

ИННОВАЦИОННАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА



Проект 4: развитие инфраструктуры и систем жизнеобеспечения

Цель: обеспечение профессиональных компетенций выпускников университета в области строительства, реставрации и экспертизы памятников архитектуры, жилищно-коммунального хозяйства и ресурсо-энергосберегающих технологий функционирования безопасной и комфортной среды жизнедеятельности.

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Составитель
С.А. МАВРИНА

Владимир 2008

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
М54

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
зав. кафедрой автомобильных дорог
Владимирского государственного университета
Э.Ф. Семехин

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Методические указания к расчетно-графическим работам по
М54 дисциплине «Сопротивление материалов» / Владим. гос. ун-т ;
сост. С. А. Маврина. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. –
58 с.

Необходимы для выполнения самостоятельных работ при изучении курса «Сопротивление материалов». Помогут студентам усвоить основные понятия и методы расчета элементов конструкций на прочность при простых и сложных видах деформирования; при анализе напряженно-деформированного состояния.

Составлены в соответствии с Федеральным стандартом дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов 2-го курса специальности 270205 – автомобильные дороги и аэродромы очной формы обучения. Могут быть использованы студентами других строительных специальностей.

Табл. 13. Ил. 22. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3/.6
ББК 30.121

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат шесть заданий, самостоятельное выполнение которых позволит каждому студенту применить полученные теоретические знания на практике; при этом достаточно подробные разъяснения к выполнению каждого задания помогут оставаться на верном пути решения.

Федеральный стандарт курса «Сопротивление материалов» для специальности 270205 – автомобильные дороги и аэродромы предусматривает его изучение наряду с основами теории упругости, поэтому задания 1 – 4 основаны на теоретических знаниях сопротивления материалов, задания 5 – 6 предусматривают знания основ теории упругости.

Все задания выполняются по индивидуальному четырехзначному шифру, выданному преподавателем. Для правильного выписывания данных, соответствующих шифру, необходимо поставить в соответствие каждой римской цифре таблицы цифру индивидуального шифра. Например, для шифра 2036 в табл. 1 выделены значения исходных данных, соответствующие этому шифру.

Приложения содержат образец титульного листа расчетно-графической работы и необходимые справочные данные для выполнения заданий.

Расчетно-графические работы выполняются на одной стороне листа белой бумаги формата А4. Они включают в себя титульный лист, пояснительную записку, содержащую подробное описание каждого задания, графическую часть. Текстовая часть оформляется как рукописно, так и на ПЭВМ. Графическая часть выполняется отдельно только карандашом с помощью чертежных инструментов и с соблюдением выбранных масштабов изображения.

ЗАДАНИЕ № 1

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Задача 1. Для заданного стержня (рис. 1) требуется:

- 1) изобразить расчетную схему стержня;
- 2) построить эпюру продольной силы N_x .

Исходные данные взять из табл. 1 в соответствии с шифром, заданным преподавателем.

Заметим, что на основании международной системы единиц ньютон является единицей силы, но так как эта величина достаточно малая, во всех заданиях единица силы принята в килоньютонах.

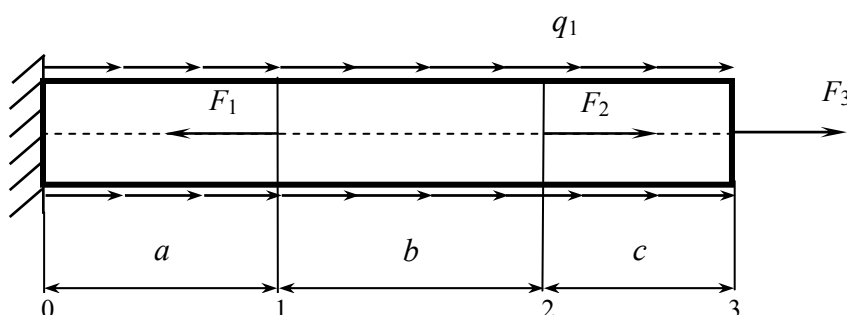


Рис. 1

Таблица 1

Цифра вари- анта	I	II	III			IV		
	q_1/q	q_1 приложена на участке	F_1/F	F_2/F	F_3/F	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$
1	1	0 - 1	1	0	-1	0,2	0,2	0,4
2	2	1 - 2	0	2	1	0,3	0,1	0,2
3	3	2 - 3	0	3	-2	0,1	0,3	0,2
4	-1	0 - 2	1,6	0	2	0,1	0,2	0,3
5	-2	1 - 3	0	-3	3	0,2	0,2	0,1
6	-3	2 - 3	2	0	-3	0,3	0,1	0,2
7	1,8	0 - 1	-2	0	-1,5	0,1	0,3	0,4
8	-1,6	0 - 2	-1	0	1,5	0,2	0,1	0,3
9	1,4	1 - 3	0	1	-2,5	0,3	0,2	0,1
0	-1,5	1 - 2	0	-1	2,5	0,1	0,3	0,2

Примечание. При расчетах принять $q = 10 \text{ кН/м}$, $F = 16 \text{ кН}$.

Задача 2. Для заданного вала постоянного поперечного сечения требуется (рис. 2):

- 1) изобразить расчетную схему вала;
- 2) построить эпюру крутящего момента M_x .

Исходные данные и номер схемы взять из табл. 2 по шифру, выданному преподавателем.

Таблица 2

Цифра варианта	I	II		III		IV		
	Номер схемы	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	M_3 , кН·м	M_4 , кН·м	a , м	b , м	c , м
1	5	1,1	1,3	2,0	1,8	0,20	0,16	0,14
2	6	1,2	1,4	1,9	1,6	0,19	0,11	0,20
3	10	1,3	1,5	1,8	1,7	0,18	0,20	0,12
4	9	1,4	2,0	1,6	1,4	0,17	0,10	0,16
5	1	1,5	1,7	1,5	1,2	0,16	0,18	0,15
6	2	1,6	1,2	1,7	1,3	0,15	0,11	0,18
7	4	1,7	1,1	1,4	2,0	0,14	0,12	0,11
8	3	1,8	1,8	1,3	1,9	0,13	0,10	0,12
9	7	1,9	1,9	1,2	1,1	0,12	0,14	0,16
0	8	2,0	1,6	1,1	1,5	0,11	0,15	0,13

