

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. Р. Никитин Е. А. Архипов Н. Н. Корнеева

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Учебное пособие к практическим занятиям



Владимир 2019

УДК 621.396.1
ББК 32.841
Н62

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
профессор кафедры биомедицинских и электронных
средств и технологий

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. П. Легаев

Кандидат технических наук
доцент кафедры информационных технологий
Российской академии народного хозяйства и государственной
службы при Президенте Российской Федерации
(Владимирский филиал РАНХиГС)
А. Н. Кисляков

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Никитин, О. Р. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб.
Н62 пособие к практ. занятиям / О. Р. Никитин, Е. А. Архипов,
Н. Н. Корнеева ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. –
Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 79 с. – ISBN 978-5-9984-1021-5.

Рассмотрены основные аналитические соотношения, позволяющие уяснить ключевые понятия дисциплины «Радиотехнические цепи и сигналы». Содержит контрольные задачи и задания по курсовой работе по спектральному анализу детерминированных сигналов, а также корреляционному анализу случайных сигналов, прошедших через линейные и нелинейные цепи, проанализированы вопросы согласованной фильтрации.

Предназначено для студентов высших учебных заведений очной и заочной форм обучения направления 11.03.01 – Радиотехника.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 22. Табл. 2. Библиогр.: 20 назв.

УДК 621.396.1
ББК 32.841

ISBN 978-5-9984-1021-5

© ВлГУ, 2019

ВВЕДЕНИЕ

«Радиотехнические цепи и сигналы» – это дисциплина, изучающая фундаментальные основы получения сигналов, их прохождения по каналам передачи, обработки и преобразования.

В курсе «Радиотехнические цепи и сигналы» используют современный аппарат теории случайных функций, теории вероятностей, математического моделирования, электродинамики, физики.

Основное содержание курса составляют:

- спектральный и корреляционный анализ сигналов;*
- статистический анализ случайных сигналов и помех;*
- преобразование сигналов в линейных цепях как апериодических, так и избирательных;*
- основные положения нелинейных устройств и преобразование в них сигналов;*
- оптимальная обработка сигналов на фоне помех.*

Предполагается, что студенты знакомы с основополагающими соотношениями элементов электрических цепей, а также теориями четырехполюсников и простейших электронных приборов, расчетами простейших электрических цепей.

1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Основные понятия и определения

Случайным процессом, сигналом $X(t)$ называется функция, значения которой в любой момент времени t – случайные величины. Фиксируя на определенном промежутке времени мгновенные значения случайного сигнала, получают реализацию случайного процесса. Совокупность таких реализаций $\{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_k(t)\dots\}$ образует статистический ансамбль, или ансамбль реализации. Случайные процессы, реализации которых зависят от конечного числа случайных параметров, называют квазидетерминированными.

Совокупность получаемых в отдельных реализациях величин $\{x_k(t_1)\}$, $K = (1; \infty)$ образует одномерное сечение данного случайного процесса. Плотность вероятности $p_1(x, t_1)$ случайной величины $X(t_1)$ называется одномерной плотностью вероятности процесса $X(t)$ в момент времени t_1 . Величина $dP = p_1(x, t_1) dx$ есть вероятность того, что реализации случайного процесса в момент времени t_1 примут значения, лежащие в интервале $(x; x + dx)$. В общем случае n -мерное сечение случайного процесса приводит к n -мерной плотности вероятности $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, которая должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) положительной определенности;
- 2) нормировки;
- 3) симметрии: плотность вероятности не должна меняться при любой перестановке аргументов x_1, x_2, \dots, x_n ;

- 4) согласованности: при любом $m < n$

$$P_m(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = \\ = \int \dots \int p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_{m+1} \dots dx_n.$$

Характеристическая функция связана с соответствующей плотностью преобразования Фурье:

- 1) одномерная характеристическая функция

$$\theta_1(j\nu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x, t) \exp\{j\nu x\} dx = M \{\exp[j\nu x]\}; \quad (1)$$

2) n -мерная характеристическая функция

$$\theta_n(j\nu_1, j\nu_2, \dots, j\nu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = M\{\exp[j\nu_1 x_1 + j\nu_2 x_2 + \dots + j\nu_n x_n]\}, \quad (2)$$

где $M\{\}$ – оператор математического ожидания.

Для характеристических функций также справедливо условие симметрии, а условия нормировки и согласованности принимает вид

$$\theta_n(0, 0, \dots, 0; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1;$$

$$\theta_m(j\nu_1, j\nu_2, \dots, j\nu_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = \theta(j\nu_1, j\nu_2, \dots, j\nu_m, 0, 0, \dots, 0; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Моменты функций случайных процессов. Начальные моментные функции:

1) одномерная начальная моментная функция k -го порядка – это математическое ожидание k -й степени случайной величины $X(t)$:

$$m_k(t) = M\{X^k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x, t) dx; \quad (3)$$

2) n -мерная начальная моментная функция 1-го порядка

$$\begin{aligned} m_{k_1 k_2 \dots k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= M\{X^{k_1}(t_1) X^{k_2}(t_2) \dots X^{k_n}(t_n)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4)$$

При $K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$.

Одномерная начальная моментная функция первого порядка

$$m_1(t) = M\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x, t) dx = m_x(t) \quad (5)$$

называется математическим ожиданием, или средним значением случайного процесса $\lambda(t)$. Широко используется также двумерная начальная моментная функция второго порядка:

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = M\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = B_x(t_1, t_2), \quad (6)$$

называемая ковариационной функцией случайного процесса $x(t)$.

Часто рассматривают n -мерные центральные моментные функции k -го порядка:

$$\begin{aligned} M_{k_1 k_2 \dots k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= M\{[X(t_1) - m_x(t_1)]^{k_1} [X(t_2) - m_x(t_2)]^{k_2} \dots [X(t_n) - m_x(t_n)]^{k_n}\} = \\ &= M\left\{ \overset{\circ}{X}^{k_1}(t_1) \overset{\circ}{X}^{k_2}(t_2) \dots \overset{\circ}{X}^{k_n}(t_n) \right\}, \quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\overset{\circ}{X}(t)$ – центрированный случайный процесс, $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$;

$\overset{\circ}{X}(t_i)$ – центрированная случайная величина, $\overset{\circ}{X}(t_i) = X(t_i) - m_X(t_i)$.

Двумерная центральная моментная функция второго порядка

$$M_{1,1}(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} = K_X(t_1, t_2) \quad (8)$$

называется корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$.

При $t_1 = t_2 = t$ функция $M_{1,1}(t_1, t_2)$ называется дисперсией $D(t)$:

$$D(t) = K_X(t, t) = B_X(t, t) - m_X^2(t) = M\{[X(t) - m_X(t)]^2\}, \quad (9)$$

которая позволяет определить среднеквадратичное отклонение случайного процесса $X(t)$:

$$\delta_X(t) = \sqrt{D_X(t)} = \sqrt{M\{[X(t) - m_X(t)]^2\}}. \quad (10)$$

Стационарные случайные процессы. Случайный процесс стационарен в узком смысле, если любая его n -мерная плотность вероятности инвариантна относительно временного сдвига τ :

$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Если же ограничить требования тем, чтобы математическое ожидание и дисперсия процесса не зависели от времени, а функция автокорреляции определялась только разностью $\tau = |t_2 - t_1|$, т. е. $K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau)$, то подобный процесс называют стационарным в широком смысле. Он эквивалентен тому, что одномерная плотность вероятности процесса не зависит от времени, а двумерная зависит от $\tau = |t_2 - t_1|$; $p(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1, x_2; \tau)$. Из определения стационарности следуют свойства корреляционной и ковариационной функций:

$$\begin{aligned} K_x(\tau) = K_x(-\tau); |K_x(\tau)| \leq K_x(0) = \delta_x^2 = D_x; \\ |B_x(\tau)| \leq B_x(0) = m_x^2 + D_x; B_x(\infty) = m_x^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Иногда используют нормированную функцию автокорреляции, называемую также коэффициентом корреляции случайного процесса:

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) / \delta_x^2; R_x(0) = 1. \quad (12)$$

Для нормального – гауссовского – случайного процесса оба понятия стационарности совпадают. В общем же случае процесс, стационарный в узком смысле, стационарен и в широком смысле, но не наоборот.

Важный класс стационарных процессов – эргодические случайные процессы, любая статистическая характеристика которых, полученная усреднением по времени одной реализации, эквивалентна характеристике, полученной усреднением по ансамблю реализаций. Из этого определения следует:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (13)$$

$$B_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt, \quad (14)$$

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x] dt. \quad (15)$$

Примеры и решения

Пример. Необходимо найти одномерную плотность распределения вероятностей процесса $x(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$, где ωt – постоянная угловая частота; α и β – взаимно независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_\alpha = m_\beta = 0$ и равными дисперсиями $D_\alpha = D_\beta = \beta^2$. Определите, стационарный ли это процесс в широком или узком смысле.

Решение. Случайная величина $x = x(t)$ при любом фиксированном значении t представляет собой линейную комбинацию гауссовских случайных величин и в силу этого также является гауссовской. Таким образом, для определения плотности вероятности $p_1(x, t)$ и стационарности процесса необходимо определить его математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2)$.

По определению для произвольного фиксированного момента времени t получаем

$$m_x(t) = M\{x(t)\} = M\{\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t\} = M\{\alpha\} \cos \omega t + M\{\beta\} \sin \omega t.$$

Поскольку по условию $M\{\alpha\} = m_\alpha = 0$; $M\{\beta\} = m_\beta = 0$, то $m_x = 0$.

Математическое ожидание не зависит от времени.

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= B_x(t_1, t_2) = M\{x(t_1)x(t_2)\} = \\ &= M\{[\alpha \cos \omega t_1 + \beta \sin \omega t_1][\alpha \cos \omega t_2 + \beta \sin \omega t_2]\} = \end{aligned}$$

$$= M\{\alpha^2\}\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + M\{\beta^2\}\sin\omega t_1\sin\omega t_2 + \\ + M\{\alpha\beta\}[\cos\omega t_1\sin\omega t_2 + \cos\omega t_2\sin\omega t_1].$$

Для гауссовских случайных величин независимость и некоррелированность эквивалентны, поэтому $M\{\alpha\beta\}=0$, тогда при условии $M\{\alpha^2\}=M\{\beta^2\}=\beta^2$ получаем $K_x(t_1, t_2)=\delta^2[\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + \sin\omega t_1\sin\omega t_2]=\delta^2\cos\omega(t_2-t_1)=K_x(\tau)$.

Таким образом, дисперсия $D_x=K_x(0)=\delta^2$ не зависит от времени, а автокорреляционная функция зависит только от $\tau=|t_2-t_1|$. Следовательно, процесс $X(t)$ стационарен в широком и узком смыслах.

Плотность вероятности рассматриваемого процесса не зависит от времени

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right).$$

Пример. Необходимо определить одномерную характеристическую функцию нормального стационарного случайного процесса $X(t)$, имеющего математическое ожидание m и дисперсию δ^2 .

Решение. По определению (1)

$$\theta_1(j\nu)=M\{e^{j\nu x}\}=\int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{j\nu x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}\right\}\exp\{j\nu x\}dx= \\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}+j\nu x\right\}dx.$$

Вводя замену переменной $y=(x-m)/\delta$ и дополняя показатель степени экспоненты до полного квадрата, получим

$$\theta_1(j\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\nu m}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}[y^2-2(j\nu\delta)y]\right\}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2\delta^2+j\nu m\right)\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}[y-(j\nu\delta)]^2\right\}dy.$$

Поскольку $1/\left(\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2/2)dt\right)=1$, то искомая характеристическая функция нормального случайного процесса

$$\theta_1(j\nu)=\exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2\delta^2+j\nu m\right). \quad (16)$$

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные понятия и определения

Автоковариационные и автокорреляционные функции и их свойства, определяемые соотношениями (6), (8), (11), (12), (14), (15), характеризуют среднюю мощность флуктуации (дисперсию), полную среднюю мощность процесса (второй начальный момент), а также статистическую связь между отсчетами процесса в моменты времени t и $t + \tau$.

Эта связь количественно оценивается величиной интервала корреляции τ_K , который определяют в зависимости от условий решаемой задачи (рис. 1).

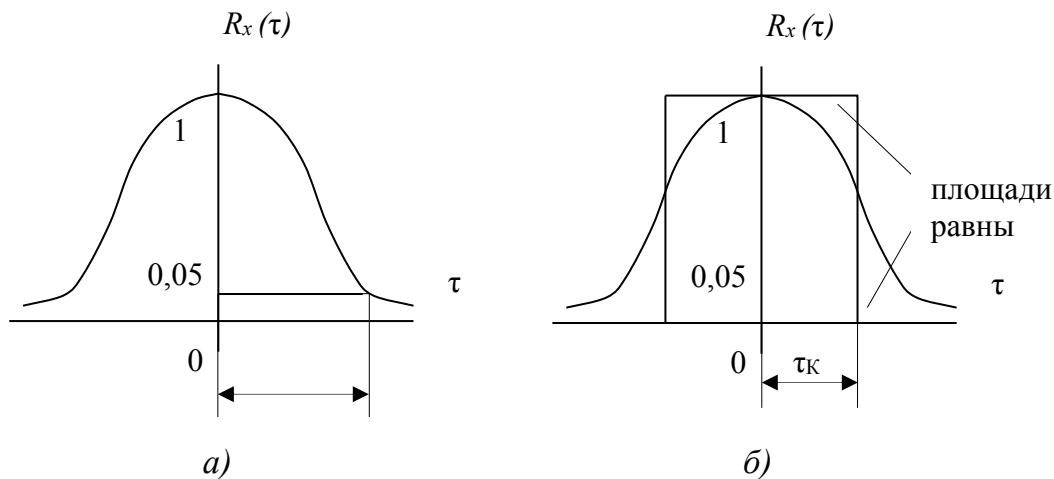


Рис. 1

По рис. 1, а τ_K определяется как решение уравнения

$$R_X(\tau_K) = 0,05, \quad (17)$$

а по рис. 1, б – в соответствии с формулой

$$\tau_K = \int_0^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau. \quad (18)$$

Для оценки статистической связи двух случайных процессов $X(t)$ и $y(t)$ используют взаимные ковариационные и взаимные корреляционные функции, которые для стационарно связанных процессов определяются следующими соотношениями:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = B_{XY}(\tau) = M\{X(t)Y(t + \tau)\}, \quad (19)$$

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(\tau) = M\{\dot{X}(t)\dot{Y}(t+\tau)\}, \quad (20)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{K_{xy}(\tau)}{\delta_x \delta_y}. \quad (21)$$

Распределение энергии в спектре стационарного случайного процесса характеризуется его энергетическим спектром или спектральной плотностью мощности $W(\omega)$, связанной с ковариационной функцией по теореме Винера – Хинчина преобразованиями Фурье:

$$\left. \begin{aligned} W_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \\ B_x(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для центрированного случайного процесса $\dot{X}(t) = X(t) - m_x$

$$W_{\dot{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \exp(j\omega\tau) d\tau = W_x(\omega) - 2\pi m_x^2 \delta(\omega), \quad (23)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\dot{x}}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (24)$$

Используя свойство четности $B_x(\tau)$ и $K_x(\tau)$, формулы (22) – (24) можно привести к виду

$$W_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (25)$$

$$B_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (26)$$

$$W_{\dot{x}}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (27)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_{\dot{x}}(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (28)$$

Выражения (22) – (28) называются формулами Винера – Хинчина.

Основные свойства спектральной плотности стационарного случайного процесса:

- 1) спектральная плотность положительна при любых частотах;

2) для вещественных случайных процессов спектральная плотность – четная функция.

Часто вместо спектра, фигурирующего в формулах Винера – Хинчина и называемого двухсторонним – для положительных и отрицательных частот, вводят одностороннюю «физическую» спектральную плотность $W_1(f) = [W(\omega) + W(-\omega)] = 2W(\omega)$, $f = \omega/2\pi$, отличную от нуля лишь при положительных частотах $f > 0$, тогда формулы Винера – Хинчина принимают вид

$$W_x(f) = 4 \int_0^{\infty} B_x(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad (29)$$

$$B_x(\tau) = \int_0^{\infty} W_x(f) \cos 2\pi f \tau df, \quad (30)$$

$$W_{\dot{x}}(f) = 4 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad (31)$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} W_{\dot{x}}(f) \cos 2\pi f \tau df. \quad (32)$$

Соотношения (22) – (32) справедливы и для взаимных корреляционных и спектральных функций.

Наиболее употребительны на практике следующие параметры спектральных плотностей:

1) эффективная ширина спектра:

$$\Delta\omega_{\text{э}} = \frac{1}{W(0)} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega; \quad (33)$$

2) средняя частота спектральной плотности:

$$m_{\omega} = M\{\omega\} = \frac{2}{\delta^2} \int_0^{\infty} \omega W(\omega) d\omega; \quad (34)$$

3) средний квадрат частоты:

$$m_{2\omega} = M\{\omega^2\} = \frac{2}{\delta^2} \int_0^{\infty} \omega^2 W(\omega) d\omega; \quad (35)$$

4) средняя квадратическая ширина спектральной плотности δ_{ω} :

$$\delta_{\omega}^2 = \frac{2}{\delta^2} \int_0^{\infty} (\omega - m_{\omega})^2 W(\omega) d\omega. \quad (36)$$

Примеры и решения

Пример. Необходимо найти корреляционную функцию и спектральную плотность для случайного сигнала $x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где A_0 и ω_0 – постоянные амплитуда и частота; φ – случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. По определению корреляционной функции

$$K_x(\tau) = M\{x(t)x(t+\tau)\} - m^2.$$

Поскольку $m = M\{x(t)\} = 0$, то $K_x(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} A_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \times$

$$\times \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) p_1(\varphi) d\varphi = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) d\varphi.$$

Учитывая, что $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, находим

$$K_x(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \text{ Спектральная плотность вычисляется по формуле}$$

Винера – Хинчина

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \frac{A_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau =$$

$$= \frac{A_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp\{j(\omega_0 - \omega)\tau\} + \exp\{-j(\omega_0 - \omega)\tau\}] d\tau.$$

Так как $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega\tau) d\tau = \delta(\omega)$, окончательно получим

$$W(\omega) = \frac{\pi A_0^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$$

Пример. Необходимо выяснить разницу между спектральными плотностями случайных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с корреляционными функциями

$$K_1(\tau) = \delta^2 \exp(-\alpha|\tau|); \quad K_2(\tau) = \delta^2 [\exp(-\alpha|\tau|)] \cos \omega_0 \tau.$$

Решение. Функция корреляции $K_1(\tau)$ является частным случаем функции $K_\delta(\tau)$. Поэтому сначала найдем спектральную плотность $W_2(\omega)$ по формуле Винера – Хинчина:

$$W_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-\alpha|\tau| - j\omega\tau)] \cos \omega_0 \tau d\tau =$$

$$= \delta^2 \int_{-\infty}^0 [\exp(\alpha\tau - j\omega\tau)] \cos \omega_0 \tau d\tau + \int_0^{\infty} [\exp(-\alpha\tau - j\omega\tau)] \cos \omega_0 \tau d\tau.$$

Учитывая, что $\cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2}(\exp\{j\omega_0 \tau\} + \exp\{-j\omega_0 \tau\})$, получаем

$$W_2(\omega) = \frac{\delta^2}{2} \int_{-\infty}^0 \exp\{[\alpha - j(\omega - \omega_0)]\tau\} d\tau + \int_{-\infty}^0 \exp\{[\alpha - j(\omega + \omega_0)]\tau\} d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty} \exp\{[-\alpha - j(\omega - \omega_0)]\tau\} d\tau + \int_0^{\infty} \exp\{[-\alpha - j(\omega + \omega_0)]\tau\} d\tau =$$

$$= \alpha \delta^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

Рассмотрим поведение функции $W_2(\omega)$:

- 1) при $|\omega| \rightarrow \infty$; $W_2(\omega) \rightarrow 0$;
- 2) при $3\omega_0^2 < \alpha^2$ у функции $W_2(\omega)$ в области положительных частот нет максимума, она монотонно убывает с ростом частоты (рис. 2, а);
- 3) если $3\omega_0^2 > \alpha^2$, то $W_2(\omega)$ имеет максимум в точке ω_m (рис. 2, б);
- 4) при $3\omega_0^2 \gg \alpha^2$ максимум $W_2(\omega)$ имеется в точке $|\omega| \approx \omega_0$ (рис. 2, в).

