией $h_0(t)$.

Как уже отмечалось, длительность переходного процесса ϕ , обладая бесспорной наглядностью, оказывается таким показателем динамической точности ИУ, который с трудом поддается аналитическому расчету. Действительно, расчет длительности переходного процесса как «...абсциссы точки вхождения графика переходного процесса в трубку точности...» сводится к определению максимального вещественного положительного корня одного из двух уравнений (см. рис.3.20)

$$h_0(t_{\Pi}) = 1 \pm \Delta, \quad (3.63)$$

где $h_0(t)$ — относительная переходная функция ИУ, Δ — допустимое значение относительной переходной погрешности, а знак в правой части уравнения (3.63) зависит от того, как график относительной переходной функции ИУ заходит в трубку точности $1 \pm \Delta$. Если это происходит сверху вниз, то в уравнении следует использовать знак «плюс», и наоборот, если этот график заходит в трубку точности снизу вверх, то нужно использовать знак «минус», т. е.

$$t_{\Pi} = \max \{ \text{root} [1 \pm \Delta - h_0(t_{\Pi})] \} .$$

Такая задача поддается строгому аналитическому решению лишь в ограниченном числе случаев. Применительно к рассматриваемым простым ИУ не выше 3-го порядка известна только одна точная фор-

мула для расчета длительности переходного процесса в простом ИУ 1-го порядка с относительной передаточной функцией

$$W_0(p) = 1 / (T_1 p + 1) .$$

В этом случае точное значение длительности переходного процесса можно вычислить по формуле

$$t_{\Pi} = T_1 \ln (1 / \Delta), \quad (3.64)$$

где T_1 — постоянная времени ИУ.

В остальных случаях для расчета длительности переходного процесса пользуются приближенными формулами, графическими или численными процедурами (см. далее). Поэтому, наряду с длительностью переходного процесса, пользуются другими показателями динамической точности ИУ в частности активной длительностью переходного процесса, рассмотренной в предыдущем разделе, или интегральными показателями качества переходного процесса, которые поддаются аналитическому расчету и, как правило, являются гладкими функциями параметров ИУ. С помощью интегральных показателей качества можно, кроме того, сформулировать требования, которые учитывают не только длительность, но и форму переходного процесса, т. е. интегральные показатели оказываются комплексными (всесторонними) показателями качества переходного процесса.

3.9. Частотные динамические характеристики ИУ

Переходная и весовая функции относятся к так называемым *временным* динамическим характеристикам ИУ. Они описывают отклик ИУ на соответственно импульсное и ступенчатое входные воздействия, т. е. являются *функциями времени*. Такие входные воздействия являются типичными для определенных групп измерительных приборов. В частности, импульсное входное воздействие является типичным для устройств, предназначенных для измерения импульса кратковременно действующих сил или величин, закономерно связанных с этим импульсом. Примером таких ИУ может служить баллистический гальванометр. Он предназначен для измерения заряда, прошедшего по сечению проводника. В таком приборе по рамке гальванометра пропускается импульс тока, а максимальное отклонение рамки, пропорциональное площади этого импульса, позволяет судить

об измеряемом заряде. Ступенчатое входное воздействие является типичным для измерительных приборов, которые используются для измерения физических величин, не изменяющихся во времени. Такое входное воздействие реализуется, например, при нагружении грузоприемной платформы весов (товарных, медицинских и др.) массой взвешиваемого груза, при подключении манометра к сети постоянного воздушного давления и т. д. Естественно, что при расчете и выборе параметров таких измерительных приборов рассмотренные ранее временные динамические характеристики оказываются первостепенными. Этим можно объяснить кажущееся разнообразие динамических характеристик средств измерений. В свою очередь, частотные динамические характеристики, рассматриваемые далее, оказываются первостепенными для тех ИУ, которые предназначены для измерения *изменяющихся во времени* физических величин, особенно величин, изменяющихся по гармоническому (или близкому к нему) закону (например, вибраций каких-либо объектов), когда

$$x(t) = x_m \sin(\omega t) l(t), \quad (3.99)$$

Где x_m , ω — соответственно амплитуда и частота гармонического входного сигнала. Наличие в (3.99) единичного множителя $l(t)$ означает, что сигнал на входе ИУ прикладывается с некоторого момента времени, который принимается за начало отсчета $t=0$ (рис. 3.30).

Определим реакцию $y = y(t)$ ИУ на такое входное воздействие, полагая, что известна передаточная функция ИУ $W(p)$. При этом будем считать, что амплитуда входного сигнала равна единице (т. е. $x_m = 1$). В противном случае результат легко поправить, умножив его на фактическое значение амплитуды x_m . Согласно (3.93) в этом случае можно записать

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau = \int_0^t g(\tau) \{\sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau\} d\tau$$

т.е.

$$y(t) = A(t, \omega) \sin \omega t - B(t, \omega) \cos \omega t, \quad (3.100)$$

где $A(t, \omega)$, $B(t, \omega)$ — функции времени t и частоты ω , вычисляемые по формулам

$$A(t, \omega) = \int_0^t g(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad B(t, \omega) = \int_0^t g(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau,$$

- весовая функция ИУ.

$$g(\tau) = L^{-1}(W(p))$$

Следовательно, выходной сигнал ИУ $y(t)$, соответствующий входному сигналу (3.99), описывается весьма сложной функцией времени t и частоты ω (3.100). Однако с течением времени она приводится к более простой гармонической функции времени

$$y_{уст}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_\omega \sin \omega t - B_\omega \cos \omega t, \quad (3.101)$$

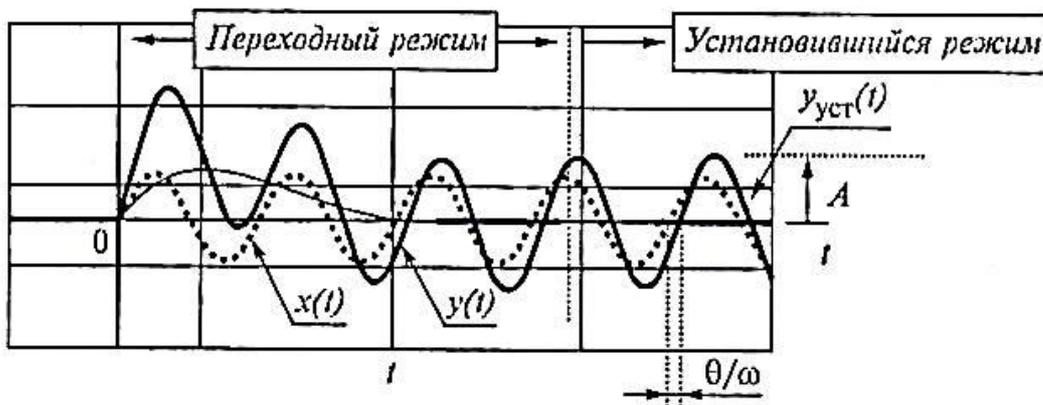


Рис. 3.30

где A_ω , B_ω — коэффициенты, которые в установившемся режиме зависят *только от частоты* входного сигнала ω и не зависят от времени t .

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t) \cdot l(t) \quad \xrightarrow{\text{ИУ}} \quad y_{уст}(t) = A \cdot \sin[\omega t + \theta]$$

Действительно, при $t \rightarrow \infty$ получаем

Поэтому в установившемся режиме изменений вместо (3.100)

$$A_\infty = A_\infty(\omega) = \int_0^\infty g(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad B_\infty = B_\infty(\omega) = \int_0^\infty g(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau. \quad (3.102)$$

можно записать

$$y_{\text{уст}}(t) = A \sin(\omega t + \theta), \quad (3.103)$$

где A , θ — соответ-

ственно амплитуда и угол сдвига фаз установившегося выходного гар-

$$A(\omega) = \sqrt{A_{\infty}^2(\omega) + B_{\infty}^2(\omega)}, \quad \text{tg}[\theta(\omega)] = -\frac{B_{\infty}(\omega)}{A_{\infty}(\omega)}. \quad (3.104)$$

монического сигнала (3.103) относительно входного сигнала (3.99), зависящие от частоты ω этого сигнала

Таким образом, установившийся выходной сигнал *оказывается гармоническим*. Он имеет ту же частоту ω , что и входной сигнал, но другие амплитуду A и начальную фазу θ , которые, в свою очередь, зависят от частоты ω входного сигнала (3.99). Учитывая (3.95), вместо (3.104) можно записать

$$A(\omega) = |W(i\omega)|, \quad (3.105)$$

$$\theta(\omega) = \arg\{W(i\omega)\} \quad (3.106)$$

и тем самым исключить необходимость вычисления интегралов (3.102).

Примечание — Если $x(t) \neq 1$, то, учитывая линейность рассматриваемых ИУ, нужно вместо (3.105) записать

$$A(\omega) = x_m |W(i\omega)|. \quad (3.107)$$

Формула (3.106) при этом не изменяется.

Здесь используется комплексная частотная передаточная функция ИУ $W(i\omega)$, которую можно получить, если в выражении (3.32) принять $p = i\omega$, т. е.

$$W(i\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (i\omega) + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0}, \quad (3.108)$$

где i — мнимая единица (см. также (3.95)). Эту комплексную функцию частоты и всегда можно представить в показательной форме

$$W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) = A(\omega) e^{i\theta(\omega)},$$

где $U(\omega)$, $V(\omega)$ — соответственно вещественная и мнимая части КЧФ, которые, в свою очередь, можно выразить через амплитуду $A(\omega)$ и угол сдвига фаз $\theta(\omega)$ установившегося выходного сигнала (3.103)

$$U(\omega) = \text{Re}\{W(i\omega)\} = A(\omega) \cos[\theta(\omega)]$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im} \{W(i\omega)\} = A(\omega) \sin [\theta(\omega)].$$

Модуль комплексной частотной передаточной функции (3.108) $|W(i\omega)|$ называется *амплитудной частотной функцией* ИУ, а график этой функции — *амплитудно-частотной характеристикой* ИУ (АЧХ). Аргумент комплексной частотной передаточной функции $\arg \{W(i\omega)\}$ называется *фазовой частотной функцией* ИУ, а ее график — *фазово-частотной характеристикой* ИУ (ФЧХ). Согласно (3.103) физический смысл частотных характеристик ИУ заключается в том, что они определяют параметры *установившегося* выходного гармонического сигнала, возникающего при действии на входе ИУ гармонического сигнала единичной амплитуды. При экспериментальном определении частотных характеристик ИУ амплитуда входного сигнала может отличаться от единицы. В этом случае *отношение амплитуд* выходного и входного сигналов равно модулю, а сдвиг фазы — аргументу комплексной частотной передаточной функции ИУ (3.108), т.е. в общем случае АЧХ описывает изменение отношения амплитуд x_m , а ФЧХ — угла сдвига фазы θ установившегося выходного сигнала относительно фазы входного гармонического сигнала в зависимости от частоты ω этого сигнала. В полярной системе координат (или на комплексной плоскости (U, iV)) АЧХ и ФЧХ можно представить одним графиком. В этом случае для каждого значения частоты ω входного сигнала в качестве радиус-вектора нужно откладывать амплитуду (3.105), а в качестве полярного угла — угол сдвига фаз (3.106). Полученную кривую называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* измерительного устройства (АФЧХ). Она является полной динамической характеристикой линейного ИУ.

В примере 3.5 демонстрируется применение Mathcad к расчету перечисленных частотных характеристик для простого ИУ 2-го порядка с передаточной функцией (3.70). На рис. 3.31 показаны графики АЧХ, на рис. 3.32 — графики ФЧХ, на рис. 3.33 — графики АФЧХ такого ИУ, соответствующие единичному значению собственной частоты ИУ $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ и трем различным значениям относительного коэффициента демпфирования ξ , $\xi = 0.2$, $\xi = 0.5$ и $\xi = 1.5$. Видно, что с уменьшением ξ возрастает проявление резонансных свойств ИУ. Особенно ярко это проявляется на форме АЧХ, которая при малых значениях относительного коэффициента демпфирования E , ($E < \sqrt{2}$) приобретает резонансный пик. При этом, чем меньше ξ , тем этот

пик острее. ФЧХ с уменьшением ζ , приближается к ступенчатой функции, описывающей скачкообразное изменение фазы выходного сигнала от нуля (при $\omega < \omega_0$) до $-\pi$ (при $\omega > \omega_0$). С увеличением собственной частоты ω_0 графики на рис. 3.31 растягиваются в направлении оси абсцисс (что, как показано далее приводит к расширению полосы пропускания частот). То же самое происходит с графиками на рис. 3.32, графики на рис. 3.33 при этом не изменяются. Точка максимума на графике АЧХ соответствует резонансной частоте ИУ

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (3.111)$$

Соответствующее максимальное значение относительной амплитуды установившегося выходного сигнала равно

$$A_p = \frac{A_{\max}}{x_m} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (3.112)$$

т. е. с уменьшением относительного коэффициента демпфирования ξ резонансная частота ω_p приближается к собственной частоте ИУ ω_0 , а амплитуда A_{\max} увеличивается.

Используя общее решение (3.100), можно провести анализ процесса установления выходного сигнала ИУ, соответствующего входному сигналу (3.99). В частности, если частота входного сигнала ω совпадает с резонансной частотой ИУ ω_p , то процесс нарастания амплитуды выходного сигнала, называемый резонансом, в первом приближении происходит по экспоненциальному закону (см. рис. 3.34)

$$A(t) = x_m A_p [1 - \exp(-\xi \omega_0 t)], \quad (3.113)$$

Где $A(t)$ – огибающая выходного сигнала, x_m – амплитуда входного сигнала, т.е. при резонансе можно приближенно записать $y(t) = A(t) \sin(\omega_p t)$.

Примечание – Точное решение (3.100) в случае резонанса (при $\omega = \omega_p$) имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{2\xi(1-\xi^2)} \left\{ \xi \sin(\omega_p t) - \frac{\omega_p}{\omega_0} \cos(\omega_p t) + \frac{\omega_p}{\omega_0} e^{-\xi\omega_0 t} \cos[\omega_0(1-\xi^2)t] \right\}$$

ПРИМЕР 3.5

Средствами Mathcad построить графики частотных характеристик простого ИУ 2-го порядка.

Решение.

$$W0(p, \xi, \omega_0) := \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} \quad \omega_0 := 1 \text{ c}^{-1}$$

$$i := \sqrt{-1} \quad A(\omega, \xi, \omega_0) := |W0(i \cdot \omega, \xi, \omega_0)| \quad \phi(\omega, \xi, \omega_0) := \arg(W0(i \cdot \omega, \xi, \omega_0))$$

$$U(\omega, \xi, \omega_0) := A(\omega, \xi, \omega_0) \cdot \cos(\phi(\omega, \xi, \omega_0))$$

$$V(\omega, \xi, \omega_0) := A(\omega, \xi, \omega_0) \cdot \sin(\phi(\omega, \xi, \omega_0))$$

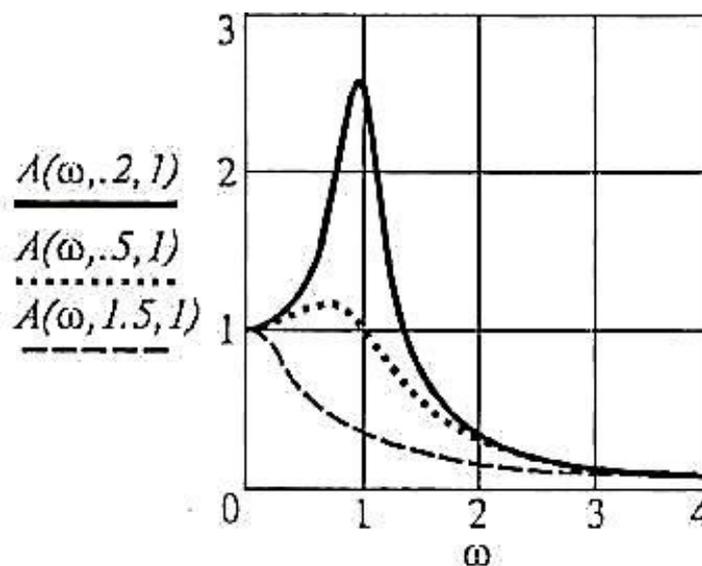


Рис. 3.31

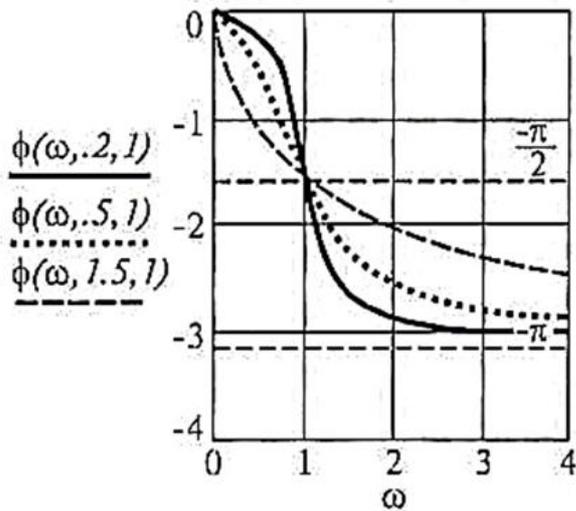


Рис. 3.32

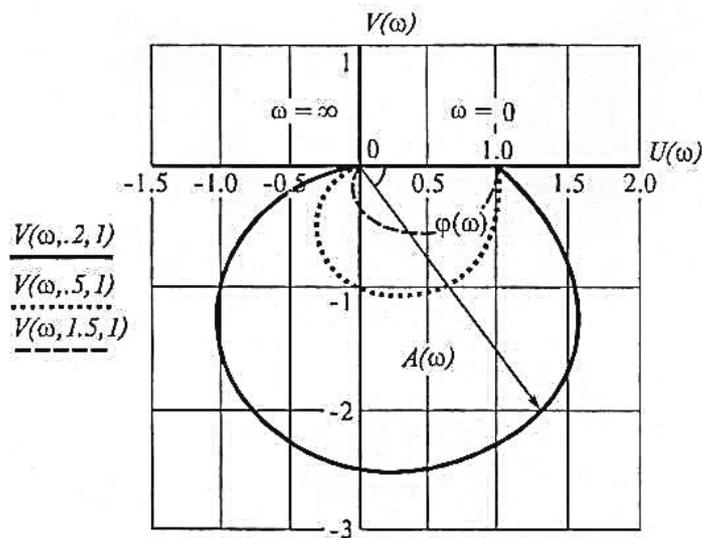


Рис. 3.33

С помощью (3.113) несложно определить время t_z , по истечении которого огибающая (амплитуда) выходного сигнала достигнет заданного значения $A_z < A_p$,

$$t_z = -\frac{1}{\xi\omega_0} \ln\left(1 - \frac{A_z}{A_p}\right). \quad (3.114)$$

Это время определяет длительность переходного состояния ИУ. Например, если $A_z = 0.9 A_p$, то вместо (3.114) получаем $t_z = 2.3/\xi\omega_0$, т. е. чем меньше произведение $\xi\omega_0$ тем больше время установления гармонического сигнала на выходе рассматриваемого ИУ. В приборных устройствах, у которых $\xi = 0.7 \dots 1.2$, это время не превышает 2—3 периодов входного сигнала.

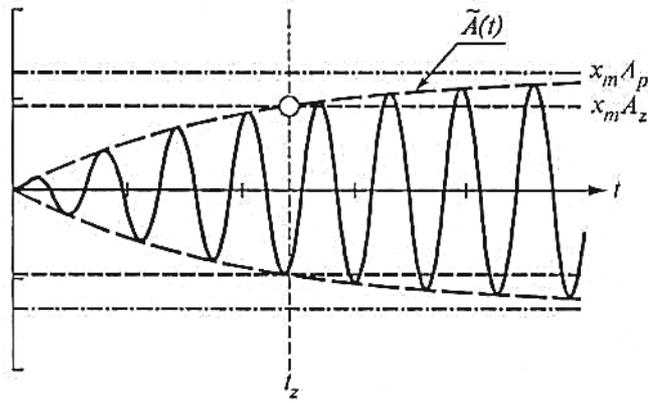


Рис. 3.34

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{\frac{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}{c(\omega)^2 + d(\omega)^2}} = \sqrt{\frac{B_0 + B_2 \omega^2 + B_4 \omega^4 + \dots + B_{2m} \omega^{2m}}{A_0 + A_2 \omega^2 + A_4 \omega^4 + \dots + A_{2n} \omega^{2n}}}, \quad (3.115)$$

где $a(\omega) = b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots$, $b(\omega) = b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots$,
 $c(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots$, $d(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots$;

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0^2, & A_0 &= a_0^2, \\ B_2 &= b_1^2 - 2b_0 b_2, & A_2 &= a_1^2 - 2a_0 a_2, \\ B_4 &= b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4, & A_4 &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4, \\ \dots & & \dots & \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2m-4} &= b_{m-2}^2 - 2b_{m-1} b_{m-3} + 2b_{m-4} b_m, & A_{2n-4} &= a_{n-2}^2 - 2a_{n-1} a_{n-3} + 2a_{n-4} a_n, \\ B_{2m-2} &= b_{m-1}^2 - 2b_{m-2} b_m, & A_{2n-2} &= a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} a_n, \\ B_{2m} &= b_m^2; & A_{2n} &= a_n^2. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Амплитудную частотную функцию ИУ с передаточной функцией (3.32) можно представить в виде

Здесь $b_0, b_1, \dots, b_n; a_0, a_1, \dots, a_n$ — коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции ИУ (3.32). Из формулы (3.115) видно, что квадрат АЧХ линейного стационарного ИУ представляет собой четную дробно-рациональную функцию квадрата частоты.