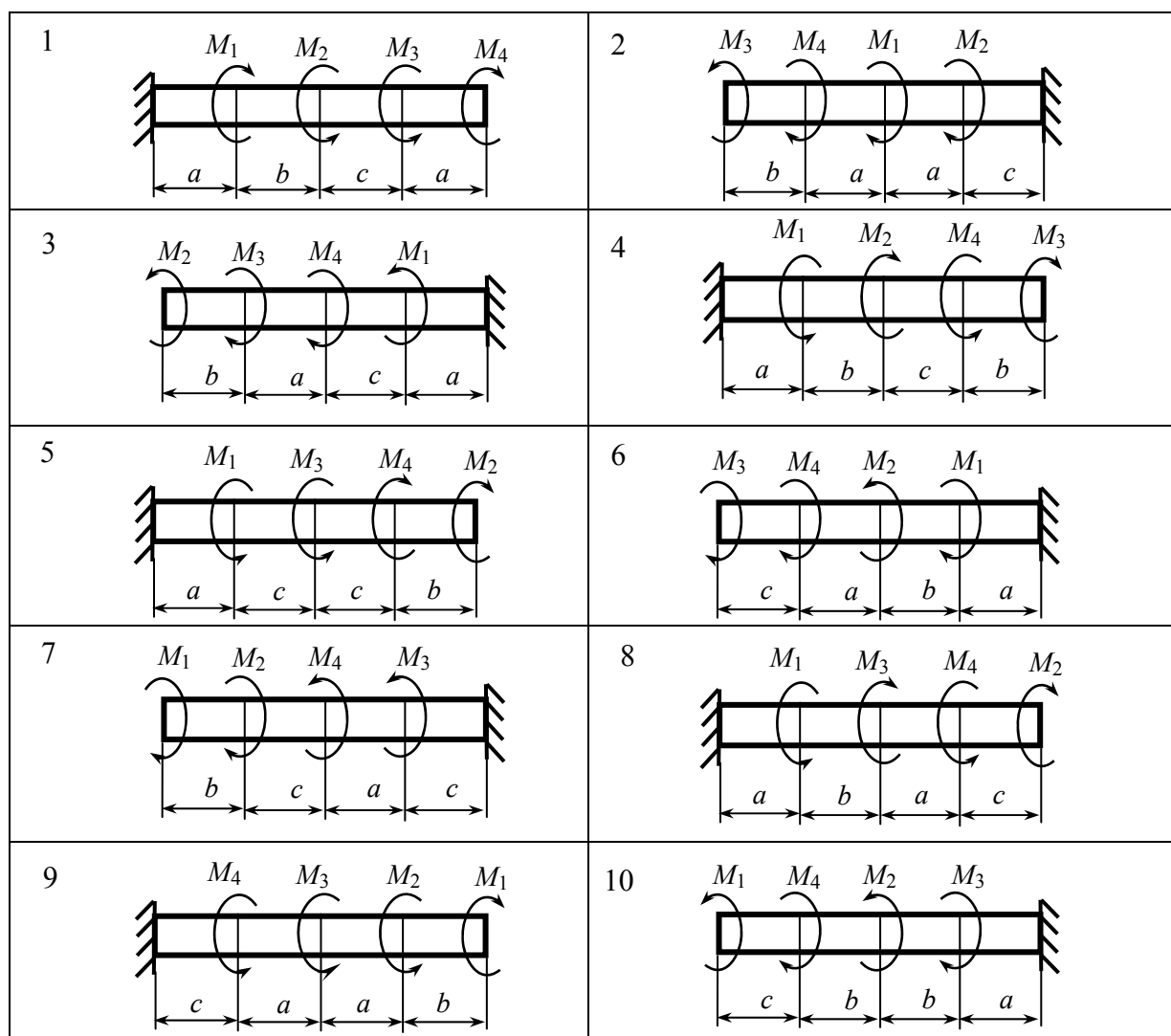


Рис. 2

Задачи 3 – 5. Для заданных трех типов балок: шарнирной (рис. 3), шарнирно-консольной (рис. 4) и консольной (рис. 5) требуется:

- 1) изобразить расчетную схему каждой балки;
- 2) построить эпюры изгибающего момента M_z и поперечной силы Q_y .

Данные для расчета и номер схемы балок взять из табл. 3 по шифру, выданному преподавателем.

Таблица 3

Цифра варианта	I	II			III		IV
	Номер схемы	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	F/F_1	q/q_1	M/M_1
1	5	2,0	1,4	1,8	1	2	-1
2	6	2,1	1,5	1,6	2	1	2
3	7	2,2	1,6	1,4	3	-1	-2
4	8	2,3	1,7	1,2	-1	3	-2
5	9	2,4	1,8	1,0	-2	1	-1
6	10	2,5	1,9	1,2	-3	2	1
7	1	2,6	2,0	1,4	1,4	-2	-1,4
8	2	2,7	2,1	1,6	-1,6	3	1,6
9	3	2,8	2,2	1,8	1,6	-1	-2
0	4	2,9	2,3	2,0	-1,6	-3	1

Примечание. При расчетах принять $q_1 = 10 \text{ кН/м}$, $F_1 = 16 \text{ кН}$, $M_1 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Указания к выполнению задания № 1

Цель задания – развить навыки самостоятельного построения эпюр внутренних силовых факторов при различных видах простого деформирования методом сечений.

В данном задании рассматривается построение эпюр внутренних силовых факторов при центральном растяжении (сжатии) – задача 1, при кручении – задача 2, при прямом поперечном изгибе – задачи 3 – 5.

Внутренними силовыми факторами являются: продольная сила N_x при центральном растяжении (сжатии); крутящий момент M_x при кручении; изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y при прямом поперечном изгибе. Здесь указанные индексы соответствуют следующей плоской системе координат: ось x направлена вдоль оси стержня, ось y перпендикулярна оси x . Внутренние силовые факторы находятся методом сечений. Практическое применение метода сечений состоит в соблюдении ряда правил, который можно сокращенно заменить аббревиатурой РОЗУ. Указанные правила требуют выполнения следующих шагов (первые буквы и составляют аббревиатуру).