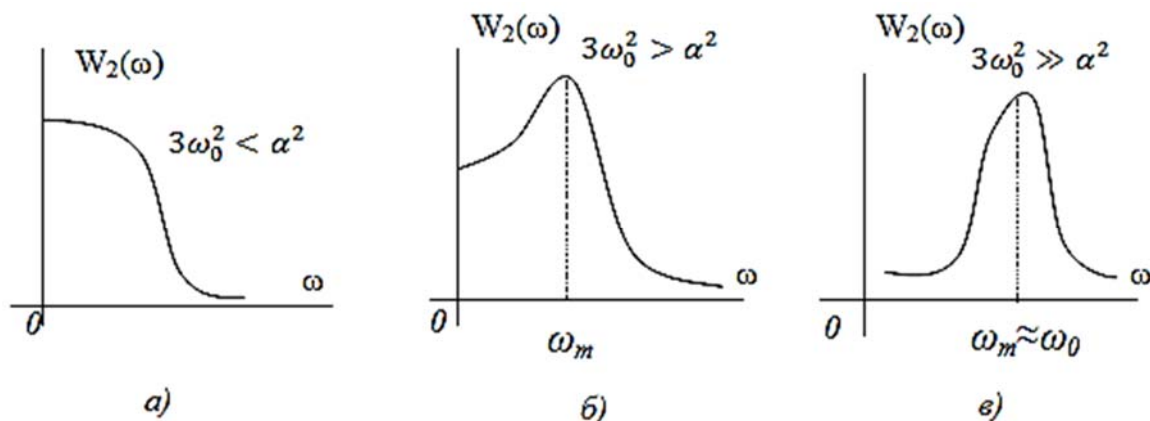


Рис. 2

Полагая $\omega_0 = 0$, из $W_2(\omega)$ получим $W_1(\omega) = \sigma^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Графики функций $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$, $W_1(\omega)$, $W_2(\omega)$ приведены на рис. 3.

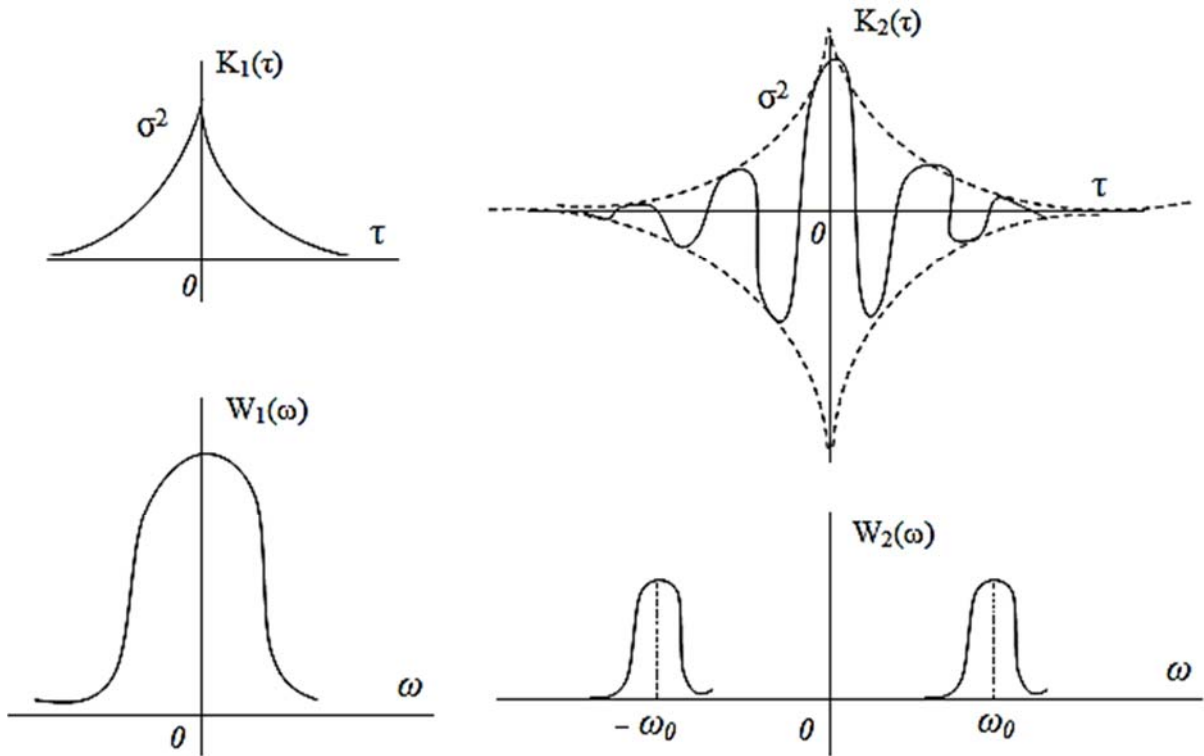


Рис. 3

Типы решаемых задач

По заданному энергетическому спектру стационарного случайного процесса можно найти ковариационную или корреляционную функцию случайного процесса, среднее значение, дисперсию, интервал корреляции, эффективную ширину спектра, среднюю частоту и другие параметры спектра. Используя формулы Винера – Хинчина, эти характеристики можно определить, зная ковариационную функцию исследуемого процесса. По записи квазидетерминированного процесса обычно определяют корреляционную функцию, спектральную плотность, параметры этих функций, а также проверяют выполнение условий стационарности процесса.

3. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Основные понятия и определения

Для преобразования случайных процессов линейными системами можно использовать:

- аппарат дифференциальных уравнений, когда важны как нестационарные, так и стационарные режимы работы системы, а также когда начальные условия в системе не нулевые;
- импульсные характеристики – при нулевых начальных условиях;
- комплексные частотные характеристики систем, когда изучают лишь стационарное состояние линейной системы.

Математическое ожидание и корреляционная функция на выходе системы при нулевых начальных условиях определяются интегралом Дюамеля:

$$m_{\eta}(t) = \int_0^t g(t - \tau) m_{\xi}(\tau) d\tau, \quad (37)$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g(t_1 - \tau_1) g(t_2 - \tau_2) K_{\xi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (38)$$

где $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ – процессы соответственно на входе и выходе системы с импульсной характеристикой $g(t)$.

Если процесс на входе стационарный, то (37) и (38) принимают следующий вид:

$$m_{\eta}(t) = m_{\xi} \int_0^t g(t - \tau) d\tau = m_{\xi} \int_0^t g(x) dx, \quad (39)$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g(t_1 - \tau_1) g(t_2 - \tau_2) K_{\xi}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (40)$$

Для установившегося режима на выходе линейной системы получим

$$m_{\eta}(t) = m_{\xi} \int_0^{\infty} g(x) dx, \quad (41)$$

$$K_{\xi}(\tau) = \int_0^{\infty} g(x) dx \int_0^{\tau+t} g(\tau + x - z) K_{\xi}(z) dz. \quad (42)$$

Спектральная плотность процесса на выходе стационарной системы с коэффициентом передачи $K(j\omega)$ определяется соотношением

$$W_{\eta}(\omega) = W_{\xi}(\omega) |K(j\omega)|^2. \quad (43)$$

Если процесс на входе системы гауссовский, то, определив корреляционные функции и математическое ожидание процесса на выходе, можно записать закон распределения на выходе системы – он также гауссовский.

Примеры и решения

Пример. На вход дифференцирующего устройства поступает случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_{\xi}(t) = \sin \beta t$ и корреляционной функцией $K_{\xi}(t_1, t_2) = D_{\xi} \exp[-\alpha(t_2 - t_1)^2]$. Необходимо определить математическое ожидание и дисперсию процесса $\eta(t)$ на выходе системы.

Решение. Случайный процесс $\eta(t)$ на выходе системы «отклик – реакция» связан с воздействием $\xi(t)$ оператором дифференцирования: $\eta(t) = d\xi(t)/dt$. Используя принцип суперпозиции, получим

$$m_{\eta}(t) = \frac{d}{dt} [m_{\xi}(t)] = \beta \cos \beta t.$$

Корреляционная функция на выходе дифференцирующего устройства определяется формулой

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} [K_{\xi}(t_1, t_2)] = 2D_{\xi} \alpha e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2} [1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2].$$

Полагая $t_2 = t_1 = t$, находим $K_{\eta}(t_1, t_2) = D_{\eta}(t) = 2\alpha D_{\xi}$.

Пример. На интегрирующую RC-цепь, начиная с момента времени $t = 0$ воздействует случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой стационарный белый шум с математическим ожиданием m_{ξ} и корреляционной функцией

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (44)$$

Необходимо определить математическое ожидание и корреляционную функцию сигнала $\eta(t)$, на выходе цепи – напряжение на емкости C .

Решение. Импульсная характеристика RC-цепи $g(t) = \alpha \exp(-\alpha t)$, где $\alpha = 1/RC$. По формуле (40) получаем

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \alpha \beta^{-\alpha(t_1 - \tau_1)} \alpha e^{-\alpha(t_2 - \tau_2)} \frac{N_0}{2} \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \frac{N_0 \alpha^2}{2} e^{-\alpha(t_1 + t_2)} \int_0^{t_1} \left\{ \int_0^{t_2} e^{\alpha \tau_2} \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 \right\} d\tau_1.$$

После замены переменной $t_2 t_1 = \tau$ и $t_1 = t$ получаем

$$K_{\eta}(t, \tau) = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha(2t + \tau)} \left[e^{2\alpha t} - 1 \right] = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|} \left(1 - e^{-2\alpha t} \right).$$

Отсюда, полагая $\tau = 0$, находим дисперсии процесса на выходе:

$$D_{\eta}(t) = \frac{N_0 \alpha}{4} \left[1 - e^{-2\alpha t} \right].$$

Графики зависимостей $m_{\eta}(t)$ и $D_{\eta}(t)$ (рис. 4) показывают, что дисперсия достигает уровня $0,95 D_{\eta}(\infty)$ за время $t_y = 1,5RC$, т. е. вдвое быстрее, чем математическое ожидание $m_{\eta}(t)$ достигает уровня $0,95 D_{\eta}(\infty)$.

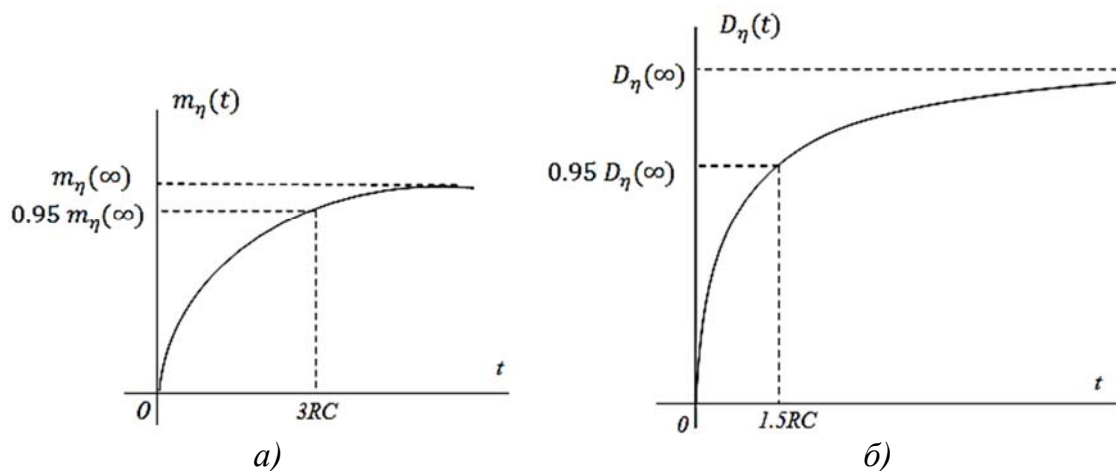


Рис. 4

В стационарном режиме ($t = \infty$) $m_{\eta} = m_{\xi}$; $K_{\eta}(t, \tau) = K_{\eta}(\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|}$;

$$D_{\eta}(t) = D_{\eta} = \frac{\alpha N_0}{4}.$$

Вывод. Если на выходе линейной цепи действует белый шум, то в установившемся режиме при $\tau \geq 0$ корреляционная функция на выходе цепи повторяет по форме импульсную характеристику цепи. Этот факт используется при формировании случайных сигналов с заданными корреляционными свойствами.

Пример. На последовательную LR-цепь воздействует напряжение $\xi(t)$, представляющее собой белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией (44). Необходимо найти спектральную плотность и корреляционную функцию напряжения $\eta(t)$ на сопротивлении цепи.

Решение. По теореме Винера – Хинчина находим

$$W_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) \exp(j\omega\tau) d\tau = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Комплексный коэффициент передачи цепи $K(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau_0)$, где $\tau_0 = L/R$, а квадрат его модуля $|K(j\omega)|^2 = 1/[1 + (\omega\tau_0)^2]$.

Находим спектральную плотность на выходе цепи

$$W_{\eta}(\omega) = W_{\xi}(\omega) |K(j\omega)|^2 = N_0 / [2(1 + \omega^2\tau_0^2)], \quad -\infty < \omega < \infty.$$

По формуле Винера – Хинчина вычисляем корреляционную функцию

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\eta}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint W_{\eta}(p) e^{p\tau} dp,$$

где $p = j\omega$; $W_2(p) = N_0 / [2(1 - p^2\tau_0^2)]$.

Используя теорему о вычетах, получим следующие значения вычетов в полюсах подынтегрального выражения $p_{1,2} = \pm 1/\tau$:

$$res_1 = -\frac{N_0}{4\tau_0} \exp\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right); \quad res_2 = \frac{N_0}{4\tau_0} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

Учитывая, что корреляционная функция получена для установившегося режима, когда процесс на выходе стационарный, видим, что первый вычет не соответствует реальному процессу. Тогда окончательно

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{N_0}{4\tau_0} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right).$$

Типы решаемых задач

Основные задачи, связанные с преобразованием случайных сигналов линейными системами, можно разбить на две группы:

1. Задачи корреляционной теории случайных процессов, при решении которых определяют математические ожидания, корреля-

ционные функции и спектральные плотности процессов на выходе линейных систем как в переходном, так и в установившемся режимах.

2. Задачи, требующие определения функций распределения выходного случайного процесса. Они не имеют общего решения за исключением воздействия на систему нормального процесса, поскольку такие процессы полностью описываются в рамках корреляционной теории.

4. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Основные понятия и определения

Простейшее нелинейное преобразование случайного процесса – безынерционное, или функциональное, при котором значение выходного процесса в любой момент времени определяется только значением входного процесса в тот же момент времени

$$\eta(t) = \eta[\xi(t)]. \quad (45)$$

К случайному процессу вводятся также нелинейные преобразования, при которых входной $\xi(t)$ и выходной $\eta(t)$ процессы подвергаются дополнительной трансформации линейными системами, не влияющими на линейный элемент, – так можно представить модель типового радиотехнического устройства (рис. 5).

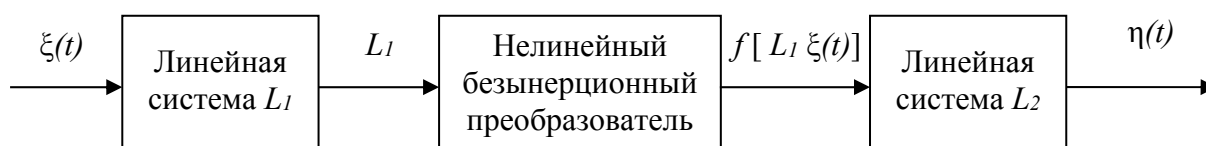


Рис. 5

При изучении указанных нелинейных преобразований достаточно рассмотреть преобразование (45), поскольку правила преобразования характеристик случайных процессов линейными системами известны.

Плотность вероятности выходного сигнала нелинейного преобразователя измеряется на основе свойства инвариантности дифференциала вероятности. Если ξ_1, \dots, ξ_n – отсчеты случайного процесса $\xi(t)$, наблюдаемые в моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, то на выходе безынерционного нелинейного элемента в те же моменты времени значения сигнала $\eta_1 = f(\xi_1), \eta_2 = f(\xi_2), \dots, \eta_n = f(\xi_n)$.

Применив обратную функцию $\xi = \varphi(\eta)$, получим $\xi_1 = \varphi(\eta_1), \xi_2 = \varphi(\eta_2), \dots, \xi_n = \varphi(\eta_n)$. Тогда многомерная плотность вероятности на выходе $P_{\text{вых}}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = P_{\text{вх}}[\varphi(\eta_1), \varphi(\eta_2), \dots, \varphi(\eta_n)]|D|$. Причем якобиан D имеет очень простой вид:

$$D = \left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{\eta = \eta_1}, \left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{\eta = \eta_2}, \dots, \left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{\eta = \eta_n}.$$

В случае многозначных обратных функций следует суммировать вклады от всех ветвей этих функций.

Корреляционная функция выходного сигнала вычисляется по формуле

$$K_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)f(\xi_{\tau})P_{\text{вх}}(\xi, \xi_{\tau}, \tau)d\xi d\xi_{\tau} - m_{\eta}^2. \quad (46)$$

Вычисления по соотношению (46) достаточно сложны, поэтому требуют знания двумерной плотности вероятности входного сигнала. Некоторые методы вычисления корреляционных функций и спектральных плотностей сигналов после нелинейного безынерционного преобразования приведены в списке рекомендуемой литературы.

В методе характеристических функций вычисляется ковариационная функция выходного сигнала

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \oint \oint F(ju_2)F(ju_1)\theta_2(u_1, u_2)du_1 du_2, \quad (47)$$

где $F(ju)$ – прямое преобразование Фурье нелинейной функции $f(\xi)$, $F(ju) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\exp(-ju\xi)d\xi$; $\theta_2(u_1, u_2)$ – двумерная характеристическая функция входного воздействия $\xi(t)$.

Примеры и решения

Пример. На входе безынерционного нелинейного элемента с кусочно-линейной характеристикой (рис. 6) действует гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением и дисперсией δ^2 :

$$\eta = \begin{cases} a\xi, & \text{при } \xi \geq 0, \\ 0, & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

Плотность вероятности входного сигнала

$$P_{\text{вх}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right).$$

Необходимо вычислить плотность вероятности сигнала на выходе.

Решение. При $\xi \geq 0$ обратная функция имеет вид $\xi = \eta/a$, таким образом $|D| = 1/a$. Поэтому $P_{\text{вых}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta a} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2 a^2}\right)$ при $\eta \geq 0$.

Любому отрицательному значению ξ соответствует единственное значение $\eta = 0$. Для того чтобы обеспечить нормировку плотности вероятности на выходе, следует дополнить плотность вероятности $P_{\text{вых}}(\eta)$ слагаемым, содержащим произведение δ -функции $\delta(\eta)$ и вероятности того, что $\eta = 0$, равной в данном случае 0,5. Окончательно

получим (рис. 7) $P_{\text{вых}}(\eta) = 0,5\delta(\eta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta a} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2 a^2}}, \eta \geq 0$.

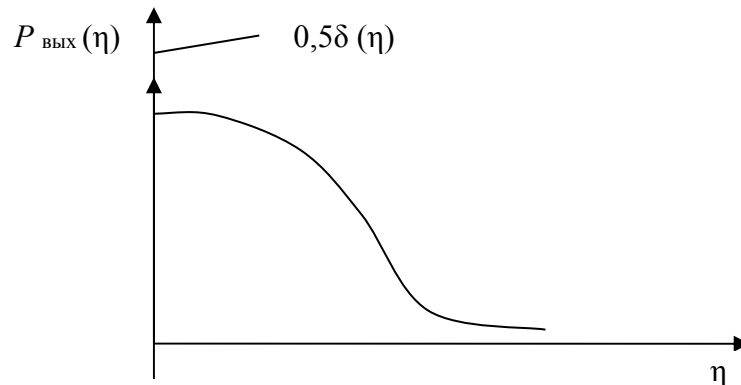


Рис. 7

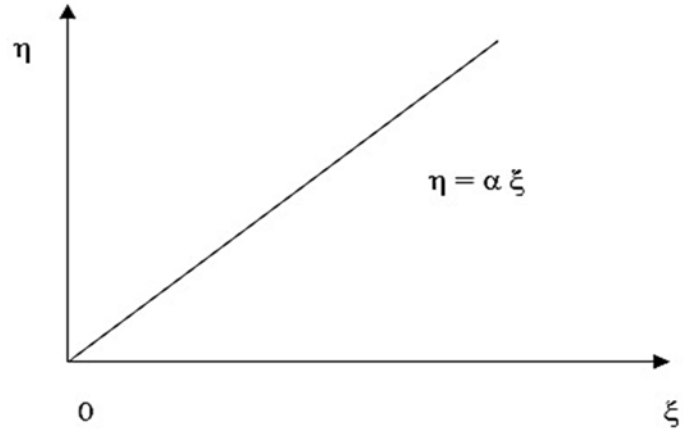


Рис. 6

Принципиально важно, что, подав на вход нелинейной системы гауссовский сигнал, на выходе наблюдается процесс негауссовского вида.

