Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

В.Ф. РОМАНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Задачник

Владимир 2003

УДК 519.161
Р 58

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой менеджмента
Владимирского государственного педагогического университета
Н.Г. Наянзин

Доктор технических наук, доцент
Владимирского государственного университета
И.Р. Дубов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Романов В.Ф.
Р58 Математическая логика и теория алгоритмов: Задачник / Владим. гос. ун-т. Владимир, 2003. 24 с.
ISBN 5-89368-423-0

Приведено компактное множество задач по основным разделам курса "Математическая логика и теория алгоритмов". Задачник предназначен для активного изучения курса и других дисциплин, связанных с математической логикой и программированием.

Во второй части задачника даны ответы и указания к решениям задач и полные решения части задач из раздела "Формальные системы и логический вывод" – для иллюстрации типовых методических приемов данного раздела математики.

Структура и содержание задачника согласуются с требованиями заочной и дистанционной форм обучения.

Для специальностей 071900, 220100, 071800, 210200, 210300, а также для студентов и аспирантов других специальностей, изучающих дискретную математику.

Ил. 2. Библиогр.: 6 назв.

УДК 519.161

ISBN 5-89368-423-0

ВВЕДЕНИЕ

В кратком сборнике задач, который следует рассматривать как практическое пособие, дополняющее лекционный курс по дисциплине "Математическая логика и теория алгоритмов", приведены 70 задач по основным разделам дисциплины. Это компактное множество задач является базой для практических занятий; студент, самостоятельно решивший все задачи, может уверенно чувствовать себя на экзамене. Разумеется, решить задачи можно только при наличии теоретических знаний по предмету: все понятия, определения, термины, на которых основаны задачи, должны быть освоены.

Задачи снабжены ответами и указаниями к решениям. Эту часть сборника рекомендуется использовать лишь после безуспешных попыток решить задачу самостоятельно или если требуется проверка полученного решения. Электронная версия сборника может предоставляться студентам по частям: сначала – только задачи, затем в подходящий (по мнению преподавателя) момент – решения. В электронной версии перечень задач может варьироваться, что делает сборник полезным при изучении других дисциплин, связанных с дискретной математикой и программированием.

Сборник задач, в сочетании с приведенной литературой по предмету, может быть рекомендован и студентам заочной формы обучения.

I. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Составить таблицы истинности для следующих составных высказываний:

а) $x \supset (x \,\&\, y)$;
б) $(x \vee y) \sim (x \,\&\, y)$;
в) $(x \,\&\, y) \sim \neg(\neg x \vee \neg y)$;
г) $(x \vee y) \sim \neg(\neg x \,\&\, \neg y)$.

2. Известно, что $\{\vee, \&, \neg\}$ – функционально полная система (ФПС). Доказать, что системы $\{\vee, \neg\}$, $\{\&, \neg\}$ – тоже ФПС.

3. Является ли операция "|" (штрих Шеффера) ассоциативной? Дать ее теоретико-множественную интерпретацию.

4. Те же вопросы для операции "$\oplus$" (сложение по mod 2).

5. Проверить следующие равносильности формул:

а) $\neg p = p \mid p$;

б) $p \vee q = (p \mid p) \mid (q \mid q)$;

в) $p \,\&\, q = (p \mid q) \mid (p \mid q)$;

г) $p \supset q = p \mid (q \mid q)$.

6. Проверить свойство ассоциативности:

а) импликации;

б) сложения по модулю 2;

в) стрелки Пирса.

7. Проверить свойство дистрибутивности:

а) импликации и конъюнкции;

б) импликации и дизъюнкции.

8. Сколько имеется функций алгебры логики от n переменных?

9. Найти все существенные переменные следующих функций:

а) $f(x, y,z) = x \,\&\, y \vee \neg y \,\&\, z$;

б) $f(x, y,z) = x \,\&\, y \vee x$;

в) $f(x, y,z) = (x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))$.

10. Выразить с помощью суперпозиций:

а) $\&$ через $\vee$ и $\neg$ (решение: $x \,\&\, y = \neg(\neg x \vee \neg y)$);

б) $\vee$ через $\&$ и $\neg$;

в) $\supset$ через $\vee$ и $\neg$;

г) $\supset$ через $\&$ и $\neg$;

д) $\vee$ через $\supset$ и $\neg$;

е) $\&$ через $\supset$ и $\neg$;

ж) $\neg$ через $\supset$ и 0;

з) $\neg$ через $\oplus$ и 1;

и) $\vee$ через $\supset$;

11. Можно ли выразить $\supset$ через $\vee$?