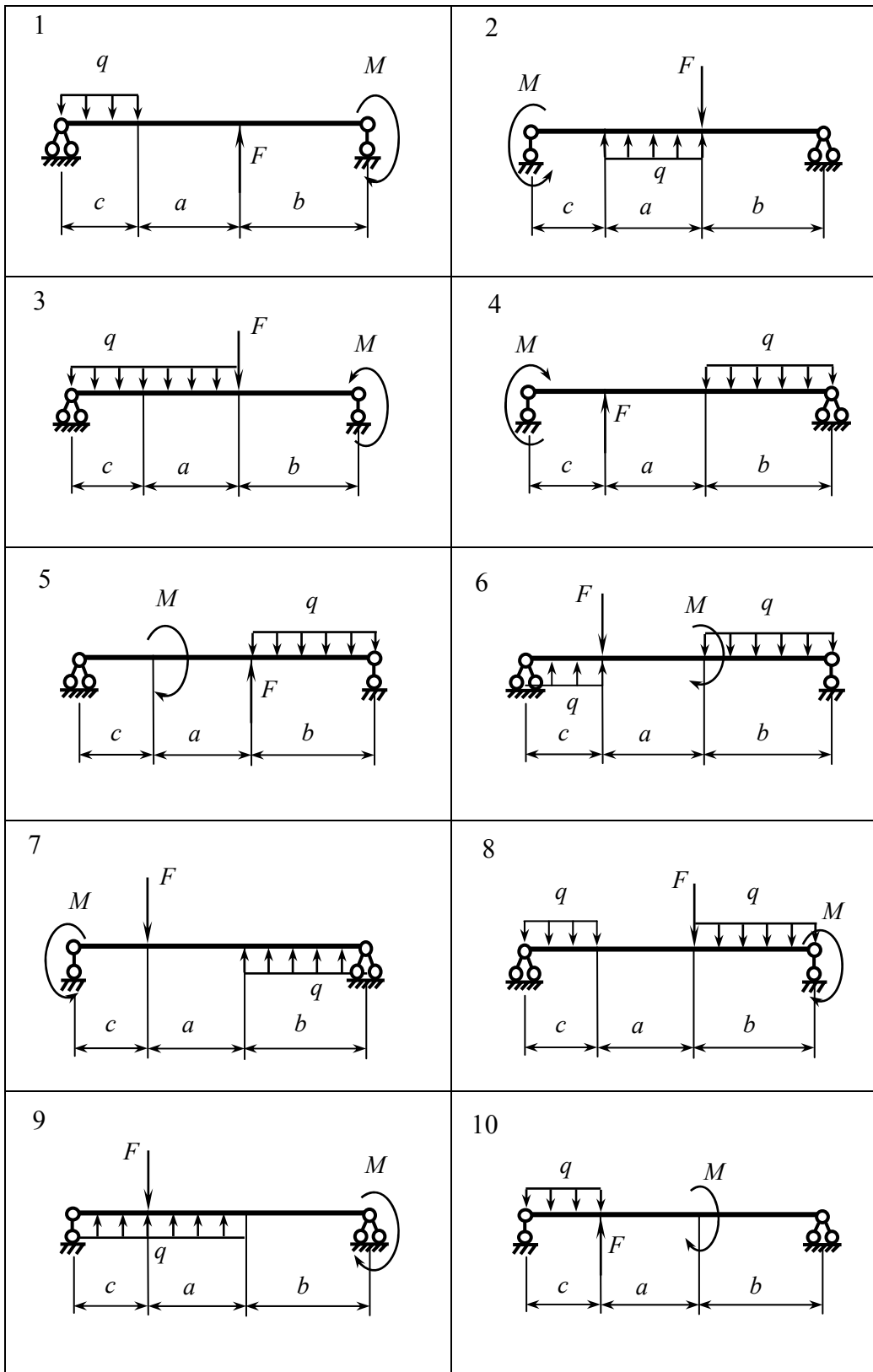


Рис. 3

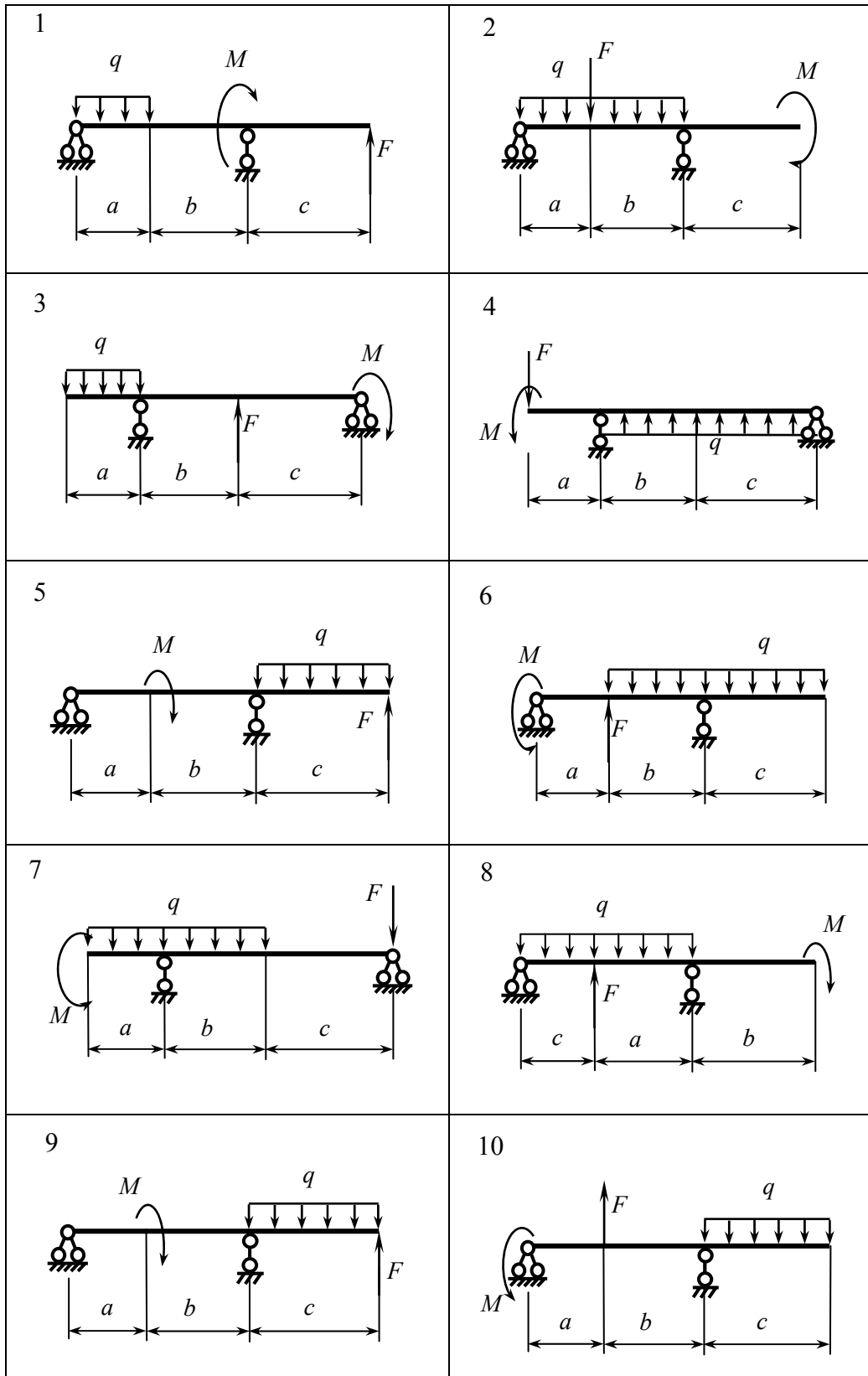


Рис. 4

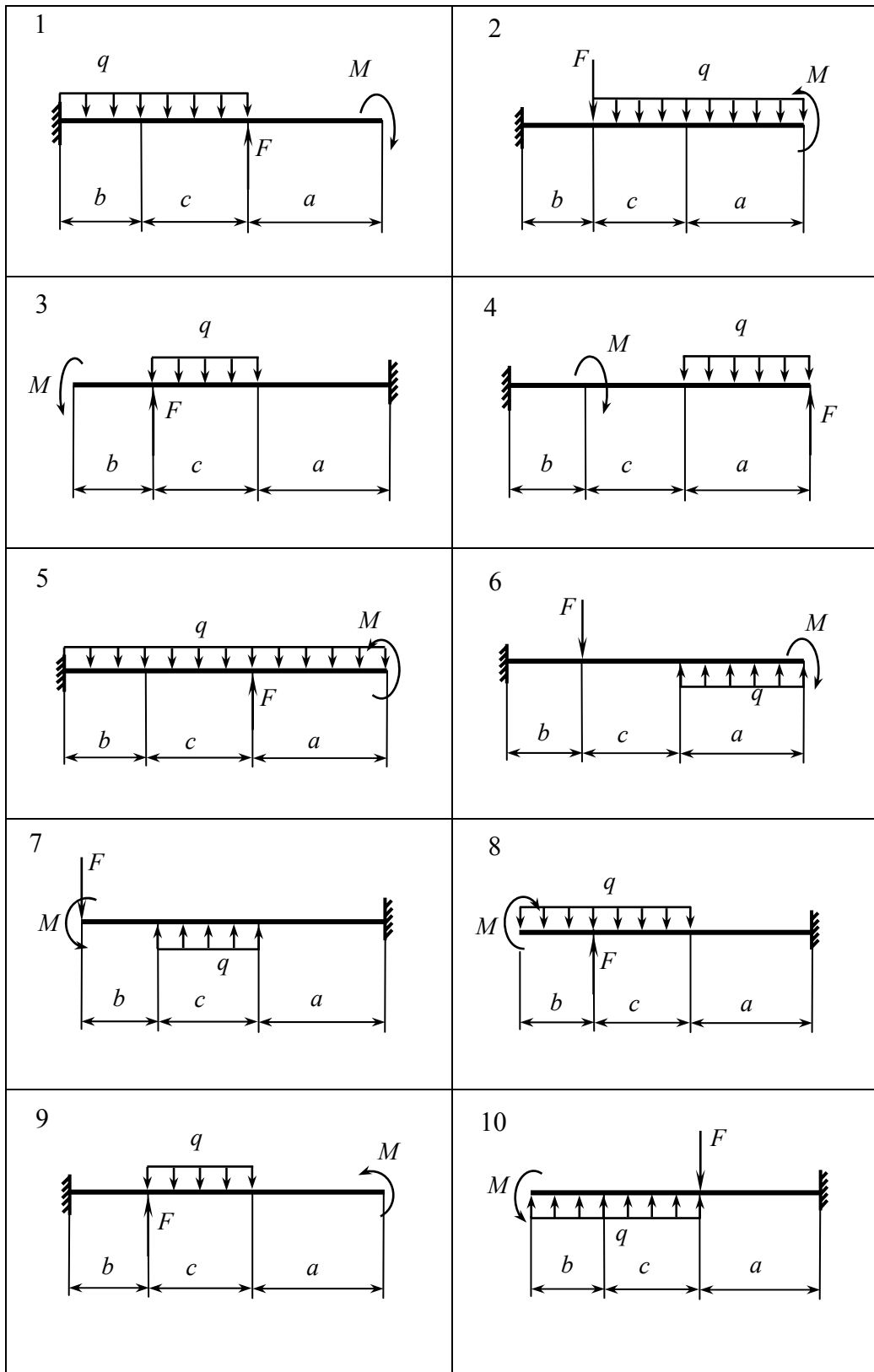


Рис. 5

1. **Разрежь** исследуемое тело (участок) плоскостью, перпендикулярной оси тела, на две части.

2. **Отбрось** мысленно одну из частей.

3. **Замени** действие отброшенной части неизвестными, но всегда положительно направленными внутренними силовыми факторами. Вид внутреннего силового фактора определяется в зависимости от вида деформации.

4. **Уравнение** равновесия составь.

При выполнении шага 3 используется правило положительных направлений внутренних силовых факторов (рис. 6).

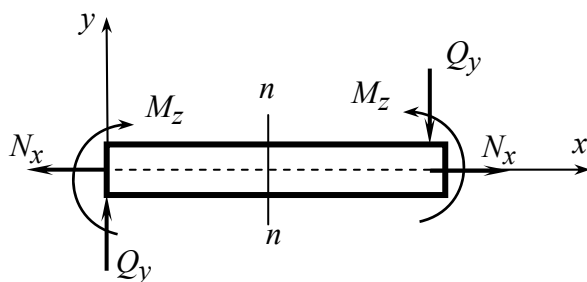


Рис. 6

Обратите внимание: имеем разные направления на левом и правом концах участка относительно произвольного промежуточного сечения $n - n$. При кручении крутящий момент будем считать положительным, если он направлен по часовой стрелке.

Рекомендуется следующий порядок выполнения каждой задачи.

1. Определить реакции опор.

2. Разбить рассматриваемый стержень на участки так, чтобы в пределах каждого участка разбиения характер внешней нагрузки не менялся.

3. Для каждого участка разбиения составить выражения N_x (задача 1), M_x (задача 2), M_z и Q_y (задачи 3 – 5) и построить соответствующие эпюры на базисных линиях, параллельных оси заданного стержня (балки). Располагаются эпюры непосредственно под расчетными схемами.