Среднее значение сигнала на выходе безынерционного нелинейного преобразователя определяется по формуле

$$m_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta P_{\text{вых}}(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P_{\text{вх}}(\xi) d\xi. \quad (48)$$

Пример. Необходимо найти среднее значение сигнала на выходе системы, описанной в предыдущем примере.

Решение. По формуле (48) находим

$$m_{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta P_{\text{вых}}(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P_{\text{вх}}(\xi) d\xi = \frac{a\sigma}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,399a\sigma.$$

Отсюда измерить дисперсию стационарных гауссовских процессов можно с помощью нелинейного преобразователя с характеристикой, показанной на рис. 6, и каскадно включенной линейной инерционной цепи – фильтра низких частот, выполняющего операцию усреднения по времени.

Типы решаемых задач

При изучении нелинейного безынерционного преобразования случайных сигналов могут быть применены два частных подхода:

1. По известной многомерной плотности вероятности входного сигнала и заданной характеристике нелинейности отыскивается многомерная плотность вероятности выходного сигнала.

2. Исследование проводится в рамках корреляционной теории: ищутся математическое ожидание и корреляционная функция выходного сигнала. Наряду с функцией корреляции интерес может представлять энергетический спектр выходного сигнала.

5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ. СОГЛАСОВАННЫЕ ФИЛЬТРЫ

Основные понятия и определения

Основные задачи обработки сигналов в условиях действия помех – обнаружение сигнала на фоне помех; определение параметров сигнала; различение сигналов; воспроизведение формы сигнала; прогнозирование – экстраполяция сигналов.

Оптимальная линейная фильтрация по критерию максимума отношения сигнал/шум (С/Ш) при известной форме сигнала называется согласованной фильтрацией. Считают, что на вход линейного фильтра с коэффициентом передачи $K(j\omega)$ поступает аддитивная смесь $x(t) = S(t) + n(t)$, где $S(t)$ – статистически независимый от помехи полезный сигнал, форма которого, или спектральная плотность $S(j\omega)$, заранее известна; $n(t)$ – стационарный случайный сигнал со спектральной плотностью $W_n(\omega)$ – помеха. Тогда, согласно принципу суперпозиции, сигнал на выходе фильтра $y(t) = S_{\text{ВЫХ}}(t) + n_{\text{ВЫХ}}(t)$ и равен результату преобразования полезного сигнала и помехи линейным фильтром. Сигнальная составляющая представляет собой соотношение

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (49)$$

а дисперсия выходного шума – формулу

$$D_{\text{ВЫХ}} = \delta_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega. \quad (50)$$

Отношение С/Ш на выходе фильтра вычисляют обычно в момент окончания полезного сигнала ($t = T_c$):

$$a = (C/Ш)_{\text{ВЫХ}} = |S_{\text{ВЫХ}}(T_c)| / \delta_{\text{ВЫХ}}. \quad (51)$$

Коэффициент передачи оптимального фильтра, максимизирующего отношение (51),

$$K_0(j\omega) = c \frac{S^*(j\omega)}{W_n(j\omega)} e^{-j\omega T_c}, \quad (52)$$

где c – некоторая постоянная; $S^*(j\omega)$ – функция, комплексно-сопряженная со спектральной плотностью $S(j\omega)$ полезного входного сигнала $S(t)$. Если помеха – стационарный белый шум со спектральной плотностью $W_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$, то формула (52) принимает вид

$$K_0(j\omega) = S^*(j\omega)e^{-j\omega T_c}. \quad (53)$$

В этом случае импульсная характеристика согласованного фильтра

$$h_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = KS(T_c - t), \quad (54)$$

а сигнал на его выходе

$$S_{\text{вых}}(t) = K \int_0^t S(T_c - \tau)S(t - \tau) d\tau, \quad (55)$$

где K – некоторая постоянная величина, имеющая смысл коэффициента усиления.

Максимальное отношение С/Ш на выходе согласованного фильтра определяется выражением

$$(C/Ш)_{\text{вых}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)K_0(j\omega)e^{j\omega T_c} d\omega \right|}{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) |K_0(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}}. \quad (56)$$

Для проверки физической реализуемости фильтра с оптимальным коэффициентом передачи можно воспользоваться критерием Пэли – Винера:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K(j\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (57)$$

Знание $K_0(j\omega)$ или $h_0(t)$ позволяет синтезировать структуру согласованного фильтра.

Примеры и решения

Пример. На вход линейного фильтра воздействует аддитивная смесь $x(t) = S(t) + n(t)$, где $n(t)$ – стационарный гауссовский белый

шум; $S(t)$ – статистически независимый от шума экспоненциальный видеоимпульс, $S(t) = A \exp[\alpha(t - T)]$, $t \leq T$ (рис. 8).

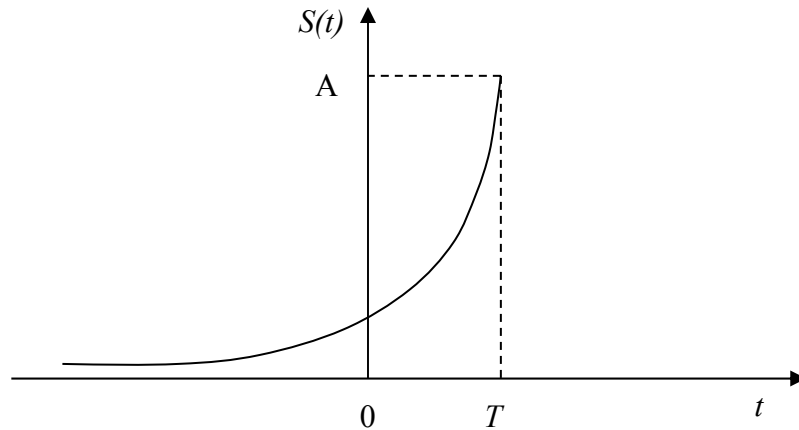


Рис. 8

Необходимо определить коэффициент передачи согласованного с этим сигналом фильтра и предложить его реализацию.

Решение. Вычисляем спектр сигнала $S(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{\alpha - j\omega} e^{-j\omega T}.$$

Используя соотношение (53), находим искомый коэффициент передачи

$$K_0(j\omega) = KS(j\omega)\exp(-j\omega T) = K_1 / (\alpha + j\omega).$$

Таким образом, фильтр, согласованный с данным сигналом, может быть реализован в виде RC-цепи (рис. 9), у которой $RC = 1/\alpha$.

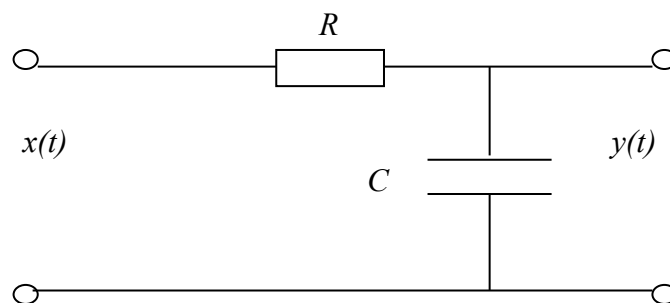


Рис. 9

Пример. Необходимо определить коэффициент передачи фильтра, согласованного с так называемым гауссовским импульсом:

$$S(t) = A \exp\left(-\frac{(2t)^2}{\tau_u^2}\right), \quad (58)$$

где t_u – длительность импульса на уровне A/e . Также следует проверить физическую реализуемость фильтра.

Решение. Вычисляем спектр импульса (58):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt = b \exp\left\{-\frac{f^2}{\Delta f^2}\right\},$$

где Δf – ширина спектра $S(\omega)$ на уровне f/e , $\Delta f \approx 2,25/\tau_u$.

Используя формулу (53), находим

$$K_0(j\omega) = K_0 \exp\left[-\left(\frac{f}{\Delta f}\right)^2 - j\omega T\right].$$

После подстановки полученного коэффициента передачи в соотношение (57) убеждаемся, что фильтр с гауссовской частотной характеристикой физически нереализуем, так как интеграл в формуле (57) расходится.

Пример. Необходимо найти фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом. Имея амплитуду A и длительность τ_u , вычислить отношение С/Ш на его выходе.

Решение. Спектр прямоугольного видеоимпульса

$$S(j\omega) = A \int_0^{\tau_u} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_u}).$$

Таким образом, коэффициент передачи фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом, имеет вид ($\tau_u = T_c$). Схема такого фильтра приведена на рис. 10.

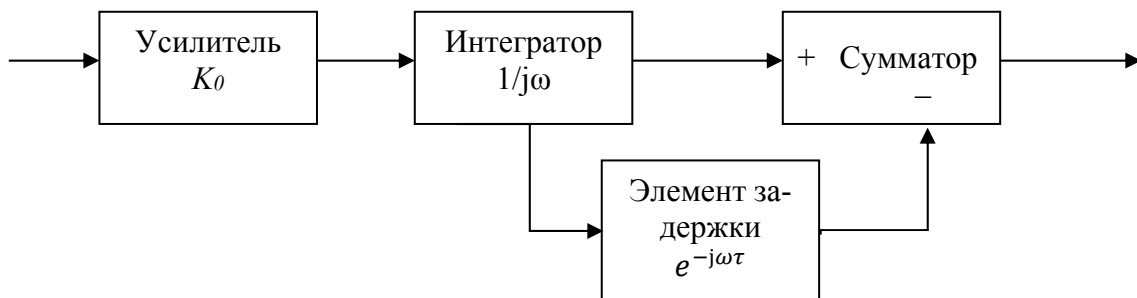


Рис. 10

Определим сигнал на выходе фильтра. По формуле (55) видно, что сигнал на выходе по форме повторяет корреляционную функцию

входного сигнала, отнесенную вправо на величину T_c . Следовательно, максимальное значение сигнал на выходе имеет в момент времени $t = T_c : S_{\text{ВЫХ}}(T_c) = K_0 A^2 \tau_u = KE$, где E – энергия сигнала $S(t)$, $E = A^2 \tau_u$.

Вычислим дисперсию шума на выходе согласованного фильтра, полагая, что помеха на входе – белый шум со спектральной плотностью $W_n(\omega) = N_0/2$, $-\infty < \omega < \infty$.

Тогда

$$D_{\text{ВЫХ}} = \delta_{\text{ВЫХ}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} W_n(\omega) |K_0(j\omega)|^2 d\omega = \frac{K_0^2 N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega \tau_u) d\omega = K_0^2 E \frac{N_0}{2}.$$

Отсюда максимальное отношение С/Ш на выходе

$$a_{\text{max}} = \frac{[S_{\text{ВЫХ}}(t)]}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{N_0}}. \quad (59)$$

Пример. На вход интегрирующей RC-цепи (см. рис. 9) воздействует аддитивная смесь статистически независимых стационарного гауссовского белого шума со спектральной плотностью $W_n(\omega) = N_0/2$, $-\infty < \omega < \infty$ и прямоугольного видеоимпульса с амплитудой U и длительностью τ_u .

Необходимо вывести соотношение, связывающее максимальное отношение С/Ш на выходе RC-цепи с длительностью импульса τ_u и эффективной шумовой полосой цепи; определить, в каком соотношении должны находиться длительность импульса и оптимальная эффективная шумовая полоса $\Delta f_{3, \text{опт}}$, при которой на выходе RC-цепи имеет место максимальное отношение С/Ш.

Решение. В соответствии с теоремой Винера – Хинчина дисперсия стационарного шума на выходе RC-цепи

$$D_{\text{ВЫХ}} = \delta_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{n \text{ Вых}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega.$$

Подставляя в это выражение $K(j\omega) = 1/(1 + j\omega RC)$, находим

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{N_0}{4RC} = N_0 \Delta f_3 / 2,$$

где Δf_3 – эффективная шумовая полоса RC-цепи, $\Delta f_3 = 1/2RC$.

Полезный сигнал на выходе рассматриваемого фильтра

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t h(t - \tau) S(\tau) d\tau.$$

После вычислений находим $S_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t h(t-\tau)S(\tau)d\tau$,

где $h(t) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha t), & \text{при } t \geq 0, \alpha = 1/RC; \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$

После вычислений находим

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = U(1 - e^{-\alpha t})l(t) - U(1 - e^{-\alpha(t-\tau_u)})l(t - \tau_u),$$

где $l(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$

В момент окончания входного импульса значение сигнала на выходе максимально:

$$[S_{\text{ВЫХ}}(t)]_{\text{max}} = S_{\text{ВЫХ}}(\tau_u) = U \left(1 - e^{-\frac{\tau_u}{RC}} \right).$$

Тогда максимальное отношение С/Ш на выходе

$$a = \frac{[S_{\text{ВЫХ}}(t)]_{\text{max}}}{\sigma_{\text{ВЫХ}}} = U \sqrt{\frac{2}{N_0 \Delta f_3}} (1 - e^{-2\Delta f_3 \tau_u}).$$

Для определения зависимости между длительностью импульса τ_u и оптимальной эффективной шумовой полосой Δf_3 необходимо вычислить производную от a по Δf_3 :

$$\frac{da}{d\Delta f_3} = U \sqrt{\frac{2}{N_0}} \left[2\tau_u (\Delta f_3)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\Delta f_3 \tau_u} + \frac{1}{2} (\Delta f_3)^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-2\Delta f_3 \tau_u}) \right].$$

Приравнявая эту производную нулю, получим $\tau_u \Delta f_{3,\text{опт}} = \frac{1}{2} \ln[4\tau_u \Delta f_{3,\text{опт}} + 1]$, откуда $\Delta f_{3,\text{опт}} \approx 0,628/\tau_u$.

При этом отношение С/Ш на выходе цепи

$$a_{\text{max}} = 0,9 \sqrt{2U^2 \tau_u / N_0} = 0,9 \sqrt{2E / N_0},$$

где E – энергия входного сигнала, $E = U^2 \tau_u$.

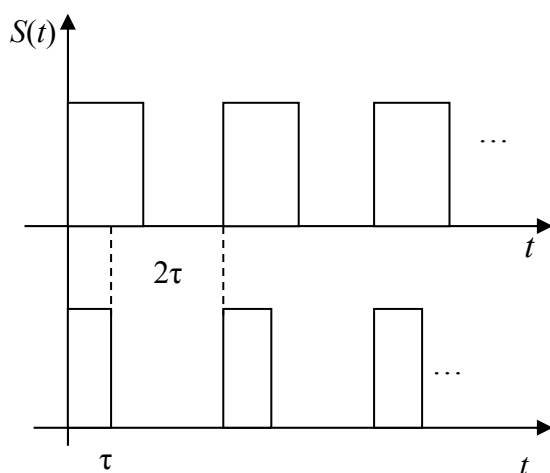
Типы решаемых задач

Задачи этого раздела связаны с поиском импульсной характеристики или передаточной функции согласованного фильтра по заданным характеристикам полезного сигнала и помехи, проверкой физической реализуемости такого фильтра, разработкой структуры оптимального или квазиоптимального фильтра и определением максимального отношения С/Ш на выходе фильтра. В ряде случаев важно установить соотношения между основными параметрами сигнала и фильтра, а также параметрами входного и выходного сигналов – как для оптимального, так и квазиоптимального фильтров.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

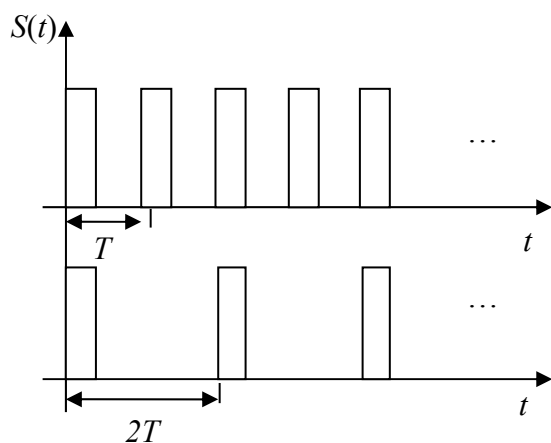
Задача 1

Найти спектры последовательностей прямоугольных импульсов.



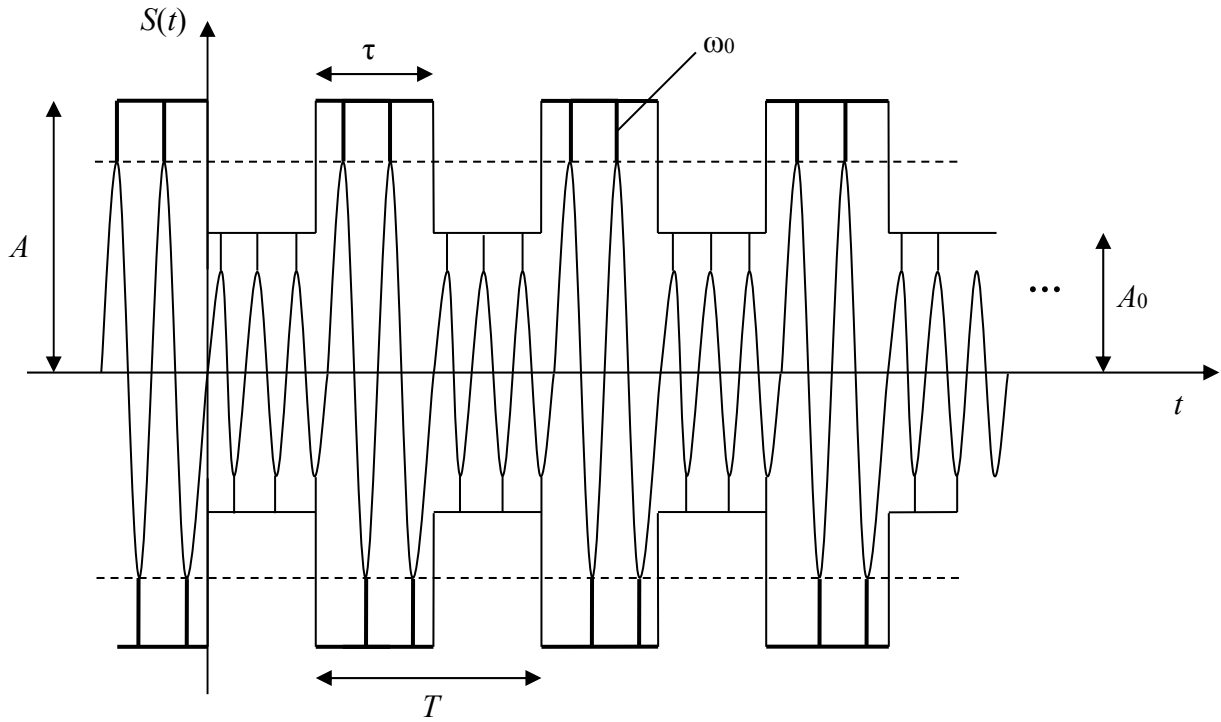
Задача 2

Найти спектры последовательностей прямоугольных импульсов.



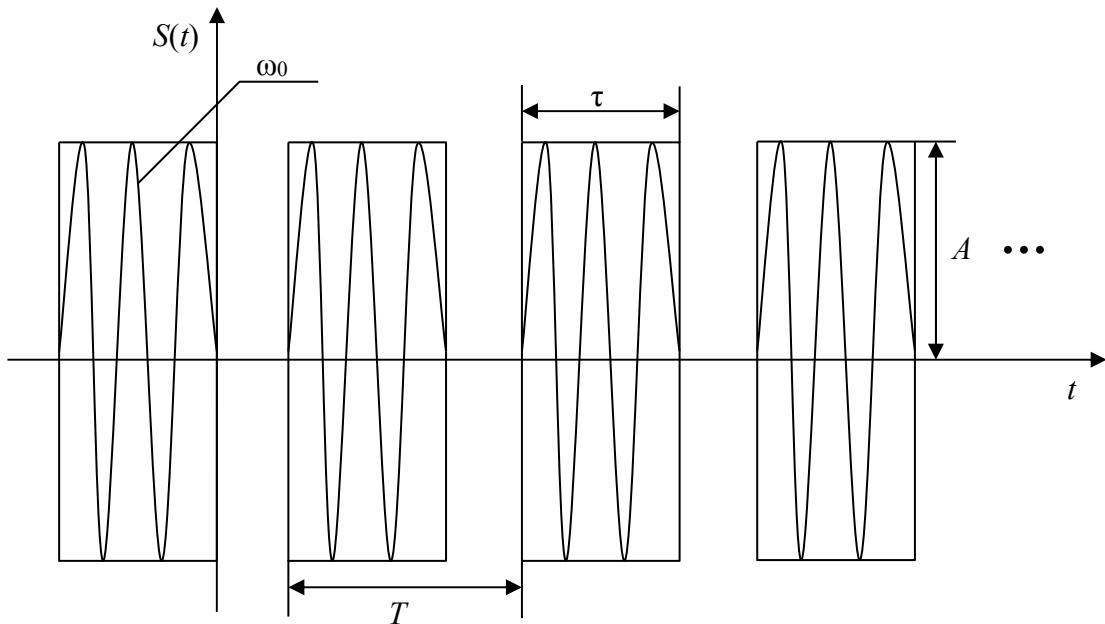
Задача 3

По данному сигналу найти его спектр.