Подобно (3.37) амплитудную частотную функцию позиционного ИУ, у которого $K \neq 0$, можно записать в виде

$$A(\omega) = K A_0(\omega) \quad (3.117)$$

Где $K = A(0)$ — коэффициент чувствительности ИУ; $A_0(\omega)$ — относительная (нормированная) амплитудная частотная функция ИУ, вычисляемая по формуле

$$A_0(\omega) = |W_0(i\omega)| \quad (3.118)$$

и обладающая свойством $A_0(0) = 1$.

График этой функции называется *относительной амплитудно-частотной характеристикой* измерительного устройства. Этот график и график обычной АЧХ (3.117) имеют одинаковую форму, т.е. подобны друг другу. На рис.3.35 показаны возможные формы этого графика для простых ИУ невысокого порядка, у которых $m = 0, n \leq 3$.

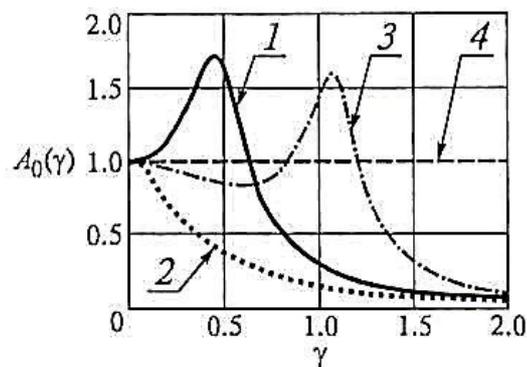


Рис. 3.35

В зависимости от формы графика различают следующие основные типы АЧХ таких ИУ:

- идеальная (4) пологая
- (монотонная) (2) резонансная
- (одногогорбая) (1) двугорбая (3).

Чем выше порядок характеристического уравнения ИУ (3.32), тем более разнообразными оказываются возможные в нем формы АЧХ. Так, в зависимости от значений параметров в простом ИУ 3-го порядка ($n = 3$) возможны все показанные на рис. 3.35 формы АЧХ, в простом ИУ 2-го порядка ($n = 2$) возможны только пологие и одногогорбые АЧХ, а в простом ИУ 1-го порядка ($n = 1$) — только пологие АЧХ (2).

Известна формула, связывающая переходную функцию линейной минимально-фазовой динамической системы с ее частотными характеристиками,

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega, \quad (3.119)$$

где $U(\omega) = \operatorname{Re}\{W(i\omega)\}$ — вещественная частотная характеристика минимальнофазового ИУ (т.е. такого ИУ все нули и полюсы передаточной функции которого имеют отрицательные или равные нулю вещественные части). Вычисление переходного процесса с использованием формулы (3.119) лежит в основе так называемого метода трапеций. Фазово-частотная характеристика ИУ минимальнофазового типа связана с логарифмической амплитудно-фазовой характеристикой такого ИУ соотношением

$$\theta(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \ln \{A(u)\}}{du} \ln \left\{ \operatorname{cth} \left| \frac{u}{2} \right| \right\} du, \quad (3.120)$$

где $u = \ln(\omega^*/\omega)$, ω^* — переменная интегрирования, имеющая размерность круговой частоты. Отсюда следует, что амплитудную частотную функцию $A = A(\omega)$ ИУ минимально-фазового типа можно считать полной динамической характеристикой такого ИУ.

3.10. Полоса пропускания частот ИУ

Из рис. 3.35 видно, что во всех случаях (независимо от формы АЧХ) имеет место относительная частотная погрешность

$$\Delta_{\varepsilon}(\omega) = 1 - A_0(\omega), \quad (3.121)$$

т.е. в инерционном ИУ всегда имеется разница между графиками идеальной и фактической АЧХ.

Полоса частот входного гармонического сигнала, в пределах которой эта погрешность не превышает допустимого значения ε , называется *полосой пропускания частот* измерительного устройства (ППЧ).

Если этот диапазон частот занимает интервал $0 < \omega < \omega_{\Pi}$ то величина ω_{Π} совпадает с шириной полосы пропускания частот. Для позиционных ИУ, у которых $K \neq 0$, ее можно определить *графическим способом* так, как это показано на рис.3.36. Здесь ω_{Π} определяется как абсцисса точки *первого выхода* графика относительной АЧХ ИУ за границы трубки точности $1 \pm \varepsilon$ (или как абсцисса точки *первого пересечения* этим графиком границ трубки точности, если двигаться вдоль этого графика слева направо от точки $\omega = 0 \text{ с}^{-1}$).

Если пользоваться графиком обычной АЧХ (3.117), то графический расчет ширины ППЧ можно выполнять точно так же, как это показано на рис. 3.36, с той лишь разницей, что вместо трубки точности $1 \pm \varepsilon$ следует пользоваться трубкой $K(1 \pm \varepsilon)$, где K — коэффициент чувствительности ИУ ($K=A(0)$).

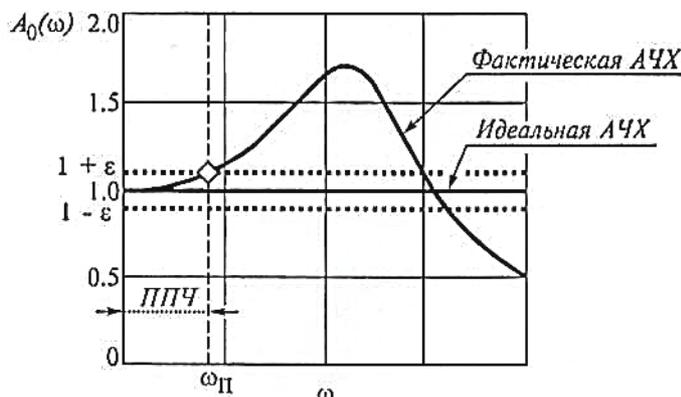


Рис. 3.36

В пределах полосы пропускания частот в выходном сигнале ИУ отсутствуют (с точностью до ε) частотные искажения амплитуды входного гармонического сигнала, т.е. в этом диапазоне частот ИУ оказывается «прозрачным» для входных гармонических сигналов, «пропуская» их без частотных искажений, обусловленных инерционностью элементов ИУ. Считается, что чем больше ширина ППЧ, тем более совершенными являются динамические свойства ИУ. На самом деле это справедливо для регистрирующих ИУ, у которых относительная АЧХ в идеале должна совпадать с единичной ступенчатой функцией $1(\omega)$. Однако в силу невозможности строгого выполнения этого условия выбор параметров таких ИУ на практике подчиняется условию максимума ширины ППЧ.

На рис. 3.37 показана схема графического способа расчета ширины ППЧ позиционного ИУ.

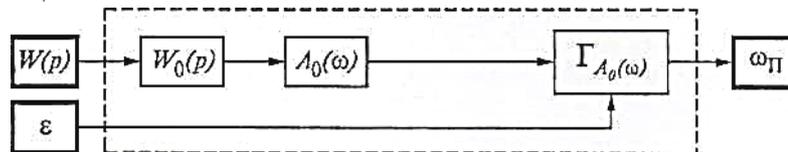


Рис.3.37

Видно, что исходными данными для расчета являются передаточная функция ИУ (или любая другая динамическая характеристика

ИУ, позволяющая определить $W(p)$, например, структурная схема ИУ) и допустимая относительная частотная погрешность ϵ . В ходе расчетов последовательно определяются операторная часть передаточной функции ИУ $W_0(p) = W(p)/W(0)$ и относительная АЧХ ИУ $A_0(\omega) = |W_0(i\omega)|$. Затем строится график этой характеристики $\Gamma_{A_0(\omega)}$, на который накладывается трубка точности $1 \pm \epsilon$. Абсцисса точки *первого выхода* этого графика за границы трубки точности (при продвижении по графику слева направо от точки $\omega = 0$) определяет верхнюю границу ППЧ ω_n .

Далее показан пример графического способа расчета ширины ППЧ в Mathcad для рассмотренного ранее (в примере 3.4) ИУ с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{36}{36p^3 + 36p^2 + 215p + 69}$$

На рис. 3.38 показан график относительной АЧХ такого ИУ, на рис. 3.39 — участок этой АЧХ, соответствующий *первому выходу* графика за границы трубки точности $1 \pm \epsilon$. Этот выход происходит сверху вниз. Поэтому расчет ω_n сводится к решению уравнения $A_0(\omega_n) = 1 - \epsilon$. В Mathcad это выполняется с помощью команды *root*. Допустимая относительная частотная погрешность ϵ принята равной 2%.

ПРИМЕР 3.6

Определить ширину полосы пропускания частот ИУ, имеющего передаточную функцию заданного вида.

Решение.

$$W_0(s) := \frac{69}{36 \cdot s^3 + 36 \cdot s^2 + 215 \cdot s + 69} \quad j := \sqrt{-1} \quad A_0(\omega) := |W_0(j \cdot \omega)|$$

$$\epsilon := 0.02$$

$$c := 0.05 \quad \omega_p := \text{root}(A_0(c) - 1 + \epsilon, c) \quad \boxed{\omega_p = 0.069 \text{ c}^{-1}}$$

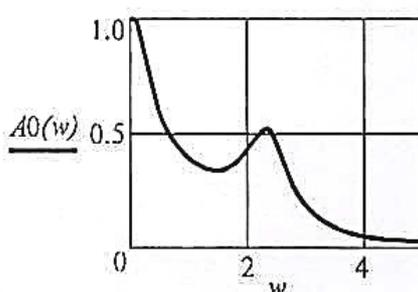


Рис. 3.38

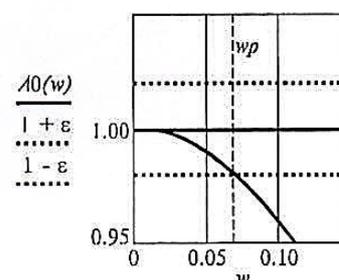


Рис. 3.39

Графический способ расчета ширины ППЧ оказывается весьма неудобным в тех случаях, когда необходимо исследовать зависимость этого показателя динамической точности от одного или (тем более) нескольких параметров ИУ. В этих случаях расчет ширины ППЧ, подобный изложенному в примере 3.6, приходится выполнять многократно для каждого значения варьируемого параметра ИУ или сочетания таких параметров.

Покажем способ численного расчета ширины ППЧ в среде Mathcad для ИУ с известной относительной АЧХ вида

$$A_0(\omega; q_1, q_2, \dots, q_n) = |W_0(j\omega; q_1, q_2, \dots, q_n)|,$$

где q_1, q_2, \dots, q_n — параметры относительной передаточной функции ИУ, которые могут варьироваться. В Mathcad расчет ширины ППЧ такого ИУ можно выполнять с помощью процедуры — функции

$$\omega_p(q_1, q_2, \dots, q_n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ w_0 \leftarrow 0 \\ \text{while } |1 - A_0(w_s, q_1, q_2, \dots, q_n)| \leq \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s + 1 \\ w_s \leftarrow \frac{\omega_v}{NW} \cdot s \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(3.122).

Здесь ε — допустимое значение относительной частотной погрешности ИУ, ω — ожидаемое максимальное значение ширины ППЧ, NW — число, влияющее на точность расчета. При обращении к функции (3.122) интервал наблюдения $0 \leq \omega \leq \omega_v$ разбивается на $NW + 1$ точек (рис.3.40) $w_s = (\omega_v/NW)s$, где $s = 0, 1, \dots, NW$ и в каждой из них последовательно вычисляется модуль относительной частотной погрешности $|\Delta\varepsilon(w_s)| = |1 - A_0(w_s, q_1, q_2, \dots, q_n)|$.

Как только нарушается условие $|\Delta\varepsilon| \leq \varepsilon$, значение переменной присваивается переменной ω_p . В результате осуществляется продвижение вдоль графика относительной АЧХ слева направо от точки $\omega = 0$ с-1 и определяется абсцисса точки первого выхода этого графика за границы трубки точности $1 \pm \varepsilon$, т. е. искомая верхняя граница полосы пропускания частот ω_p для заданного набора варьируемых параметров ИУ q_0, q_1, \dots, q_n .

Г л а в а 4
АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТИПОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Согласно (3.43) передаточная функция простого ИУ n -го порядка имеет вид

$$W_n(p) = \frac{b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Если $n \leq 3$, то соответствующие ИУ будем называть типовыми измерительными устройствами, т. е. к типовым будем относить ИУ, дифференциальные уравнения и передаточные функции которых имеют вид:

для ИУ 1-го порядка $\alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$

$$W_1(p) = \frac{K}{T_1 p + 1}, \quad (4.1)$$

Где $T_1 = \alpha_1 / \alpha_0$, $K = \beta_0 / \alpha_0$;

для ИУ 2-го порядка $\alpha_2 \ddot{y}(t) + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$

$$W_2(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2},$$

где $T_2 = \sqrt{\alpha_2 / \alpha_0}$, $\xi = \alpha_1 / 2\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}$, $\omega_0 = 1 / T_2$, $K = \beta_0 / \alpha_0$;

для ИУ 3-го порядка $\alpha_3 \ddot{y}(t) + \alpha_2 \dot{y}(t) + \alpha_1 y(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$

$$W_3(p) = \frac{K}{T_3^3 p^3 + a1 \cdot T_3^2 p^2 + a2 \cdot T_3 p + 1} = \frac{K \omega_0^3}{p^3 + a1 \cdot \omega_0 p^2 + a2 \cdot \omega_0^2 p + \omega_0^3},$$

где $T_3 = \sqrt[3]{\alpha_3 / \alpha_0}$, $a1 = \alpha_2 / \alpha_0 T_3^2$, $a2 = \alpha_1 / \alpha_0 T_3$, $\omega_0 = 1 / T_3$, $K = \beta_0 / \alpha_0$.

В этих формулах используются следующие обозначения: α_i, β_i — постоянные коэффициенты, T_1, T_2, T_3 — постоянные времени ИУ, с; ξ — безразмерный относительный коэффициент демпфирования; $a1, a2$ — безразмерные параметры Вышнеградского; ω_0 — собственная частота ИУ, с⁻¹; K — коэффициент чувствительности ИУ. Все эти величины зависят только от параметров рассматриваемых ИУ.

Такие ИУ встречаются чаще других. Они, подобно алгебраическим полиномам не выше 3-го порядка, доступны для аналитического исследования своих характеристик. Поэтому умение проводить анализ и синтез таких ИУ является ключом для исследования ИУ общего вида. Последующее изложение посвятим анализу динамических характеристик типовых ИУ. Цель анализа заключается в определении зависимости показателей динамической точности таких ИУ от параметров их передаточных функций (4.1), (4.2) и (4.3).

4.1. Динамические характеристики ИУ 1-го порядка

К типовым ИУ 1-го порядка относятся чувствительные элементы многих средств измерений, различные тепловые преобразователи (терморезисторы, термопары и т. д.), фотопреобразователи (фотодиоды, фоторезисторы и пр.), электромагнитные преобразователи, измерительные усилители, демодуляторы, успокоители движения и многие другие измерительные и преобразующие устройства. Все динамические характеристики таких устройств могут быть получены в замкнутой форме, т. е. в виде аналитических выражений и формул. Эти формулы приводятся ниже.

Относительная передаточная функция

$$W_0(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}, \quad (4.4)$$

где T_1 — постоянная времени ИУ, с. *Относительная переходная функция*

Относительная импульсная переходная (весовая) функция

$$g_0(t) = \frac{1}{T_1} e^{-t/T_1} 1(t), \quad (4.5)$$

$$h_0(t) = [1 - e^{-t/T_1}] 1(t),$$

Относительная амплитудная частотная функция

$$A_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}, \quad (4.6)$$

Фазовая частотная функция

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T_1).$$

Длительность переходного процесса

$$t_{11} = T_1 \ln(1/\Delta),$$

где Δ — допустимое значение относительной переходной погрешности.

Активная длительность переходного процесса

$$T_x = T_1 \ln(1/\sqrt{1-k}),$$

где k — коэффициент, определяющий долю полной энергии переходного процесса, приходящуюся на интервал времени, равный активной длительности этого процесса (например, $k = 0.95$).

Ширина полосы пропускания частот

$$\omega_{11} = \frac{1}{T_1} \frac{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{1-\varepsilon}, \quad (4.9)$$

где ε — допустимое значение относительной частотной погрешности. Интегральные показатели качества переходного процесса: Квадратичная интегральная оценка

$$I = T_1/2, \quad (4.10)$$

Среднеквадратическая интегральная оценка

$$M = \frac{(T_1 - T_g)^2}{2(T_1 + T_g)}, \quad M_{11} = T_1 - T_g, \quad (4.11)$$

где T_g — постоянная времени желаемого аperiodического переходного процесса;

M_{Π} — среднее отклонение фактического переходного процесса от желаемого переходного процесса.

Обобщенная интегральная квадратичная оценка

$$I_{ob} = \frac{T_1^2 + \tau_e^2}{2T_1}, \quad (4.12)$$

Где τ_e — постоянная времени экстремального переходного процесса.

На рис. 4.1—4.9 показана зависимость перечисленных показателей динамической точности и характеристик простого ИУ 1-го порядка от его постоянной времени T_1 . В частности, на рис. 4.1 показано семейство переходных функций, на рис. 4.2. — семейство весовых функций, на рис. 4.3 — семейство амплитудно-частотных характеристик и на рис. 4.4 — семейство фазово-частотных характеристик такого ИУ для трех различных значений постоянной времени $T_1 = 1, 2, 3$ с.

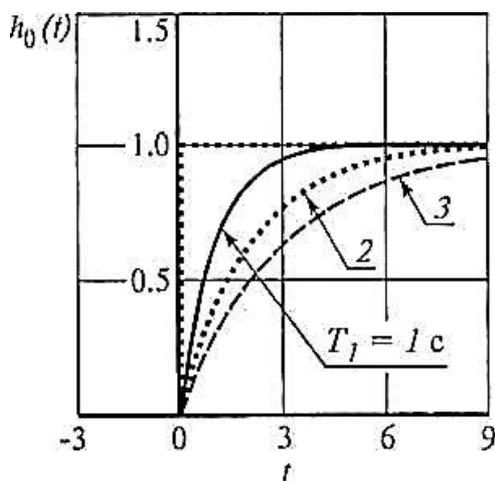


Рис. 4.1

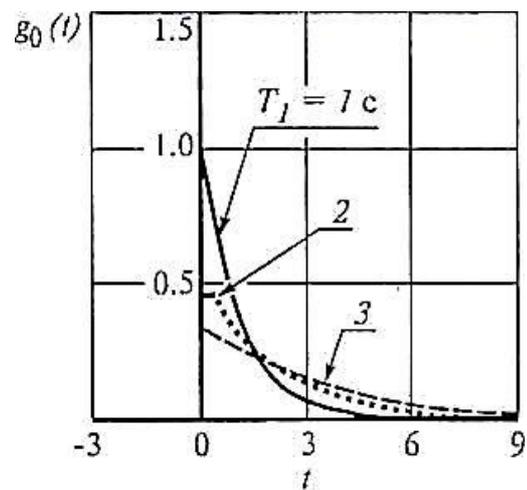


Рис. 4.2

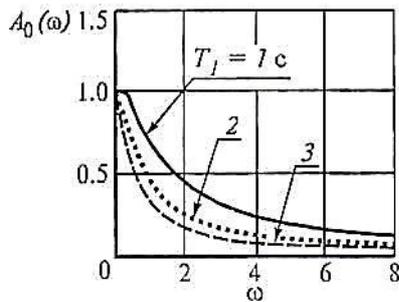


Рис. 4.3

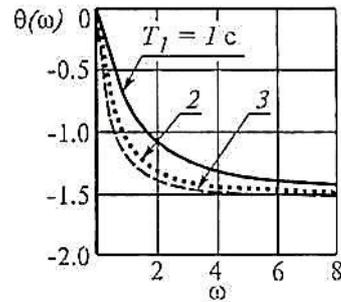


Рис. 4.4

Из рисунков 4.1 и 4.3 видно, что в простом ИУ 1-го порядка возможны только монотонный переходный процесс и только пологая АЧХ. Длительность переходного процесса в таком ИУ пропорциональна его постоянной времени T_I (см. рис. 4.5 и формулу (4.8)), а ширина полосы пропускания частот — обратно пропорциональна постоянной времени (см. рис. 4.6 и формулу (4.9)). Условию минимума обычной интегральной квадратичной оценки переходного процесса I соответствует нулевое значение T_I (рис. 4.7). При этом длительность переходного процесса $t_{п}$ равна нулю, а полоса пропускания частот $\omega_{п}$ бесконечно большая.