Эпюры изгибающих моментов строят на растянутых волокнах. Положительные значения продольной и поперечной сил при построении эпюр принято откладывать выше базисной линии.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид деформирования стержня называется центральным растяжением (или сжатием)?

2. Как вычисляются значения продольной силы в произвольном сечении стержня? Какова размерность продольной силы?

3. Каким методом строится эпюра продольной силы?

4. Какой вид деформирования стержня называется кручением? Какой внутренний силовой фактор возникает при кручении?

5. Какой вид деформирования стержня называется прямым поперечным изгибом? Какие внутренние силовые факторы возникают при изгибе?

6. Назовите правила знаков для каждого внутреннего силового фактора.

7. Какие типы опор применяются при прикреплении балок к основанию?

8. Перечислите основные зависимости вида эпюр внутренних силовых факторов от внешней нагрузки.

ЗАДАНИЕ № 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

Задача 1. Для сложного симметричного поперечного сечения (рис. 7) требуется:

1) начертить поперечное сечение в масштабе; указать необходимые размеры;

2) определить положение центра тяжести поперечного сечения и показать систему центральных осей (z_c – горизонтальная ось, y_c – вертикальная ось);

3) вычислить величины осевых моментов инерции J_{z_c} и J_{y_c} относительно найденных центральных осей;

4) показать главные центральные оси u , v , учитывая симметрию заданного сечения (ось u – ось максимума, v – ось минимума);

5) записать величины осевых моментов инерции J_u , J_v относительно главных центральных осей.