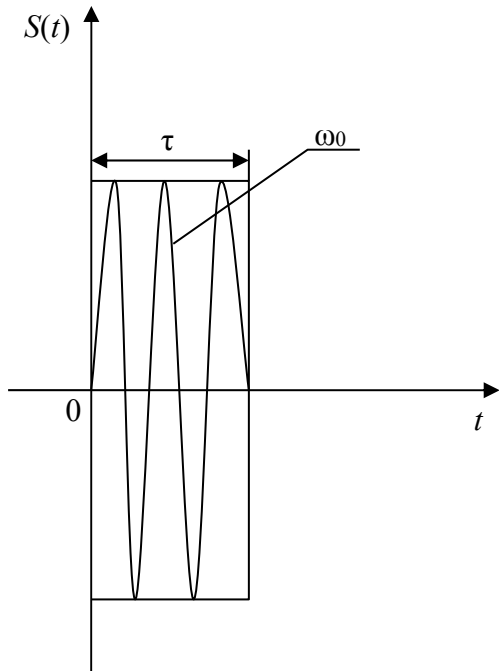
Задача 4

По данному сигналу найти его спектр.



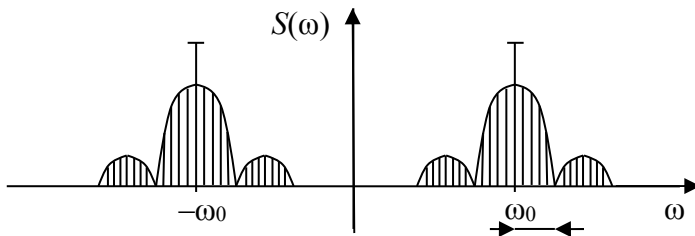
Задача 5

По данному сигналу найти его спектр.



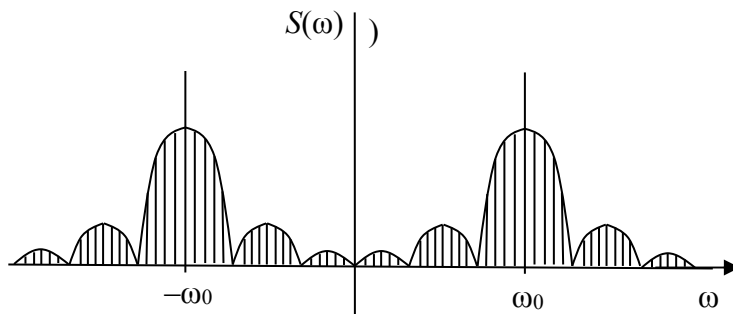
Задача 6

Найти сигнал, соответствующий данному спектру; $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$.



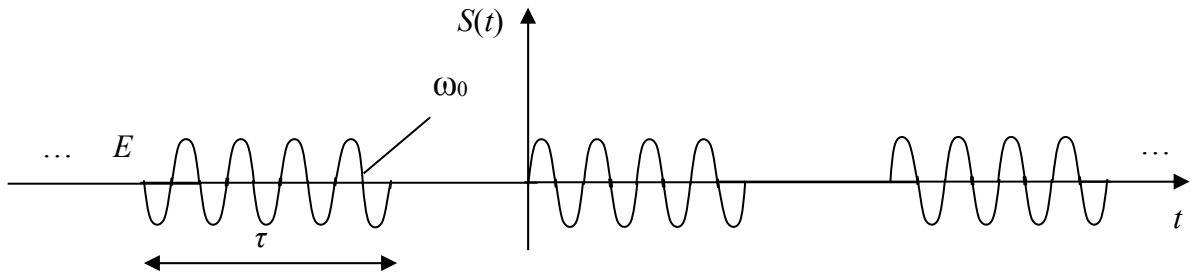
Задача 7

Найти сигнал, соответствующий данному спектру.



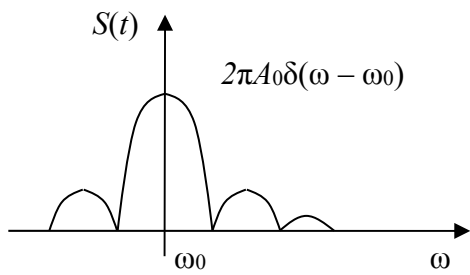
Задача 8

Найти спектр сигнала.



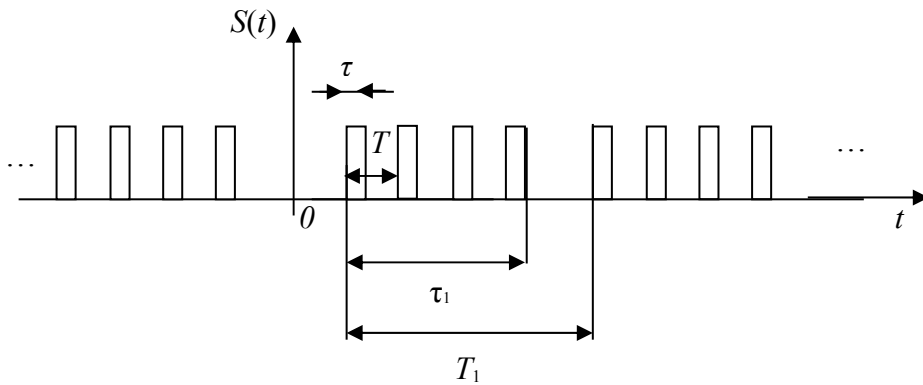
Задача 9

Найти сигнал, соответствующий данному спектру.



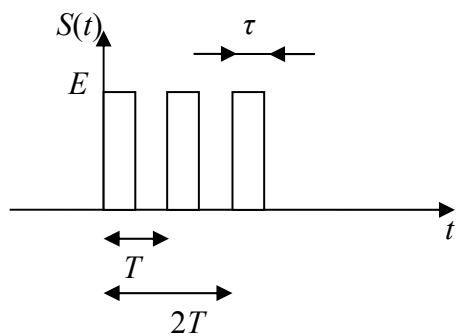
Задача 10

Найти спектр сигнала.



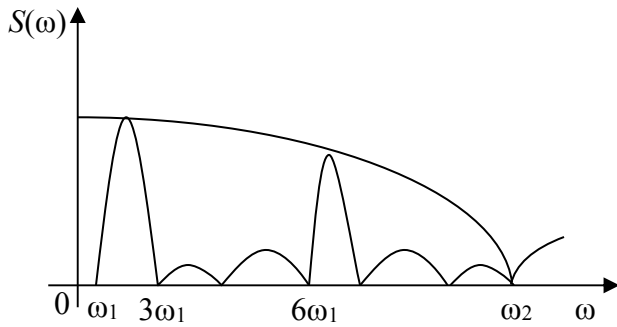
Задача 11

Найти спектр сигнала.



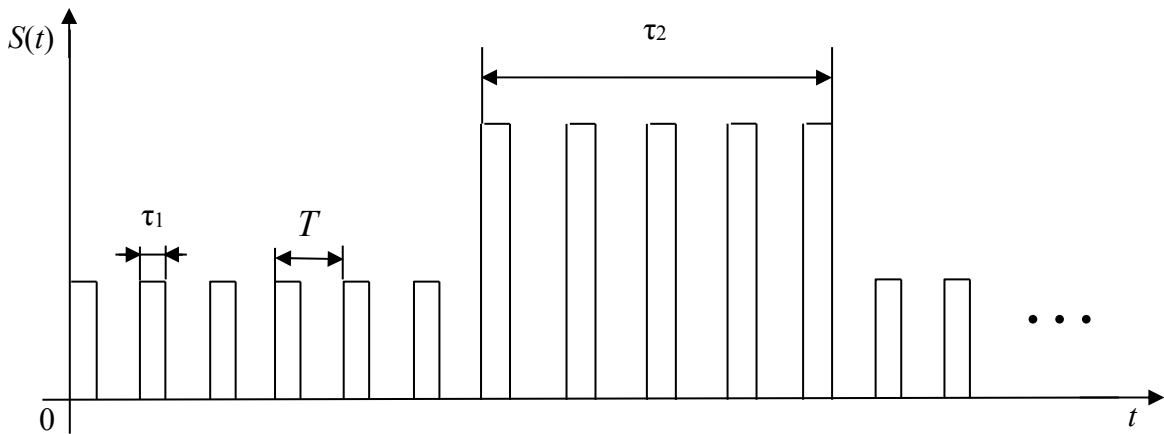
Задача 12

По данному спектру найти сигнал.



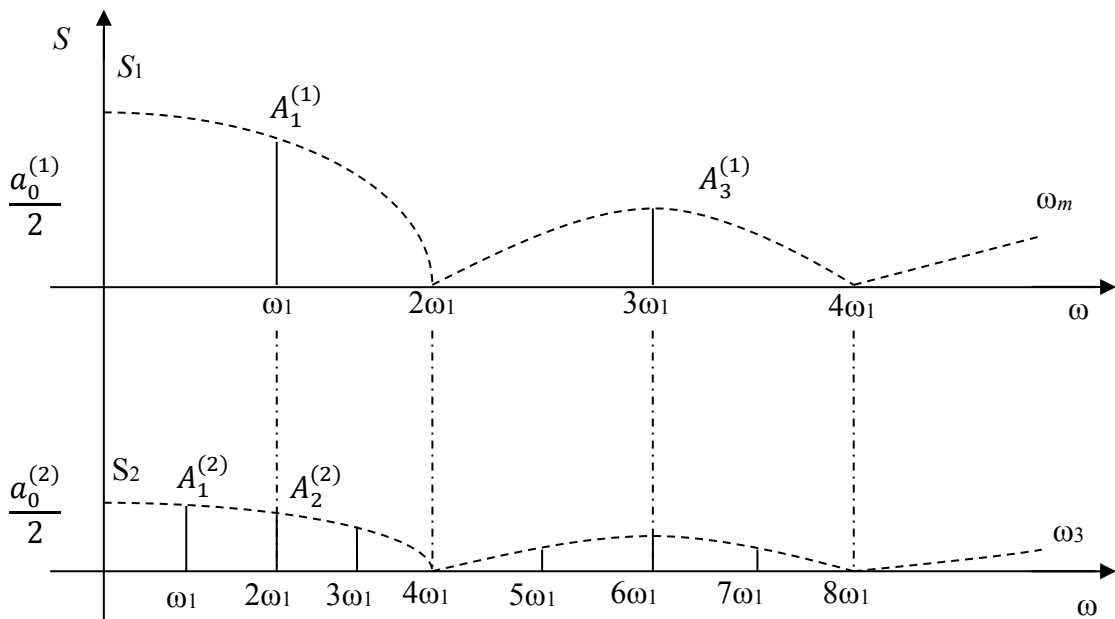
Задача 13

Построить амплитудный спектр сигнала и определить его параметр.



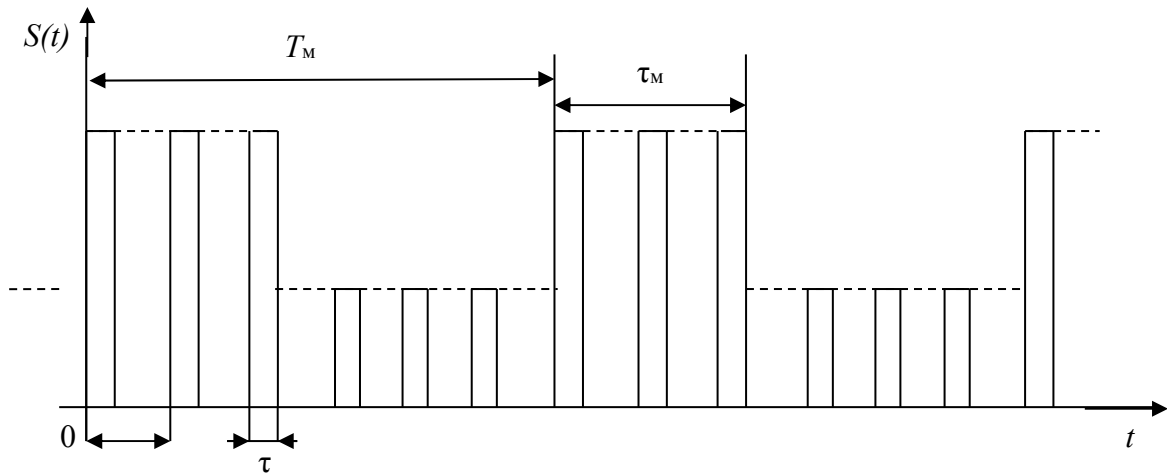
Задача 14

Изобразить временные диаграммы периодических сигналов S_1 и S_2 , отражающие различия их амплитудных спектров.



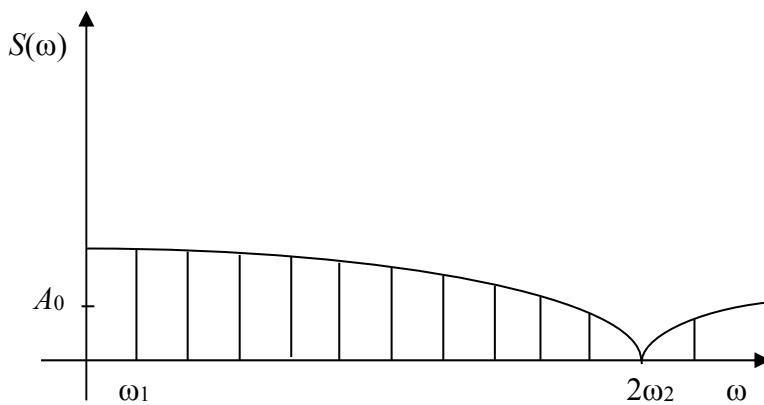
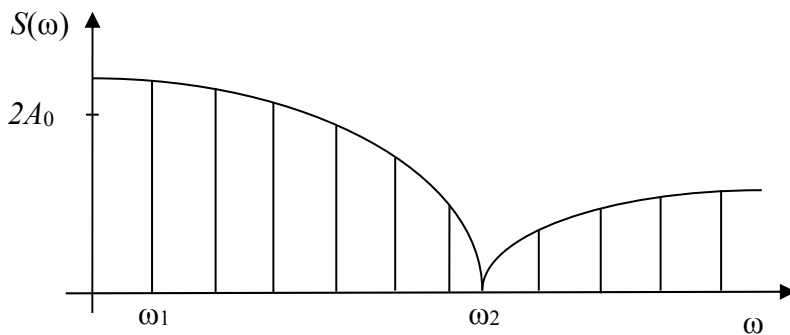
Задача 15

Изобразить качественный вид спектра, отразив, какие его параметры определяют величины T_M , τ_M , T_0 , τ .



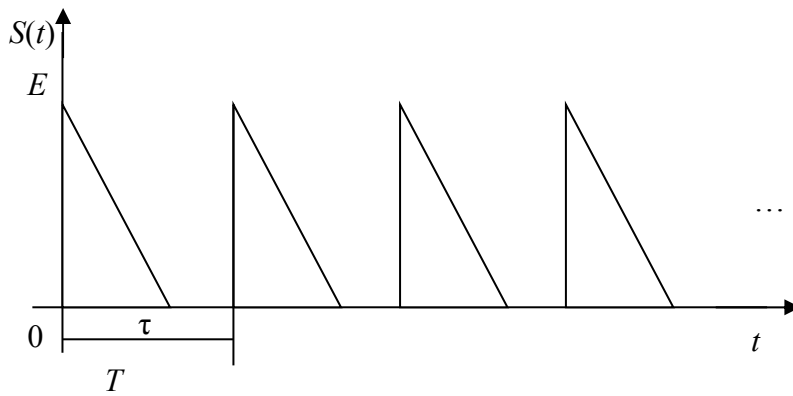
Задача 16

Найти сигнал, соответствующий данному спектру.



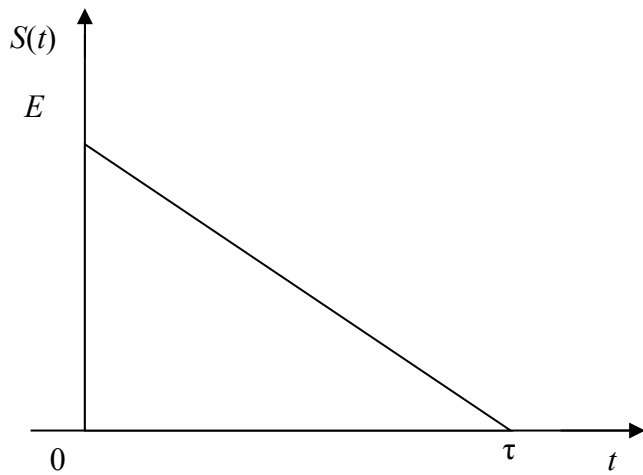
Задача 17

По данному сигналу найти его спектр.



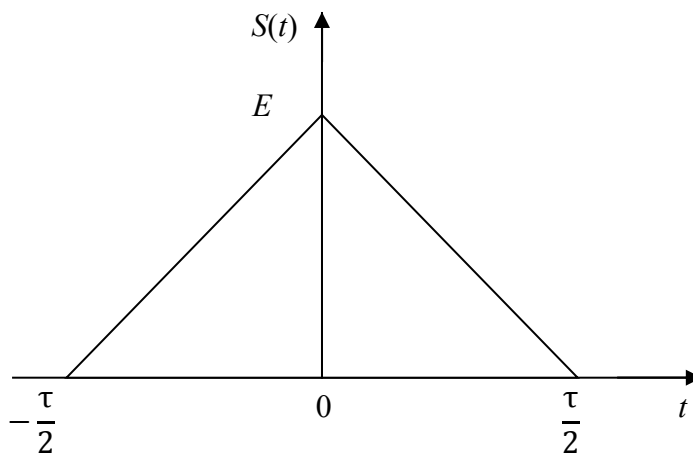
Задача 18

По данному сигналу найти его спектр.



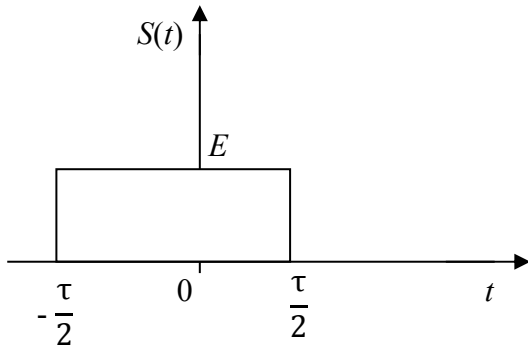
Задача 19

По данному сигналу найти его спектр.



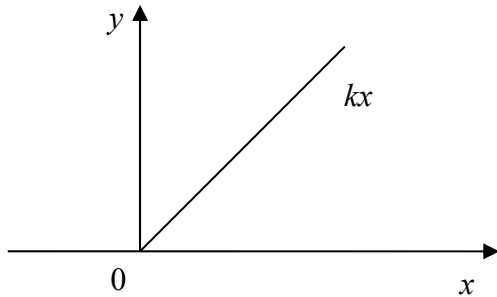
Задача 20

По данному сигналу найти его спектр.



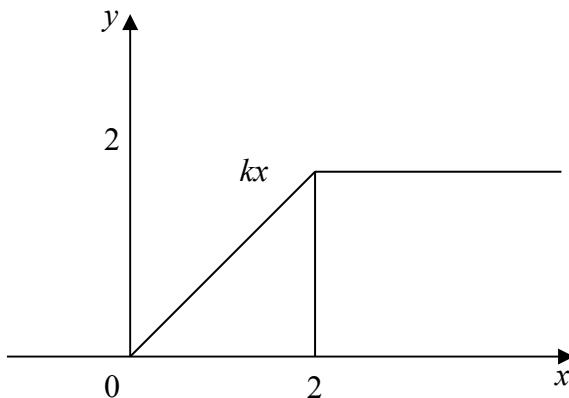
Задача 21

Найти плотность вероятности $p(y)$, если $p(x)$ – распределение Гаусса, $m_x = 0$, $\sigma^2 x = 1$, $k = 1$.