12. Преобразовать равносильно формулы так, чтобы они содержали только указанные операции:

а) $(x \supset \neg y) \supset (y \vee z)$; операции: конъюнкция и отрицание;

б) $((x \vee y) \,\&\, (\neg x \vee \neg y)) \supset ((x \sim y) \,\&\, (\neg x \sim \neg y))$; операции: дизъюнкция и отрицание;

в) $\neg(x \supset \neg y) \supset (\neg x \vee z)$; операции: импликация и отрицание;

г) $(x \,\&\, y) \supset (u \vee z)$; операции: стрелка Пирса.

13. Записать для функции от трех переменных, заданной таблицей истинности (значения функции на наборах переменных выбраны произвольно), совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) и совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ).

14. Построить представление функции, заданной таблично, в виде полинома Жегалкина (базис Жегалкина – $\{\&, \oplus, 1\}$).

15. Доказать, что нельзя выразить с помощью суперпозиций:

а) $\neg$ через $\&, \vee, \supset, \sim$;

б) $\supset$ через $\sim, \oplus$.

16. Выяснить, полны ли следующие системы функций:

а) $\{\neg\}$;

б) $\{\,|\,\}$;

в) $\{\supset, 0\}$;

г) $\{\oplus, \vee, 1\}$.

17. Является ли система функций $\{\supset, \vee, 0\}$ функционально полной? Реализовать в ней функцию $\oplus$.

18. Проверить аналитически равносильность:

$$(A \vee B)(\neg A \vee C) = (A \vee B)(\neg A \vee C)(B \vee C).$$

Примечание. Знак "&" в формулах часто опускается, что делает формулы менее громоздкими. В данном примере он опущен между скобками (дизъюнктами).

19. Можно ли выразить любую формулу логики высказываний только через высказывание "**Если – то – иначе**" и константы **True**, **False**?

20. Какие теоремы теории множеств можно получить из следующих тождеств алгебры логики:

а) $(a \,\&\, (\neg a \vee b)) \supset b = 1$;

б) $(a \,\&\, b) \supset (a \vee b) = 1$;

в) $a \,\&\, b \vee a = a$?

II. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

1. Указать, в каких из приведенных пунктов записаны предикаты:

а) $x^2 + 2 > 0$;

б) $x > 3$;

в) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

г) *студент второго курса*;

д) *волк – травоядное животное.*

Для предикатов указать предметную область и множество истинности.

2. Доказать для предикатов равносильности:

а) $\neg(\forall x\, P(x)) \Leftrightarrow \exists x\, (\neg P(x))$;

б) $\neg(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg P(x))$.

3. Доказать равносильности:

а) $\forall x\, (P(x)\ \&\ Y) \Leftrightarrow \forall x\, P(x)\ \&\ Y$;

б) $\forall x\, (P(x) \vee Y) \Leftrightarrow \forall x\, P(x) \vee Y$;

в) $\exists x\, (P(x)\ \&\ Y) \Leftrightarrow \exists \mathrm{x}\, P(x)\ \&\ Y$;

г) $\exists x\, (P(x) \vee Y) \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \vee Y$.

Здесь Y – переменное высказывание или формула, не содержащая x.

4. Доказать следующие свойства коммутативности кванторов:

а) $\forall x\, \forall y\, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, P(x, y)$;

б) $\exists x\, \exists y\, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

5. Справедлива ли коммутативность разноименных кванторов:

$\forall x\, \exists y\, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \forall x\, P(x, y)$?

6. Доказать следующие свойства дистрибутивности кванторов:

а) $\forall x\, (P(x)\ \&\ Q(x)) \Leftrightarrow \forall x\, P(x)\ \&\ \forall x\, Q(x)$;

б) $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.

7. Показать (приведя примеры), что квантор всеобщности не дистрибутивен относительно дизъюнкции, а квантор существования – относительно конъюнкции предикатов.

8. Выполнить приведение формулы

$\neg(\exists x\, P(x) \supset \forall y\, Q(y))$.

9. Пусть $F(x) \Leftrightarrow \exists y\, P(x, y)$. Дать геометрическую интерпретацию этого соотношения на координатной плоскости x, y.

10. Пусть $F(x) \Leftrightarrow \forall y\, P(x, y)$, причем множество истинности предиката $F(\mathrm{x})$ – отрезок [0, 1]. Привести пример множества истинности предиката $P(x, y)$.

11. Преобразовать в предваренную форму следующую формулу:

$\forall x\, P(x) \supset \exists x\, R(x)$.

12. Построить скулемовскую стандартную форму предиката

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \exists u\, \forall v\, \exists w\, P(x, y, z, u, v, w)$.

13. Дать определение и привести пример ограниченного предиката.

III. ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД

1. Пусть установлено, что если сеть Петри инвариантна, то она ограничена. Что можно сказать о неинвариантной сети Петри? Что можно сказать о неограниченной сети Петри?

2. Известно, что если число делится на 6, то оно делится на 3 и на 2. Сформулировать контрапозицию.

3. Пусть верна теорема "Нильпотентный идеал является модулярным и радикальным". Нуждаются ли в доказательствах следующие утверждения: "Если идеал не нильпотентный, то он не радикальный" и "Если идеал не модулярен, то он не нильпотентный".

4. Три школьника, A, B и C, вызваны к директору. В беседе с директором A утверждает, что B врет, B утверждает, что C врет, а C утверждает, что оба, A и B, врут. Что может заключить директор?

5. Можно ли из следующей совокупности фактов:

(F1) *Марк был римлянином*;

(F2) *Цезарь был диктатором*;

(F3) *Те римляне, которые ненавидели диктатора, пытались убить его;*

(F4) *Римляне были либо преданы диктатору, либо ненавидели его*;

(F5) *Марк не был предан Цезарю*

вывести доказательство того, что Марк пытался убить Цезаря?

6. Проверьте, являются ли правильными следующие рассуждения (возможно, что в них отсутствуют необходимые посылки):

- "Если философ – дуалист, то он не материалист. Если он не материалист, то он диалектик или метафизик. Гегель не метафизик. Следовательно, Гегель – диалектик или дуалист".

- "Некоторые водные животные не являются рыбами, поскольку эти животные – теплокровные".

- "Все металлы – кристаллические вещества, поскольку ни одно кристаллическое вещество не является пластичным и ни один металл не пластичен".

- "Все дельфины – киты. Ни одна рыба не является дельфином, потому что ни одна рыба не является китом".

7. Доказать средствами исчисления высказываний теорему $p \supset p$, где p – пропозициональная переменная.

8. Рассмотрим рассуждение:

"Если бы он не сказал ей, она бы и не узнала.

А не спроси она его, он и не сказал бы ей.

Но она узнала.

Следовательно, она спросила".

Путем формального анализа выяснить, верно ли приведенное рассуждение.

9. Выяснить путем формального анализа, верно ли рассуждение:

"В хоккей играют настоящие мужчины.

Трус не играет в хоккей.

Я в хоккей не играю.

Значит, я трус (!?)"

10. Рассмотрим утверждения:

"Если эта дама приходится Чарли тетей, то она должна прийти (на светский прием) вместе с Чарли".

"Но ее никогда не видели вместе с Чарли".

Проверить средствами формального анализа предполагаемое заключение "Эта дама – не тетя Чарли".

Примечание. Из известного мюзикла мы знаем, что тетя – переодетый Чарли.

11. Рассмотрим доказательное рассуждение:

"Каждый человек смертен.

Сократ – человек.

Следовательно, Сократ смертен".

Построить схему рассуждения с использованием подстановочного частного случая для предикатной переменной.

12. Доказать методом резолюции, что если Кащей бессмертен, то он не человек.

13. Один из афоризмов Козьмы Пруткова звучит так: "Нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиной еще большая; нет вещи столь малой, в которую не вместилась бы еще меньшая".

Записать в форме предиката этот афоризм, используя атомный предикат $P(y, x)$: "y больше x".

Являются ли обе части афоризма тождественными с точки зрения передаваемой информации?

14. Выразить с помощью предикатов:

а) утверждение "Один и только один объект обладает свойством P" и его отрицание;

б) утверждение "По меньшей мере два объекта обладают свойством P" и его отрицание.

15. Решить, применив метод резолюции, выполнима ли булева формула:

а) $(a \vee d)\ (\neg a \vee b)\ (d \vee \neg c)\ (\neg a \vee \neg f)\ (d \vee e)\ (\neg b \vee f)\ (b \vee e)\ (\neg f \vee \neg e)\ (e \vee \neg b)\ (b \vee f)$;

б) та же формула, но без последней скобки;

в) $(\neg x \vee y)\ (t \vee \neg v)\ (\neg z \vee \neg y)\ (x \vee z)\ (\neg t \vee w)\ (y \vee x)\ (\neg w \vee \neg v)$;

г) $(\neg t \vee \neg v)\ (x \vee y)\ (\neg z \vee \neg y)\ (w \vee \neg v)\ (x \vee z)\ (\neg w \vee \neg t)\ (t \vee \neg v)\ (\neg x \vee z)\ (y \vee \neg x)$.

16. В каком случае резольвента двух дизъюнкций, каждая из которых содержит три литерала, также содержит три литерала?

IV. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

1. По каким критериям определяется сложность алгоритма для некоторой задачи? Чем определяется сложность задачи? В чем разница между сложностью алгоритма и сложностью задачи?