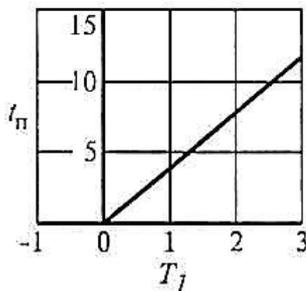


Рис. 4.5

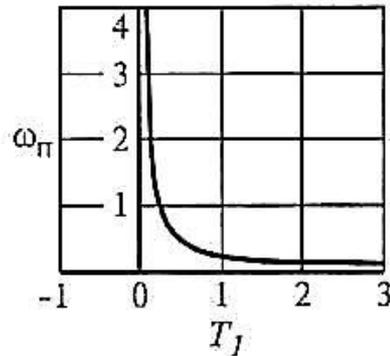


Рис. 4.6

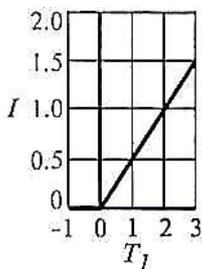


Рис. 4.7

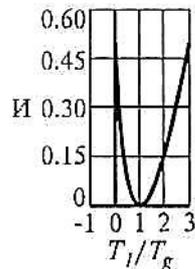


Рис. 4.8

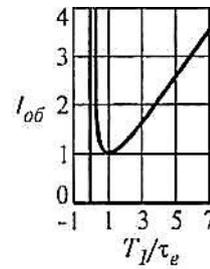


Рис. 4.9

Если в качестве интегрального показателя качества переходного процесса используются среднеквадратическая интегральная оценка или обобщенная квадратичная оценка, то оптимальному переходному

процессу отвечают соответственно $T1 = Tg$, или $T1 = te$ (см. рис. 4.8 и рис. 4.9).

4.2. Динамические характеристики ИУ 2-го порядка

подавляющее большинство ИУ — это преобразователи 2-го порядка или с достаточной точностью сводящиеся к ним. Поэтому сведения о динамических характеристиках таких ИУ для прибориста являются своеобразной «таблицей умножения».

В отличие от (4.31) относительная передаточная функция простого ИУ 2-го порядка (4.13) содержит не одну, а две независимые величины, влияющие на динамические характеристики такого ИУ: постоянную времени $T2$ (или собственную частоту ИУ $\omega_0 = 1/T2$) и относительный коэффициент демпфирования. Собственная частота ω_0 влияет на быстродействие ИУ, а относительный коэффициент демпфирования ξ , — на форму переходного процесса и форму амплитудно-частотной характеристики ИУ. При этом чем больше ω_0 , тем меньше длительность переходного процесса $tП$ и больше ширина полосы пропускания частот $\omegaп$. Переходный процесс колебательный, если $0 < \xi < 1$ и монотонный, если $\xi \geq 1$.

Амплитудно-частотная характеристика пологая, если $\xi \geq 1/\sqrt{2}$, и одногорбая резонансная, если $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$. Все показатели динамической точности и характеристики, рассмотренные в предыдущем разделе, кроме длительности переходного процесса, для простого ИУ 2-го порядка также можно получить в аналитическом виде, т. е. в виде формул. Далее приводятся эти формулы. При этом считается, что условия $\xi > 0$ и $\omega_0 > 0$, вытекающие из требования устойчивости ИУ (3.40), выполняются.

4.2.1. Относительная передаточная функция

$$W_0(p) = \frac{1}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1}, \quad (4.13)$$

$$\text{или } W_0(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}, \quad (4.14)$$

4.2.2. Относительная переходная функция.

Если $0 < \xi < 1$, то
$$h_0(t) = 1 - e^{-\xi\tau} \left[\cos(b\tau) + \frac{\xi}{b} \sin(b\tau) \right]. \quad (4.15)$$

если $\xi = 1$, то
$$h_0(t) = 1 - e^{-\tau} (1 + \tau),$$

если $\xi > 1$, то
$$h_0(t) = 1 - e^{-\xi\tau} \left[\frac{\xi + a}{2a} e^{a\tau} - \frac{\xi - a}{2a} e^{-a\tau} \right],$$

где $a = \sqrt{\xi^2 - 1}$, $b = \sqrt{1 - \xi^2}$, $\tau = \omega_0 t$ — безразмерное время.

4.2.3. Относительная импульсная переходная (весовая) функция.

Если $0 < \xi < 1$, то
$$g_0(t) = \frac{\omega_0}{b} e^{-\xi\tau} \sin(b\tau),$$

если $\xi = 1$, то
$$g_0(t) = \omega_0 \tau e^{-\tau},$$

если $\xi > 1$, то
$$g_0(t) = \frac{\omega_0}{a} e^{-\xi\tau} \operatorname{sh}(a\tau).$$

(4.16)

Аргументом во всех этих функциях является безразмерное время $t = \omega_0 t$. Поэтому форма переходной функции (4.15), как и форма весовой функции (4.16), зависит только от значения относительного коэффициента демпфирования ξ , и не зависит от собственной частоты ИУ ω_0 (см. рис. 4.11, 4.13). При увеличении собственной частоты график переходного процесса сжимается, сохраняя свою форму, а при уменьшении — растягивается вдоль оси времени (см. рис. 4.10), что приводит к пропорциональному уменьшению (и соответственно — увеличению) длительности переходного процесса (4.22).

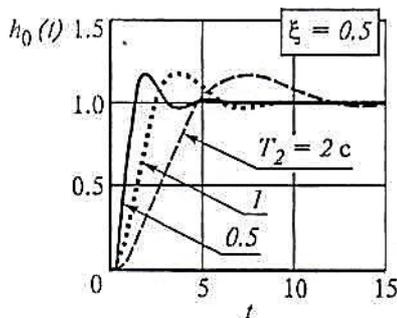


Рис. 4.10

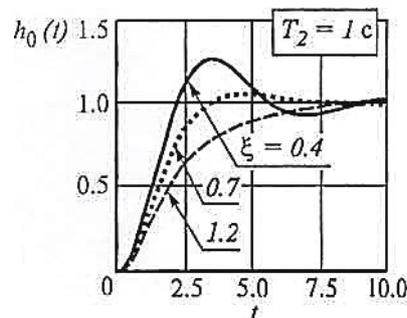


Рис. 4.11

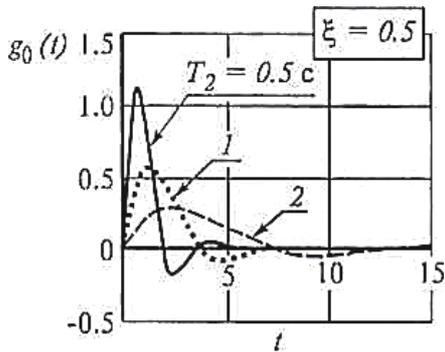


Рис. 4.12

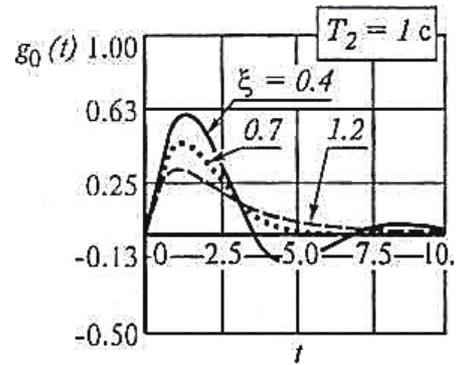


Рис. 4.13

4.2.4. Относительная амплитудная частотная функция

$$A_0(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_0^2 \omega^2}}, \quad (4.17)$$

Или (в безразмерной форме)

$$A_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + 4\xi^2 \gamma^2}}, \quad (4.18)$$

Где $\gamma = \omega/\omega_0 = \omega T_2$ – относительная частота входного сигнала.

На рис. 4.14 и 4.15 показаны семейства графиков относительных АЧХ для трех значений $T_2 = 1, 2, 5$ с при постоянном значении $\xi = 0.5$ и трех значений $\xi = 0.4; 0.7; 1.2$ при постоянном значении $T_2 = 1$ с.

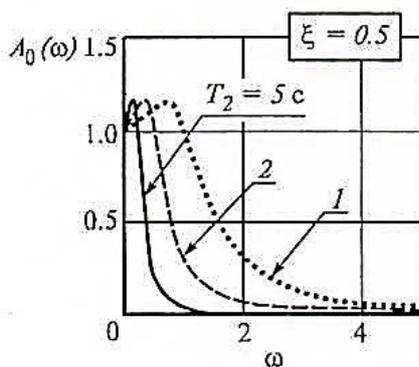


Рис. 4.14

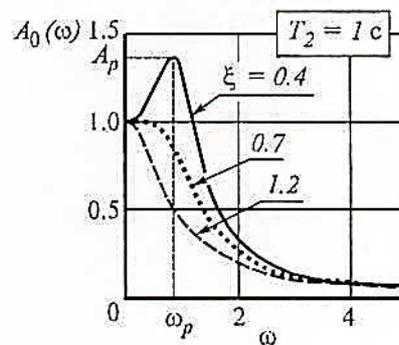


Рис. 4.15

При малом демпфировании (когда $0 < \xi < 1 / \sqrt{2}$) АЧХ имеет резонансный пик (см. рис. 4.15), причем, чем меньше значение ξ , тем этот пик острее. Точка максимума на графике такой АЧХ соответствует резонансной частоте входного сигнала

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (4.19)$$

а соответствующее максимальное значение относительной амплитуды установившегося выходного сигнала тем больше, чем меньше значение ξ

$$A_p = 1 / 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}.$$

4.2.5. Фазовая частотная функция

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\gamma}{1-\gamma^2}\right), \text{ если } 0 < \gamma \leq 1 \quad (\text{т. е. } 0 < \omega \leq \omega_0);$$

(4.21)

$$= -\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\gamma}{1-\gamma^2}\right), \text{ если } \gamma > 1 \quad (\text{т. е. } \omega > \omega_0).$$

На рис. 4.16 и 4.17 показаны семейства графиков ФЧХ для ряда значений $T_2 = 1, 2, 5$ с при постоянном значении $\xi = 0.5$ и ряда значений $\xi = 0.4; 0.7; 1.2$ при постоянном значении $T_2 = 1$ с. Видно, что с уменьшением относительного коэффициента демпфирования ξ фазовый сдвиг между установившимися гармоническими сигналами на входе и выходе ИУ в области $0 < \omega < \omega_0$ уменьшается, а в области $\omega > \omega_0$ — увеличивается. При $\omega = \omega_0$ эти сигналы сдвинуты по фазе на угол $-\pi/2$. С дальнейшим увеличением частоты эти сигналы становятся противофазными.

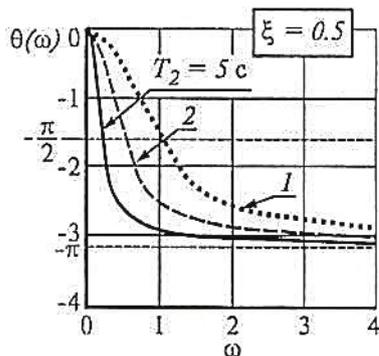


Рис. 4.16

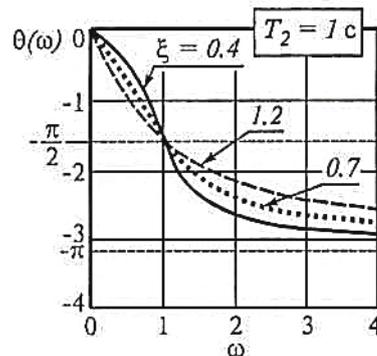


Рис. 4.17

4.2.6. Длительность переходного процесса

Длительность переходного процесса t_{Π} в простом ИУ 2-го порядка обратно пропорциональна собственной частоте ИУ $\omega_0 = 1/T_2$, т. е. пропорциональна постоянной времени T_2 . Ее можно вычислить по формуле

$$t_{\Pi} = \frac{\tau_{\Pi}(\xi, \Delta)}{\omega_0} = \tau_{\Pi}(\xi, \Delta) \cdot T_2, \quad (4.22)$$

где $\tau_{\Pi}(\xi, \Delta)$ — безразмерная относительная длительность переходного процесса, зависящая только от двух величин: относительного коэффициента демпфирования ξ , и допустимого значения относительной переходной погрешности Δ .

Отсюда видно, что относительная длительность переходного процесса $\tau_{\Pi}(\xi, \Delta)$ совпадает с длительностью переходного процесса t_{Π} в ИУ, у которого собственная частота равна единице (т. е. $\omega_0 = 1$ с⁻¹). Это можно использовать для вычисления значения относительной длительности переходного процесса τ_{Π} , соответствующего заданным значениям ξ и Δ . Для этого нужно, полагая $\omega_0 = 1$ с⁻¹, построить график относительной переходной функции

$$h_0(\tau) = L^{-1} \{W_0(p)/p\} = L^{-1} \{1/[p(p^2 + 2\xi p + 1)]\},$$

соответствующий заданному значению ξ , и, наложив на него трубку точности $1 \pm \Delta$, определить «момент» τ_{Π} , при котором график заходит в эту трубку.

Известно, что относительная длительность переходного процесса в простом ИУ 2-го порядка минимальна при вполне определенном (оптимальном) значении относительного коэффициента демпфирования, которое зависит только от допустимого значения относительной переходной погрешности Δ ,

$$\xi = \xi_{opt}^{(1)} \frac{\ln(1/\Delta)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(1/\Delta)}}, \quad (\xi_{opt}^{(1)} < 1). \quad (4.23)$$

Форма графика соответствующего переходного процесса (4.15) показана на рис. 4.18 (кривая 1). Его отличительной особенностью является то, что своим первым экстремумом (максимумом) он касается верхней границы трубки точности $1 + \Delta$. В этом случае значение относительной длительности переходного процесса τ_{Π} оказывается минимальным ($\tau_{\Pi} = \tau_{\Pi min}$). Действительно, если $\xi < \xi_{opt}^{(1)}$, то

первый максимум переходной функции выходит за границу $1 + \Delta$ трубки точности (см. кривую 2 на рис. 4.18), и напротив, если $\xi > \xi_{opt}^{(1)}$, то он попадает внутрь этой трубки (см. кривую 3 на рис. 4.18). В обоих случаях точка вхождения графика переходного процесса в трубку точности $1 \pm \Delta$ смещается вправо, т. е. относительная длительность переходного процесса увеличивается

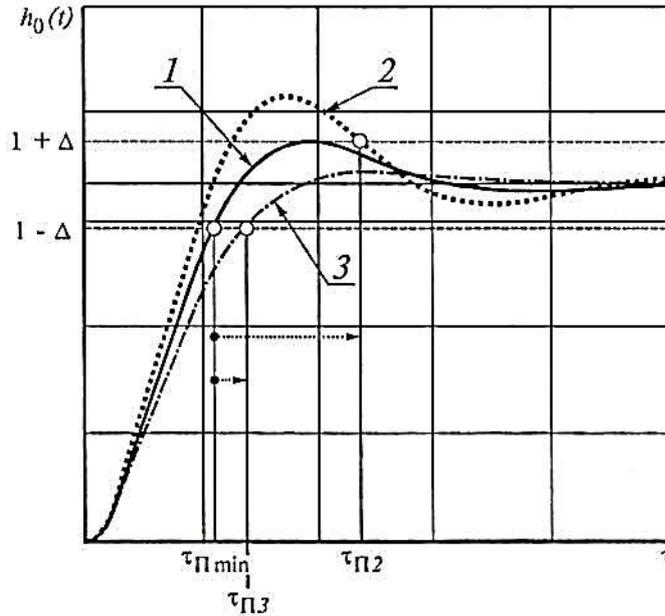


Рис. 4.18

В отличие от формулы (4.8) точной формулы для расчета относительной длительности переходного процесса в простом ИУ 2-го порядка $\tau_{\pi}(\xi, \Delta)$ не существует. Такой расчет можно выполнять в среде Mathcad, а также предлагаются приближенные аналитические формулы, вид которых зависит от значения относительного коэффициента демпфирования ξ :

1) если $0 < \xi \leq \xi_{opt}^{(1)}$, то

$$\tau_{\pi} = \tau_N + \frac{1}{2\xi} \left(1 - \sqrt{1 + 4\xi \Delta \exp(\xi \tau_N)} \right), \quad (4.24)$$

2) если $\xi_{opt}^{(1)} < \xi < 1$, то

$$\tau_{\pi} = \tau_{\pi \min} + \left\{ 1.205 \ln(2.524 / \Delta) - \tau_{\pi \min} \right\} \sqrt{\frac{(\xi - \xi_{opt}^{(1)})^3}{(1 - \xi_{opt}^{(1)})^3}}, \quad (4.25)$$

3) если $\xi = 1$, то $\tau_{\pi} = 1.205 \ln(2.524 / \Delta)$, (4.26)

4) если $\xi > 1$, то $\tau_{\pi} = \frac{1}{\xi - a} \ln \left(\frac{1}{2a\Delta} \sqrt{\frac{\xi + a}{\xi - a}} \right)$. (4.27)

В этих формулах используются следующие обозначения:

$$a = \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad \tau_N = \frac{1}{b} [\pi N - \arccos(\xi)], \quad b = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (4.28)$$

где N — порядковый номер первого экстремума относительной переходной функции (4.15), не выходящего за границы трубки точности $1 \pm \Delta$ (например, на рис. 4.18 для кривых 1, $3N = 1$ и для кривой $2N = 2$, а на рис. 4.19 — $N = 4$). Это целое число можно вычислить (зная лишь значения ξ и Δ) по формуле

$$N = E_+ \left[\frac{b}{\pi \xi} \ln(1/\Delta) \right], \quad (4.29)$$

Где $E_+ [\dots]$ — символ, означающий округление величины, стоящей в квадратных скобках формулы (4.29), в большую сторону до получения целого числа (например, $E_+[1.2] = 2$, $E_+[7/2] = 4$ и т. д.);

$\tau_{\text{п min}}$ — минимальное значение относительной длительности переходного процесса, которое можно вычислять по формуле (4.24), где в этом случае нужно принять $\xi = \xi_{\text{opt}}^{(1)}$ и $N = 1$.

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\xi = 0.2$ и $\Delta = 0.1$. На рис. 4.19 показан соответствующий график относительной переходной функции ИУ (4.15). На него наложена трубка точности $1 \pm \Delta$. По формуле (4.23) находим $\xi_{\text{opt}}^{(1)} = 0.92 > \xi = 0.2$, т. е. значение $\tau_{\text{п}}$ нужно вычислять по формулам (4.29) и (4.24). Вычисления по этим формулам дают соответственно $N = 4$ и $\tau_{\text{п}} = 10.586$. Точный (численный) расчет относительной длительности переходного процесса (как абсциссы точки вхождения графика относительной переходной функции в

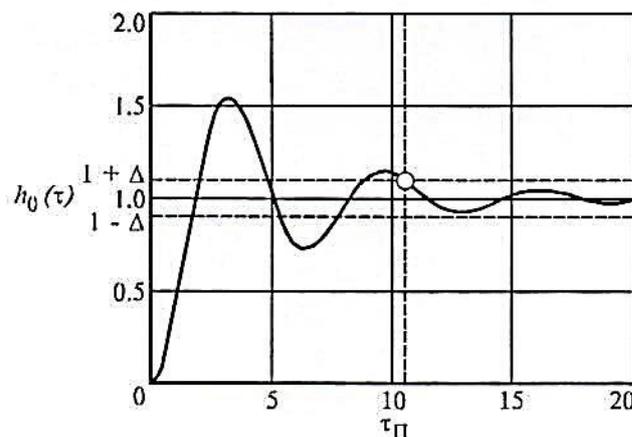


Рис. 4.19

трубку точности $1 \pm \Delta$) для рассматриваемого случая ($\xi = 0.2$, $\Delta = 0.1$) дает $\tau_{п} = 10.482$. На рис. 4.19 это значение длительности переходного процесса показано кружком, расположенным на графике переходного процесса в точке, соответствующей моменту вхождения этого графика в трубку точности. Приближенное значение длительности переходного процесса на этом рисунке показано вертикальной линией $\tau_{п}$. Видно, что эти линия и кружок практически совпадают друг с другом.