Данные для расчета взять из табл. 4 по шифру, выданному преподавателем.

Задача 2. Для сложного симметричного поперечного сечения, состоящего из прокатных профилей (рис. 8), требуется выполнить пп. 1 – 5 задачи 1.

При выполнении задания необходимо пользоваться данными сортамента прокатных профилей, представленными в приложениях.

Таблица 4

Цифра варианта	I	II	III	IV
	Номер схемы	a , мм	b , мм	c , мм
1	5	60	46	80
2	3	45	52	70
3	7	50	56	100
4	9	40	38	85
5	6	35	54	50
6	2	55	46	90
7	4	48	50	65
8	10	64	36	95
9	1	42	60	75
0	8	58	40	60

Задача 3. Для сложного несимметричного поперечного сечения (рис. 9) требуется:

- 1) начертить поперечное сечение в масштабе;
- 2) определить положение центра тяжести сечения и показать систему центральных осей (z_c – горизонтальная ось, y_c – вертикальная ось);
- 3) вычислить величины осевых моментов инерции J_{z_c} , J_{y_c} относительно найденных центральных осей и центробежный момент инерции $J_{z_c y_c}$;
- 4) определить положение главных центральных осей (u – ось максимума, v – ось минимума);
- 5) вычислить величины осевых моментов инерции J_u и J_v относительно главных центральных осей.

Данные для расчета и номер схемы взять из табл. 5 по шифру, выданному преподавателем.

Таблица 5

Цифра вари- анта	II		III		IV		
	I	II	III	IV	a, мм	b, мм	
	Номер схемы	Двутавр (номер)	Швеллер (номер)	Уголок равнополочный, мм	Уголок неравнополочный, мм		
1	5	20	14	50 × 50 × 4	160 × 100 × 9	200	340
2	6	22	16	56 × 56 × 4	140 × 90 × 8	210	360
3	9	18	24	70 × 70 × 6	110 × 70 × 8	180	400
4	10	24	30	80 × 80 × 6	100 × 63 × 6	190	280
5	8	27	18	100 × 100 × 8	180 × 110 × 10	220	350
6	7	30	16a	90 × 90 × 6	90 × 56 × 6	150	380
7	1	24	18a	70 × 70 × 5	125 × 80 × 8	160	330
8	4	20	20	80 × 80 × 7	140 × 90 × 10	220	440
9	3	18	27	90 × 90 × 8	110 × 70 × 8	180	350
0	2	27	22	110 × 110 × 8	200 × 125 × 16	160	390

Примечание. Размеры швеллеров представлены в соответствии с ГОСТ 8240-89; двутавров – ГОСТ 8239-89; уголков равнополочных – ГОСТ 8509-86; уголков неравнополочных – ГОСТ 8510-86.