2. Классифицировать перечисленные ниже задачи по сложности (полиномиальные, экспоненциальные, NP-трудные, NP-полные):

а) сортировка чисел;

б) перечисление всех перестановок для n элементов множества;

в) нахождение эйлерова цикла в графе;

г) нахождение гамильтонова цикла в графе;

д) перечисление всех наборов переменных логической функции от n переменных;

е) нахождение минимального покрытия (столбцов строками) для бинарной матрицы;

ж) поиск на графе в ширину;

з) поиск на графе в глубину;

и) задача коммивояжера;

к) вычисление n-го числа Фибоначчи;

л) определение хроматического числа графа;

м) определение цикломатического числа графа;

н) задача о ханойской башне;

о) задача о выполнимости булевой формулы.

3. Выделить из графа (рис.1), ребрам которого приписаны целочисленные "веса", дерево минимального (максимального) суммарного веса, содержащее все вершины исходного графа.

Для решения задачи использовать алгоритм Крускаля.

4. Пронумеровав произвольно вершины графа, изображенного на рисунке 1, привести порядок перебора вершин для алгоритмов поиска в графе:

а) в глубину;

б) в ширину.

Указать асимптотические сложности соответствующих алгоритмов.

5. Найти раскраску вершин графа (рис.2) "жадным" алгоритмом.

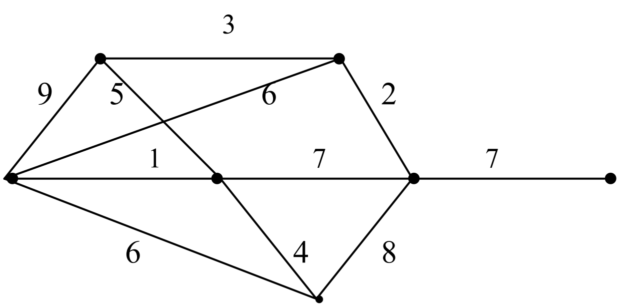

Рис.1

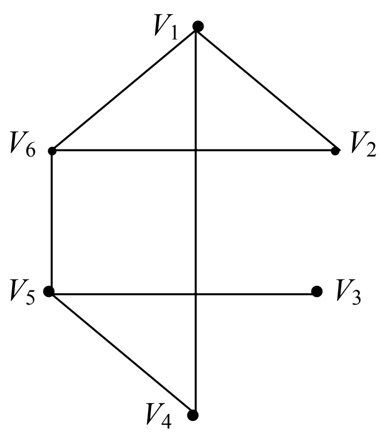

Рис.2

6. Найти раскраску вершин графа, изображенного на рисунке 2, модифицировав жадный алгоритм следующим образом:

• раскрашивать на очередном шаге вершину, связанную с наибольшим числом нераскрашенных вершин;

• наложить вытекающие из предыдущего шага запреты.

Чему равно хроматическое число для этого графа?

Является ли этот граф плоским?

7. Определить хроматическое число для полного графа, содержащего:

а) 5 вершин;

б) n вершин.

8. Определить хроматическое число для графа с пятью вершинами – "пятиконечной звезды".

Какова асимптотическая сложность алгоритма для этой задачи?

Те же вопросы для графа с восемью вершинами – "трехмерного куба".

9. Какой граф называется двудольным? Встречался ли в рассмотренных выше задачах двудольный граф?

10. Классифицировать по сложности следующие задачи математической логики:

- ВЫПОЛНИМОСТЬ (ВЫП);
- 2-ВЫПОЛНИМОСТЬ (2-ВЫП);
- 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (3-ВЫП).

11. Выполнить полиномиальное преобразование задачи ВЫП в задачу 3-ВЫП для следующих исходных формул:

а) $F = x_1 (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5 \vee x_6) \neg x_7 (x_8 \vee x_9 \vee \neg x_{10})$;

б) $F = (\neg x_1 \vee x_2) (\neg x_3 \vee \neg x_4) (x_5 \vee \neg x_6 \vee x_7) (x_8 \vee \neg x_9 \vee \neg x_{10} \vee x_{11})$.

12. Описать процедуру полиномиального преобразования задачи "гамильтонов цикл" в "задачу коммивояжера" для произвольного графа.

13. Какова взаимосвязь машины Тьюринга, предназначенной для конкретного вычисления, с универсальной машиной Тьюринга?

14. Привести примеры задач, для которых справедливы утверждения:

- задача решается конечным автоматом;
- задача не решается конечным автоматом, но решается машиной Тьюринга;
- задача не решается машиной Тьюринга.

15. Дать рекурсивное определение правильного скобочного выражения.

16. Дать рекурсивное определение класса регулярных выражений.