Погрешность формул (4.24)—(4.27) в диапазоне $0.3 < \xi < 1.2$ и при $\Delta \geq 3\%$ не превышает 5%. При меньших значениях Δ погрешность этих формул заметно возрастает, особенно в области $\xi_2 < \xi < \xi_1 < 1$, где

$$\xi_2 = \frac{\ln(1/\Delta)}{\sqrt{(2\pi)^2 + \ln^2(1/\Delta)}}, \quad \xi_1 = \xi_{opt}^{(1)} = \frac{\ln(1/\Delta)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(1/\Delta)}}.$$

Поэтому, если $\xi_2 < \xi < \xi_1$ и $\Delta < 3\%$, то вместо формул (4.24) и (4.25) рекомендуется пользоваться приближенной формулой

$$\tau_{п} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{\sigma^2 + 2\sigma - \Delta^{1,1}}{\sigma(1 + \sigma^{0,6})\sqrt{1 - \xi^8}}, \quad (4.30)$$

где σ — перерегулирование (4.33). В этом случае погрешность вычисления относительной длительности переходного процесса $\tau_{п}$ в области $\Delta < 3\%$ также не превышает 5%, что вполне допустимо для инженерных расчетов.

На практике часто приходится исследовать зависимость длительности переходного процесса от какого-либо параметра ИУ, подчиня выбор этого параметра условию минимальной (или заданной) длительности переходного процесса. Покажем пример такого исследования в среде Mathcad для простого ИУ 2-го порядка, у которого собственная частота равна единице ($\omega_0 = 1$ с⁻¹) а относительный коэффициент демпфирования $\xi > 0$ рассматривается как параметр, т. е. целью расчета является определение зависимости относительной длительности переходного процесса $\tau_{п}$ от значений этого параметра. Этот расчет выполняется с помощью описанной выше процедуры — функции (3.60).

ПРИМЕР 4.1

Полагая $\Delta = 5\%$, определить зависимость относительной длительности переходного процесса в простом ИУ 2-го порядка от относительного коэффициента демпфирования

Решение.

1. Задаем допустимое значение относительной переходной погрешности Δ и определяем относительную переходную функцию ИУ $h_0 = h_0(t)$

$$\Delta := .05 \quad h_0(t, \xi) := \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot p + 1} \text{ invlaplace, } p \rightarrow 1 + \frac{\exp(-\xi \cdot t)}{[(\xi - 1) \cdot (\xi \pm 1)]} \dots$$

2. Используя язык программирования Mathcad, задаем длительность переходного процесса в виде процедуры – функции $tp = tp(\xi)$
 $\tau_v := 10 \quad NT := 100$

$$tp(\xi) := \begin{cases} k \leftarrow 0 \\ \tau_0 \leftarrow \tau_v \\ \text{while } |1 - h_0(\tau_k, \xi)| \leq \Delta \\ \quad | k \leftarrow k + 1 \\ \quad | \tau_k \leftarrow \tau_v - \frac{\tau_v}{NT} \cdot k \end{cases}$$

3. Из графика зависимости длительности переходного процесса от относительного коэффициента демпфирования, показанного на рис. 4.20, видно наличие оптимального значения относительного коэффициента демпфирования $\xi = \xi_{opt}$, при котором относительная длительность переходного процесса минимальна.

Такое значение ξ для простого ИУ 2-го порядка можно вычислить по формуле

$$\xi_{opt} := \frac{\ln\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2}}, \quad \text{что дает } \xi_{opt} = 0.69 \quad t_{min} := tp(\xi_{opt}) \quad t_{min} = 2.86$$

На рис. 4.21 показан соответствующий переходный процесс. Специфической особенностью его формы является то, что он своим первым экстремумом (максимумом) касается верхней границы трубки точности. Благодаря этому относительная длительность переходного процесса минимальна.

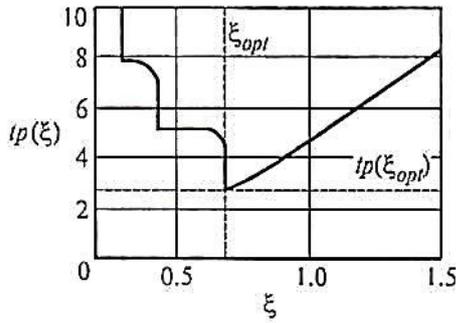


Рис. 4.20

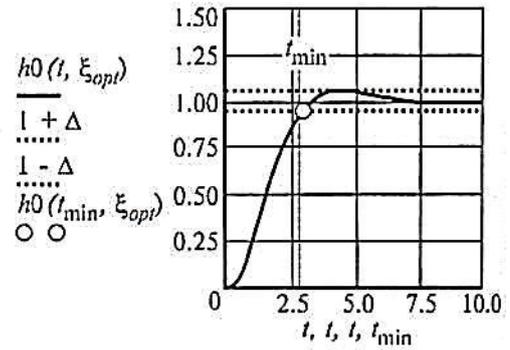


Рис. 4.21

На рис. 4.20 примера 4.1 показан график полученной зависимости.

Видно, что он имеет негладкий минимум в точке $\xi = \xi_{opt}^{(1)}$, слева от которой на графике имеются разрывы первого рода. Наличие этих разрывов объясняется специфической колебательной формой графика относительной переходной функции простого ИУ 2-го порядка при $\xi < 1$ и использованием понятия трубка точности при расчете длительности переходного процесса. Можно показать, что разрывы на графике рис. 4.20 имеют место при следующих значениях относительного ко-

$$\xi = \xi_k = \frac{\ln(1/\Delta)}{\sqrt{(\pi \cdot k)^2 + \ln^2(1/\Delta)}}, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots$$

эфициента демпфирования

В этих случаях график относительной переходной функции ИУ 2-го порядка своим k -м экстремумом касается границы $[1 - (-1)^k \Delta]$ трубки точности, как это показано на рис. 4.22 для первых трех значений ξ_k . Поэтому малейшее снижение относительного коэффициента демпфирования ξ приводит к выходу k -го экстремума относительной переходной функции за границы трубки точности $1 \pm \Delta$ и скачкообразному увеличению относительной длительности переходного процесса τ_n .

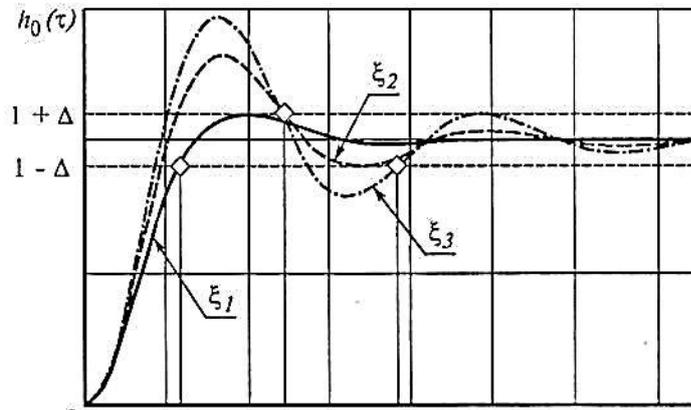


Рис. 4.22

4.2.7. Активная длительность переходного процесса

Активную длительность T_x переходного процесса в простом ИУ 2-го порядка можно определить по общей формуле (3.62). После вычисления интеграла в правой части этой формулы (он совпадает со значением ИКОП (3.65)) получим уравнение (см. также (3.72))

$$\int_0^{T_x} [1 - h_0(t)]^2 dt = k \cdot \frac{1 + 4\xi^2}{4\xi\omega_0}, \quad (4.32)$$

где $h_0(t) = L^{-1}\{W_0(p)/p\}$ — относительная переходная функция ИУ (4.15); k — постоянный коэффициент, определяющий долю полной энергии сигнала (3.61), приходящуюся на интервал времени T_x , равный активной длительности этого сигнала. Уравнение (4.32) приводится к виду

$$\begin{aligned} & (1 - k)b^2(1 + 4\xi^2) \\ &= e^{-2\xi\tau x} [1 - 3\xi^2 + 4\xi^2 - \xi b(1 - 4\xi^2) \sin(2b * \tau x) \\ & - 2\xi^2(4\xi^2 - 3)\cos^2(b * \tau x)] \end{aligned}$$

Где $b = \sqrt{1 - \xi^2}$, $\tau x = T_x * \omega_0$ — относительное значение активной длительности переходного процесса. На рис. 4.23 показаны результаты решения этого уравнения в виде графиков зависимости τx от относительного коэффициента демпфирования ξ для двух значений коэффициента k . Сравнивая любой из этих графиков с графиком, показанным на рис. 4.20 примера 4.1, видим, что сохраняя основные особенности прежнего графика, он становится гладким.

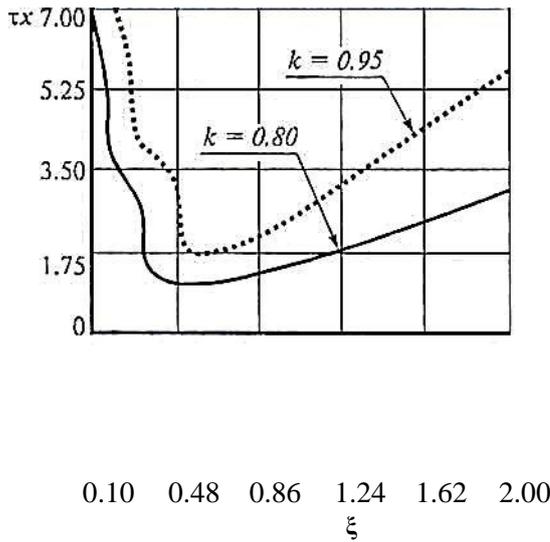


Рис. 4.23

4.2.8 Перерегулирование.

Перерегулирование σ характеризует максимальное пиковое отклонение графика относительной переходной функции от установившегося единичного уровня (см. рис. 4.25).

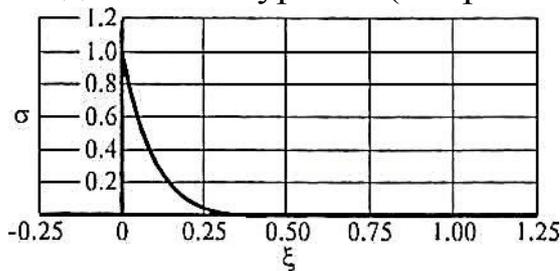


Рис. 4.24

Поэтому ИУ 2-го порядка перерегулирование зависит только от значения относительного коэффициента демпфирования ξ и вычисляется по формуле

$$\sigma = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right). \quad (4.33)$$

С ростом относительного коэффициента демпфирования ξ перерегулирование σ монотонно уменьшается вплоть до значения $\sigma = 0$ при $\xi = 1$ (рис. 4.24). Если $\xi > 1$, то равенство $\sigma = 0$ сохраняется, так как в этом случае переходный процесс становится монотонным, т. е. не имеющим перерегулирования (см. рис. 3.13).

Если $0 < \xi < 1$, то переходный процесс колебательный. На рис.

4.25 показаны характерные точки графика соответствующей относительной переходной функции ИУ (4.15). В качестве типовых показаны точки экстремумов (кружки), точки пересечения графика с установившимся единичным уровнем (ромбики) и две точки на переднем фронте переходного процесса, которые обозначены крестами. Координаты всех этих точек можно вычислить (зная только значение ξ) по формулам:

абсциссы точек экстремумов $\tau_k = \frac{\pi}{b}k$, где $b = \sqrt{1 - \xi^2}$, $k=1,2,\dots$;

ординаты точек экстремумов $h_0(\tau_k) = 1 + (-1)^{k+1}\sigma^k$;

абсциссы точек пересечения с единичным уровнем $\tau_k^* = \frac{1}{b} * [\pi k - \arccos(\xi)]$;

абсцисса первой точки на переднем фронте переходного процесса $\tau_4 = \tau_1/2$;

ордината первой точки $h_4 = h_0(\tau_4) = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{b}\right) \sqrt[4]{\sigma/4}$;

абсцисса второй точки на переднем фронте переходного процесса $\tau_2 = \tau_1/2$;

ордината второй точки $h_2 = h_0(\tau_2) = 1 - \frac{\xi}{b} \sqrt{\sigma}$; (4.34)

поочередные пиковые отклонения графика переходной функции от единичного уровня

$$\alpha_k = \sigma^k. \quad (4.35)$$

Из последней формулы следует, что пиковые отклонения переходной функции от единичного уровня α_k кратны величине перерегулирования σ . Поэтому формулы (4.31), (4.33) и (4.23) можно получить из условий $a_k = \Delta$.

С помощью приведенных формул упрощается построение графика колебательного переходного процесса в простом ИУ 2-го порядка, если он строится вручную. В этом случае рекомендуется следующая последовательность действий:

1) вычисляется абсцисса точки первого экстремума (максимума) относительной переходной функции $\tau_1 = \pi/b$. Абсциссы точек последующих экстремумов τ_k кратны этому «расстоянию» и поэтому могут быть легко отмечены циркулем, сохраняющим заранее вычис-

ленное значение τ_1 ;

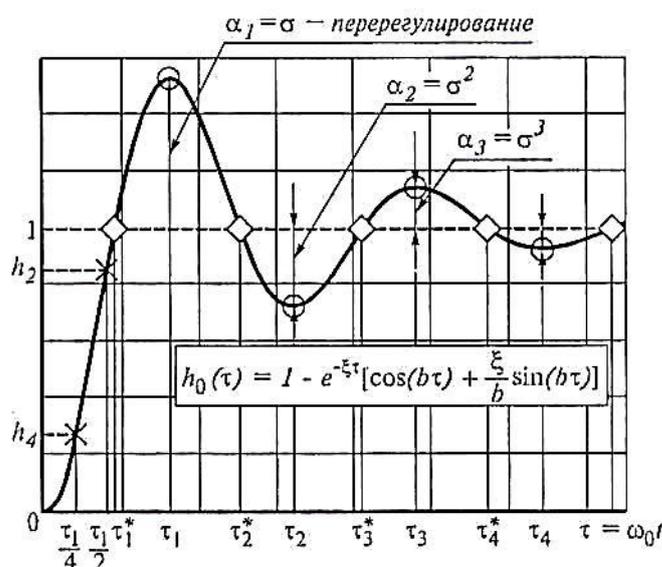


Рис. 4.25

2) вычисляется абсцисса точки первого пересечения графика с единичным уровнем $\tau_1^* = \frac{1}{b} [\pi - \arccos(\xi)]$ и ранее установленным раствором циркулят τ_1 отмечаются точки последующих таких пересечений графика с единичным уровнем τ_k^* , где $k = 2, 3, 4, \dots$;

3) вычисляется перерегулирование σ и несколько последующих пиковых отклонений графика от единичного уровня σ^k , где $k = 2, 3, 4, \dots$, которые откладываются по вертикали другим циркулем в ранее найденных точках τ_k ;

4) «расстояние» τ_1 (сохраненное на первом циркуле) делится пополам, и после вычисления ординаты h_2 (см. (4.34)) получают верхнюю из двух точек, помеченных на рис. 4.25 крестом;

5) «расстояние» $\tau_1/2$ (сохраненное на первом циркуле) делится пополам, и после вычисления ординаты h_4 (см. (4.34)) получают нижнюю из двух точек, помеченных на рис. 4.25 крестом;

6) все полученные точки соединяют плавной кривой (см. рис. 4.25).

С появлением вычислительной техники (Mathcad, Matlab и пр.) приведенные правила построения графика переходной функции простого ИУ 2-го порядка теряют свою актуальность. Однако остаются неизменными закономерности переходного процесса в таком ИУ.

Одна из них заключается в том, что системы точек τ_k и τ_k^* , где $k = 1, 2, 3, \dots$, подобно зубьям двух одинаковых расчесок, сдвинуты по оси времени друг относительно друга на величину $\frac{1}{b} [\pi - \arccos(\xi)]$, зависящую только от значения относительного коэффициента демпфирования ξ .

4.2.9. Ширина полосы пропускания частот

Ширина полосы пропускания частот (ППЧ) в простом ИУ 2-го порядка пропорциональна собственной частоте ИУ ω_0 , т. е. обратно пропорциональна его постоянной времени T_2

$$\omega_{\Pi} = \omega_0 \gamma_{\Pi}(\xi, \varepsilon) = \frac{\gamma_{\Pi}(\xi, \varepsilon)}{T_2}, \quad (4.36)$$

где $\gamma_{\Pi} = \gamma_{\Pi}(\xi, \varepsilon)$ — безразмерная относительная ширина ППЧ, зависящая только от двух величин (ξ и ε). Из формулы (4.36) следует, что относительная ширина ППЧ $\gamma_{\Pi} = \omega_{\Pi} / \omega_0$ (для заданных значений ε и ξ) совпадает с шириной полосы пропускания частот простого ИУ 2-го порядка, у которого собственная частота равна единице, т. е. $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$.

Точное значение γ_{Π} можно вычислить по формулам, вид которых зависит от значения относительного коэффициента демпфирования ξ

$$\gamma_{\Pi} = \begin{cases} \sqrt{(1-2\xi^2) - \sqrt{(1-2\xi^2)^2 - \varepsilon \frac{2+\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}}}, & \text{если } 0 < \xi < \xi_{opt}^{(2)}, \\ (1-2\xi^2) + \sqrt{(1-2\xi^2)^2 + \varepsilon \frac{2-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}}, & \text{если } \xi \geq \xi_{opt}^{(2)}, \end{cases} \quad (4.37)$$

где $\xi_{opt}^{(2)}$ — оптимальное значение относительного коэффициента демпфирования, при котором относительная ширина ППЧ максимальна. Его значение можно вычислить из условия $A_p = 1 + \varepsilon$, где A_p — максимальное значение относительной амплитуды выходного сигнала (3.122), что дает

$$\xi_{opt}^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}} \right]}. \quad (4.39)$$

Соответствующее максимальное значение относительной ширины ППЧ можно вычислить по формуле

$$\gamma_{\Pi \max} = \sqrt{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\epsilon)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(1-\epsilon)^2} - \frac{1}{(1+\epsilon)^2}}} \quad (4.40)$$

На рис. 4.26 показан типичный график зависимости относительной ширины ППЧ простого ИУ 2-го порядка от величины относительного коэффициента

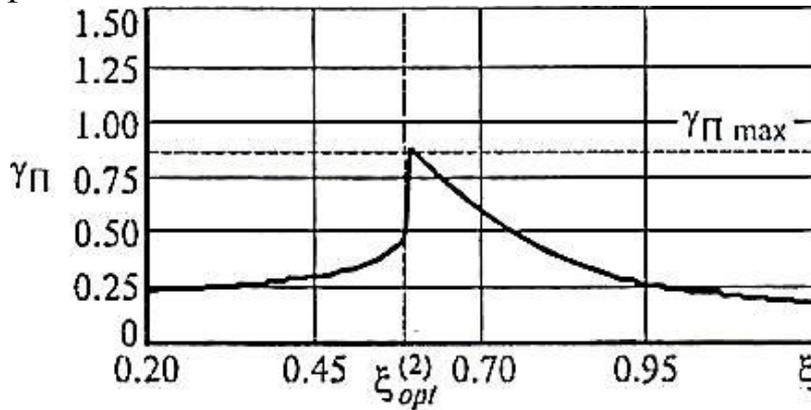


Рис. 4.26

демпфирования ξ . Видно, что этот график состоит из двух ветвей (соответствующих формулам (4.37) и (4.38)) и имеет характерный разрыв в точке $\xi = \xi_{opt}^{(2)}$, справа от которой $\gamma_{\Pi} = \gamma_{\Pi \max}$.

На рис. 4.27 показан соответствующей график оптимальной АЧХ (кривая 1), т. е. график амплитудно-частотной характеристики такого ИУ, у которого $\hat{A} =$

Отличительной особенностью этого графика является то, что в точке экстремума (максимума (4.19)) он касается верхней границы трубки точности $1 + \epsilon$. В результате относительная ширина полосы пропускания частот ИУ γ_{Π} принимает максимально возможное (для заданного ϵ) значение $\gamma_{\Pi} = \gamma_{\Pi \max}$. Если $\xi = \xi_{opt}^{(2)}$, то экстремум АЧХ выходит за границу $1 + \epsilon$ трубки точности (см. кривую 2 на рис. 4.27), так как в этом случае $A_p > 1 + \epsilon$ (см. (4.20)) и, напротив, если $\xi = \xi_{opt}^{(2)}$, то $A_p < 1 + \epsilon$ (см. кривую 3 на рис. 4.27). В обоих случаях точка первого выхода графика АЧХ за границы трубки точности смещается влево, т. е. относительная ширина ППЧ уменьшается.