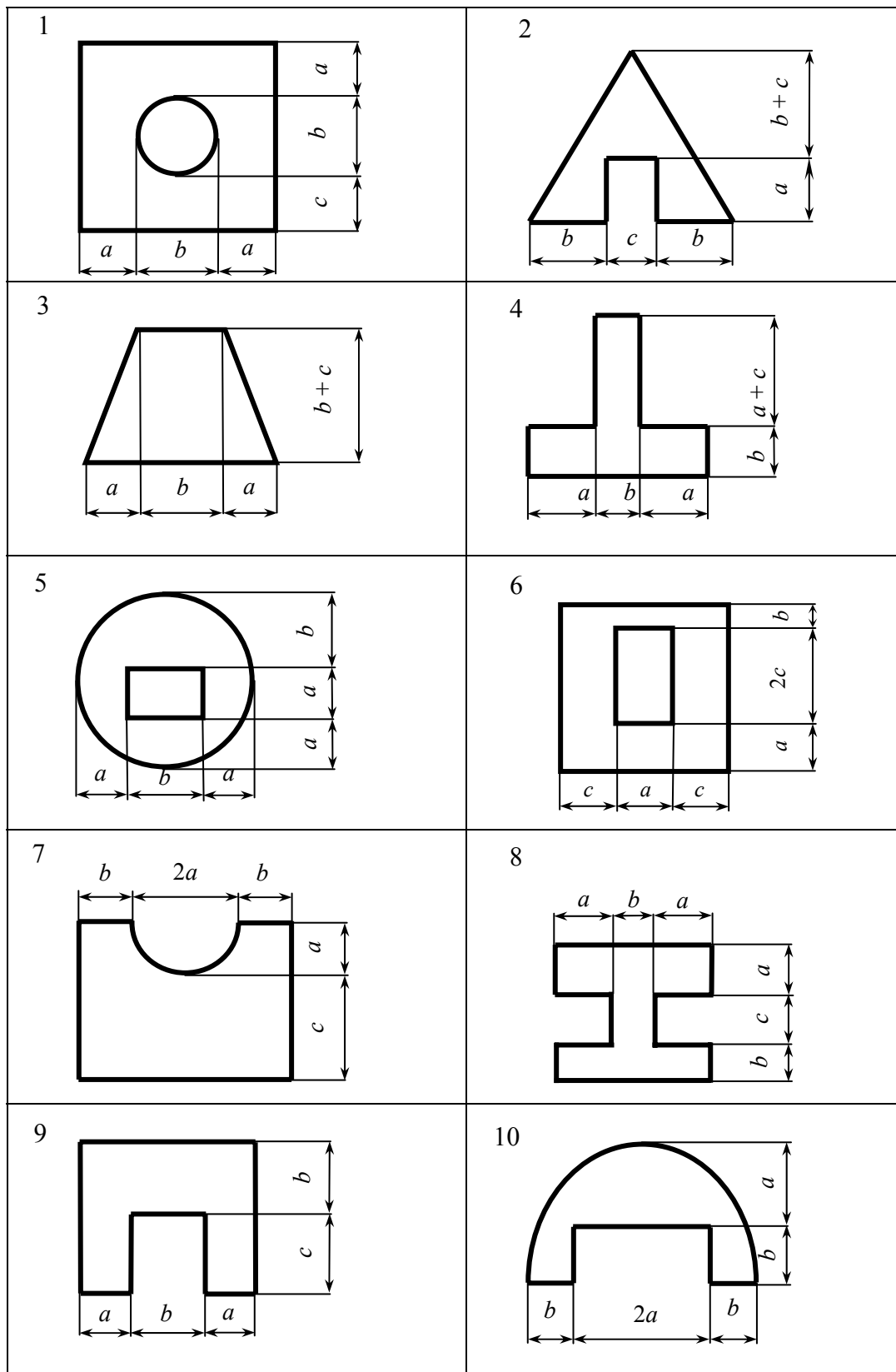


Рис. 7

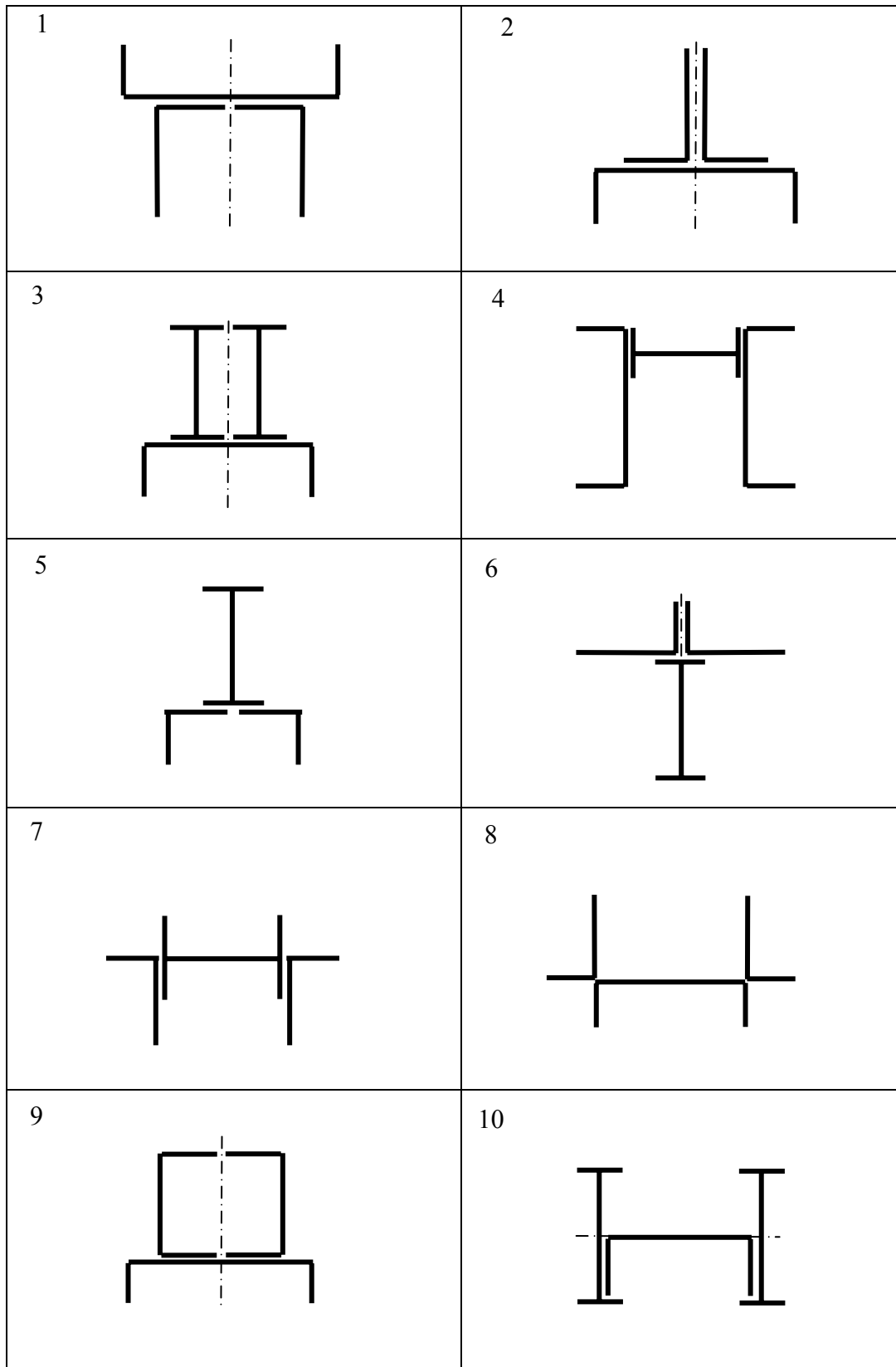


Рис. 8

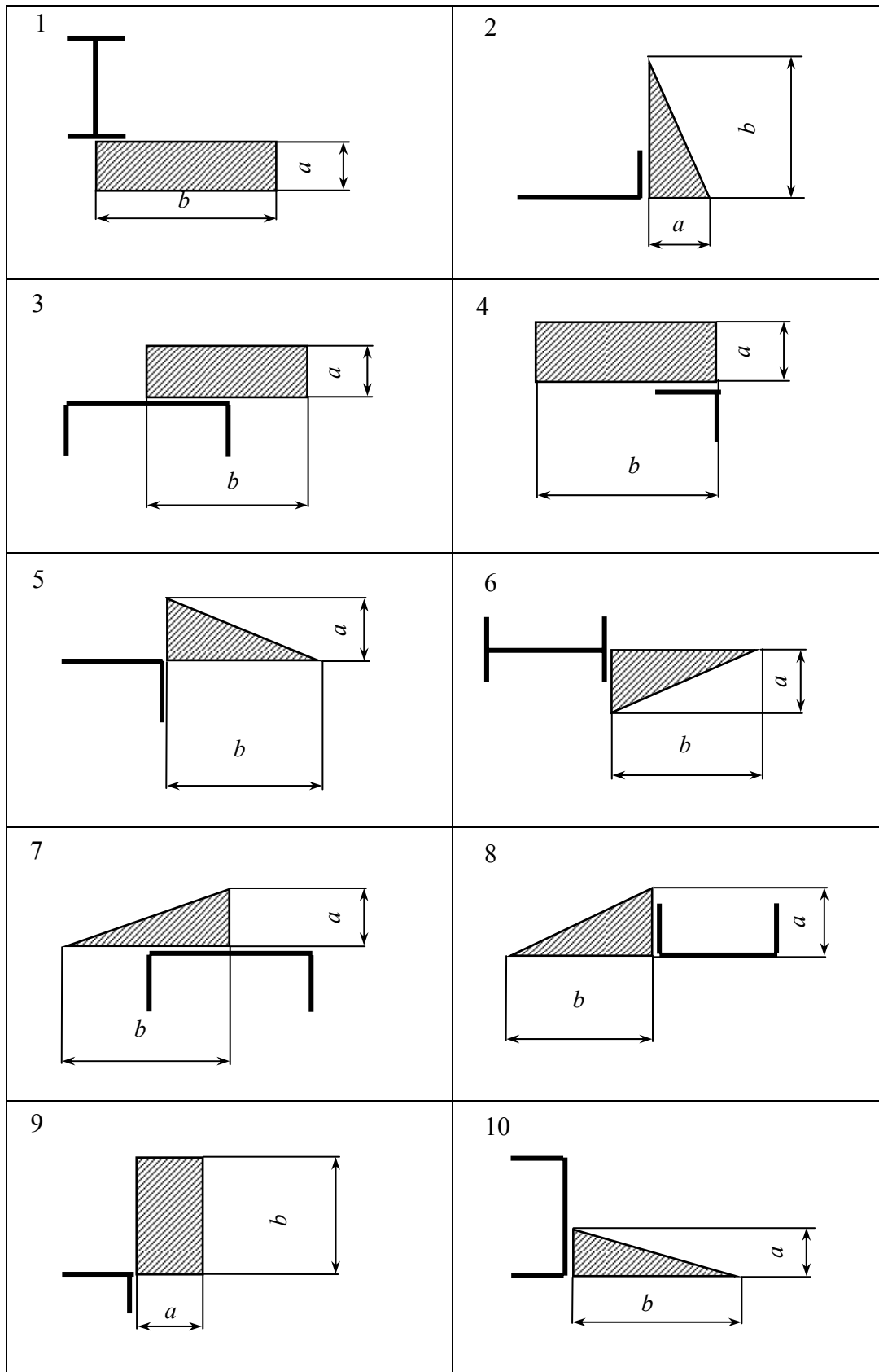


Рис. 9

Указания к выполнению задания № 2

Цель задания – развитие навыков нахождения геометрических характеристик сложных поперечных сечений; умения различать расчет симметричных и несимметричных сечений.

Определение геометрических характеристик плоских сечений стержня рекомендуется выполнять в следующем порядке.

1. Начертить поперечное сечение в масштабе.

2. Разбить сложное сечение на части, имеющие вид простых фигур, для которых известны положение центра тяжести и геометрические характеристики.

3. Показать центры тяжести простых фигур; провести в каждой фигуре центральные оси (z_{c_i} – горизонтальные оси, y_{c_i} – вертикальные оси) и оси вспомогательной системы координат, относительно которой будут проводиться вычисления.

4. Найти координаты центра тяжести заданного сечения по формулам:

$$z_c = \frac{\sum A_i z_{c_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 z_{c_1} + A_2 z_{c_2} + \dots + A_n z_{c_n}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n},$$
$$y_c = \frac{\sum A_i y_{c_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} + \dots + A_n y_{c_n}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n},$$

где A_i – площадь i -й простой фигуры; z_{c_i} и y_{c_i} – координаты центра тяжести i -й фигуры в выбранной вспомогательной системе координат. Суммирование производится по количеству фигур разбиения ($i = 1, \dots, n$).

Необходимо понимать, что суммирование алгебраическое, т.е. для фигур, изображающих отверстие и выемки, площади считаются отрицательными.

5. Провести через найденный центр тяжести всего сечения оси z_c и y_c – центральные оси заданного сечения.

6. С помощью зависимости о параллельном переносе осей вычислить осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей z_c и y_c , а именно:

$$J_{z_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{z_{c_i}} + a_i^2 A_i \right), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{y_{c_i}} + b_i^2 A_i \right),$$

где a_i – расстояние между параллельными горизонтальными осями z_c и z_{c_i} ; b_i – расстояние между параллельными вертикальными осями y_c и y_{c_i} .

Расстояния вычисляются относительно центральной системы координат, т. е. величины a_i , b_i определяются со знаками (это важно, так как реальные знаки величин a_i , b_i учитываются в дальнейшем в случае несимметричной задачи).

Для симметричного сечения одна главная центральная ось совпадает с осью симметрии, а другая ей перпендикулярна и проходит через центр тяжести поперечного сечения. Следовательно, найденные в п. 5 центральные оси для симметричного сечения являются одновременно и главными центральными осями, а вычисленные в п. 6 значения осевых моментов инерции есть значения главных осевых моментов инерции сечения. Необходимо верно определить, какая из осей является осью максимума, а какая – осью минимума, а также верно представить значения J_{\max} и J_{\min} .