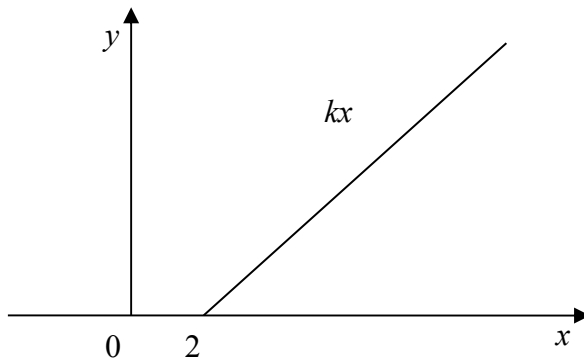
Задача 22

Найти плотность вероятности $p(y)$, если $p(x)$ – распределение Гаусса, $m_x = 0$, $\sigma^2 x = 1$, $k = 1$.



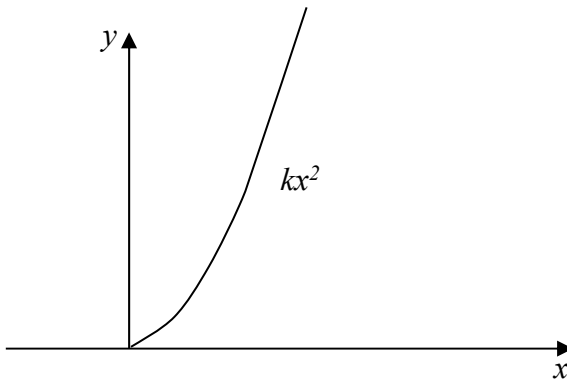
Задача 23

Найти плотность вероятности $p(y)$, если $p(x)$ – распределение Гаусса, $m_x = 0$, $\sigma^2_x = 1$, $k = 1$.



Задача 24

Найти плотность вероятности $p(y)$, если $p(x)$ – равномерное распределение на отрезке $[-\pi, 0]$, $k = \sqrt{3}$.



Задача 25

Найти спектральную плотность мощности, если корреляционная функция процесса $K = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$.

Задача 26

Найти спектральную плотность мощности, если корреляционная функция процесса $K = \sigma^2 \cos(\beta\tau)$.

Задача 27

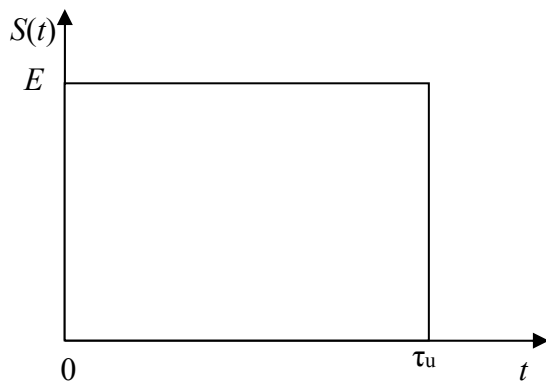
Найти корреляционную функцию процесса, если спектральная плотность мощности описывается функцией $W(\omega) = W_0 \exp(-\beta\omega^2)$.

Задача 28

Найти корреляционную функцию процесса, если спектральная плотность мощности описывается функцией $W(\omega) = W_0 \cos^2(\omega)$.

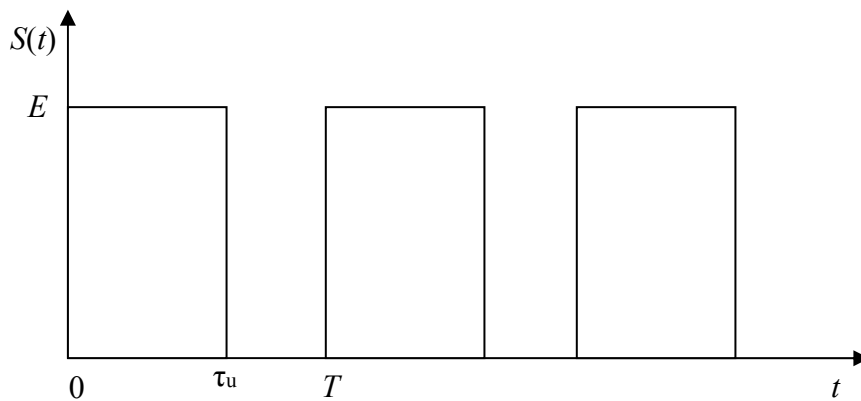
Задача 29

Найти АКФ для сигнала, представленного на рисунке.



Задача 30

Найти АКФ для сигнала, представленного на рисунке.



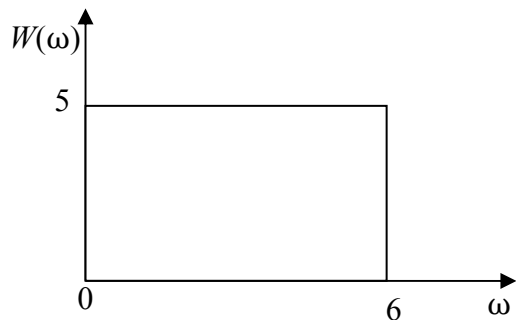
Задача 31

Найти АКФ, если энергетический спектр описывается функцией

$$W(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\bar{\omega}, \\ W_0, & -\bar{\omega} < \omega < \bar{\omega}, \\ 0, & \omega > \bar{\omega}. \end{cases}$$

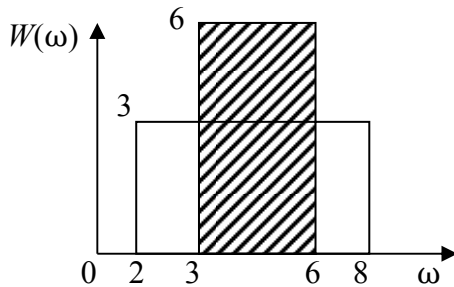
Задача 32

Найти дисперсию процесса (спектральная плотность мощности указана на рисунке).



Задача 33

Указать процесс, характеризующийся большей дисперсией.



Задача 34

Найти АКФ трехпозиционного кода Баркера.

$$u = \{1, 1, 1\}.$$

Задача 35

Найти АКФ трехпозиционного кода Баркера.

$$u = \{1, -1, 1\}.$$

7. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Цель курсовой работы

Цель курсовой работы состоит в получении студентами навыков самостоятельного изучения материалов некоторых разделов теоретического курса, самостоятельного решения на этой базе практических заданий и выполнения курсовой работы с последующей консультацией у преподавателя.

Тематика и содержание курсовой работы

Студенты выполняют курсовые работы двух видов: типовую или исследовательскую. Типовая работа включает в себя два задания:

- анализ детерминированных сигналов или их передачи через линейные, нелинейные или параметрические цепи;
- анализ передачи смеси полезного сигнала и шума через типовое радиотехническое звено: избирательная цепь – демодулятор-фильтр; задача на построение и анализ характеристик согласованного фильтра.

Типовая работа (прил. 1) должна содержать подробное изложение и решение первого и второго заданий с обоснованиями используемых методов решения, необходимыми графиками, выводами. Для расчетов следует использовать ЭВМ. Программа может быть заимствована из литературы, библиотеки, имеющихся в дисплейном классе или на кафедре программ, либо составлена самостоятельно. Алгоритм работы оригинальной программы, ее текст, описание и распечатку результатов размещают в приложении к курсовой работе. Использование ЭВМ должно быть оправдано (повторяющиеся расчеты при построении графиков, приближенные численные методы вычисления интегралов и др.). В случае использования приближенных методов расчета необходимо оценить погрешность вычислений.

Курсовая работа исследовательского характера может быть выполнена с разрешения заведующего кафедрой теми студентами, которые проявили способность к углубленному и в значительной степени самостоятельному исследованию свойств радиотехнических цепей и сигналов, знакомы с методами их моделирования с помощью ЭВМ, обладают склонностью к исследовательской работе как теоретического, так и экспериментального характера.

Результатом законченной работы исследовательского характера, как правило, выступает экспонат для студенческой выставки, доклад на конференции или семинаре, материал для представления на конкурс студенческих работ.

Примерное содержание работы исследовательского характера приведено в прил. 2.

Объем пояснительной записки (без приложений) типовой работы не должен превышать вместе с рисунками 20 – 25 страниц текста. Объем приложений не регламентируется. Объем пояснительной записки исследовательской работы устанавливает руководитель.

Порядок выполнения курсовой работы

Контрольный график выполнения типовой курсовой работы приведен в табл. 1; указанные в ней проценты и сроки выполнения могут быть рекомендованы и для исследовательской работы.

Таблица 1

График выполнения типовой курсовой работы

Этап работы	Недели семестра	Процент выполнения
1. Получение задания	1 – 2-я	–
2. Выполнение и оформление первого задания	3 – 4-я	30
3. Выполнение и оформление второго задания	5 – 6-я	70
4. Оформление приложений к работе	7 – 8-я	90
5. Оформление и сдача самостоятельной работы в целом	9 – 12-я	100
6. Защита работы	13 – 14-я	–

Исследовательскую курсовую работу выполняют по индивидуальному графику, согласованному с руководителем.

Соблюдение графика контролирует руководитель работы во время консультаций, посещение которых обязательно для всех студентов.

Защиту курсовой работы проводят в форме индивидуальной беседы с преподавателем.

Оформление курсовой работы

Расчетно-пояснительная записка к курсовой работе должна быть оформлена в соответствии с требованиями ГОСТ [1].

Оба задания необходимо разбить на отдельные пункты решения (выполнения), каждый из которых должен содержать краткие пояснения, комментарии, обоснования хода решения. Текст должен быть сформулирован ясно с использованием при необходимости поясняющих рисунков, графиков, таблиц и др.

Каждое задание следует решать сначала в общем виде, а затем проводить численные вычисления с точностью, как правило, до трех – четырех значащих цифр.

Все графические построения (временные, векторные диаграммы и другие рисунки) должны быть выполнены с соблюдением масштабов и обязательным указанием последних. Исключение составляют графики, имеющие качественный характер.

При получении численного результата какого-либо вычисления обязательно указание размерности получаемой величины, например 10 В/Гц, 100 рад/с и т. п.

8. ЗАДАНИЯ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Анализ детерминированных сигналов и их передача через линейные цепи с постоянными и переменными параметрами

Задание по этой части самостоятельной работы может быть посвящено:

- элементам общей теории сигналов;
- спектральному представлению сигналов;
- модулированным сигналам;
- сигналам с ограниченным спектром;
- воздействию детерминированных сигналов на линейные стационарные системы, частотно-избирательные системы, нелинейные и параметрические цепи;
- элементам синтеза линейных частотных фильтров.

В качестве основы заданий могут быть использованы задачи 2, 3 из прил. 3.

При выполнении этих заданий необходимо:

- 1) представить исследуемые сигналы во временной и частотной областях графически и аналитически;
- 2) обосновать аппроксимацию аналитического сигнала, оценить погрешность аппроксимации и найти параметры аппроксимирующей функции;
- 3) определить практическую ширину полосы частот, занимаемую сигналом, и ее зависимость от основных временных параметров сигнала или параметров модуляции;
- 4) выявить какие-либо общие свойства анализируемых сигналов;
- 5) привести примеры практического использования анализируемых сигналов, например для передачи информации, испытания радиоцепей и др.;
- 6) найти аналитическое описание частотных, временных характеристик и амплитудных характеристик исследуемой радиоцепи; изобразить их график;

7) найти сигнал и его характеристики на выходе радиосцепы; описать точно и приближенно преобразования сигнала в радиосцепы; построить необходимые графики;

8) определить влияние основных параметров цепи (постоянных времени, частоты резонанса, полосы пропускания и др.) на сигнал; проиллюстрировать это влияние;

9) привести примеры использования исследуемой цепи в радиоустройствах;

10) проанализировать, как упрощение схемы цепи (понижение порядка) повлияет на основные параметры и характеристики.

Анализ передачи смеси полезного сигнала и шума через типовое радиотехническое звено

На входе цепи (рис. 11) действует аддитивная смесь полезного сигнала $a(t)$ с амплитудной или угловой модуляцией и нормального узкополосного шума $x(t)$



Рис. 11

Крутизна характеристики демодулятора при амплитудной модуляции равна 1, а при угловой модуляции сигнал на выходе составляет 1 В при расстройке, равной величине девиации частоты. Полезный сигнал на входе имеет случайную, распределенную равномерно начальную фазу.

При выполнении этого задания необходимо:

1) определить отношение сигнал/помеха по мощности в точках 1, 2 и 3. В точке 3 полезным сигналом является только переменная составляющая сигнала, обусловленная модуляцией;

2) найти выражение и построить график корреляционной функции и энергетического спектра суммарного сигнала в точках 2 и 3 при наличии и отсутствии модуляции;

3) оценить закон распределения суммарного сигнала в точках 1, 2 и 3 при наличии и отсутствии модуляции. В случае угловой мо-

дуляции определить необходимый порог ограничения по амплитуде входного сигнала демодулятора;

4) предложить и обосновать способ увеличения отношения сигнал/помеха на выходе без изменения параметров модуляции; оценить получаемое при этом увеличение отношения сигнал/помеха и предел этого увеличения.

Согласованная фильтрация

При выполнении задания необходимо:

1) определить коэффициент передачи согласованного с заданным сигналом фильтра, проверить его физическую осуществимость;

2) предложить функциональную схему фильтра: оптимального, если он реализуем, или квазиоптимального, если оптимальный нереализуем;

3) рассчитать и построить импульсную характеристику и АЧХ предложенного фильтра;

4) определить параметр сигнала τ_n , при котором достигается отношение сигнал/помеха на выходе, равное 10;

5) предложить рациональное размещение импульсов в пачке, включая их инвертирование;

6) построить отклик синтезированного фильтра на сигнал и определить коэффициент сжатия сигнала на выходе, приняв уровень отсчета длительности выходного сигнала равным половине максимального значения.

Числовые данные к вариантам заданий приведены в прил. 4.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПЕРВОГО ЗАДАНИЯ

Математические модели сигналов

Если сигнал задан аналитическим выражением во временной области, необходимо:

1) построить временную диаграмму сигнала (для периодического сигнала на отрезке оси времени – длиной около трех периодов, а

для непериодического сигнала на отрезке оси времени, содержащем значения сигнала от максимального, – до 10 % от максимального);

2) оценить общие свойства сигнала как функции времени (четность или нечетность, форма сигнала – гармоническая, прямоугольная, треугольная, трапецеидальная, линейно-ломаная, экспоненциальная и другие, а также их комбинации);

3) представить сигнал по заданному аналитическому выражению или временной диаграмме с помощью функций Хевисайда (единичного скачка), функций Дирака (дельта-импульс, дельта-функция, единичный импульс), т. е. осуществить динамическое представление сигнала и проанализировать такое представление с позиций простоты, точности и др.;

4) представить сигнал в виде алгебраической суммы более простых (элементарных) сигналов: ступенчатых и линейно изменяющихся функций, экспоненциальных функций и т. п.;

5) найти требуемые по условию задачи параметры сигнала (его экстремальные значения, длительность на заданном уровне от максимального и др.);

б) проанализировать, от каких численных параметров сигнала, входящих в его аналитическое описание, и как зависят искомые амплитудные или временные параметры сигнала.

Пример. Сигнал задан аналитическим выражением

$$S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (S_0 / t_0)t, & 0 \leq t \leq t_0, \\ S_0 \exp[-\alpha(t - t_0)], & t \geq t_0. \end{cases}$$

Это непериодический сигнал, представляющий собой алгебраическую сумму линейно нарастающего сигнала на отрезке времени от 0 до t_0 и экспоненциально убывающего, начиная со времени t_0 импульса. Длительность сигнала бесконечна.

Временная диаграмма сигнала представлена на рис. 12.

На интервале времени $(0, t_0)$ сигнал $S(t)$ может быть представлен с помощью функции Хевисайда в виде

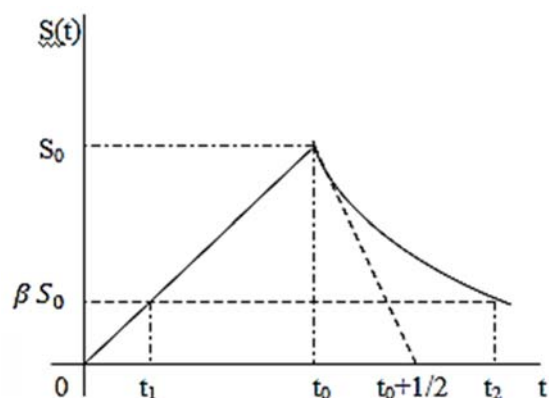


Рис. 12

$$S(t)|_{t \in (0, t_0)} = \frac{S_0}{t_0} \int_0^t 1(t-\tau) \alpha \tau, \quad \text{где функция единичного скачка}$$

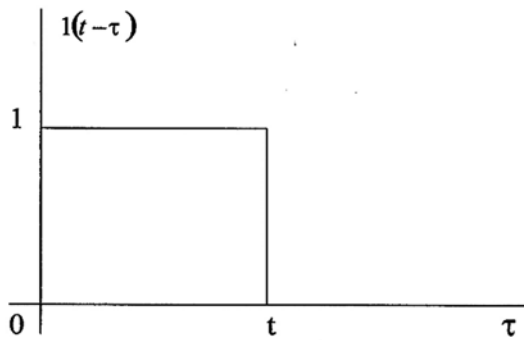


Рис. 13

$1(t)$ – функция Хевисайда, входящая в подынтегральное выражение в виде $1(1 - T)$ в зависимости от τ (представлена на рис. 13).

Интегрирование этой функции в интервале от 0 до t и дает линейно нарастающую функцию.

Таким образом, с использованием функции $1(t)$ можно представить заданный сигнал в виде

$$S(t) = \frac{S_0}{t_0} \int_0^t 1(t-\tau) d\tau + S_0 \exp[-\alpha(t-t_0)] 1(t-t_0).$$

Для определения длительности сигнала на уровне β от максимального значения S_0 необходимо решить уравнение $S(t) = \beta S_0$, которое, как видно из рис. 12, имеет два решения t_1 и t_2 . Это уравнение распадается на эквивалентную систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S_0}{t_0} t_1 = \beta S_0; \\ e^{-\alpha(t_2-t_0)} = \beta, \end{cases}$$

решение которой дает $t_1 = \beta t_0$ и $t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\beta} + t_0$.

Тогда длительность τ_β сигнала на уровне β

$$\tau_\beta = t_2 - t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\beta} + t_0 (1 - \beta).$$

Полученное выражение показывает, что длительность сигнала состоит из двух слагаемых, первое из которых пропорционально постоянной времени $\frac{1}{\alpha}$ экспоненты, а второе пропорционально t_0 . При этом оба слагаемых зависят от β так, что при $\beta \rightarrow 1$ получаем $\tau_\beta \rightarrow 0$.

Спектральные представления сигналов

При решении задач на эту тему необходимо:

- 1) изобразить временную диаграмму сигнала;
- 2) по заданному или полученному на основе временной диаграммы аналитическому описанию сигнала во временной области определить его четность или нечетность;
- 3) путем сдвига сигнала во времени перейти, если это возможно, к некоторому вспомогательному сигналу, обладающему свойством четности или нечетности;
- 4) представить сигнал в виде суммы более простых сигналов;
- 5) используя свойства коэффициентов ряда Фурье, определить не равные нулю коэффициенты ряда для вспомогательного сигнала (сигналов);
- 6) записать вспомогательный сигнал (сигналы) с помощью ряда Фурье;
- 7) осуществить обратный сдвиг сигнала во времени путем добавления к фазе каждой гармоники слагаемого $\pm n\Omega_1\tau_0$, где знак плюс соответствует сдвигу в сторону опережения сигнала, минус – в сторону запаздывания; n – номер гармоники; Ω_1 – частота первой гармоники, $\Omega_1 = 2\pi/T$; τ_0 – величина сдвига во времени;
- 8) вычислить амплитудный и фазовый спектры сигнала;
- 9) в случае непериодического сигнала представить его, если это необходимо, в виде суммы более простых сигналов, спектральные плотности которых известны;
- 10) найти спектральную плотность непериодического сигнала как алгебраическую сумму спектральных плотностей слагаемых с учетом их временного положения;
- 11) вычислить амплитудный и фазовый спектры непериодического сигнала с учетом временного сдвига сигнала во времени, введенного для упрощения расчетов;
- 12) построить спектральные диаграммы сигнала;
- 13) проанализировать характер спектра сигнала при неограниченном возрастании частоты (например, установить, убывает ли спектр обратно пропорционально частоте, ее квадрату и т. д.); установить, как связан этот характер с временной диаграммой сигнала;
- 14) проанализировать связь временных и частотных параметров сигнала (связь длительности с шириной спектра и т. п.).