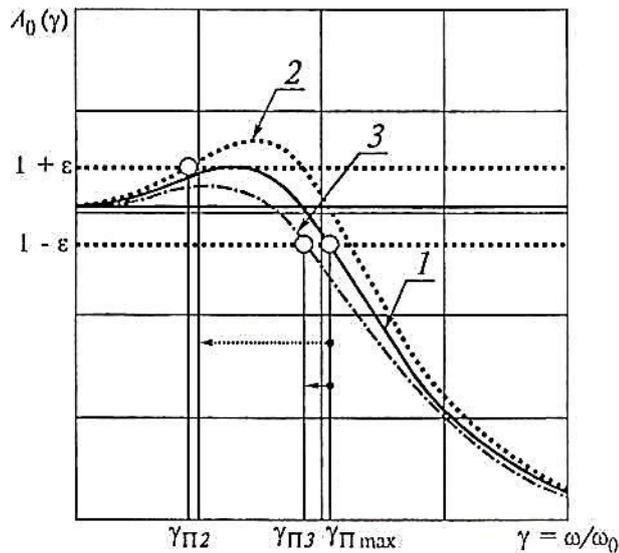


Рис. 4.27

В примере 4.2 средствами Mathcad проводится исследование зависимости ширины ППЧ для простого ИУ 2-го порядка от значения относительного коэффициента демпфирования ξ .

Глава 5

СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА ПО КРИТЕРИЯМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ

В целом задачи синтеза параметров ИУ обратны рассмотренным ранее задачам анализа динамических характеристик ИУ с известными параметрами. Действительно, если прежде (при анализе) нужно было определить те или иные показатели динамической точности ИУ с известными параметрами (например, длительность переходного процесса в ИУ с известной передаточной функцией), то теперь (при синтезе), напротив, необходимо найти такие значения этих параметров, при которых ИУ имеет желаемые динамические характеристики (например, желаемое значение длительности переходного процесса). Отсюда следует, что решение задачи синтеза можно получить методом перебора. Для этого нужно, варьируя (в некоторой области) значениями параметров СММ ИУ и вычисляя соответствующие показатели динамической точности ИУ, попытаться подобрать такое сочетание этих параметров, при котором результаты расчета окажутся удовлетворительными. Понятно, что такой способ расчета, хотя и возможен, но требует большого объема вычислений (особенно при боль-

шом числе варьируемых параметров СММ ИУ) и может быть эффективным только при использовании ПЭВМ. В этом случае выбор сочетания параметров СММ ИУ, подлежащего дальнейшему анализу, может быть практически произвольным, так как получаемые результаты расчета легко исключают нежелательные (или неверные) комбинации параметров. Вместе с тем желательно иметь хотя бы примерное представление обобласти допустимых значений этих параметров, так как подобные сведения могут существенно сократить время исследования. Эти сведения могут вытекать из условий устойчивости ИУ и ряда других (например, технических) ограничений. Следует также иметь в виду, что численные алгоритмы анализа, в отличие от алгоритмов синтеза, практически не подвержены опасности отсутствия сходимости результатов вычислений. Поэтому, несмотря на кажущуюся сложность подобного перебора, он широко применяется на практике.

Особую ценность представляет оптимальное решение, т. е. такое решение, при котором достигается экстремум (максимум или минимум) того или иного показателя динамической точности ИУ. Поиск такого (оптимального) решения называется параметрической оптимизацией. При анализе оптимального решения важно (помимо самого решения) знать «остроту» экстремума с тем, чтобы иметь возможность сопоставить достигнутый «выигрыш» с соответствующими «затратами». Поэтому при поиске оптимальных значений параметров ИУ нужно уметь определять не только номинальные значения этих параметров, но и их допустимые отклонения от номинальных значений, подобно тому, как это было показано в п. 2.6.3 при определении оптимальных значений параметров расчетной статической характеристики ИУ. При наличии нескольких экстремумов важно найти глобальный экстремум, что может потребовать применения специальных процедур поиска.

5.1. Синтез параметров ИУ 1-го порядка

Единственным параметром относительной передаточной функции простого ИУ 1-го порядка (4.4) является его постоянная времени T_1 .

Если на длительность переходного процесса t_{Π} в таком ИУ наложено требование

$$t_{\Pi} \leq t_{\text{плд}} \quad (5.1)$$

где $t_{\text{пд}}$ — допустимое значение длительности переходного процесса, то согласно (4.8) это требование будет выполнено, если выбор постоянной времени T_1 подчинить следующему условию

$$0 < T_1 \leq \frac{t_{\text{пд}}}{\ln(1/\Delta)}, \quad (5.2)$$

где Δ — допустимое значение относительной переходной погрешности.

Если ИУ используется для измерения изменяющейся во времени величины, то к его динамическим характеристикам может предъявляться другое требование

$$\omega_{\text{п}} \geq \omega_{\text{пд}}, \quad (5.3)$$

где $\omega_{\text{пд}}$ — минимально допустимое значение ширины полосы пропускания частот ИУ.

В этом случае выбор постоянной времени ИУ следует подчинить другому неравенству

$$0 < T_1 \leq \frac{1}{\omega_{\text{пд}}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{1-\varepsilon}, \quad (5.4)$$

где ε — допустимое значение относительной частотной погрешности ИУ.

Если известна допустимая приведенная погрешность результата измерений Δ , то в формулах (5.2) и (5.4) нужно принять

$$\Delta = \varepsilon = \alpha \cdot \gamma_{\text{д}}, \quad (5.5)$$

где α — постоянный коэффициент, отражающий вклад динамической погрешности в суммарную погрешность результата измерений (обычно $\alpha = 0.1 \dots 0.5$).

Формулами (5.2) и (5.4) по существу ограничивается решение типовых задач синтеза параметров простого ИУ 1-го порядка по критериям динамической точности.

5.2. Синтез параметров ИУ 2-го порядка

Относительная передаточная функция простого ИУ 2-го порядка (4.14) содержит два независимых параметра, влияющих на динамические характеристики такого устройства — собственную частоту ИУ

ω_0 и относительный коэффициент демпфирования ξ . Поэтому решение задач синтеза сводится к определению значений именно этих параметров передаточной функции, исходя из требований, наложенных на показатели динамической точности ИУ.

Из (4.14) следует, что неограниченно увеличивая собственную частоту ИУ ω_0 , можно, независимо от значения относительного коэффициента демпфирования ξ получать сколько угодно малые динамические искажения входного сигнала, так как с ростом собственной частоты $W_0(p) \rightarrow 1$. Однако на практике требование высокой собственной частоты ИУ может входить в противоречие с требуемой чувствительностью устройства. Например, увеличение собственной частоты акселерометра, рассмотренного в разд. 3.2, приводит к снижению перемещения инерционной массы и соответственно к увеличению коэффициента усиления усилителя. Кроме того, требования к динамическим характеристикам ИУ не всегда предусматривают полное отсутствие таких искажений. Например, при фильтрации помех бывает необходимо сократить ширину полосы пропускания частот ИУ $\omega_{\text{П}}$. Поэтому под ω_0 понимается такое значение собственной частоты ИУ, при котором все требования, предъявляемые к динамическим характеристикам ИУ, выполняются. Расчет желаемых значений ω_0 и ξ зависит от состава и характера тех требований, которые предъявляются к динамическим характеристикам ИУ. Учитывая их многообразие, далее рассматриваются лишь типовые варианты таких требований и обсуждаются алгоритмы решения соответствующих (типовых) задач синтеза.

Считается, что во всех случаях значения допустимых относительных переходной и частотной динамических погрешностей Δ и ε известны.

ВАРИАНТ 1

Определить ω_0 и ξ так, чтобы ИУ имело минимальную длительность переходного процесса и заданную ширину полосы пропускания частот $\omega_{\text{ПЗ}}$.

На рис.5.1 показана схема решения задачи. Здесь на каждом этапе расчета используются алгоритмы и расчетные формулы, рассмотренные в разд. 4.2.

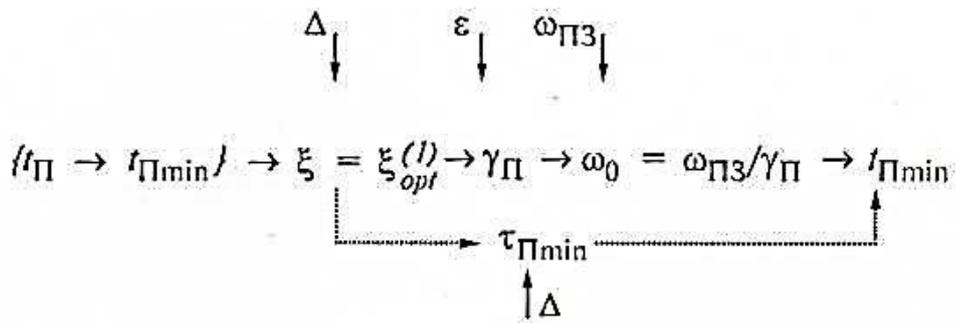


Рис. 5.1

Порядок расчетов следующий:

по формуле (4.23) вычисляется оптимальное значение относительного коэффициента демпфирования ξ , обеспечивающее минимальное значение относительной длительности переходного процесса $t_{П\min}$;

по формулам (4.37) или (4.38) вычисляется относительная ширина полосы пропускания частот $\gamma_{П}$;

по формуле $\omega_0 = \omega_{ПЗ} / \gamma_{П}$ вычисляется собственная частота ИУ ω_0 , обеспечивающая заданное значение ширины ППЧ $\omega_{ПЗ}$.

при необходимости вычисляется достигнутое минимальное значение длительности переходного процесса по формуле $t_{П\min} = \tau_{П\min} / \omega_0$, где $\tau_{П\min}$ — минимальная относительная длительность переходного процесса, которая (в случае ручного расчета) вычисляется по формуле (4.24), где нужно использовать $N=1$. Расчет значения $\tau_{П\min}$ лучше и проще проводить в среде Mathcad.

Требование минимальной длительности переходного процесса в данном случае равносильно требованию получения специфической оптимальной формы графика переходного процесса, показанной на рис.4.18 (кривая 1), или, что то же самое, требованию $\sigma = \Delta$, где σ — перерегулирование. Увеличивая ширину ППЧ $\omega_{ПЗ}$, можно снижать $t_{П\min}$.

Правильность расчетов подтверждается выполнением всех требований, предъявляемых к динамическим характеристикам синтезированного ИУ, т.е. при правильном решении задачи форма графика переходного процесса ИУ должна быть такой, как показано на рис.4.18 (кривая 1), а ширина ППЧ, определенная, например из графика относительной АЧХ ИУ, должна совпадать с заданной шириной ППЧ $\omega_{ПЗ}$.

Если важно получить желаемое минимальное значение длительности переходного процесса $t_{пз}$, то необходимое значение собственной частоты ИУ ω_0 нужно вычислить по формуле

$$\omega_0 = \frac{\tau_{п\ min}}{t_{п\ min}} \quad (5.6)$$

В этом случае требование, наложенное на ширину ППЧ, может не выполняться.

ВАРИАНТ 2

Определить ω_0 и ξ так, чтобы ИУ имело максимальную ширину полосы пропускания частот и заданную длительность переходного процесса $t_{пз}$.

Схема решения такой задачи показана на рис. 5.2.

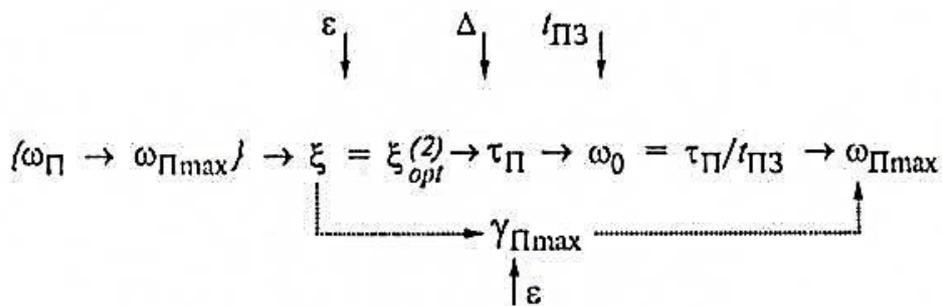


Рис. 5.2

Порядок расчетов следующий:

по формуле (4.39) вычисляется оптимальное значение относительного коэффициента демпфирования ξ , обеспечивающее максимальное значение относительной ширины полосы пропускания частот $\gamma_{пmax}$:

по формулам (4.24) — (4.27) определяется относительная длительность переходного процесса $\tau_{п} = \tau_{п}(\xi, \Delta)$;

по формуле $\omega_0 = \tau_{п} / t_{пз}$ вычисляется собственная частота ИУ ω_0 , обеспечивающая заданное значение длительности переходного процесса $t_{пз}$

при необходимости вычисляется достигнутое максимальное значение ширины ППЧ по формуле $\omega_{пmax} = \gamma_{пmax} \omega_0$, где $\gamma_{пmax}$ — максимальная ширина ППЧ, которая (в случае ручного расчета) вычисляется по формуле (4.40).

Требование максимальной ширины ППЧ в данном случае равносильно требованию получения специфической оптимальной формы графика относительной амплитудно-частотной характеристики ИУ, показанной на рис. 4.27, или, что то же самое, требованию $A_p = 1 + \varepsilon$, где A_p — максимальное относительное значение амплитуды установившегося выходного сигнала (см.(4.20)). Уменьшая $t_{пз}$ можно увеличивать $\omega_{пmax}$

При правильном решении задачи форма графика относительной АЧХ ИУ должна быть такой, как показано на рис. 4.27 (кривая 1), а длительность переходного процесса, определенная из графика относительной переходной функции ИУ, должна совпадать с заданной длительностью переходного процесса $t_{пз}$.

Если важно получить желаемое максимальное значение ширины ППЧ $\omega_{пmax}$, то необходимое значение собственной частоты ИУ ω_0 нужно вычислить по формуле

$$\omega_0 = \frac{\omega_{п max}}{\gamma_{п max}} \quad (5.7)$$

В этом случае требование, наложенное на длительность переходного процесса, может не выполняться.

ВАРИАНТ 3

Определить ω_0 и ξ так, чтобы ИУ имело заданную ширину полосы пропускания частот $\omega_{пз}$ и заданную длительность переходного процесса $t_{пз}$.

Задача решается в три этапа:

по схеме, изображенной на рис.5.1, определяется минимальная длительность переходного процесса $t_{п min}$, соответствующая заданному значению ширины ППЧ $\omega_{пз}$;

по схеме, изображенной на рис.5.2, определяется максимальная ширина ППЧ $\omega_{пmax}$, соответствующая заданной длительности переходного процесса $t_{пз}$;

если $t_{пз} < t_{п\ min}$ или $\omega_{пз} > \omega_{п\ max}$, то задача не имеет решения и делается вывод о необходимости коррекции исходных данных (Δ , ε , $t_{пз}$, $\omega_{пз}$). В противном случае расчет ω_0 и ξ выполняется с помощью расчетной схемы, показанной на рис. 5.3

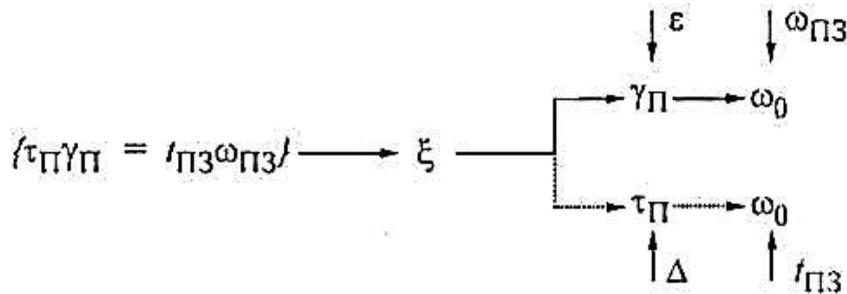


Рис. 5.3

В основе расчета используется тождество

$$\tau_{п} \gamma_{п} \equiv t_{пз} \omega_{пз} \quad (5.8)$$

вытекающее из формул (4.22) и (4.36). Из этих формул видно также, что произведение относительных величин $\tau_{п}\gamma_{п}$ зависит лишь от трех аргументов Δ , ε и ξ , так как $\tau_{п} = \tau_{п}(\xi, \Delta)$ и $\gamma_{п} = \gamma_{п}(\xi, \varepsilon)$. Поэтому при известных значениях Δ и ε тождество (5.8) можно рассматривать как уравнение относительно искомого значения относительного коэффициента демпфирования ξ . Согласно рис. 5.3 решением задачи являются только такие значения ξ и ω_0 , которые, во-первых, удовлетворяют уравнению (5.8) и, во-вторых, обеспечивают заданные значения длительности переходного процесса $t_{пз}$ и ширины ППЧ ИУ $\omega_{пз}$. Такая задача может иметь несколько решений. Это означает, что в исходную постановку задачи можно включить дополнительные требования, например требование минимума собственной частоты ИУ ω_0 .

На рис. 5.4 показано построенное в среде Mathcad семейство графиков, иллюстрирующих зависимость произведения $\tau_{п}(\xi, \Delta) \cdot \gamma_{п}(\xi, \varepsilon)$ от относительного коэффициента демпфирования ξ , для ряда допустимых значений относительной динамической погрешности ИУ $\Delta = \varepsilon = \delta = 0.1\%, 0.5\%, 1.0\%, 5\%$. Видно, что в области $0.2 \leq \xi \leq 1.2$, $0.1\% \leq \delta \leq 5\%$ в простом ИУ 2-го порядка выполняется неравенство

$$0.25 \leq t_{п} \omega_{п} \leq 5. \quad (5.9)$$

Это, однако, не означает, что в таком ИУ нельзя реализовать параметры ξ и ω_0 , при которых произведение $t_{п}\omega_{п}$ выходит за указанные

рамки. Просто соответствующее значение относительного коэффициента демпфирования окажется «слишком маленьким» ($\xi < 0.2$) или, наоборот, «слишком большим» ($\xi > 1.2$).

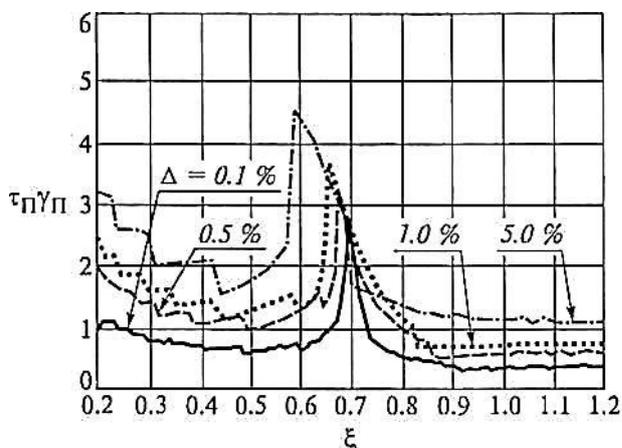


Рис. 5.4

Учитывая этот результат, можно не выполнять первые два этапа решения рассматриваемой задачи, так как, зная в отдельности значения t_p и ω_p , несложно вычислить их произведение $t_p \omega_p$. После этого можно с помощью рис. 5.4 графическим способом определить приближенное значение относительного коэффициента демпфирования обеспечивающее нужное значение произведения $t_p \omega_p$ (или несколько таких значений). Для этого нужно отложить по оси ординат значение произведения $t_p \omega_p$, выбрав значение Δ , определить абсциссы всех точек пересечения прямой $\tau_p \gamma_p = t_p \omega_p$ с графиками на рис. 5.4. Выбрав одну из таких точек, получим значение относительного коэффициента демпфирования ξ , удовлетворяющее уравнению (5.8). Последующие этапы решения задачи выполняются обычным путем. При этом можно, зная ξ и Δ , сначала вычислить τ_p , а затем ω_0 , или по-другому — зная ξ и ϵ , вычислить γ_p и только затем ω_0 . В обоих случаях результаты расчета должны быть одинаковыми, однако вторая из указанных возможностей реализуется проще (если расчет выполняется вручную), так как для простого ИУ 2-го порядка известны точные формулы (4.37) и (4.38), определяющие значение γ_p .

ВАРИАНТ 4

Определить ω_0 и ξ так, чтобы выполнялись требования, наложенные на перерегулирование σ , длительность переходного процесса t_p и ширину полосы пропускания частот ω_p в форме неравенств

$$\sigma \leq \sigma_3, \quad (5.10)$$

$$t_{\Pi} \leq t_{\Pi 3}, \quad (5.11)$$

$$\omega_{\Pi} \geq \omega_{\Pi 3},$$

Где $\sigma_3, t_{\Pi 3}, \omega_{\Pi 3}$ — заданные граничные значения соответствующих показателей динамической точности ИУ.

На рис. 5.5 показана схема решения задачи.