17. Дать рекурсивное определение цепочки над некоторым алфавитом, используя понятия пустой цепочки и конкатенации (присоединения).

18. Доказать, что любая примитивно рекурсивная функция всюду определена.

19. Какая функция получается из простейших с помощью лишь суперпозиций?

20. Какая функция получается из ϕ и ψ с помощью схемы примитивной рекурсии:

а) $\phi(x) = x$; $\psi(x, y, z) = z^x$;

б) $\phi(x) = x$; $\psi(x, y, z) = x^z$.

21. Дана матрица

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

множество ее элементов $E = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}\}$ и два определения семейства подмножеств $J\,(J_1)$ множества E:

а) $I \in J$, если в него входит не более одного элемента из каждого столбца;

б) $I \in J_1$, если в него входит не более одного элемента из каждой строки и каждого столбца.

Дано множество $B = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{33}\}$.

Задания:

1) Доказать без использования понятия жадного алгоритма, что

- система $M = (E, J)$ – матроид;
- система $M_1 = (E, J_1)$ – не матроид.

2) Определить ранг $r(B)$ в матроиде $M = (E, J)$.

3) Найти оболочку $sp(B)$ в M.

4) Указать какой-либо цикл в B. Является ли он циклом в M?

5) Привести пример базиса M.

6) Определить ранг $r(E)$ матроида M. Совпадает ли он с рангом базиса?

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

Раздел I

1. В таблице истинности подготовить столбцы для подформул и использовать их для вычисления значений формулы на наборах переменных.

2. Для сведения систем, для которых доказывается полнота, к известной ФПС воспользоваться законами де Моргана.

3 - 4. Ассоциативность операции может быть проверена по таблице истинности. Для теоретико-множественной интерпретации следует сначала свести заданную операцию к базису $\{\vee, \&, \neg\}$, а затем воспользоваться соответствием между булевыми операциями в логике и в теории множеств.

5. Использовать таблицы истинности или сведение операций к базису Буля.

8. 2^{2^n}.

9. Несущественная переменная не влияет на значение функции при любых сочетаниях значений остальных переменных. Для анализа построить таблицы истинности.

10. Использовать СДНФ (СКНФ) для перехода от таблицы истинности к аналитическому представлению функций, а также законы де Моргана. При выполнении очередного пункта могут быть полезными предыдущие пункты.

11. Нельзя. Множество $\{\vee\}$ представляет собой замкнутую систему.

12. Воспользоваться результатами решения задачи 10.

14. Для перехода к базису Жегалкина в СДНФ или СКНФ следует заменить отрицания ($\neg x = x \oplus 1$), дизъюнкции ($x \vee y = x\,y \oplus x \oplus y$) и воспользоваться свойствами операции $\oplus$, в частности, дистрибутивностью конъюнкции относительно сложения по mod 2.

15. (а) $\neg$ не сохраняет "1", а остальные указанные операции – сохраняют; (б) $\supset$ – нелинейная операция, а $\sim$ и $\oplus$ – линейны.

16. Проанализировать свойства функций, входящих в системы, согласно общей теореме о функциональной полноте.

17. Система полна. Для представления в ней операции $x \oplus y$ использовать соотношения: $x \oplus y = \neg x\, y \vee \neg y\, x$; $\neg x = x \supset 0$; $x\, y = \neg(x \supset \neg y)$.

18. Рассмотреть случаи: $(B \vee C) = 0$ и $(B \vee C) = 1$, сравнив левую и правую части в каждом из этих случаев.

19. Логическая функция "Если a то b иначе c" – функция трех логических переменных: a, b и c. Она принимает значение b, если a истинно, и c в противном случае.

Для решения задачи достаточно проверить, является ли набор перечисленных функций ФПС.

20. (а) $(\overline{A \cap B}) \cup B = U$.

Раздел II

1. (а) – (в) Предикаты; предметная область – множество действительных чисел. (г) Текст. (д) Ложное высказывание.

2. Для доказательства достаточно дать точную словесную интерпретацию левых и правых частей приведенных выражений.

3. Разбить каждый пункт на две подзадачи: $Y = 0$ (**false**) и $Y = 1$ (**true**).

4. Воспользоваться понятием множества истинности двуместного предиката.

5. Не справедлива. Рассмотреть, например, предикат "$x < y$" на числовой предметной области.

6. Провести рассуждения с предметными областями и множествами истинности предикатов и установить, в каких случаях левые и правые части приведенных выражений одновременно истинны либо ложны.

7. Пример, опровергающий дистрибутивность: $M_P \cup M_Q = M$; $M_P \cap M_Q = \varnothing$, где M – предметная область предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, M_P и M_Q – соответственно их множества истинности (M_P и M_Q образуют разбиение множества M).