Пример. Периодический сигнал (рис. 14) можно записать в виде выражения

$$S(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} + \frac{E}{T}t, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ -\frac{E}{T}t, & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

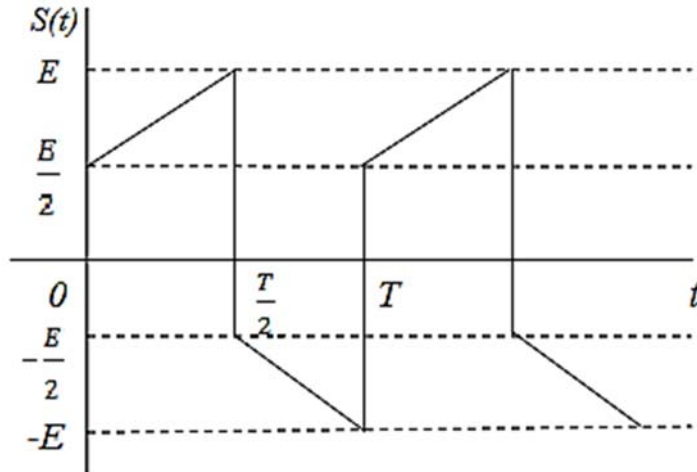


Рис. 14

Анализируемый сигнал не является ни четной, ни нечетной функцией времени. Представим его в виде суммы более простых сигналов. Такое представление может быть многообразным, поэтому важно добиться наиболее возможного упрощения при вычислениях. Заметим, что исходный сигнал имеет равную нулю постоянную составляющую. Один из вариантов представления сигнала в виде суммы двух сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ дан на рис. 15.

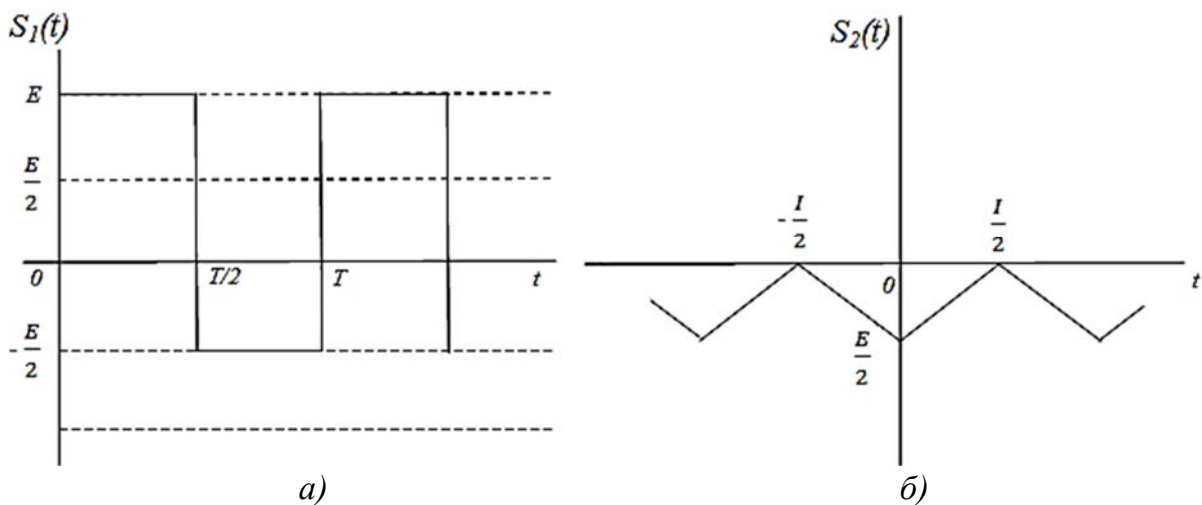


Рис. 15

Для упрощения вычислений в случае необходимости целесообразно добавлять к сигналу какую-либо постоянную составляющую, величина которой не изменяет амплитуд гармоник. Если сдвинуть сигнал $S_1(t)$ по оси ординат на величину $E/2$, то он станет униполярным с амплитудой $3E/2$, однако останется ни четным, ни нечетным. Поэтому путем сдвига сигнала по вертикали на величину $-\frac{E}{4}$ превратим его в нечетную функцию времени – двухполярные прямоугольные импульсы с амплитудой $\frac{3E}{4}$ и скважностью, равной двум. Ряд Фурье для такого сигнала содержит только синусоидальные слагаемые, амплитуды которых вычисляются по формуле

$$b_n = 2 \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{3}{4} E \sin n\Omega_1 t dt = \frac{3E}{Tn\Omega_1} \left(1 - \cos n\Omega_1 \frac{T}{2} \right) = \frac{3E}{2\pi n} (1 - \cos n\pi).$$

Четные гармоники отсутствуют, а амплитуды нечетных равны $\frac{3E}{\pi n}$, поэтому сигнал $S_1(t)$ можно представить в виде ряда

$$S_1(t) = \frac{E}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3E}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)\Omega_1 t = E \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\Omega_1 t}{2k+1} \right).$$

Сигнал $S_2(t)$ – четная функция времени, имеет постоянную составляющую, равную $-\frac{E}{4}$. Для упрощения вычисления амплитуд косинусоидальных гармонических составляющих добавим к этому сигналу величину $\frac{E}{2}$.

$$\text{Тогда } a_n = 2 \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{E}{T} t \cos n\Omega_1 t dt = \frac{4E}{T^2(n\Omega_1)^2} (\cos n\pi - 1).$$

Четные гармоники отсутствуют, а нечетные – это отрицательные косинусоиды с амплитудами $\frac{2E}{n^2\pi^2}$, поэтому $S_2(t)$ можно записать в виде ряда

$$S_2(t) = -\frac{E}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2E}{\pi^2(2k+1)^2} \cos(2k+1)\Omega_1 t =$$

$$= -E \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\Omega_1 t}{(2k+1)^2} \right).$$

Суммарный сигнал

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2E}{\pi^2(2k+1)^2} \right) \cos(2k+1)\Omega_1 t +$$

$$+ \frac{3E}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)\Omega_1 t.$$

Амплитудный спектр

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{E}{\pi(2k+1)} \sqrt{\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} + 9}, \text{ где } k = (0, \infty).$$

$$\text{Фазовый спектр } \varphi_n = \text{arctg} \frac{b_n}{a_n} = -\text{arctg} \frac{3\pi(2k+1)}{2}, k = (0, \infty),$$

где $n = 2k + 1$.

По этим формулам можно построить спектральные диаграммы амплитуд и фаз.

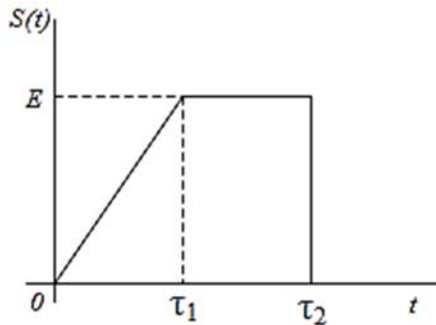


Рис. 16

Пример. Необходимо найти спектральную плотность сигнала, приведенного на рис. 16. Этот сигнал можно представить в виде алгебраической суммы сигналов

$$S_1(t) = \frac{E}{\tau_1} t \cdot 1(t); \quad S_2(t) = -\frac{E}{\tau_1} (t - \tau_1);$$

$$S_3(t) = -E \cdot 1(t - \tau_2).$$

По таблицам преобразований Лапласа находим

$$S_1(t) = S_1(p) = \frac{E}{\tau_1 p^2};$$

$$S_2(t) = S_2(p) = -\frac{E}{\tau_1 p^2} l^{-p\tau_1};$$

$$S_3(t) = S_3(p) = -\frac{E}{p} l^{-p\tau_2}.$$

На основании свойства линейности преобразования Лапласа получаем

$$S(t) = S(p) = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p) = \frac{E}{p} \left(\frac{1}{p\tau_1} - \frac{1}{p\tau_1} l^{-p\tau_1} - l^{-p\tau_2} \right).$$

Заменяя $p = j\omega$, запишем спектральную плотность сигнала:

$$S(j\omega) = E \left(\frac{1}{\omega^2 \tau_1} l^{-j\omega\tau_2} - \frac{1}{\omega^2 \tau_1} - \frac{1}{j\omega} l^{-j\omega\tau_2} \right).$$

Полученное выражение показывает, что слагаемые спектральной плотности, соответствующие линейно изменяющимся во времени составляющим $S_1(t)$ и $S_2(t)$, убывают обратно пропорционально квадрату частоты, а слагаемое, соответствующее скачку $S_3(t)$, – обратно пропорционально частоте в первой степени.

Модулированные сигналы

При анализе свойств модулированных колебаний необходимо:

- 1) по спектральной, векторной или временной диаграмме, по аналитическому описанию сигнала установить вид модуляции, параметры модуляции, форму модулирующего сигнала;
- 2) по спектральной или векторной диаграмме найти аналитическое описание сигнала во временной области и наоборот, определив, периодическим или непериодическим сигналом осуществляется модуляция;
- 3) для представления узкополосного сигнала в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся огибающей и мгновенной частотой, использовать для этого при необходимости преобразование Гильберта;
- 4) построить временную и спектральную диаграммы огибающей, временную диаграмму мгновенной частоты и оценить ширину диапазона ее изменения и практическую ширину спектра сигнала;
- 5) в случае построения спектра модулированных по амплитуде импульсов показать связь спектров немодулированных импульсов и модулирующего сигнала со спектром модулированных импульсов;
- 6) показать связь параметров модулирующего сигнала с параметрами модуляции, временными и спектральными характеристиками сигнала;

7) предложить способ, структурную схему формирования рассматриваемого сигнала, вытекающие из проведенного анализа.

Пример. На рис. 17 приведена спектральная диаграмма узкополосного сигнала $a(t)$. Начальные фазы всех спектральных составляющих равны нулю. Необходимо найти огибающую и мгновенную частоту этого сигнала при $K_1 \ll 1$, $K_2 \ll 1$.

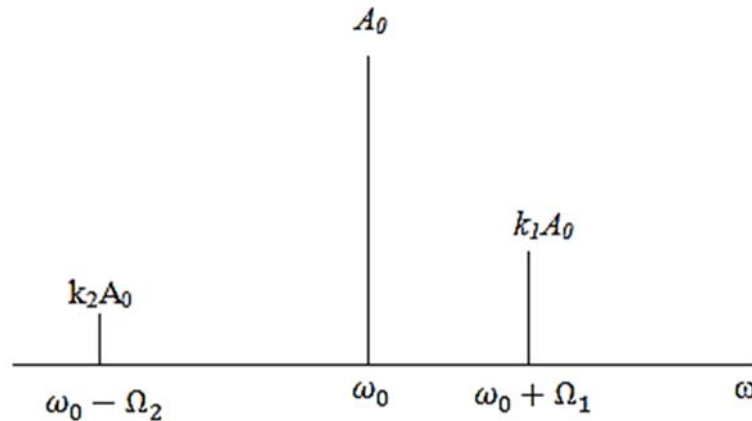


Рис. 17

1. Сигнал $a(t)$ представляет собой сумму трех гармонических колебаний:

$$a(t) = A_0 (\cos \omega_0 t + k_1 \cos(\omega_0 + \Omega_1)t + k_2 \cos(\omega_0 - \Omega_2)t).$$

Сопряженный по Гильберту сигнал

$$a_1(t) = A_0 (\sin \omega_0 t + k_1 \sin(\omega_0 + \Omega_1)t + k_2 \cos(\omega_0 - \Omega_2)t).$$

Огибающая сигнала

$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + a_1^2(t)} = A_0 (1 + k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 \cos \Omega_1 t + 2k_1 k_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1)t)^{1/2}.$$

При конкретных значениях Ω_1 , Ω_2 , k_1 и k_2 можно построить временную диаграмму $A(t)$. Максимальное значение огибающей

$$A_{\max} = A_0 (1 + k_1 + k_2).$$

Огибающая $A(t)$ образована путем нелинейного преобразования суммы трех гармонических колебаний с частотами Ω_1 , Ω_2 , $(\Omega_2 - \Omega_1)$, поэтому в спектре огибающей присутствуют комбинационные частоты вида $n\Omega_1 + m\Omega_2 + l(\Omega_2 - \Omega_1)$, где n, m, l – целые положительные или отрицательные числа, включая нуль.

Мгновенная частота определяется формулой

$$\omega(t) = \frac{\alpha}{\alpha t} \left(\operatorname{arctg} \frac{a_1(t)}{a(t)} \right) = \frac{a'_1(t)\alpha(t) - a_1(t)\alpha'(t)}{A^2(t)},$$

вычисления по которой, хотя и не сложны, но громоздки.

2. Второй путь решения основан на свойствах АМ-колебаний и колебаний с угловой модуляцией при малом индексе. Для получения спектральных составляющих на частотах $\omega_0 \pm \Omega_1$ и $\omega_0 \pm \Omega_2$ сформируем вспомогательные сигналы

$$b_1(t) = A_1(1 + M_1 \cos \Omega_1 t + M_2 \cos \Omega_2 t) \cos \omega_0 t,$$

$$b_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + m_1 \sin \Omega_1 t + M_2 \sin \Omega_2 t).$$

При $m_1 \ll 1$, $m_2 \ll 1$ получим

$$\begin{aligned} a(t) = b_1(t) + b_2(t) \approx & (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} (M_1 A_1 + m_1 A_2) \cos(\omega_0 + \Omega_1) t + \\ & + \frac{1}{2} (M_1 A_1 + m_1 A_2) \cos(\omega_0 - \Omega_1) t + \frac{1}{2} (A_1 M_2 + m_2 A_2) \cos(\omega_0 + \Omega_2) t + \\ & + \frac{1}{2} (A_1 M_2 + m_2 A_2) \cos(\omega_0 - \Omega_2) t. \end{aligned}$$

Из выражения видно, что, приняв $A_1 = A_2 = A_0/2$, $M_1 = m_1$, $M_2 = -m_2$, можно представить $a(t)$ в виде

$$a(t) \approx A_0 \left(\cos \omega_0 t + \frac{M_1}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_1) t + \frac{M_2}{2} \cos(\omega_0 + \Omega_2) t \right),$$

что при $K_1 = M_1/2$, $K_2 = M_2/2$ соответствует спектральной диаграмме.

С другой стороны, сигнал $a(t)$ можно разложить на квадратурные составляющие:

$$a(t) \approx A_0 \left[\left(1 + \frac{M_1}{2} \cos \Omega_1 t + \frac{M_2}{2} \cos \Omega_2 t \right) \cos \omega_0 t - \left(\frac{m_1}{2} \sin \Omega_1 t - \frac{m_2}{2} \sin \Omega_2 t \right) \sin \omega_0 t \right].$$

Фаза суммарного сигнала

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{K_1 \sin \Omega_1 t + K_2 \sin \Omega_2 t}{1 + K_1 \cos \Omega_1 t + K_2 \cos \Omega_2 t} \approx K_1 \sin \Omega_1 t + K_2 \sin \Omega_2 t.$$

Мгновенная частота $\omega(t) = \frac{d\Psi}{dt} \approx K_1 \Omega_1 \cos \Omega_1 t + K_2 \Omega_2 \cos \Omega_2 t$.

Пример. Необходимо построить амплитудный спектр сигнала, временная диаграмма которого показана на рис. 18.

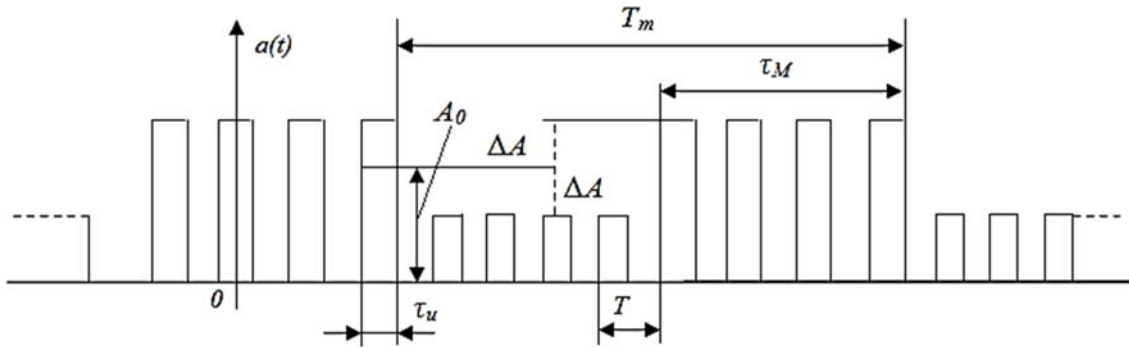


Рис. 18

Примем, что период T_M кратен T . При отсутствии модуляции сигнал представляет собой последовательность прямоугольных периодических импульсов, которую можно представить в виде ряда Фурье:

$$a_0(t) = \frac{A_0}{T} \tau_U + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_0 \tau_U}{T} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\Omega_1 \tau_U}{2} \right) \cos n\Omega_1 t.$$

При наличии модулирующих импульсов каждая гармоника сигнала $a_0(t)$ будет промодулирована по амплитуде прямоугольными импульсами с периодом T_M и длительностью τ_M . Спектр модулирующего сигнала

$$\{A_{Mn}\} = \frac{4\Delta A \tau_M}{T_M} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\Omega_M \tau_M}{2} \right).$$

Таким образом, вокруг каждой гармоники исходного сигнала образуется линейчатый спектр модулирующего сигнала с амплитудами гармоник $A_{Mn}/2$. Вид спектра сигнала показан на рис. 19.

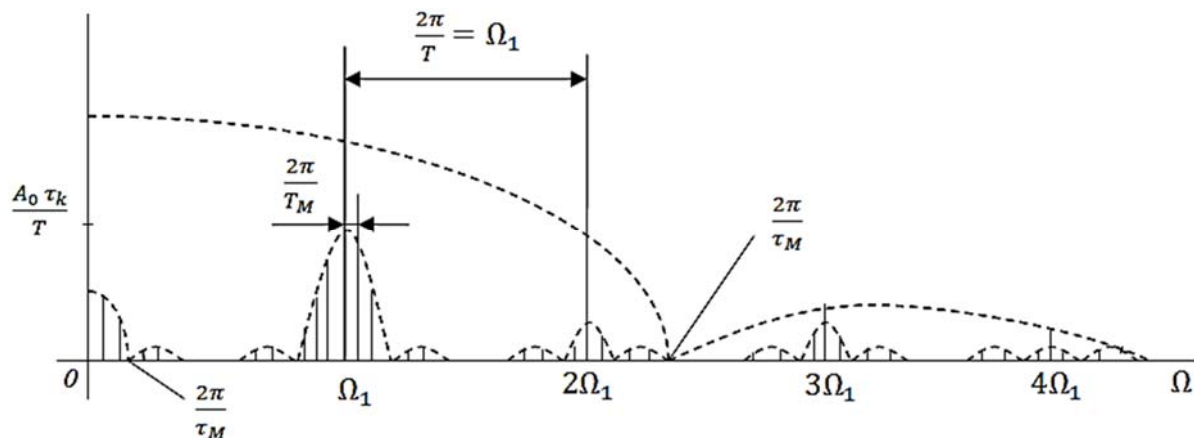


Рис. 19

Сигналы с ограниченным спектром

При анализе свойств и характеристик сигналов с ограниченным спектром следует:

- 1) найти аналитическое описание и изобразить временные и спектральные диаграммы сигнала, показать их взаимосвязь;
- 2) предложить цепь или описать характеристики цепи, которая при возбуждении дельта-импульсом дает отклик в виде анализируемого сигнала;
- 3) найти сигнал, ортогональный заданному, и предложить путь его формирования (сдвиг во времени, преобразование в какой-либо линейной цепи и т. д.);
- 4) найти комплексную и физическую огибающую сигнала;
- 5) найти аналитический сигнал, соответствующий заданному сигналу;
- 6) выявить и отметить какие-либо свойства сигналов, подобных заданному по форме или по другим признакам.

Пример. Сигнал $S(t)$ имеет вещественную спектральную плотность $S(\omega)$, график которой при $\omega > 0$ изображен на рис. 20. Необходимо вычислить аналитический сигнал $z(t)$ и определить закон изменения мгновенной частоты $\omega(t)$ рассматриваемого сигнала.