Так как для симметричного сечения центробежный момент инерции $J_{z_c y_c} = 0$ (если хотя бы одна из главных осей совпадает с осью симметрии), то решение задачи заканчивается сделанным выводом о главных центральных осях инерции и главных осевых моментах инерции.

Для несимметричного сечения необходимо вычислить центробежный момент инерции сечения

$$J_{z_c y_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{z_{c_i} y_{c_i}} + a_i b_i A_i \right).$$

В этом случае главные центральные оси сечения повернутся относительно центральных осей сечения на угол α_0 , который находится из формулы

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}}.$$

Заметим, что α_0 – острый угол. Известно, что ось максимума всегда составляет меньший угол (α_0) с той из центральных осей (z_c или y_c), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение. (Если $J_{z_c} > J_{y_c}$, то угол α_0 откладывается от оси z). Положительный угол α_0 откладывается от соответствующей центральной оси против часовой стрелки.

7. Найти величины главных центральных моментов инерции J_u и J_v по формуле

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2}.$$

Знак плюс относится к вычислению максимального момента инерции $J_{\max} = J_u$, знак минус – к вычислению $J_{\min} = J_v$.

8. Выполните проверку правильности вычислений по формулам:

$$J_{z_c} + J_{y_c} = J_u + J_v,$$

$$J_{uv} = \frac{J_{z_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{z_c y_c} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Замечание. Так как заданные сечения состоят из прокатных профилей, то необходимо пользоваться данными таблиц сортамента. При определении центробежного момента инерции уголка (равнополочного или неравнополочного) относительно осей, одна из которых горизонтальная, а другая вертикальная, можно пользоваться следующими формулами:

– для равнополочного уголка $J_{zy} = \pm \frac{J_{x_0 \max} - J_{y_0 \min}}{2}$;

– для неравнополочного уголка $J_{zy} = \pm \frac{J_y - J_{u \min}}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Знак плюс или минус определяется по знаку большей площади при рассмотрении фигуры в системе собственных центральных осей. Для фигуры, изображенной на рис. 10, большая площадь находится в первой ($y > 0, z > 0$) и третьей четвертях ($y < 0, z < 0$). Следовательно, в формуле имеем знак плюс.

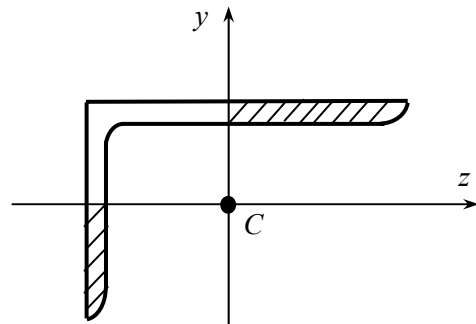


Рис. 10

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси? Какова его размерность?
2. Что называется осевым, полярным и центробежным моментом инерции сечения? Какова размерность момента инерции?
3. Как определяются координаты центра тяжести простого и сложного сечения?
4. Какие моменты инерции всегда положительные?
5. Для каких фигур и относительно каких осей центробежный момент инерции равен нулю?