8. В приведенной формуле используются только операции $\vee$, &, $\neg$, причем отрицание может относиться к предикатам и высказываниям, но не к кванторам.

9. Множество истинности предиката $F(\text{x})$ представляет собой проекцию на ось x двумерной фигуры – множества истинности двуместного предиката $P(x, y)$.

10. Рассмотреть в качестве множества истинности предиката $P(x, y)$ полосу, ограниченную по оси x отрезком [0, 1], но не ограниченную по оси y.

11. $\forall x\, P(x) \supset \exists x\, R(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x\, P(x)) \vee \exists x\, R(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x\, R(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists x\, (\neg P(x) \vee R(x)) \Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \supset R(x))$.

12. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \exists u\, \forall v\, \exists w\, P(x, y, z, u, v, w) \Leftrightarrow \forall y\, \forall z\, \forall v\, P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$.

13. Ограниченным предикатом называется предикат, определенный не на всей предметной области, а на множестве предметов, удовлетворяющих дополнительному условию.

Пример: $\forall(x \in X)\ P(x)$ – для всех x, принадлежащих множеству X, $P(x) \equiv$ **true**.

Раздел III

1. Неинвариантная сеть Петри может быть ограниченной или неограниченной. Неограниченная сеть Петри не инвариантна.

2. Если число не делится на 3 или не делится на 2, то оно не делится на 6.

3. Первое утверждение нуждается в доказательстве. Второе справедливо.

4. Анализ можно начать с того, что A либо врет, либо говорит правду. Найти вариант оценки утверждений B и C, не приводящий к противоречию.

5. Введем обозначения: $Р$ – римлянин; $П$ – предан диктатору; $Н$ – ненавидит диктатора; $У$ – пытается убить диктатора.

Тогда по отношению к Марку справедливы следующие закодированные посылки:

$C1$: $Р$;

$C2$: $\neg П$;

$C3$: $Р \supset (П \vee Н)$, в дизъюнктивной форме: $(\neg Р \vee П \vee Н)$;

$C4$: $Н \supset У$, в дизъюнктивной форме: $(\neg Н \vee У)$;

Для применения метода резолюций составляется конъюнктивная форма, содержащая посылки и отрицание предполагаемого заключения ($C5$: $\neg У$):

$$Р\ \neg П\ (\neg Р \vee П \vee Н)\ (\neg Н \vee У)\ \neg У\ .$$

Далее отыскиваются резольвенты, которые могут присоединяться к посылкам:

C1 и *C3* дают резольвенту *R1*: $(П \vee Н)$;

C2 и *R1* дают резольвенту *R2*: $Н$;

R2 и *C4* дают резольвенту *R3*: $У$;

R3 и *C5* дают в качестве резольвенты пустое предложение: ( ).

Доказательство закончено: Марк пытался убить Цезаря.

6. Вывод первого рассуждения неверен. Метод резолюции не позволяет получить "( )".

Вывод второго рассуждения неверен – не хватает исходных посылок (нет факта, из которого следует, что рыбы не принадлежат к теплокровным).

Для проверки третьего рассуждения введем обозначения: $М$ – металл; $П$ – пластичный; $К$ – кристаллический. Посылки: $М \supset \neg П$; $К \supset \neg П$. Отрицание предполагаемого заключения: $\neg(М \supset К) \Leftrightarrow М \neg К$. Конъюнктивная форма для метода резолюций:

$$(\neg М \vee \neg П)(\neg К \vee \neg П) М \neg К.$$

Первую и вторую скобки можно исключить – они содержат уникальный литерал $\neg П$. Из конъюнкции $М \neg К$ пустое предложение не выводится, следовательно, вывод рассуждения неверен.

Четвертое рассуждение верно. Обозначения: $Д$ – дельфин, $К$ – кит, $Р$ – рыба.

Конъюнктивная форма: $(\neg Д \vee К)(\neg Р \vee \neg К) Р Д$.

Пустое предложение легко выводится.

Примечание. Отрицание предполагаемого заключения $\neg(Р \supset \neg Д) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Р Д$.

7. Из аксиомы *A1* исчисления высказываний следует теорема

$$T1: (p \supset ((p \supset p) \supset p))$$

(в аксиому *A1* вместо первой метаязыковой переменной подставлена пропозициональная переменная p, а вместо второй – формула $(p \supset p)$).