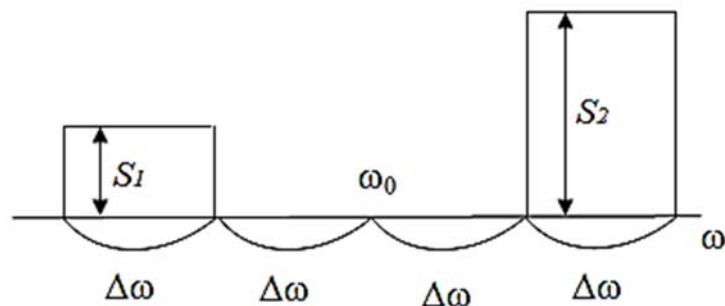


Рис. 20

На основании свойств преобразования Фурье можно представить сигнал $S(t)$ в виде суммы сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, соответствующих отдельным компонентам спектральной плотности:

$$S_1(t) = \frac{S_1 \Delta\omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \cos\left(\omega_0 - \frac{3}{2}\Delta\omega\right)t,$$

$$S_2(t) = \frac{S_2 \Delta\omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \cos\left(\omega_0 - \frac{3}{2}\Delta\omega\right)t.$$

Сопряженные по Гильберту сигналы

$$\hat{S}_1(t) = \frac{S_1 \Delta \omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \omega t}{2}\right) \cos\left(\omega_0 - \frac{3}{2} \Delta \omega\right)t,$$

$$\hat{S}_2(t) = \frac{S_2 \Delta \omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \omega t}{2}\right) \cos\left(\omega_0 - \frac{3}{2} \Delta \omega\right)t.$$

Рассмотрим случай, когда $S_1 = S_2 = S_0$. Тогда

$$S_1(t) = \frac{2S_0 \Delta \omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \omega t}{2}\right) \cos \frac{3}{2} \Delta \omega t \cos \omega_0 t,$$

$$\hat{S}_1(t) = \frac{2S_0 \Delta \omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \omega t}{2}\right) \cos \frac{3}{2} \Delta \omega t \sin \omega_0 t.$$

Комплексная огибающая сигнала $S(t)$

$$\dot{A}(t) = \frac{2S_0 \Delta \omega}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta \omega t}{2}\right) \cos \frac{3}{2} \Delta \omega t.$$

Физическая огибающая $A(t) = |\dot{A}(t)|$.

Временная диаграмма сигнала $S(t)$ приведена на рис. 21.

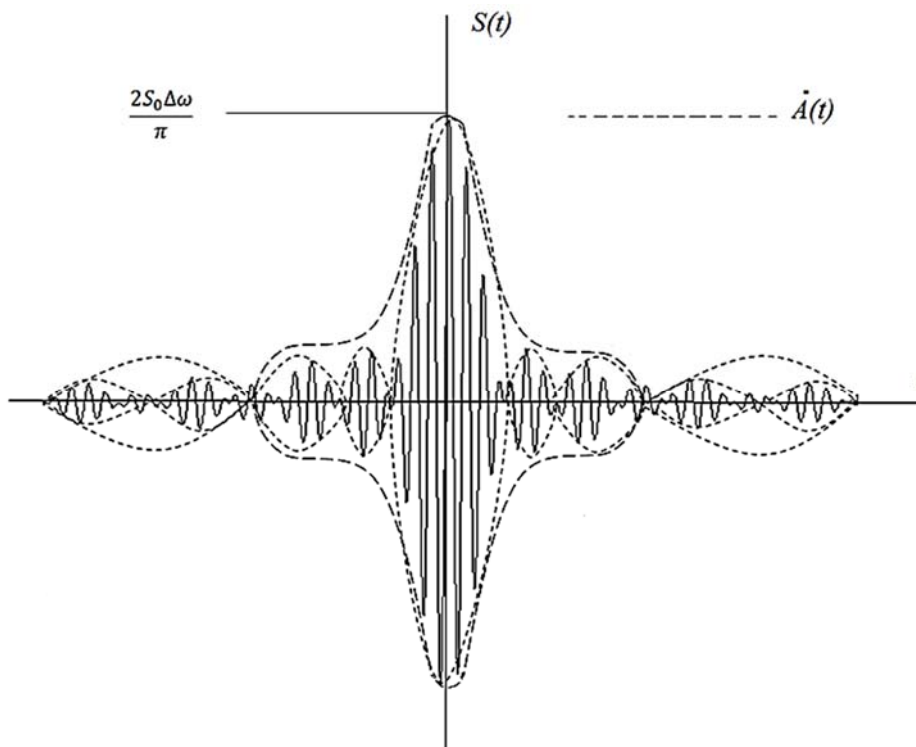


Рис. 21

Анализ сигнала показывает, что при $S_1 = S_2$ в сигнале $S(t)$ присутствуют нулевые биения с частотой $3\Delta\omega$ (расстояние между сред-

ними частотами составляющих спектра). При уменьшении ширины каждой из частей спектра до нуля сигнал превращается в бигармоническое колебание, огибающая которого не затухает по закону $\text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)$ (см. рис. 21). В моменты времени, когда огибающая $\dot{A}(t)$ проходит через нуль, фаза колебания совершает скачок величиной π , поэтому в эти моменты времени мгновенная частота имеет выброс в виде дельта функции. Если же $S_1 \neq S_2$, то огибающая не проходит через нуль, скачок фазы отсутствует и мгновенная частота является непрерывной функцией времени, которую можно определить по сигналам $S(t)$ и $\hat{S}(t)$.

Воздействие сигналов на линейные стационарные системы

Анализ воздействия сигналов на линейные цепи проводят с различными целями на основе спектральных и временных подходов. Если исследуемая цепь узкополосная, то, как правило, используют приближенные методы.

При решении задач на эту тему следует:

- 1) проверить физическую реализуемость цепи;
- 2) использовать принцип суперпозиции для поиска отклика цепи на сигнал;
- 3) оценить возможную ошибку вычислений в случае использования приближенных методов;
- 4) выявить и отметить какие-либо общие свойства анализируемой цепи, сигнала;
- 5) предложить вариант реализации цепи (рис. 22, табл. 2).

Преобразования сигналов в нелинейных и параметрических цепях

В задачах этого раздела требуется:

- 1) установить, какого вида преобразование (детектирование, амплитудное ограничение, модуляция и др.) осуществляется в данной нелинейной или параметрической цепи;
- 2) отметить, какой из радиокомпонентов может иметь подобную характеристику (п/п диод, транзистор, варикап и др.);

- 3) привести необходимые графики нелинейной характеристики, временные и спектральные диаграммы входного и выходного сигналов;
- 4) показать существенные различия нелинейных и параметрических цепей;
- 5) показать, какой следует считать цепь в условиях данной задачи – параметрической или нелинейной.

Элементы синтеза линейных частотных фильтров

При синтезе линейного четырехполюсника и анализе его свойств и характеристик необходимо:

- 1) проанализировать устойчивость четырехполюсника;
- 2) показать, является ли данная цепь минимально- или неминимально-фазовой;
- 3) проанализировать взаимосвязь АЧХ и ФХЧ четырехполюсника;
- 4) синтезировать фильтр с выбранным типом аппроксимации его характеристики, обосновать выбранную аппроксимацию;
- 5) привести примеры использования синтезированного или исследуемого четырехполюсника в радиоцепях.

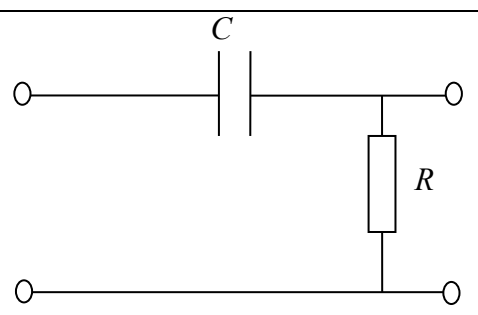
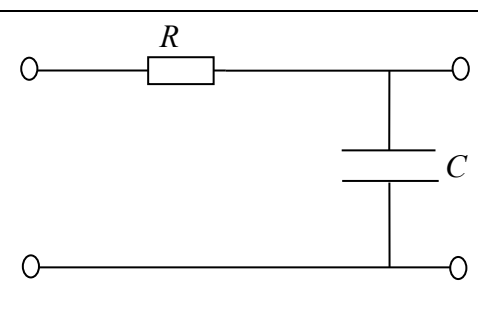
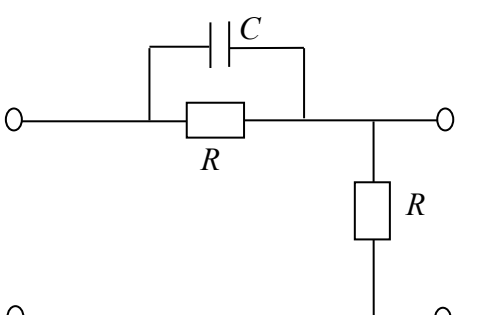
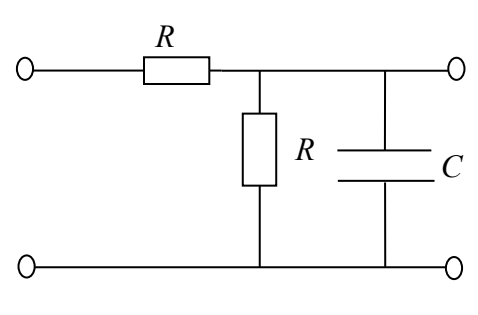
Вид цепи	
1	
2	
3	
4	

Рис. 22. Начало

Вид цепи	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Периодический сигнал	
А	
Б	
В	
Г	

Рис. 22. Продолжение (начало см. на с. 58, окончание – на с. 61)

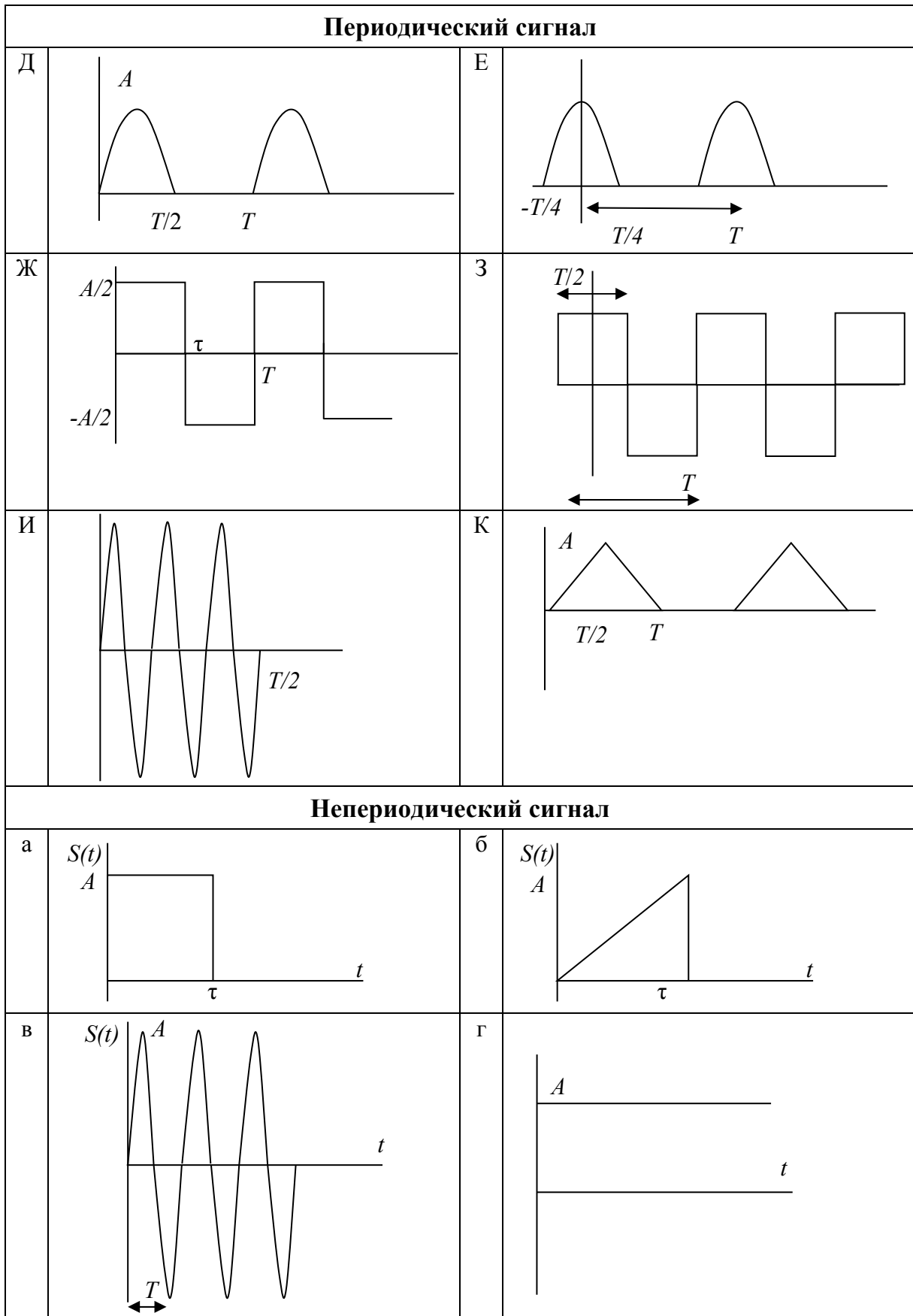


Рис. 22. Продолжение (начало см. на с. 58, окончание – на с. 61)

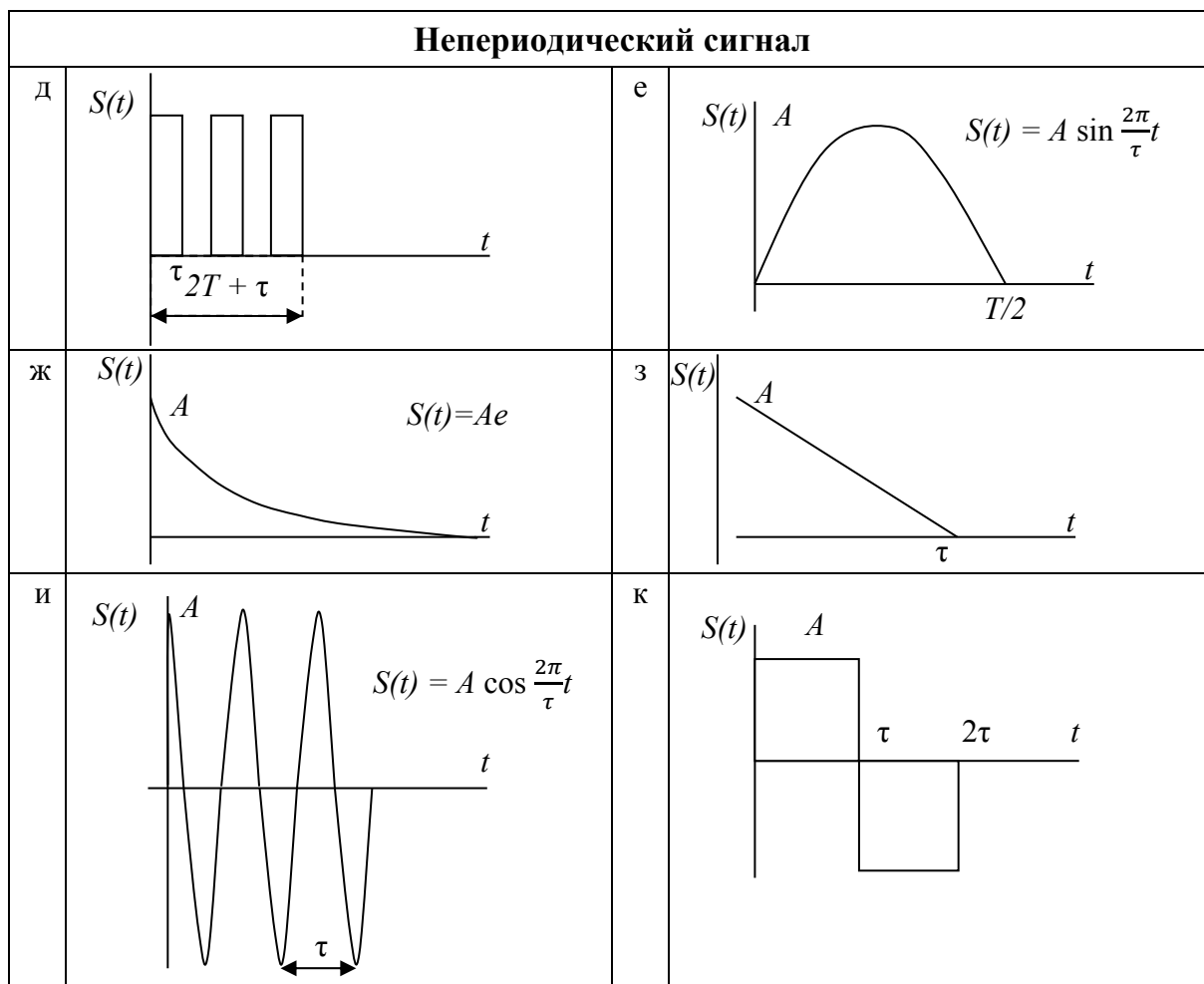


Рис. 22. Окончание (начало см. на с. 58, 59 и 60)

Таблица 2

Варианты заданий

ПС \ НПС	НПС											Номер цепи
	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к		
К	1				18					11		1
И		2				19			10			2
З			3				20	9				3
Ж	11			4			8		14			4
Е		12			5	7		13				5
Д			13	5	6	6	12					6
Г			4	14			7					7
В			3		15			8				8
Б		2				16			9			9
А	1						17			10		10

Примечание. ПС – периодический сигнал; НПС – непериодический сигнал.

Задание:

1. Найти АЧХ и ФЧХ, ЧХ и ПХ цепи.
2. Для периодического сигнала разложить сигнал в ряд Фурье. Найти сумму пяти первых гармоник ряда.
3. Для непериодического сигнала найти модуль и аргумент спектральной плотности изображений по Лапласу.
4. Записать ряд для периодического сигнала на выходе цепи, построить график суммы пяти первых гармоник ряда.
5. Найти непериодический сигнал на выходе цепи через обратное преобразование Фурье (преобразование Лапласа) и построить соответствующий график.
6. В табл. 2 сведены номер задания для периодического сигнала, непериодического сигнала и задания цепи.

Данные для цепей: $R = 1 \text{ кОм}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$, $L = 100 \text{ мкГн}$.

Данные цепей:

а) периодический сигнал:

$$T = 2\tau_{ц}, \quad \tau = \frac{T}{2}, \quad A = 10 \text{ В};$$

б) непериодический сигнал:

$$A = 10 \text{ В}, \quad \tau = \tau_{ц} \left(R_C, \frac{L}{R} \right), \quad T = 2\tau.$$

10. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ВТОРОГО ЗАДАНИЯ

Анализ передачи смеси полезного сигнала и шума через типовое радиотехническое звено

При определении отношения сигнал/помеха по мощности в различных точках канала передачи сигнала необходимо учитывать, что образованная в результате операции суммирования смесь сигнала и шума поступает на вход демодулятора через линейную избирательную цепь, что позволяет использовать принцип суперпозиции. Если вычислить мощность полезного сигнала на выходе избирательной цепи несложно, то вычисление мощности шума может вызвать затруднения. При этом целесообразно применить приближён-

ные методы вычисления интеграла, определяющего мощность шума, например, основанные:

- на численном интегрировании с помощью ЭВМ;
- аппроксимации подынтегральной функции более простым выражением;
- использовании замены частотных характеристик сигнала и цепи на прямоугольные с шириной, равной эффективной полосе пропускания или эффективной ширине спектра.

Применение приближенного метода должно быть предварительно обосновано с помощью доказательства того, что получаемая при этом погрешность достаточно мала (например, не превышает 5 %). Все этапы вычислений необходимо подробно пояснять, иллюстрировать, приводить выводы, дающие полное представление о промежуточных преобразованиях и полученных результатах.

Отношения сигнал/помеха в точке 3 (рис. 11) целесообразнее определять в следующей последовательности:

1. Определить мощность переменной составляющей сигнала на выходе, когда на входе демодулятора действует, во-первых, только полезный сигнал (соответствующая мощность P_c); во-вторых, только шум (соответствующая мощность $P_{ш}$).

2. Определить мощность на выходе, когда на входе демодулятора действует смесь полезного сигнала и шума $P_{c+ш}$.

3. Сравнить между собой величины:

а) P_c и $P'_c = P_{c+ш} - P_{ш}$ (мощность сигнала характеризует приращение мощности за счет появления сигнала);

б) $P_{ш}$ и $P'_{ш} = P_{c+ш} - P_c$ (характеризует приращение мощности за счет появления шума).