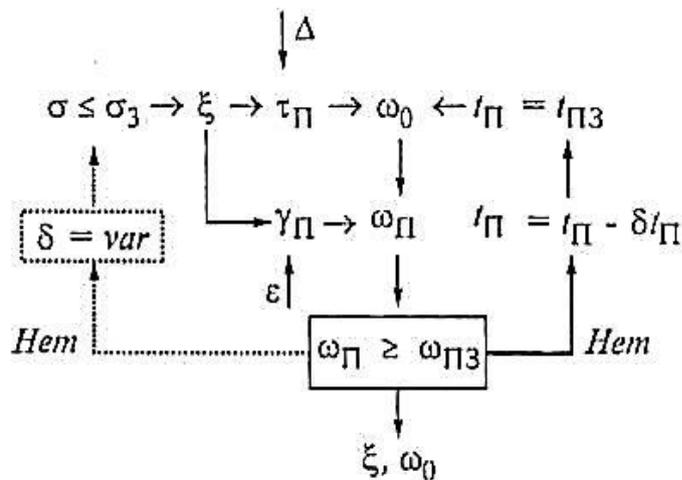


Рис. 5.5

Последовательность расчетов такова:

1) учитывая условие (5.10), задаются величиной перерегулирования $\sigma \leq \sigma_3$ и вычисляют соответствующее значение относительного коэффициента демпфирования ξ , по формуле

$$\xi = \frac{\ln(1/\sigma)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(1/\sigma)}} \quad (5.13)$$

вытекающей из формулы (4.33);

1) вычисляют относительную длительность переходного процесса τ_{Π} и относительную ширину ППЧ γ_{Π} , соответствующие найденному значению ξ , и заданным значениям Δ и ε .

3) задаются максимально возможным значением длительности переходного процесса $t_{\Pi} = t_{\Pi 3}$ и вычисляют соответствующее (минимально возможное) значение собственной частоты ИУ ω_0 по формуле

$$\omega_0 = \tau_{\Pi} / t_{\Pi}; \quad (5.14)$$

4) вычисляют ширину полосы пропускания частот по формуле

$$\omega_{\Pi} = \gamma_{\Pi} \omega_0 \quad (5.15)$$

и проверяют выполнение условия (5.12). Если это условие выполняется, то найденные значения ξ и ω_0 считаются решением задачи, так как в этом случае выполняются все условия, предъявляемые к динамическим характеристикам синтезируемого ИУ. В противном случае снижают длительность переходного процесса, полагая $t_{\Pi} = t_{\Pi} - \delta t_{\Pi}$ и повторяют расчет.

ВАРИАНТ 5

Определить ω_0 и ξ так, чтобы фактический переходный процесс отличался от желаемого монотонного переходного процесса

$$h_{0g}(t) = [1 - \exp(-t/T_g)] \quad (5.16)$$

не более чем на величину допустимой относительной переходной погрешности Δ .

В соответствии с постановкой задачи критерием динамической точности ИУ может служить условие минимума центрированной среднеквадратической интегральной оценки переходного процесса (т.е. условия $I = I_{\min}$, $M_{\Pi} = 0$) или условие минимума обобщенной квадратичной оценки переходного процесса (т.е. условие $I_{ob} = I_{ob\min}$). В первом случае, согласно (4.47), значения ω_0 и ξ должны быть связаны друг с другом соотношением

$$\omega_0 T_g = 2\xi, \quad (5.17)$$

Соответствующее значение СИКОП (4.42) приводится к виду

$$I = T_g \frac{1}{8\xi^2 (1 + 8\xi^2)}, \quad (5.18)$$

т. е.

чем больше значения ξ и $\omega_0 = 2\xi/T_g$, тем меньше значение интеграла (3.73) и тем ближе друг к другу располагаются графики фактического и желаемого переходных процессов. Для случая $T_g = 1$ с покажем значения максимальной погрешности приближения

$$\delta_{\max} = \max |h_0(t) - h_{0g}(t)|,$$

соответствующие ряду значений относительного коэффициента демпфирования ξ ,

ξ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	2.0	3.0	4.0
δ_{\max}	0.800	0.483	0.315	0.219	0.161	0.122	0.096	0.048	0.024	0.0014

Видно, что, начиная с определенного значения относительного коэффициента демпфирования выполняется условие $\delta_{\max} < \Delta$. Например, если $\Delta = 0.1$, то это происходит, начиная с $\xi = 1.3$. Соответствующее значение произведения $\omega_0 T_g$ вычисляем по формуле (5.17), что дает $\omega_0 T_g = 2.6$. Таким образом, если $T_g = 1$ с, то решением задачи являются $\omega_0 = 2.6 \text{ с}^{-1}$ и $\xi = 1.3$. На рис. 5.6 показаны соответствующие графики фактического и желаемого переходных процессов, а на рис. 5.7 — разность между ними. Видно, что она, действительно, не превосходит допустимого значения относительной переходной погрешности Δ .

При решении данной задачи можно в качестве критерия оптимальности выбрать условие минимума обобщенной квадратичной оценки переходного процесса (3.84), т. е. условие

$$I_{ob} = I_{ob \min} \quad (5.19)$$

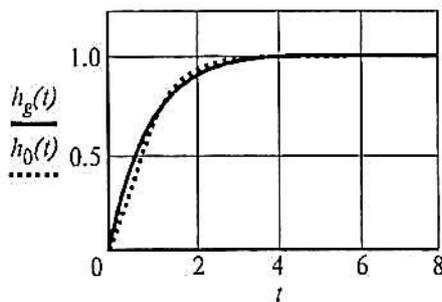


Рис. 5.6

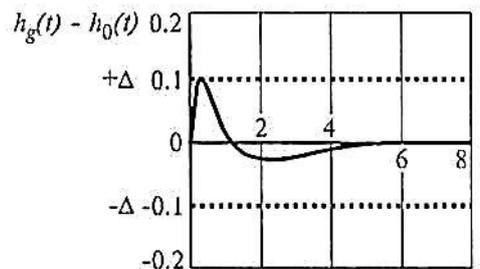


Рис. 5.7

В этом случае вместо (5.16) следует записать

$$h_{0e}(t) = [1 - \exp(-t/\tau_e)],$$

где $\tau_e = T_g$ — постоянная времени экстремального переходного процесса. В соответствии с (4.49) значения ω_0 , τ_e и ξ в этом случае должны быть связаны друг с другом соотношением

$$\omega_0 \tau_e = \sqrt{4\xi^2 - 1}, \quad \text{где } \xi \geq 0.5. \quad (5.21)$$

Используя это соотношение, можно получить ряд значений δ_{\max} для заданных значений ξ

ξ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.4	2.0	3.0
δ_{\max}	-	-	1.000	0.342	0.215	0.151	0.113	0.099	0.053	0.025

Если $\Delta = 0.1$, то можно принять $\xi = 1.4$ и, соответственно (см.(5.21)) $\omega_0 \tau_e = 2.165$. Поэтому, если $\tau_e = 1$ с, то решением задачи являются $\omega_0 = 2.165 \text{ с}^{-1}$ и $\xi = 1.4$. На рис. 5.8 показаны графики фактического и экстремального переходных процессов, соответствующие найденным значениям ω_0 и ξ , а на рис. 5.9 — разность между этими графиками. Видно, что использование критериев $I = I_{\min}$ и $I_{\text{об}} = I_{\text{обmin}}$ при решении данной задачи привело к близким конечным результатам. Отличие состоит в том, что в первом случае погрешность приближения $p_p(t) = h_g(t) - h_0(t)$ — знакопеременная функция времени, во втором — знакпостоянная.

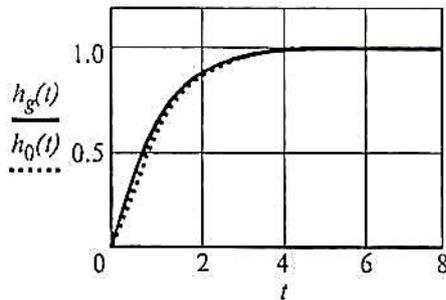


Рис. 5.8

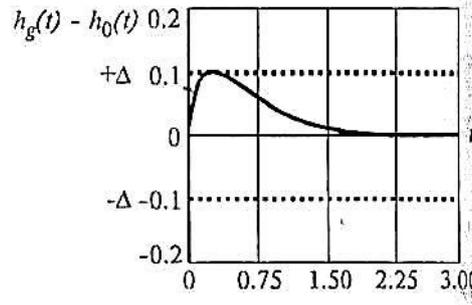


Рис. 5.9

5.3. Синтез параметров ИУ 3-го порядка.

Алгоритмы синтеза параметров передаточной функции простого ИУ 3-го порядка a_1 , a_2 и ω_0 (или T_1 , T_2 и ξ) практически ничем не отличаются от рассмотренных алгоритмов синтеза параметров ξ и ω_0 передаточной функции простого ИУ 2-го порядка. Единственное отличие заключается в том, что вместо одного безразмерного параметра — относительного коэффициента демпфирования ξ , влияющего на форму переходного процесса и форму АЧХ в ИУ 2-го порядка, приходится определять два таких параметра: параметры Вышнеградского a_1 , a_2 или относительную постоянную времени $Q = T_1/T_2$ и относительный коэффициент демпфирования ξ . Поэтому главное внимание будем уделять не описанию алгоритмов синтеза параметров рассмат-

риваемых ИУ, а примерам их практической реализации в среде Mathcad.

Глава 6.

Точность измерительных устройств.

При разработке ИУ важно понимать, от чего зависят погрешности измерений и как их можно снизить до необходимого уровня. Для этого нужна универсальная методика расчета и анализа погрешностей, позволяющая на стадии проектирования ИУ оперативно оценивать различные погрешности и выявлять наиболее существенные из них.

6.1. Виды погрешностей ИУ

Погрешности измерений весьма разнообразны. Их различают и классифицируют по многим признакам:

по причинам появления: инструментальные, методические, субъективные;

по условиям проявления: основные, дополнительные;

по характеру проявления при повторных измерениях: систематические, случайные;

по способу представления: абсолютные, относительные, приведенные;

по характеру зависимости от измеряемой величины: аддитивные, мультипликативные;

по характеру зависимости измеряемой величины от времени: статические, динамические.

В данном разделе приведены только основные виды погрешностей, так как их полная классификация весьма обширна [1, 9, 11, 15, 27, 29, 51, 54, 56]. Перечисленные виды погрешностей «перекрывают» друг друга. Например, инструментальные погрешности могут быть систематическими и случайными, статическими и динамическими, аддитивными, мультипликативными и т. д. Дадим краткие пояснения этим терминам.

Инструментальными называются погрешности, которые возникают из-за несовершенства применяемого измерительного устройства (инструмента), в том числе из-за отклонений его параметров, вызванных изменением температуры, давления и влажности воздуха, напря-

жения питания и пр. В [9] различают производственно-технологические, материально-структурные, температурные и другие виды инструментальных погрешностей измерительных приборов.

Методические погрешности возникают из-за несовершенства принятого метода измерения. Обычно эти погрешности возникают при реализации косвенных методов измерений, когда непосредственно измеряют не ту физическую величину, которая нужна, а ту, которая известным образом связана с измеряемой величиной. Например, при измерении высоты полета барометрическим методом непосредственно измеряется не высота полета, а барометрическое давление, которое связано с измеряемой высотой известной зависимостью (2.9). Неточность этой зависимости является основным источником методической погрешности барометрического высотомера.

Отличительной чертой методических погрешностей является то, что они, как правило, не могут быть точно указаны в паспорте ИУ, а должны оцениваться по ситуации, т.е. при реализации выбранной методики измерения и с использованием выбранных средств измерения. Нередки случаи, когда вообще трудно указать способ измерения, исключающий методическую погрешность. Пусть, например, измерению подлежит температура раскаленной болванки, поступающей из печи на прокатный стан [15]. Спрашивается, где разместить датчик температуры (термопару): под болванкой, сбоку или над болванкой? Где бы он не был, мы не измерим внутреннюю температуру болванки, т.е. всегда будем иметь методическую погрешность, так как измеряем не то, что нужно, а то, что проще. Конечно, зная температуру болванки в заданной точке и закономерности температурного поля болванки, можно вычислить температуру болванки в другой ее точке. При этом, во-первых, будет допущена методическая погрешность (которая зависит от погрешности расчетных формул), а во-вторых, сама необходимость подобного расчета (которая диктуется необходимой точностью конечного результата измерений) может оказаться иллюзорной.

Субъективные погрешности измерения возникают из-за несовершенства оператора (человека, наблюдателя, экспериментатора — т.е. субъекта), снимающего показания средства измерений. Например, при отсчитывании показания прибора в виде перемещения указателя большое значение имеет расположение оператора по отношению

к показывающему устройству. Другой пример — при измерении температуры яркостным пирометром субъективные погрешности возникают из-за особенностей глаза конкретного оператора. Эти погрешности можно считать «инструментальными», если глаз оператора считать своеобразным «инструментом», или методическими, так как в основе яркостного метода измерения температуры используется выравнивание яркости контролируемого объекта и яркости нити лампы накаливания в приборе. Точно так же погрешность квантования, характерную для цифровых ИУ, можно отнести как к методической, так и к инструментальной погрешности. Поэтому иногда невозможно провести строгие границы, разделяющие разные виды погрешностей ИУ (пушистые границы).

К основным относят погрешности, имеющие место при заранее оговоренных условиях измерений и заранее оговоренных диапазонах значений влияющих величин, например:

выполнены требования по установке прибора (например, предусмотрены амортизация прибора и наличие защитного экрана, выверено направление оси чувствительности, выполнены балансировка нуля и калибровка чувствительности и т.д.);

температура окружающей среды не выходит за установленные пределы (например, 20 ± 2 °С);

отклонения напряжения питания не более $\pm 5\%$ от номинального; коэффициент гармоник питающего напряжения (клирфактор) не более 1 % ;

влажность воздуха $(60 + 5)$ % и т. д.

Такие (заранее оговоренные) условия применения средства измерений считаются нормальными условиями. Эти условия устанавливаются в нормативных документах на средства измерений конкретного типа или при их поверке. Обычно они характеризуются такой совокупностью значений или областей значений влияющих величин, при которых изменением результата измерений пренебрегают вследствие малости. Соответствующий режим измерений называется невозмущенным режимом. В рабочем (возмущенном) режиме измерений могут иметь место отклонения фактических условий эксплуатации ИУ от нормальных условий. Эти отклонения вызывают появление дополнительных погрешностей ИУ. Обычно они нормируются указанием коэффициентов влияния соответствующих влияющих ве-

личин на общую погрешность ИУ. Если функции влияния этих величин нелинейные, то можно указывать различные коэффициенты влияния для разных диапазонов изменения этих величин и разных диапазонов измеряемой величины. Например, дополнительная температурная погрешность манометра может указываться как 0.25 % на 10 °С в одном интервале температур и одном диапазоне давлений и 0.5 % на 10 °С в другом интервале температур и (или) другом диапазоне давлений. Более полный учет дополнительных погрешностей дается многомерной градуировочной характеристикой ИУ и вероятностными моделями влияющих величин.

Систематическими называются погрешности, которые для данного средства измерений остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях физической величины одного и того же размера и при одинаковых условиях измерений. Поэтому главным отличительным признаком этих погрешностей является то, что они, благодаря закономерному проявлению, могут быть заранее определены и устранены введением в показания прибора соответствующих поправок. Систематическую погрешность можно рассматривать как случайную величину на множестве средств измерений данного типа. Наличие систематических погрешностей часто свидетельствует о несовершенстве ИУ или несовершенстве методики измерений и одновременно указывает на возможность повышения точности измерений путем исключения этих погрешностей. Вместе с тем требование полного исключения систематических погрешностей может сделать вообще невозможной задачу измерения, так как некоторые систематические погрешности прибора (например, переходную динамическую погрешность (3,61)) исключить полностью практически невозможно.

Прогрессирующими (дрейфовыми) погрешностями называются погрешности, медленно изменяющиеся во времени. Эти погрешности обычно вызываются процессами старения деталей ИУ (разрядка источников питания, старение резисторов, усадка бумажной ленты самописца и пр.). В отличие от большинства систематических погрешностей, которые могут быть скорректированы поправкой, найденной один раз в течение всего срока службы прибора, прогрессирующие погрешности требуют повторения коррекции и тем более частой, чем меньшим должно быть их остаточное значение.

Случайными называются погрешности, величина и знак которых изменяются нерегулярным (случайным) образом при повторных измерениях одной и той же физической величины, проведенных в одинаковых условиях измерений и с одинаковой тщательностью. Случайные погрешности также обладают закономерностями проявления. Однако эти закономерности имеют статистический характер. Присутствие случайных погрешностей обычно обнаруживается в виде некоторого разброса показаний прибора (или выходной величины ИУ) при многократных измерениях величины одного и того же размера. Описание случайных погрешностей и закономерностей их проявления проводится методами теории вероятностей и математической статистики.

Примечание — Часто можно встретить такое неверное определение случайной погрешности - « ... это такая погрешность, значение которой невозможно заранее предсказать ...». Напротив, в отличие от систематических погрешностей, значение случайной погрешности (точнее, диапазон ее возможных значений) можно только лишь предсказать, а не знать точно.

Абсолютная погрешность средства измерений U_x определяется как алгебраическая разность между показанием средства измерений x и истинным значением измеряемой величины x , т. е.

$$\Delta x = x^* - x. \quad (6.1)$$

Примечание — Показанием средства измерений называется значение величины или число на показывающем устройстве средства измерений [1].

На практике вместо истинного значения измеряемой величины в формуле (6.1) (и последующих формулах) используют так называемое действительное значение этой величины, которое воспроизводится специальным устройством (за датчиком входного сигнала) при экспериментальной оценке значения абсолютной погрешности средства измерений в заданной точке диапазона измерений. Если в формуле (6.1) в качестве x^* использовать результат измерения (который после внесения поправок может отличаться от показания прибора), то полученное значение разности Δx есть абсолютная погрешность результата измерения. В обоих случаях абсолютная погрешность (6.1) имеет размерность, которая совпадает с размерностью измеряемой физической величины x , например мкм, мм, см, м и т.д., если измеряется ли-

нейное перемещение или линейный размер. Из-за этого абсолютная погрешность не всегда является достаточной для оценки качества различных измерений. Например, абсолютная погрешность $\Delta x = 0,5$ мм, полученная при измерении размера детали длиной $x = 100$ мм, достаточно мала, но измерение с такой же абсолютной погрешностью размера детали длиной $x = 1$ мм оказывается весьма грубым. Поэтому наряду с абсолютной погрешностью Δx пользуются безразмерной относительной погрешностью измерений

$$\delta = \frac{\Delta x}{x}, \quad (6.2)$$

которую обычно выражают в процентах. Для рассмотренного примера соответственно в первом случае получим $\delta = 0.5\%$, а во втором — $\delta = 50\%$. В свою очередь, «недостатком» относительной погрешности (6.2) является то, что она, как и абсолютная погрешность (6.1), в общем случае оказывается различной для разных значений измеряемой величины x , причем $\delta \rightarrow \infty$ если $x \rightarrow 0$ (за исключением случая, когда абсолютная погрешность Δx является мультипликативной). Поэтому наряду с относительной погрешностью пользуются еще и приведенной погрешностью

$$\gamma = \frac{|\Delta x|}{X_k}, \quad (6.3)$$

где X_k — нормирующее значение измеряемой величины, которое может быть равным:

конечному значению шкалы прибора, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы;

сумме конечных значений шкалы прибора (без учета знаков), если нулевая отметка находится внутри шкалы;

номинальному значению измеряемой величины, если таковое установлено;

длине шкалы, если шкала имеет резко сужающиеся деления (в этом случае погрешность и длина шкалы выражаются в одних единицах).

Для приборов, проградуированных в единицах, для которых принята шкала с условным нулем (например температурная шкала

$$\gamma = \frac{|100 - 100.6|}{150 - 0} \cdot 100\% = 0.4\%.$$

Цельсия), нормирующее значение X_k принимается равным разности конечного и начального значений шкалы, или диапазону измерений. Например, приведенная погрешность вольтметра со шкалой 0—150 В при его показании $x = 100$ В и действительном значении измеряемого напряжения $x = 100.6$ В равна

Приведенная погрешность (6.3) также может зависеть от измеряемой величины (за исключением случая, когда абсолютная погрешность (6.1) является аддитивной). Поэтому все рассмотренные виды погрешностей не позволяют оценить ее одним числом. Такую оценку дает класс точности ИУ. Он является числовой характеристикой инструментальной погрешности средства измерений, определяемой пределами допускаемых основной и всех дополнительных погрешностей, и обычно вычисляется по формуле

$$\gamma_T = \gamma_{\max} = \frac{|\Delta x|_{\max}}{X_k} \cdot 100\%, \quad (6.4)$$

где $|\Delta x|_{\max}$ — максимальное значение модуля абсолютной погрешности (6.1), т. е. класс точности ИУ (6.4) совпадает с максимальным значением приведенной погрешности (6.3).