Из аксиомы *A2* и теоремы *T1* следует теорема

$$T2: (p \supset ((p \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p)).$$

Из *T2* по правилу вывода *modus ponens* следует теорема

$$T3: ((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p)).$$

Из аксиомы *A1* следует, что $(p \supset (p \supset p))$ – теорема.

$$T4: (p \supset (p \supset p)).$$

Применив правило *modus ponens* к *T3* с учетом *T4*, получаем теорему

$$T5: (p \supset p).$$

8. Введем обозначения: *Ск* – сказал; *У* – узнала; *Сп* – спросила. Имеем посылки:

$F1$: $\neg Ск \supset \neg У$;

$F1$: $\neg Сп \supset \neg Ск$;

F3: $У$;

Предполагаемый вывод: R: $Сп$.

Согласно принципу контрапозиции:

$\neg Ск \supset \neg У \Leftrightarrow У \supset Ск$; $\neg Сп \supset \neg Ск \Leftrightarrow Ск \supset Сп$.

Применим дважды силлогизм modus ponens:

$$\frac{\begin{array}{l} У \supset Ск \\ У \end{array}}{Ск}$$

$$\frac{\begin{array}{l} Ск \supset Сп \\ Ск \end{array}}{Сп}$$

Вывод подтвержден.

9. Обозначим: T – трус; $\neg T$ – настоящий мужчина (не трус); X – играть в хоккей.

Конъюнктивная форма для метода резолюции: $(\neg X \vee \neg T)\ \neg X\ \neg T$.

Пустое предложение не выводится, следовательно, вывод "я – трус" неверен.

10. Обозначим: T – "тетя Чарли"; B – "видеть тетю и Чарли вместе".

Применим силлогизм modus ponens:

$$\frac{\begin{array}{l} T \supset B \\ \neg B \end{array}}{\neg T}$$

11. Схема рассуждений с использованием силлогизма *modus ponens*:

$$\frac{\begin{array}{l} (F1)\ \ \forall x\ [Человек\ (x) \supset Смертен\ (x)]; \\ (F2)\ \ Человек\ (Сократ); \end{array}}{(R)\ \ Смертен\ (Сократ).}$$

При решении задачи методом резолюций сначала из $F1$ и $\neg R$ (с подстановкой вместо переменной x константы *Сократ*) получим резольвенту $\neg$*Человек* (*Сократ*), которая совместно с предложением $F2$ дает в качестве новой резольвенты пустое предложение.

12. Использовать схему силлогизма *modus tollens* с предложением $F2$: $\neg$*Смертен* (*Кащей*).

13. Первая часть афоризма:

$$\neg(\exists x \neg \exists y\ P(y, x)) \Leftrightarrow \forall x\ \exists y\ P(y, x),$$

где предикат $P(y, x)$ на множестве вещей означает "Вещь y превосходит величиной вещь x".

Вторая часть афоризма ($\forall y\ \exists x\ \mathrm{P}(y, x)$) не тождественна первой.

14. (а) $\exists x\ P(x)\ \&\ \forall x\ \forall(y \neq x)\ \neg(P(y)\ \&\ P(x))$ (иначе: $|M_{\text{р}}| = 1$).

(б) $\exists x\ \exists\ (y \neq x)\ (P(y)\ \&\ P(x))$ (иначе: $|M_{\text{р}}| \geq 2$).

Запись отрицаний приведенных предикатов не составляет трудности.

15. (а) В формуле d – уникальный литерал. Исключив дизъюнкты, содержащие d, обнаруживаем, что a – уникальный литерал. Итак, достаточно исследовать формулу, содержащую пять последних скобок. Далее получение резольвент быстро приводит к пустому предложению – формула невыполнима.

(б) Для анализа остаются четыре скобки. Процесс получения резольвент ограничен, и легко видеть, что ( ) получить нельзя – формула выполнима.

(в), (г) Решение достигается подходом, использованным в предыдущих пунктах.

16. Кроме литерала, который присутствует в одной дизъюнкции без инверсии, а в другой – с инверсией, в обеих дизъюнкциях должен быть один общий литерал.

Раздел IV

1. Вычислительная сложность алгоритма является функцией, описывающей асимптотическую зависимость числа элементарных шагов алгоритма (при наиболее "неблагоприятных" исходных данных) от параметров, задающих размер задачи.

Сложность задачи оценивается сложностью "наилучшего" алгоритма, известного для этой задачи.

2. Задачи (б), (д), (н) – экспоненциальные; задачи (г), (о) – *NP*-полные; задачи (е), (и), (л) – *NP*-трудные; остальные задачи решаются полиномиальными алгоритмами.

3. В алгоритме Крускаля используется пошаговое присоединение к строящемуся дереву ребер, упорядоченных по неубыванию (альтернатива – по невозрастанию) весов; ребра, приводящие к возникновению циклов, опускаются.

4. Оба алгоритма имеют сложность порядка $O(n + m)$.