Если величины P_c и P'_c , $P_{ш}$ и $P'_{ш}$ попарно различаются незначительно (до 10 %), то можно оценить отношение С/П в точке 3, взяв наилучшее из этих отношений.

В случае существенных различий этих величин можно оценить отношение С/Ш по формуле

$$\left(\frac{C}{\Pi}\right)_3 = (P_c + P'_c)/(P_{ш} + P'_{ш}).$$

При поиске корреляционной функции и энергетического спектра суммарного сигнала в точках 2 и 3 необходимо учитывать, что в

точке 2 сигнал и помеха независимы, а в точке 3 такое утверждение в общем случае неверно, так как смесь сигнала и шума подвергается в демодуляторе нелинейному преобразованию. Поэтому необходимо рассмотреть результат преобразования суммы сигнала и шума в демодуляторе и именно для него получить корреляционную функцию и энергетический спектр. Значение корреляционной функции при $\tau = 0$ должно совпадать с полученной ранее величиной $P_{с+ш}$.

По полученным аналитическим выражениям для энергетических спектров и корреляционных функций необходимо построить графики, на которых следует отразить интервал корреляции τ_K на уровне 0,05 от максимума корреляционной функции, эффективную ширину спектра суммарного сигнала. Графики должны быть проанализированы, отмечены их отличия на входе и выходе демодулятора. В результате можно сформулировать требования к фильтру низких частот, установленному на выходе демодулятора.

Особенность построения демодуляторов ЧМ-сигналов – наличие амплитудного ограничителя на входе. Для определения порога ограничения следует задаться вероятностью того, что огибающая сигнала на входе демодулятора будет ниже порога. Величину этой вероятности можно принять равной 0,02...0,05. Такую вероятность можно обеспечить, если выбрать порог ограничения на $2...3\delta$ (δ – среднеквадратическое отклонение огибающей) ниже среднего значения огибающей сигнала на входе демодулятора.

Второй путь состоит в нахождении закона распределения суммарного сигнала в точке 2 и определении по нему величины порога. Определение плотности вероятности суммарного сигнала в точках 1 и 2 базируется на независимости сигнала и помехи. В этом случае плотность вероятности выражается интегралом свертки законов распределения сигнала и помехи.

Для определения закона распределения в точке 3 сначала необходимо получить аналитическую взаимосвязь информационного параметра сигнала и шума, а затем, считая преобразование в демодуляторе безынерционным, найти закон распределения информационного параметра суммарного сигнала.

Согласованная фильтрация

Коэффициент передачи согласованного фильтра однозначно определяется через спектральную плотность входного полезного сигнала и спектральную плотность мощности шума на входе. Поэтому сначала находят спектральную плотность входного сигнала с учетом рационального размещения импульсов в пачке, которое может быть получено с использованием сигналов Баркера [2].

Затем определяют комплексный коэффициент передачи или передаточную функцию согласованного фильтра. Проверить физическую осуществимость полученного коэффициента передачи можно либо по критерию Пэли – Винера [2; 5], либо на основе анализа передаточной функции фильтра по критериям, известным из теории цепей [4]. Если помеха на входе фильтра – белый шум, то целесообразно использовать следствия из критерия Пэли – Винера, определяющие сигналы, для которых реализованы согласованные фильтры.

На основе полученного коэффициента передачи (передаточной функции) согласованного фильтра можно разработать его функциональную схему в два этапа:

1. Разработка функциональной схемы фильтра для одиночного импульса. При этом необходимо руководствоваться определением коэффициента передачи каскадно соединенных четырехполюсников, а также выражениями для коэффициентов передачи простейших четырехполюсников, например интегратора, дифференцирующей цепи, элемента задержки, ФВЧ и ФНЧ первого и второго порядка и др.

2. Разработка функциональной схемы фильтра для пачки одинаковых импульсов на основе известного [2; 5] подхода с учетом расположения импульсов в пачке.

Если оптимальный фильтр для одиночного импульса оказался физически нереализуем, то необходимо предложить схему квазиоптимального физически реализуемого фильтра, передаточная функция которого близка к оптимальной.

АЧХ оптимального фильтра с точностью до постоянного коэффициента совпадает с амплитудно-частотным спектром входного сигнала в случае, если помеха на входе – белый шум. Поэтому необходимо использовать полученную ранее спектральную плотность входного сигнала. В случае не белого шума на входе или квазиоптимального фильтра для построения АЧХ следует найти модуль коэффициента передачи фильтра.

Строить графики модуля спектральной плотности входного сигнала, энергетического спектра шума на входе и АЧХ фильтра целесообразнее на одном рисунке в относительном масштабе по осям координат, например: по оси ординат – относительно максимального значения, по оси абсцисс – в единицах безразмерного аргумента $\omega\tau_{и}$, где $\tau_{и}$ – параметр длительности сигнала.

При не белом шуме на входе или квазиоптимальном фильтре импульсная характеристика определяется обратным преобразованием Фурье или Лапласа, его коэффициентом передачи, которые можно получить либо из таблиц преобразований Фурье или Лапласа с обязательной ссылкой в тексте расчетно-пояснительной записки на источник, либо с использованием теоремы о вычетах.

Для определения параметра сигнала $\tau_{и}$, обеспечивающего заданное отношение С/П на выходе, следует рассчитать полную энергию входного сигнала. Более общий подход состоит в определении максимума выходного сигнала в момент времени t_0 , дисперсии и среднеквадратического значения шума на выходе, на основе которых и составляется уравнение для определения $\tau_{и}$.

Рациональным условием считать такое размещение импульсов в пачке, при котором «главный» лепесток отклика фильтра на сигнал превышает боковые лепестки не менее чем в два раза. При некоторых условиях (число импульсов в пачке не превышает 13) возможно оптимальное размещение импульсов на основе сигналов Баркера.

При построении отклика фильтра на сигнал возможны два подхода:

1) отклик строится как смещенная по оси времени на t_0 корреляционная функция входного сигнала. Это справедливо в случае белого шума на входе и физически реализуемого согласованного фильтра. Такой же подход целесообразен, если квазиоптимальный фильтр достаточно близок к оптимальному. При этом с учетом рационального размещения импульсов в пачке для определения длительности выходного сигнала на уровне 0,5 от максимума целесообразно построение корреляционной функции одиночного входного импульса;

2) отклик строится как реакция фильтра на одиночный импульс спектральным методом или методом интеграла наложения. При этом используется комплексный коэффициент передачи фильтра, согласованного с одиночным импульсом, или квазиоптимального фильтра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы» относится к фундаментальным дисциплинам и содержит теоретические основы радиотехники. Он базируется на использовании методов и терминов математики, физики, теории случайных процессов, электродинамики, теории математического моделирования.

В курсе рассмотрены математические модели различных сигналов и радиотехнических цепей, позволяющие производить основные операции синтеза и анализа.

В учебном пособии проанализированы детерминированные и случайные, аналоговые и дискретные сигналы, стационарные и нестационарные, эргодические и неэргодические, а также теоретические вопросы и методы их самостоятельного изучения студентами, возможные варианты решения задач, особенности курсового проектирования.

Естественно, в пособии освещены не все вопросы учебного курса, поэтому студенты должны самостоятельно изучить отдельные проблемы дисциплины, используя литературные источники, предложенные в библиографическом списке.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пояснительная записка дипломного проекта и дипломной работы: СТП 71.2-88. – Владимир, 1988.
2. *Баскаков, С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1988. – 536 с.
3. *Баскаков, С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы : рук. к решению задач / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1987. – 214 с.
4. *Попов, В. П.* Основы теории цепей / В. П. Попов. – М. : Высш. шк., 1985. – 496 с.
5. *Гоноровский, И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
6. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике / под ред. Г. В. Обрезкова. – М. : Высш. шк., 1985. – 343 с.
7. *Тихонов, В. И.* Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982. – 624 с.
8. *Варакин, Л. Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами / Л. Е. Варакин. – М. : Радио и связь, 1985. – 384 с.
9. *Лосев, А. К.* Теория линейных электрических цепей / А. К. Лосев. – М. : Высш. шк., 1987. – 512 с.
10. *Горяинов, В. Т.* Статистическая радиотехника. Примеры и задачи / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов ; под ред. В. И. Тихонова. – М. : Сов. радио, 1980. – 542 с.
11. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. пособие для вузов / под ред. К. А. Самойлова. – М. : Радио и связь, 1982. – 528 с.
12. *Евсиков, Ю. А.* Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах : учеб. пособие для радиотехн. специальностей вузов / Ю. А. Евсиков, В. В. Чапурский. – М. : Высш. шк., 1977. – 264 с.
13. *Баскей, В. Я.* Радиотехнические цепи и сигналы : лаб. практикум / В. Я. Баскей. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – 113 с. – ISBN 978-5-7782-2395-0.
14. *Копылов, А. Ф.* Основы теории электрических цепей. Основные понятия и определения. Методы расчета электрических цепей постоянного и переменного тока. Частотные характеристики R-L и R-C цепей : учеб. пособие / А. Ф. Копылов. – Красноярск : Изд-во Сиб. федер. ун-та, 2013. – 666 с. – ISBN 978-5-7638-2507-7.

15. *Никулин, В. И.* Теория электрических цепей : учеб. пособие / В. И. Никулин. – М. : Изд-во ИЦ РИОР : Инфра, 2013. – 240 с. – ISBN 978-5-369-01179-9.

16. *Шайдуров, Г. Я.* Основы теории и проектирования радиотехнических систем : учеб. пособие / Г. Я. Шайдуров. – Красноярск : Изд-во Сиб. федер. ун-та, 2010. – 283 с. – ISBN 978-5-7638-2047-8.

17. *Яковлев, А. Н.* Преобразования сигналов в нелинейных радиотехнических цепях / А. Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 190 с. – ISBN 978-5-7782-1374-6.

18. *Баскей, В. Я.* Преобразования сигналов в нелинейных радиотехнических цепях / В. Я. Баскей, А. Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 56 с. – ISBN 978-5-7782-1408-8.

19. *Арсеньев, Г. Н.* Основы теории цепей : учеб. пособие / Г. Н. Арсеньев. – М. : ФОРУМ : Инфра, 2011. – 448 с. – ISBN 978-5-8199-0466-4.

20. *Бирюков, В. Н.* Диагностика элементов радиотехнических цепей : учеб. пособие / В. П. Бирюков, А. М. Пилипенко. – Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 52 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Содержание типовой работы

Раздел	Содержание
1. Введение	Общие соображения о месте решаемых в работе задач в теории и практике радиосигналов и цепей
2. Условие и выполнение задания № 1 (заголовок раздела должен соответствовать разделу дисциплины, из которого взята задача)	Условия задачи, их анализ, подробное решение с пояснением каждого пункта, сопровождаемым рисунками, таблицами, графиками, в том числе расчеты на ЭВМ и т. д., выводы
3. Условие и выполнение задания № 2 (заголовок соответствует решаемой задаче)	См. п. 2
4. Выводы по работе в целом (заключение)	Краткий обзор полученных результатов и основных выводов
5. Приложения	Тексты программ расчетов на ЭВМ, распечатки, громоздкие математические выкладки, выводы формул и др.
6. Литература	Список использованной литературы, т. е. упомянутой в ссылках в тексте расчетно-пояснительной записки (оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5-2008)

**Примерное содержание самостоятельной работы
исследовательского характера**

Раздел	Содержание
1. Введение	Постановка решаемой в работе задачи с обоснованием актуальности, практической значимости и т. д.
2. Обзор методов решения поставленной задачи (заголовки должен носить конкретный характер)	Сравнение различных известных методов решения задачи, в результате которого обоснованно выбирается применяемый в работе метод, подход, схема устройства и т. д.
3. Решение задачи выбранным методом (заголовок должен отражать решаемую задачу, метод, схему устройства)	Подробное решение задачи, основные результаты с иллюстрациями в виде графиков, таблиц, диаграмм, схем и т. д., в том числе расчеты на ЭВМ, основные выводы
4. Экспериментальная часть (заголовок должен отражать, что и как было исследовано)	Описание методики и результатов проведенных экспериментов с помощью лабораторных макетов, установок или на ЭВМ, сравнение теоретических и экспериментальных результатов, оценка погрешности и т. д., выводы
5. Заключение	Основные выводы по работе, оригинальность и значение результатов, направление дальнейших исследований и т. д.
6. Приложения	Громоздкие математические выкладки, тексты программ для ЭВМ, распечатки результатов и др.
7. Литература	Список использованной в работе литературы (оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008)

Задание № 1

1. Найти АЧХ, ФЧХ, ЧХ и ПХ цепи.
2. Для периодического сигнала разложить сигнал в ряд Фурье. Найти сумму пяти первых гармоник ряда.
3. Для периодических сигналов найти модуль и аргумент спектральной плотности по Лапласу.
4. Записать ряд для периодического сигнала на выходе цепи. Построить график суммы пяти первых гармоник ряда.
5. Найти непериодический сигнал на выходе цепи через обратное преобразование Фурье (преобразование Лапласа) и построить соответствующие графики.

Числовые данные к заданию № 1

Для периодического сигнала (ПС):

$$T = 2\tau_y, \tau = T/2, A = 10 \text{ В.}$$

Для непериодического сигнала:

$$A = 10 \text{ В, } \tau = \tau_y \text{ (RC, L/R).}$$

Параметры цепей:

$$R = 1 \text{ кОм, } C = 0,1 \text{ мкФ, } L = 100 \text{ мкГн.}$$

Числовые данные к заданию № 2

1. Анализ передачи смеси полезного сигнала и шума через типовое радиотехническое звено.

1.1. Полезный сигнал:

а) с АМ: $a(t) = A_0(1 + M \cos \Omega_M t) \cos \omega_0 t$;

б) с ЧМ: $a(t) = A_0 \cos(\cos \omega_0 t + m \sin \Omega_M t)$.

Номер сигнала	Параметр сигнала				
	Вид модуляции	A_0, B	M, m	$\Omega_M, 1/c$	$\omega_0, 1/c$
1	АМ	0,1	1	10^3	10^7
2	АМ	0,5	0,8	10^2	10^7
3	АМ	1	0,5	10	10^7
4	ЧМ	0,1	30	10^2	10^7
5	ЧМ	0,5	1	10^3	10^7
6	ЧМ	1	0,1	10^4	10^7

1.2. Помеха $x(t)$ – нормальный шум со спектральной плотностью, равномерной в полосе частот от ω_1 до ω_2 и равной ω_0 .

Номер помехи	Параметр помехи		
	$\omega_0, B^2 \cdot c$	$\omega_1, 1/c$	$\omega_2, 1/c$
1	10^{-3}	$\omega_0 - 2 \cdot 10^{-3}$	$\omega_0 + 2 \cdot 10^3$
2	$2 \cdot 10^{-3}$	$\omega_0 - 10^{-3}$	$\omega_0 + 10^3$
3	10^{-4}	$\omega_0 - 2 \cdot 10^{-3}$	$\omega_0 + 2 \cdot 10^3$
4	$2 \cdot 10^{-4}$	$\omega_0 - 10^{-3}$	$\omega_0 + 10^3$
5	10^{-5}	$\omega_0 - 2 \cdot 10^{-3}$	$\omega_0 + 2 \cdot 10^3$
6	$2 \cdot 10^{-5}$	$\omega_0 - 10^{-3}$	$\omega_0 + 10^3$

Примечание. ω_r – параметр сигнала $a(t)$.

1.3. Избирательная цепь

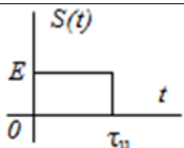
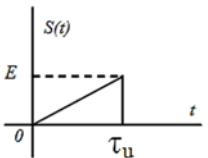
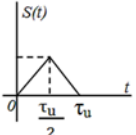
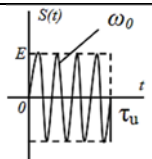
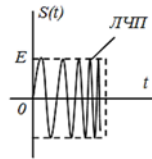
Номер цепи	Вид коэффициента передачи	Параметр цепи		
1	Идеальный полосовой фильтр с частотами среза ω_1 и ω_2	$K_0 = 1$	ω_1 и ω_2 такие же, как и у помехи	
2	Идеальный полосовой фильтр с частотами среза ω_1 и ω_2	$K_0 = 10$	ω_1 и ω_2 такие же, как и у помехи	
3	Одноконтурный резонансный усилитель $K(j\Omega) = \frac{K_0}{1 + j\Omega\tau_k}$, $\Omega = \omega - \omega_0$	$K_0 = 1$	$m < 1$ $\tau_k = \frac{1}{\Omega_M}$	$m > 1$ $\tau_k = \frac{1}{\omega_D}$
4	Одноконтурный резонансный усилитель $K(j\Omega) = \frac{K_0}{1 + j\Omega\tau_k}$, $\Omega = \omega - \omega_0$	$K_0 = 10$	$m < 1$ $\tau_k = \frac{1}{\Omega_M}$	$m > 1$ $\tau_k = \frac{1}{\omega_D}$
5	Гауссов фильтр $K(j\Omega) = K_0 e^{-\alpha^2 \Omega^2}$, $\Omega = \omega - \omega_0$	$K_0 = 1$	$m < 1$ $\alpha = \frac{1}{\Omega_M}$	$m > 1$ $\alpha = \frac{1}{\omega_D}$
6	Гауссов фильтр $K(j\Omega) = K_0 e^{-\alpha^2 \Omega^2}$, $\Omega = \omega - \omega_0$	$K_0 = 10$	$m < 1$ $\alpha = \frac{1}{\Omega_M}$	$m > 1$ $\alpha = \frac{1}{\omega_D}$

1.4. Структура номера варианта.

Пример записи номера варианта – 3.5.7, где 3 – номер сигнала; 5 – номер помехи; 7 – номер цепи.

2. Согласованная фильтрация.

2.1. Полезный входной сигнал.

Номер сигнала	Форма сигнала	Амплитуда сигнала E, В	Несущая частота ω_0 , 1/с	Девияция частоты ω_g , 1/с
1		0,1	—	—
2	-	1	—	—
3		0,1	—	—
4	-	1	—	—
5		0,1	—	—
6	-	1	—	—
7		0,1	10^4	—
8	-	1	10^6	-
9		0,1	10^5	10^3
10	-	1	10^8	10^5

2.2. Число импульсов в пачке.

Номер числа импульсов в пачке							
1	2	3	4	5	6	7	8
Число импульсов							
1	2	3	4	5	6	7	8

Для сигналов 9 и 10 по п. 2.1 число импульсов в пачке равно 1.

2.3. Помеха на входе.

Номер помехи	Спектральная плотность помехи	Параметр помехи	
		$W_0, \text{В}^2 \cdot \text{с}$	$\tau_0, \text{с}$
1	Белый шум $W(\omega) = W_0 = \text{const}$	10^{-2}	–
2	Белый шум $W(\omega) = W_0 = \text{const}$	10^{-3}	–
3	Белый шум $W(\omega) = W_0 = \text{const}$	10^{-4}	–
4	Белый шум $W(\omega) = W_0 = \text{const}$	10^{-5}	–
5	$W(\Omega) = \frac{W_0}{1 + \Omega^2 \tau_0^2};$ $\Omega = \omega - \omega_0$	10^{-2}	10^{-3}
6	$W(\Omega) = \frac{W_0}{1 + \Omega^2 \tau_0^2};$ $\Omega = \omega - \omega_0$	10^{-3}	10^{-4}
7	$W(\Omega) = \frac{W_0}{1 + \Omega^2 \tau_0^2};$ $\Omega = \omega - \omega_0$	10^{-4}	10^{-5}
8	$W(\Omega) = \frac{W_0}{1 + \Omega^2 \tau_0^2};$ $\Omega = \omega - \omega_0$	10^{-5}	10^{-6}

2.4. Структура номера варианта.

Пример записи номера варианта – 04.5.8, где 04 – номер сигнала; 5 – номер числа импульсов в пачке; 8 – номер помехи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ.	4
2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	9
3. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ.....	15
4. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ	19
5. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ. СОГЛАСОВАННЫЕ ФИЛЬТРЫ.....	23
6. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ.....	29
7. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	39
8. ЗАДАНИЯ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ	42
9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПЕРВОГО ЗАДАНИЯ.....	44
10. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ВТОРОГО ЗАДАНИЯ.....	62
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	68
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	69
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	71

Учебное издание

НИКИТИН Олег Рафаилович

АРХИПОВ Евгений Анатольевич

КОРНЕЕВА Наталья Николаевна

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Учебное пособие к практическим занятиям

Редактор Е. А. Лебедева

Технический редактор С. Ш. Абдуллаева

Корректор О. В. Балашова

Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 04.07.19

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 4,65. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.