Зная класс точности ИУ, можно судить о величине максимальной абсолютной погрешности результатов измерений $|\Delta x|_{\max}$. Так, при правильном применении вольтметра класса точности 1 с диапазоном измерений 100 В максимальная абсолютная погрешность результатов измерений не должна превышать ± 1 В.

Примечания

1. Дополнение «... при правильном применении ...» означает, что соблюдены все правила и условия применения прибора, указанные в его паспорте.

2. Утверждение «... не должна превышать ...» не всегда является верным. Более точное представление о возможных значениях погрешности (6.1) дает доверительный интервал, который содержит погрешность с заданной доверительной вероятностью.

Значение допустимого предела относительной (6.2) или приведенной погрешности прибора (6.3), а также его класс точности (6.4) назначаются из ряда предпочтительных чисел

$$[1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6] \cdot 10^n,$$

где показатель степени n принимается равным: $+1, 0, -1, -2$ и т. д. При этом класс точности выражают в процентах. Например, класс точности $0,1$ соответствует приведенной погрешности $0,001$.

Точность результата измерений определяется как одна из характеристик качества измерения, отражающая близость к нулю погрешности результата измерения [1]. При этом считается, что чем меньше погрешность измерения (или прибора), тем больше его точность. Точность ИУ иногда характеризуют числом T , равным обратному значению относительной погрешности ИУ (6.2), т. е.

$$T = 1/\delta. \quad (6.5)$$

Например, если относительная погрешность ИУ составляет $2 \cdot 10^{-3}\% = 2 \cdot 10^{-5}$, то точность этого ИУ можно считать равной $1/(2 \cdot 10^{-5}) = 5 \cdot 10^4$. На практике формулу (6.5) применяют редко. Распределение точности ИУ по диапазону измерений предлагается описывать с помощью так называемой логарифмической характеристики точности.

Как отмечалось ранее, к ИУ относятся измерительные приборы (ИП) и измерительные преобразователи (ИПр). При оценке погрешностей ИПр различают его погрешности по входу, выраженные в единицах входного сигнала преобразователя, и погрешности по выходу, выраженные в единицах выходного сигнала ИПр (рис. 6.1, а). Абсолютная погрешность по выходу измерительного преобразователя определяется как

$$\Delta y = f_p(x) - f_H(x) \quad (6.6)$$

где $f_p(x)$, $f_H(x)$ — соответственно реальная и номинальная прямые функции преобразования ИПр (2.1). Абсолютная погрешность ИПр по входу равна

$$\Delta x = \psi_H(y) - \psi_p(y), \quad (6.7)$$

где $\psi_p(y)$, $\psi_H(y)$ — соответственно реальная и номинальная обратные функции преобразования ИПр (2.2). Зная номинальную функцию преобразования ИПр (2.17) и его погрешность по выходу (6.6), можно определить погрешность преобразователя по входу и наоборот. Если в качестве номинальной принимается желаемая характери-

стика ИПр (2.6), то абсолютная погрешность по выходу включает в себя погрешность приближения. Таким же образом вводятся относительные и приведенные погрешности по входу и выходу ИПр

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}, \quad \delta_y = \frac{\Delta_y}{y}, \quad \gamma_x = \frac{|\Delta_x|}{X_k}, \quad \gamma_y = \frac{|\Delta_y|}{Y_k}. \quad (6.8)$$

Рассмотрим подробнее формы проявления погрешностей ИУ. Присутствие случайных погрешностей приводит к тому, что статическая характеристика ИУ становится неоднозначной. При экспериментальном определении этой характеристики обычно получают ряд точек, образующих полосу погрешностей (полосу неопределенности). Если при этом реальная статическая характеристика ИУ 1 смещается относительно номинальной характеристики 2 так, что при всех значениях преобразуемой величины x выходная величина указывается больше (или меньше) номинальной величины на одно и то же значение (рис. 6.1, б), то соответствующая

погрешность называется аддитивной погрешностью (по-латыни «получаемая путем сложения») или погрешностью нуля. Систематическая аддитивная погрешность проявляется в виде эквидистантного смещения номинальной характеристики ИУ на величину Δy_0 вдоль оси y или на величину Δx_0 вдоль оси x . На рис. 6.1, б это показано для случая, когда номинальная характеристика ИУ является линейной. В этом случае $\Delta x_0 = \Delta y_0 / K_0$, где K_0 — номинальный коэффициент чувствительности ИУ. Наличие случайной аддитивной погрешности приводит к образованию полосы погрешностей постоянной ширины (рис. 6.1, в).

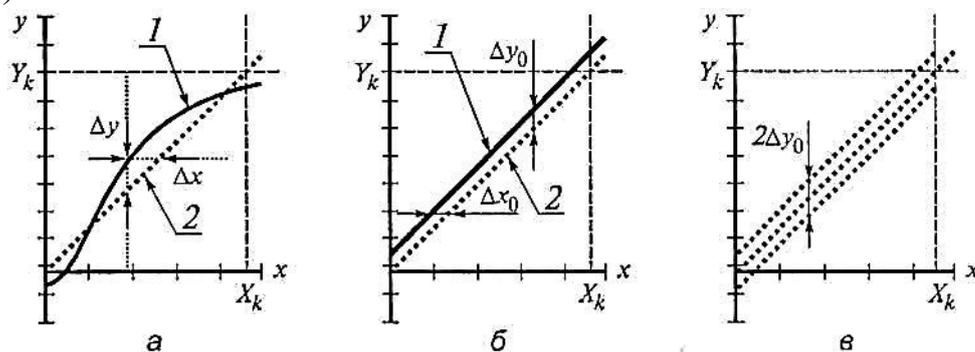


Рис. 6.1

Если номинальная характеристика ИУ нелинейная и абсолютная погрешность по выходу постоянная, то абсолютная погрешность по

входу Δ_x зависит от x (рис. 6.2, а) и, наоборот, если погрешность по входу постоянная, то погрешность по выводу Δ_y зависит от y (рис. 6.2, б).

Систематическую аддитивную погрешность можно скорректировать (т. е. устранить) путем смещения шкалы прибора или смещения нулевого положения указателя. Для выполнения этих операций во многих приборах предусматривается специальное электрическое или механическое устройство (корректор нуля). Примерами систематических аддитивных погрешностей являются погрешности от постороннего груза на чашке весов при взвешивании, погрешность от неточной установки прибора на нуль перед измерением, погрешность от термоэдс в цепях постоянного тока и т.п. Примерами случайных аддитивных погрешностей являются погрешности от трения в опорах измерительного механизма, от наводок эдс на входе прибора, от ненадежных контактов при измерении сопротивлений и т.д. Сюда же условно можно отнести и погрешность квантования, характерную для цифровых ИУ (рис. 6.3, а).

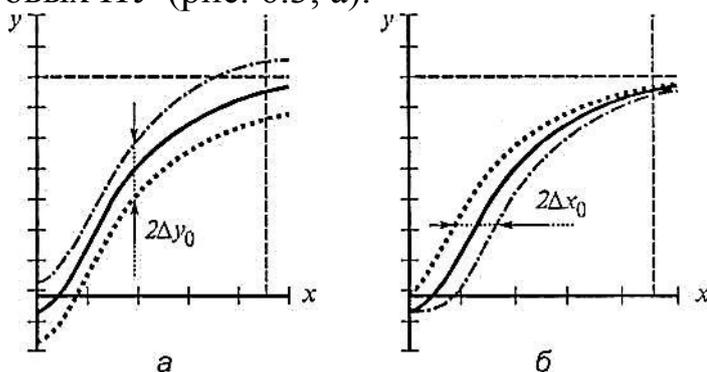


Рис. 6.2

Если погрешность возникает из-за изменения коэффициента чувствительности ИУ, то его реальная характеристика 1 отклоняется от номинальной характеристики 2 так, как это показано на рис. 6.3, б (для систематической погрешности), или образует У-образную полосу погрешностей, как это показано на рис. 6.3, в для случайной погрешности.

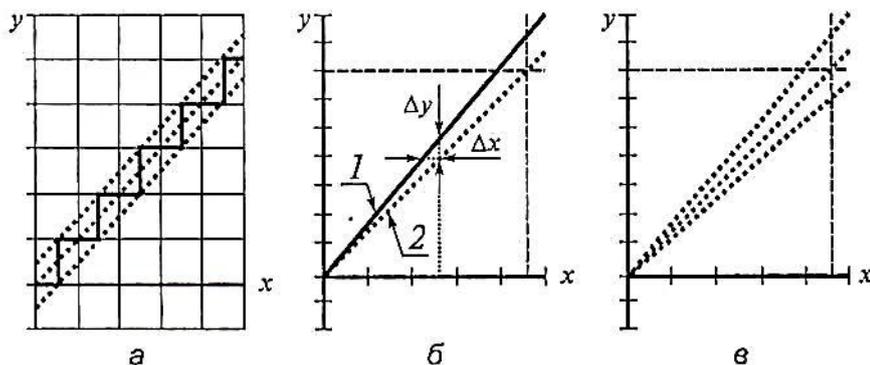


Рис. 6.3

Согласно (6.6) и (6.7) абсолютные погрешности по выходу и входу ИУ в этом случае равны

$$\Delta y = Kx - K_0x = \Delta K x = K_0 H x, \quad (6.9)$$

$$(6.10)$$

$$\Delta x = \frac{y}{K_0} - \frac{y}{K} = \frac{\Delta K}{K_0} x = H x,$$

где $K = K_0 + \Delta K$ — фактическое значение коэффициента чувствительности;

K_0 — номинальное значение коэффициента чувствительности;

ΔK — отклонение (абсолютная погрешность) коэффициента чувствительности;

$H = \Delta K / K_0$ — относительная погрешность коэффициента чувствительности ИУ.

Примечание — При более точном анализе вместо (6.10) следует записать

$$\Delta x = \frac{H}{1 \pm H} x,$$

где знак \pm совпадает со знаком приращения ΔK . Однако обычно $H \ll 1$ и этим уточнением на практике можно пренебречь.

В обоих случаях абсолютная погрешность оказывается пропорциональной текущему значению преобразуемой величины x . Такая погрешность называется мультипликативной погрешностью (поллатыни «получаемая путем умножения») или погрешностью чувствительности. Причинами возникновения таких погрешностей могут быть: изменение коэффициента усиления усилителя, изменение жесткости мембраны датчика манометра или жесткости пружины прибора, изменение величины опорного напряжения в цифровом вольтметре и др.

Если фактическая полоса погрешностей «накрывается» трапецией ABCD (как это показано на рис. 6.4), для которой $AB = 2\Delta y_0$ и $CD = 2(\Delta y_0 + \Delta Kx_k)$, то в первом приближении можно считать, что имеют место только аддитивная и мультипликативная погрешности.

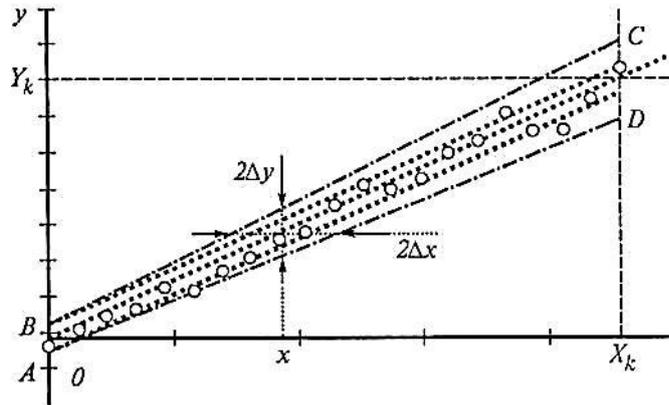


Рис. 6.4

В этом случае текущее значение абсолютной погрешности на выходе ИУ можно аппроксимировать выражением

$$\Delta y = \Delta y_0 + K_0 H x, \quad (6.11)$$

а значение абсолютной погрешности на входе - выражением

$$\Delta x = \Delta x_0 + H x, \quad (6.12)$$

где по-прежнему $\Delta x_0 = \Delta y_0 / K_0$, $H = \Delta K / K_0$, причем действительные значения погрешностей меньше, чем вычисленные по формулам (6.11) и (6.12), так как эти формулы описывают границы области возможных значений абсолютных погрешностей.

Разделив все члены уравнения (6.11) на предел измерений X_k получим выражение для эквивалентной приведенной погрешности на входе ИУ

$$\gamma_x(x) = \frac{\Delta x}{X_k} = \frac{\Delta x_0}{X_k} + H \frac{x}{X_k}. \quad (6.13)$$

Значение этой погрешности в начале диапазона (в точке $x = 0$) обозначим через $\gamma_0 = \Delta x_0 / X_k$. Тогда вместо (6.13) получим

$$\gamma_x(x) = \gamma_0 + H \frac{x}{X_k}. \quad (6.14)$$

Таким образом, при наличии у ИУ только аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности его общая приведенная погрешность (6.14) линейно возрастает (или убывает) от значения $\gamma = \gamma_0$ в начале диапазона (при $x = 0$) до значения $\gamma = \gamma_k = \gamma_0 + H$ в конце диапазона (при $x = X_k$). Соответствующее распределение относительной погрешности (6.2) по диапазону измерений описывается формулой

$$\delta_x(x) = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x_0}{x} + H = \gamma_0 \frac{X_k}{x} + H. \quad (6.15)$$

В конце диапазона измерений эта погрешность равна $\delta_x(X_k) = \gamma_0 + H = \gamma_k$, а по мере уменьшения хона возрастает до бесконечности. Именно поэтому в начальной части шкалы прибора измерения недопустимы, в чем и заключается отрицательное влияние аддитивной погрешности, не позволяющее использовать один и тот же прибор для равноточного измерения как больших, так и малых значений измеряемых величин.

Соотношение (6.15) можно записать в виде так называемой двучленной формулы

$$\delta_x(x) = \gamma_k + \gamma_0 \left(\frac{X_k}{x} - 1 \right). \quad (6.16)$$

Этой формулой удобно пользоваться для вычисления относительной погрешности прибора по известным значениям x , X_k , γ_0 и γ_k .

При наличии только аддитивной погрешности класс точности ИУ γ_T (6.4) определяется значением приведенной погрешности нуля $\gamma_0 = \Delta x_0 / X_k$. Таких ИУ большинство. Их класс точности указывается цифрой на шкале прибора без каких-либо дополнений. Например, наличие на шкале прибора цифры 2,5 означает отсутствие мультипликативных погрешностей и то, что $\gamma_0 = 2.5\%$. Напротив, если имеет место только мультипликативная погрешность, то класс точности ИУ устанавливается по значению относительной погрешности коэффициента чувствительности ИУ $H = \Delta K / K_0$, которое указывается на шкале и обводится кружком. Например, (1,5) означает, что прибор имеет только мультипликативную погрешность и относительная погрешность коэффициента чувствительности равна 1.5%. При наличии как аддитивной, так и мультипликативной погрешностей класс точности указывается на шкале ИУ дробным числом, в числителе которого указывается приведенная погрешность γ_0 в начале шкалы (при $x = 0$), а в знаменателе — приведенная погрешность γ_k в конце шкалы (при $x = X_k$). Например, если на шкале прибора присутствует маркировка 0,02 / 0,01, то это означает наличие обоих видов погрешностей и то, что суммарная относительная погрешность ИУ нормирована по двучлен-

ной формуле (6.16), в которой следует принять $\gamma_0 = 0.01 \%$ и $\gamma_k = 0.02 \%$. Таким образом, обозначение класса точности на шкале прибора (или в его паспорте) позволяет составить достаточно полное представление о видах, величине и характере распределения его погрешностей по диапазону измерений.

Примечание— Реальное распределение относительной погрешности по диапазону измерений может существенно отличаться от линейного распределения (6.16). Во всех подобных случаях необходимо внимательно изучать документацию средства измерений и пользоваться для вычисления погрешности результата измерений приводимыми в ней специальными формулами.

Статические и динамические погрешности различают по признаку зависимости измеряемой физической величины от времени, точнее по их зависимости от скорости изменения измеряемой величины. Погрешности, не зависящие от этой скорости, называются статическими погрешностями. Погрешности же, которые отсутствуют, когда эта скорость равна нулю, и появляются при ее отклонении от нуля, называются динамическими погрешностями.

6.2. Оптимальный выбор параметров ИУ из условия минимума статической погрешности

Погрешность измерений зависит не только от уровня возмущений и помех, действующих на ИУ, но и от значений параметров ИУ. Поэтому одним из условий при выборе этих параметров является требование получения минимальной или заданной погрешности ИУ.

Отсутствие погрешностей в статическом режиме измерений равносильно выполнению двух условий

$$m_{e_{cm}} = 0, \quad (6.76)$$

$$D_{e_{cm}} = 0, \quad (6.77)$$

где значение систематической погрешности тест определяется формулой (6.24), а дисперсии случайной погрешности бест — формулой (6.25).

Теоретически условие (6.76) может выполняться, если:

выполняются условия $m_H = m_F = \overline{m}_F = 0$, т. е. ИУ полностью защищено от помех и отсутствует систематическая погрешность его коэффициента чувствительности;

имеют место определенные соотношения между величинами, входящими в формулу (6.24), при которых всегда выполняется равенство

$$m_H m_x + (1 + m_H) m_F + \overline{m}_F = 0. \quad (6.78)$$

На практике это равенство стремятся обеспечить регулировкой тех параметров ИУ, от которых зависят его показания при $x = 0$ и $x = x_v$. Такие операции называются балансировкой нуля и калибровкой чувствительности ИУ. При наличии прогрессирующих погрешностей эти операции могут проводиться многократно в процессе эксплуатации ИУ.

Условие (6.77) выполнить строго невозможно из-за неизбежного наличия случайных факторов. Поэтому его разумно заменить условием минимума дисперсии случайной погрешности, т.е. условием

$$D_{e_{cm}} = \min_{\{q\}}, \quad (6.79)$$

где приближение к минимуму достигается за счет рационального выбора структурной схемы и параметров ИУ $\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Условие (6.79) в свою очередь, можно заменить условием

$$D_H = \min_{\{q\}},$$

так как остальные величины, влияющие на значение $D_{e_{cm}}$, зависят от параметров входного сигнала (m_x, D_x) или могут быть связаны с выполнением условия, (6.78).

При выборе параметров измерительного прибора нужно учитывать еще одно (дополнительное) условие, которое можно записать в виде

$$K_{\Pi} (k_1, k_2, \dots, k_N) = 1, \quad (6.80)$$

где K_{Π} — общий коэффициент чувствительности прибора, зависящий от коэффициентов чувствительности его звеньев k_1, k_2, \dots, k_N . Они, в свою очередь, зависят от параметров прибора $\{q\}$. При выпол-

нении условия (6.80) статическая характеристика прибора имеет вид $\bar{x} = x$, т. е. показание прибора равно значению измеряемой величины в любой точке диапазона измерений. Это условие равно- 1 сильно другому условию

$$K(k_1, k_2, \dots, k_N) = K_{\text{ж}}, \quad (6.81)$$

где K — коэффициент чувствительности ИПр (или той части прибора, которая осуществляет преобразование измеряемой величины x в сигнал y , удобный для регистрации; $K_{\text{ж}}$ — желаемое значение этого коэффициента.

Статическая характеристика ИПр (или указанной части прибора) в этом случае должна иметь виду $y = K_{\text{ж}} x$, а коэффициент передачи K_0 звена, показанного на рис. 6.5, должен быть равен $K_{\text{ж}}$.

Суммируя изложенное, сформулируем постановку решаемой задачи: требуется определить такие (номинальные) значения коэффициентов чувствительности звеньев ИУ k_1, k_2, \dots, k_N , при которых выполняются два условия

$$D_H(k_1, k_2, \dots, k_N) = \min_{\{k_s\}}, \quad (6.82)$$

$$K(k_1, k_2, \dots, k_N) = K_{\text{ж}}. \quad (6.83)$$

Вид функции $K = K(k_1, k_2, \dots, k_N)$ зависит от вида структурной схемы ИУ, а функцию $D_H(k_1, k_2, \dots, k_N)$ можно записать в виде

где D_1, \dots, D_N — дисперсии относительных погрешностей коэф-

$$D_H(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_s \left(\frac{\partial K}{\partial k_s} \frac{k_s}{K} \right)^2 D_s = \left(\frac{\partial K}{\partial k_1} \frac{k_1}{K} \right)^2 D_1 + \dots + \left(\frac{\partial K}{\partial k_N} \frac{k_N}{K} \right)^2 D_N,$$

фициентов чувствительности звеньев ИУ, значения которых в дальнейшем будем считать известными. В результате рассматриваемая задача сводится к поиску условного минимума функции (6.84), имеющей N переменных k_1, k_2, \dots, k_N — значений коэффициентов чувствительности звеньев ИУ.