5. Жадный алгоритм раскраски при данной нумерации вершин использует четыре цвета.

6. Модифицированный алгоритм использует три цвета и точно определит в данном случае хроматическое число. Граф является плоским.

7. Для полного графа с n вершинами $\gamma(n) = n$, где $\gamma(n)$ – хроматическое число.

8. Для первого графа $\gamma(n) = 3$, для второго $\gamma(n) = 2$. Сложность алгоритма – $O(n)$.

9. Второй граф из предыдущей задачи является двудольным. Для двудольного графа всегда справедливо: $\gamma(n) = 2$.

10. Задача 2-ВЫП относится к классу полиномиальных, задачи ВЫП и 3-ВЫП – к классу *NP*-полных задач.

11. (а) $F^{(3)} = (x_1 \vee y \vee z)(\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee p)(\neg p \vee x_4 \vee q)(\neg q \vee \neg x_5 \vee x_6)$ $(\neg x_7 \vee y \vee z)(x_8 \vee x_9 \vee \neg x_{10})(\neg y \vee \alpha \vee \beta)(\neg y \vee \neg\alpha \vee \beta)(\neg y \vee \alpha \vee \neg\beta)$ $(\neg y \vee \neg\alpha \vee \neg\beta)(\neg z \vee \alpha \vee \beta)(\neg z \vee \neg\alpha \vee \beta)(\neg z \vee \alpha \vee \neg\beta)(\neg z \vee \neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Здесь $F^{(3)}$ – формула для задачи 3-ВЫП, эквивалентная исходной по критерию выполнимости.

12. Преобразовать заданный граф в полный граф добавлением необходимых для такого преобразования ребер. Ребрам заданного графа приписать вес, равный 1, добавленным ребрам – вес, равный 2. Далее решать задачу коммивояжера. Если задача решается точно, то значение длины обхода, равное n, означает существование гамильтонова цикла в заданном графе (n – число вершин).

13. Универсальная машина Тьюринга (УМТ) имитирует действия любой конкретной машины Тьюринга; автомат УМТ "интерпретирует"

данные и описание конечного автомата конкретной машины, записанные на ленте УМТ.

14. Примеры указанных задач (соответственно):

- поразрядное суммирование двоичных чисел с произвольным числом разрядов;
- проверка правильности скобочного выражения произвольной длины;
- проблема распознавания алгоритмов.

15. БАЗА: "( )" – правильное скобочное выражение (ПСВ).

РЕКУРСИЯ:

a) Если A – ПСВ, то и (A) – ПСВ.

b) Если A – ПСВ и B – ПСВ, то и AB – ПСВ.

Здесь A и В – метасимволы (вспомогательные символы, не входящие в алфавит);

AB – конкатенация выражений, обозначенных метасимволами.

16. БАЗА: x – регулярное выражение (РВ).

РЕКУРСИЯ:

a) Если E – РВ, то и E^* – РВ.

b) Если E – РВ и F – РВ, то и EF – РВ.

c) Если E – РВ и F – РВ, то и $(E \vee F)$ – РВ.

Здесь x – любой символ из заданного алфавита; U; E, F – метасимволы; E^* – повторение выражения E произвольное число раз (в том числе и ни разу); EF – конкатенация; $(E \vee F)$ – выбор одного из выражений.

17. БАЗА: Пустая цепочка ε – цепочка над алфавитом U.

РЕКУРСИЯ: Если A – цепочка над U и x – любой символ из U, то и Ax – цепочка над U.

18. Простейшие функции всюду определены, а операторы суперпозиции и примитивной рекурсии не ограничивают область определения функции.

19. Простейшая функция.

20. (а) x^{x^y}; (б) $\underset{(y\ \text{раз})}{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$.

21. (1) В M любое максимальное по включению независимое множество в любом $C \subseteq E$ максимально и по числу элементов. В M_1 множество

$\{a_{32}\}$ максимально по включению в заданном подмножестве B, но не максимально по числу элементов.

(2) Ранг $r(B) = 2$.

(3) Оболочка $sp(B)$ – объединение элементов второго и третьего столбцов матрицы A.

(4) Например, $\{a_{12}, a_{22}\}$ – цикл в B. Разумеется, это цикл и в M.

(5) Например, любая строка матрицы A – базис M.

(6) $r(E) = 3$. Этот ранг совпадает с рангом базиса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 399 с.

2. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984. – 223 с.

3. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 210 с.

4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2002. – 301 с.

5. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.

6. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. – СПб.: Питер, 2002. – 206 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

РОМАНОВ Владимир Федорович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Задачник

Редактор Е.В. Невская
Корректор Е.В. Афанасьева
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 20.09.03.
Формат 60х84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,45. Тираж 300 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.