Определение условного минимума функции (6.84) можно заменить поиском обычного (безусловного) минимума функции Лагранжа

$$L(k_1, k_2, \dots, k_N; \lambda) = D_H(k_1, k_2, \dots, k_N) + \lambda [K(k_1, k_2, \dots, k_N) - K_{\text{ж}}],$$

где X — множитель Лагранжа, который, как и искомые коэффициенты чувствительности звеньев k_1, k_2, \dots, k_N , определяется в результате решения системы $N+1$ уравнений

$$\frac{\partial L(k_1, k_2, \dots, k_N; \lambda)}{\partial q_s} = 0, \text{ где } s = 1, 2, \dots, N, \quad (6.86)$$

$$\frac{\partial L(k_1, k_2, \dots, k_N; \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Эта система уравнений может иметь несколько решений. Верным является то решение, которому соответствует глобальный минимум функции Лагранжа (6.85). В табл. 6.3 показаны результаты решения этой задачи для типовых соединений звеньев.

Таблица 6.3

Тип соединения	Общий коэффициент чувствительности	Оптимальное значение коэффициентов чувствительности звеньев	Минимальная относительная погрешность коэффициента чувствительности
Последовательное	$K_{\text{Ж}} = k_1 k_2 \dots k_N$	$k_j = \frac{K_{\text{Ж}}}{k_1 \dots k_{j-1} k_{j+1} \dots k_N}$	$D_H = \sum_s D_s$
Параллельное	$K_{\text{Ж}} = k_1 + k_2 + \dots + k_N$	$k_s = \frac{K_{\text{Ж}}}{D_s \sum_s \frac{1}{D_s}}$	$D_{H \text{ min}} = \frac{1}{\sum_s \frac{1}{D_s}}$
Параллельное ($N = 2$)	$K_{\text{Ж}} = k_1 + k_2$	$k_1 = K_{\text{Ж}} \frac{D_2}{D_1 + D_2}$ $k_2 = K_{\text{Ж}} \frac{D_1}{D_1 + D_2}$	$D_{H \text{ min}} = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}$
Встречно-параллельное с отрицательной обратной связью	$K_{\text{Ж}} = \frac{k_1}{1 + k_1 k_2}$	$k_1 = K_{\text{Ж}} \frac{D_1 + D_2}{D_2}$ $k_2 = \frac{1}{K_{\text{Ж}}} \frac{D_1}{D_1 + D_2}$	$D_{H \text{ min}} = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}$
Встречно-параллельное с положительной обратной связью	$K_{\text{Ж}} = \frac{k_1}{1 - k_1 k_2}$	$k_1 = K_{\text{Ж}} \frac{D_1 + D_2}{D_2}$ $k_2 = -\frac{1}{K_{\text{Ж}}} \frac{D_1}{D_1 + D_2}$	$D_{H \text{ min}} = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}$

Из таблицы видно, что при последовательном соединении всех звеньев ИУ дисперсия D_H равна сумме дисперсий погрешностей звеньев D_s и не зависит от значений их коэффициентов чувствительности k_s , т.е. от параметров ИУ. Поэтому, повышение точности ИУ с

последовательным соединением звеньев может достигаться только лишь за счет повышения точности этих звеньев (т.е. снижения дисперсий D_s) или уменьшения числа звеньев N . Что касается условия (6.83), то оно может достигаться выбором необходимого значения коэффициента чувствительности любого звена. Обычно роль такого звена в приборах выполняет усилитель с регулируемым коэффициентом усиления.

При параллельном и встречно-параллельном соединениях существуют оптимальные значения коэффициентов чувствительности звеньев (и следовательно, оптимальные значения параметров ИУ), при которых достигается минимальное D_H значение и выполняется требование (6.83). Эти оптимальные значения k_s зависят от желаемого значения общего коэффициента чувствительности $K_{\text{ж}}$ и дисперсий погрешностей звеньев $D_s (s= 1, 2, \dots, N)$. При таких соединениях звеньев (параллельном и встречно-параллельном) минимальное значение D_H равно среднему геометрическому дисперсий погрешностей звеньев. Если звена два, то

$$D_{H \min} = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}, \quad (6.87)$$

$$\frac{1}{D_{H \min}} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}.$$

Отсюда следует, что при оптимальном выборе структуры и параметров ИУ должно выполняться условие

$$D_{H \min} < \min \{D_1, D_2, \dots, D_N\}, \quad (6.89)$$

т. е. результирующая погрешность ИУ не должна превышать погрешности его наиболее точного звена. Это указывает на возможность создания точного ИУ из относительно грубых элементов за счет рационального соединения этих элементов и правильного выбора их параметров.

При комбинированном соединении звеньев рассматриваемая задача может решаться методом Лагранжа, как это было описано ранее, или поэтапным методом с использованием формул табл. 6.3. Возможности поэтапного метода ограничены уровнем сложности структурной схемы ИУ, так как преобразования этой схемы, которые могут быть связаны с выделением в ней групп звеньев с типовыми соедине-

ниями (см. рис. 3.9), требуют уточнения формулы (6.84) (справедливой только для случая, когда погрешности всех звеньев прибора не зависят друг от друга) и формул табл. 6.3. Однако если структурная схема ИУ допускает выделение таких групп звеньев, то поэтапный метод оказывается весьма эффективным.

6.3. Оптимальный выбор параметров ИУ из условия минимума динамической погрешности

Динамическая погрешность складывается из вынужденных аддитивных погрешностей (6.21), обусловленных переменными помехами, и собственных мультипликативных погрешностей (6.22), обусловленных отличием операторной части передаточной функции ИУ $W_0(p)$ от единицы. Поэтому стремление уменьшить уровень динамических погрешностей сводится к защите прибора от помехи снижению его инерционности.

Наиболее распространенными способами защиты приборов от помех является применение различных систем амортизации, экранирования, термостатирования, фильтрации и пр. Например, если погрешности вызваны механической вибрацией прибора $s(t)$, то для их устранения можно применить амортизатор (рис. 6.23). Его главная задача — исключить передачу вибраций $z(t)$ объекта 1, на котором установлен прибор 2, к самому прибору, т.е. добиться того, чтобы смещения прибора $s(t)$, обусловленные вибрацией $z(t)$, были равны нулю.

Схема амортизатора на рис. 6.23 похожа на схему сейсмографа (см. рис. 3.2). Выбор жесткости пружины c и коэффициента демпфирования демпфера k_d нужно подчинить условию (4.39) и малому значению собственной частоты ω_0 т.е. подвеска должна оказаться настолько «мягкой», чтобы колебания основания $z(t)$ в максимальном диапазоне частот не передавались на прибор.

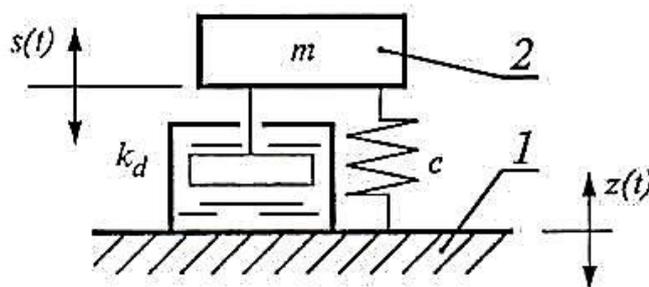


Рис. 6.23

В линейном ИУ собственные динамические погрешности отсутствуют, если $W_0(p) = 1$. В [9] рассматриваются четыре вида собственных динамических погрешностей: погрешности формы (6.96), операционные погрешности (6.97), частотные погрешности (6.98) и переходные погрешности (6.99)

$$\Delta y(t) = y(t) - x(t), \quad (6.96)$$

$$\Delta W(p) = W(p) - W(0), \quad (6.97)$$

$$\Delta A(\omega) = A(\omega) - A(0), \quad (6.98)$$

$$\Delta h(t) = h(t) - h(\infty),$$

где $y(t)$, $x(t)$ — выходной и входной сигналы, $W(p)$ — передаточная функция ИУ; $A(\omega)$ — амплитудная частотная функция ИУ; $h(t)$ — переходная функция ИУ.

Все эти функции и погрешности связаны друг с другом, т.е. зная одну из них, можно определить любую другую. Помимо этих функций, для количественной оценки собственных динамических погрешностей можно использовать все другие (частные) показатели динамической точности ИУ, рассмотренные в гл. 3, в том числе длительность переходного процесса, перерегулирование, интегральные показатели качества переходного процесса, ширину полосы пропускания частот, собственную частоту ИУ и др. В гл. 4 показано вычисление этих показателей динамической точности ИУ (задачи анализа), а в гл. 5 — расчет параметров передаточных функций ИУ 1-го, 2-го и 3-го порядков, исходя из требований, наложенных на динамические характеристики таких ИУ (задачи синтеза). Тем самым требование $W_0(p) = 1$, которое выполнить строго невозможно, переносится в практическую плоскость.

Помимо рационального выбора собственных параметров ИУ, в разд. 5.4 рассматривается получение желаемой передаточной функции ИУ $W_0(p)$ путем использования одного или нескольких корректирующих звеньев (разд. 5.4.1) или реализация такого алгоритма преобразования выходного сигнала ИУ, который исключает динамические искажения входного сигнала (разд. 5.4.2).

Если имеется модель измерительного сигнала (6.17), то желаемые показатели динамической точности ИУ (длительность переходного процесса, ширину полосы пропускания частот и др.) нужно связывать с параметрами этой модели. В частности, ширина полосы про-

пускания частот ИУ должна превышать полосу частот измерительного сигнала, а форма и длительность переходного процесса должны соответствовать назначению ИУ. Например, если ИУ используется в контуре управления движением режущего инструмента, то в переходном процессе обычно недопустимо перерегулирование, а длительность переходного процесса должна быть согласована с быстродействием контура управления.

Величина, обратная длительности переходного процесса, характеризует число достоверных измерений в секунду (например, если $t_{\text{п}} = 0,5$ с, то $1/t_{\text{п}} = 2$ измерения/с). Поэтому если показания ИУ передаются по каналам связи, то в соответствии с теоремой Котельникова интервал дискретизации не должен превышать величины π/Ω_{max} , где Ω_{max} — максимальная частота спектра преобразуемого сигнала. Это соотношение может служить отправным пунктом при оценке максимально допустимой длительности переходного процесса в ИУ.

Таким образом, расчет оптимальных значений параметров ИУ из условия минимума динамической погрешности выполняется с использованием алгоритмов, описанных в гл. 5.

6.4. Пример расчета и анализа погрешностей ИУ

Расчет и анализ погрешности проектируемого ИУ обычно выполняется в несколько этапов:

1. Анализ модели измерительного сигнала.
2. Разработка (уточнение) структурно-математической модели ИУ.
3. Анализ источников погрешностей.
4. Анализ погрешностей звеньев ИУ.
5. Приведение аддитивных помех ко входу и/или выходу ИУ.
6. Расчет относительной погрешности общего коэффициента чувствительности ИУ.
7. Расчет погрешности от нелинейности общей статической характеристики ИУ.
8. Расчет статической погрешности.
9. Расчет динамической погрешности.
10. Расчет суммарной погрешности.
11. Анализ структуры погрешности.
12. Разработка мероприятий по снижению погрешности до заданного уровня.

Целью первого этапа является анализ структуры и оценка параметров модели измерительного сигнала.

Покажем пример создания такой модели. Пусть задачей проектирования является разработка прибора для измерения высоты полета, например барометрического высотомера, показанного на рис. 2.3. Кроме того, прибор должен использоваться на самолете, совершающем рейсовые полеты из пункта А в пункт В (рис. 6.24).

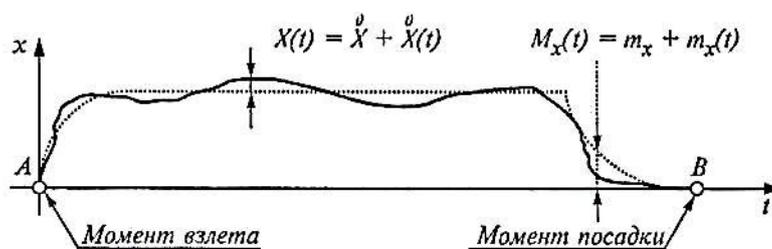


Рис. 6.24

Обычно существует программа полета, определяющая предписанное движение самолета. Отсюда в модели измерительного сигнала

$$x(t) = m_x + m_x(t) + \bar{X} + \bar{X}(t), D_x, S_x(\omega) \quad (6.100)$$

возникает детерминированная составляющая $M_x(t) = m_x + m_x(t)$, описывающая желаемый (предписанный) закон изменения высоты полета во времени. Вследствие воздействия случайных факторов (воздушных течений, метеообстановки, состояния пилота и пр.) фактическая высота полета отличается от предписанной: высоты, т.е. в реальном измерительном сигнале всегда присутствует случайная составляющая $X(t) = \bar{X} + \bar{X}(t)$. Статистические характеристики этой составляющей сигнала (дисперсия D_x случайной величины X и энергетический спектр $S_x(\omega)$ случайной функции времени $X(t)$) могут отражать опыт эксплуатации самолета на конкретном маршруте, а если они неизвестны, то их можно задавать и, варьируя, строить стохастическую модель траектории движения самолета. Чем ближе характеристики такой модели к характеристикам фактического движения самолета, тем точнее будет оценка погрешности результатов измерений. Для самолетов разных типов (спортивных, грузовых и пр.) эти характеристики различные. Поэтому к приборному оборудованию разных типов самолетов предъявляются различные требования.

В качестве другого примера рассмотрим модель измерительного сигнала для случая, когда задачей проектирования является разработка весов, которые предполагается использовать во взрослой поликли-

нике. Вес клиента — случайная величина, не изменяющаяся за время измерения. Модель такого измерительного сигнала можно записать в виде

$$x = m_x + X, D_x \quad (6.101)$$

где m_x — средний вес клиента; X — центрированная случайная величина с дисперсией D_x . Полной статистической характеристикой случайной величины является функция плотности распределения вероятности (ФПРВ)

этой величины $p_x = p_x(x)$ зная которую, можно значения m_x и D_x вычислить по формулам

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx,$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_x(x) dx.$$

Если она неизвестна, то ее можно задавать, строя предполагаемую модель измерительного сигнала (веса клиента). График этой функции для взрослой поликлиники примерно такой, как показано на рис. 6.25 (кривая 1). Если же эти весы будут использоваться в детской поликлинике, то этот график окажется другим (см. пунктирную кривую 2 на рис. 6.25).

В обоих случаях в модели измерительного сигнала (6.101) отсутствуют переменные составляющие $m_x(t)$ и $X(t)$ которые могут быть вызваны дополнительными инерционными нагрузками, возникающими из-за возможных вибраций основания весов или вследствие непредвиденных движений клиента по грузоприемной платформе. Эти нагрузки должны учитываться в аддитивной помехе, приведенной ко входу (или выходу) прибора, и если они приводят к заметной погрешности результатов измерений, то фильтрация этой

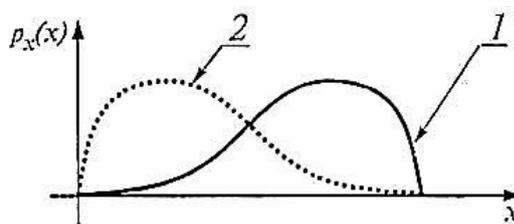


Рис. 6.25

помехи — одна из задач, которые нужно решать при разработке прибора.

Таким образом, в модели измерительного сигнала нужно учитывать только то, что нужно измерять, а не все то, что попадает на вход ИУ.

Целью второго этапа является разработка структурно-математической модели ИУ. Обычно к моменту расчета погрешности проектируемого ИУ эта модель известна. Поэтому имеется в виду уточнение этой модели путем учета тех факторов, которые ранее были отброшены как несущественные. Примеры подобного уточнения структурно - математической модели ИУ были показаны в разд. 3.1. Необходимость в нем возникает в случае расхождения экспериментальных расчетных данных.

Целью третьего этапа является выявление и анализ тех причин, которые могут вызывать погрешности результатов измерительных преобразований в звеньях проектируемого ИУ. Ими могут быть инструментальные погрешности, инерционность звеньев, нелинейность их статических характеристик, наличие возмущающих воздействий и помех, влияние последующих звеньев на предыдущие методические погрешности и пр. Результатом выполнения этого этапа является перечень возмущающих факторов и предварительная (качественная) оценка их уровня.

Цель четвертого этапа заключается в числовой оценке уровня аддитивной и мультипликативной погрешностей звеньев ИУ. Результатами этого этапа являются:

- 1) оценка математического ожидания m_{hs} и дисперсии D_{hs} относительной погрешности коэффициента чувствительности каждого звена ИУ
- 2) состав и уровень аддитивных помех/5 на входах всех звеньев ИУ

$$h_s = \frac{\Delta k_s}{k_{s0}} = m_{hs} + \overset{0}{h}_s, \quad D_{hs}, \quad \text{где } s = 1, 2, \dots, N, \quad \overset{N}{\text{ев.}} \text{ — число звеньев.}$$

$$f_s = m_{fs} + \overset{0}{f}_s + m_{fs}(t) + \overset{0}{f}_s(t), \quad D_{fs}, \quad S_{fs}(\omega),$$

т. е. определение структуры этих помех и оценка величин m_{fs} , D_{fs} , $m_{fs}(t)$, $S_{fs}(\omega)$;

3) оценка статистических связей величин h_s, f_s , и X , т. е. оценка корреляционных (и взаимно корреляционных) моментов этих величин.

$$F = m_F + \overset{0}{F} + m_F(t) + \overset{0}{F}(t), D_F, S_F(\omega),$$

Целью пятого этапа является приведение аддитивных помех ко входу и/или выходу ИУ, т.е. оценка параметров $m_F, D_F, m_F(t)$ и $S_F(\omega)$ (или $R_F(\tau)$) помехи F , приведенной ко входу ИУ

Целью шестого этапа является расчет относительной погрешности общего коэффициента чувствительности ИУ (см. разд. 6.4)

Целью седьмого этапа является выбор способа аппроксимации статической характеристики ИУ, а также расчет математического

$$H = m_H + \overset{0}{H}, D_H.$$

ожидания и дисперсии погрешности от нелинейности этой характеристики по формулам, приведенным в разд. 6.5.

Целью восьмого этапа является расчет математического ожидания $m_{\text{ед}}$ и дисперсии $D_{\text{ед}}(t)$ статической погрешности результата измерения по формулам (6.24) и (6.25).

Целью девятого этапа является расчет математического ожидания $m_{\text{ед}}(t)$ и

дисперсии $D_{\text{ед}}(t)$ динамической погрешности результата измерения по формулам (6.29) и (6.32).

Целью десятого этапа является расчет суммарной погрешности ИУ. Максимальную абсолютную погрешность измерений, соответствующую доверительной вероятности $P_d = 0.95$, можно приближенно вычислить по формуле

$$\Delta_{0.95} = (|\Theta| + 1,6\sigma), \quad (6.102)$$

где Θ — систематическая погрешность, σ — СКО случайной погрешности.

Эту формулу рекомендуется применять, если $|\Theta| > 0.66\sigma$. В противном случае в ней следует принять $\Theta = 0$.

Соответственно приведенную погрешность измерения (6.3) можно оценить величиной

$$\gamma(t) = \frac{|m_{\text{ед}} + m_{\text{ед}}(t)| + 1.6 \sqrt{D_{\text{ед}} + D_{\text{ед}}(t)}}{X_k} 100\%, \quad (6.103)$$

а в качестве оценки класса точности ИУ можно принять максимальное значение этой функции времени.

Графики двух других функций времени

$$\begin{aligned}\Delta_H(t) &= \left| m_{e_{\text{см}}} + m_{e_d}(t) \right| - 1.6 \sqrt{D_{e_{\text{см}}} + D_{e_d}(t)} \\ \Delta_B(t) &= \left| m_{e_{\text{см}}} + m_{e_d}(t) \right| + 1.6 \sqrt{D_{e_{\text{см}}} + D_{e_d}(t)},\end{aligned}\tag{6.104}$$

совпадают с границами области, куда с доверительной вероятностью $P_d = 0.95$ попадает абсолютная погрешность результата измерений (6.1).

Целью одиннадцатого и двенадцатого этапов является анализ вклада отдельных составляющих в суммарную погрешность результата измерений. Это дает возможность оценить вес каждой из составляющих суммарной погрешности и правильно наметить пути и методы ее уменьшения.

Литература

1. Щепетов А.Г. Теория, расчет и проектирование измерительных устройств: в двух частях. Часть 1. Теория измерительных устройств. М: ФГУП «Стандартинформ» 2006 248 стр.
2. Щепетов А.Г. Автоматизация инженерных расчетов в среде Mathcad: практическое пособие – М:ФГУП «Стандартинформ» 2006. 264 стр.
3. Браславский Д.А. Петров В.В. Точность измерительных устройств. М: Машиностроение 1976г. 312 стр.
4. Пронкин Н.С. Основы метрологии динамических измерений: учебное пособие для вузов. М: Логос 2003г. 256 стр.