6. Какие оси называются центральными, главными центральными?
7. Как определяется положение главных осей?
8. В каких случаях без вычисления можно установить положение главных осей?
9. Запишите зависимости для осевого и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей.
10. В какой последовательности определяются значения главных центральных моментов инерции сложного сечения?

ЗАДАНИЕ № 3

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ – СЖАТИИ И ИЗГИБЕ

Задача 1. Для стержня (рис. 11) требуется:

- 1) начертить схему стержня в масштабе;
- 2) построить эпюры продольной силы N_x ; нормальных напряжений σ_x , возникающих в поперечных сечениях; деформаций ϵ_x ; осевых перемещений поперечных сечений u_x ;

3) из расчета на прочность определить площадь поперечного сечения A . Принять расчетное сопротивление стержня $R=160$ МПа; $q=16$ кН/м; $l=0,2$ м; $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Исходные данные содержатся в табл. 6.

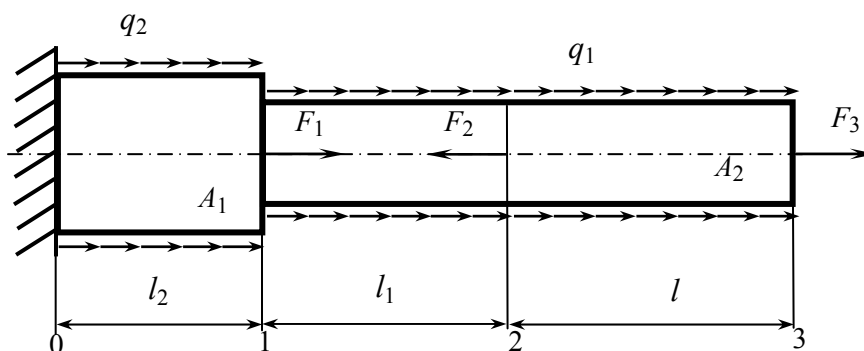


Рис. 11

Таблица 6

Цифра варианта	I			II			III		IV	
	q_1/q	q_2/q	q_1 приложена на участке	F_1/ql	F_2/ql	F_3/ql	A_1/A	A_2/A	l_1/l	l_2/l
1	1	0	0-1	1	2	0	1	3	1,0	1,5
2	2	-1	0-2	0	1	-1	2	2	2,0	0,5
3	3	-2	2-3	-1	0	-2	3	1	1,2	1,0
4	-1	3	1-2	-2	3	1	1	3	1,4	2,0
5	-2	0	1-3	2	-1	0	2	2	1,6	0,5
6	-3	1	0-2	0	-2	2	3	2	1,8	1,5
7	1	2	2-3	1	-3	0	1	3	1,0	1,0
8	-2	-2	1-2	3	1	0	2	1	1,5	2,0
9	3	0	1-3	-3	0	2	3	1	1,8	0,5
0	2	-3	0-2	0	2	-2	1	2	2,0	1,5

Знак минус в исходных данных означает, что фактическое направление при расчете противоположно изображенному на рис. 11.

Задача 2. Для шарнирно-консольной балки (рис. 12) требуется:

- 1) начертить схему балки в масштабе;
- 2) построить эпюры изгибающих моментов M_z и поперечных сил Q_y методом сечений;
- 3) из расчета на прочность по нормальным напряжениям определить размеры поперечного сечения балки в виде круга, прямоугольника, прокатного двутавра.

При расчете принять $R = 210$ МПа; $q = 10$ кН/м; $l = 0,6$ м;

- 4) начертить поперечные сечения в масштабе и сравнить балки по расходу материала. Для каждого вида сечения построить эпюры нормальных σ_x и максимальных касательных напряжений τ_{\max} ;

- 5) из расчета на прочность подобрать размеры треугольного поперечного сечения балки, выполненной из хрупкого материала. Рассмотреть два положения треугольного сечения (основанием вниз, как на рис. 12, и основанием вверх).
- Сделать вывод о рациональном расположении сечения.

Исходные данные содержатся в табл. 7.

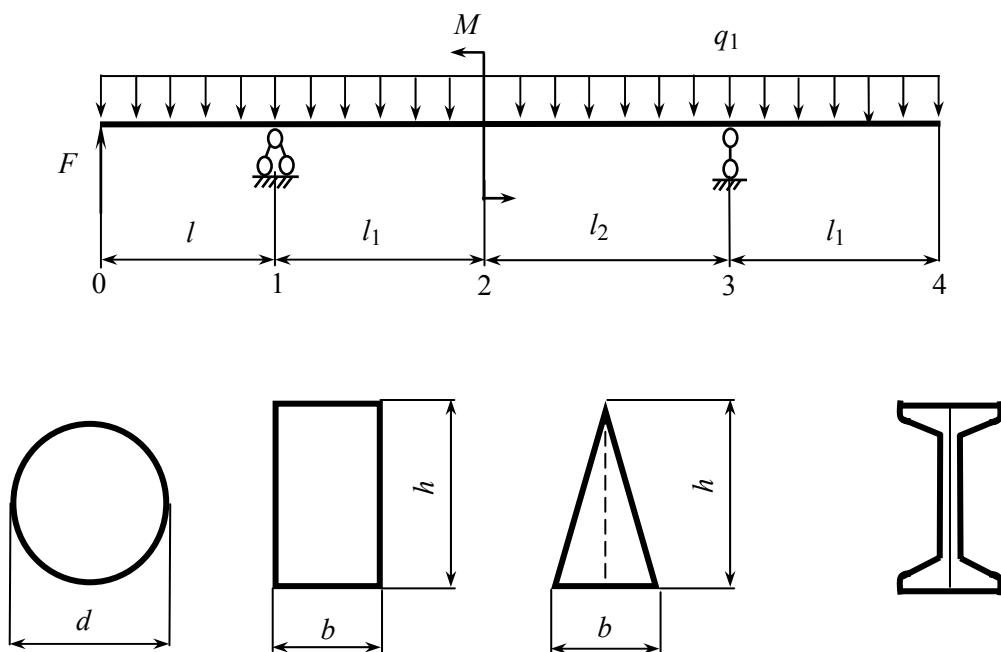


Рис. 12

Таблица 7

Цифра варианта	I				II		III		IV
	F/ql	Сила приложена в сечении	M/ql^2	Момент приложен в сечении	q_1/q	q_1 приложена на участке	l_1/l	l_2/l	h/b
1	1	4	1	0	1	0 - 1	1,0	0,8	2,0
2	2	3	-1	1	-1	0 - 2	1,2	1,0	2,4
3	3	1	2	2	2	1 - 2	1,4	2,0	2,8
4	-3	2	-2	3	-2	1 - 3	1,6	1,4	3,0
5	-2	0	1,5	4	1,4	2 - 3	1,8	1,0	3,2
6	-1	3	-1,5	1	1,6	2 - 4	2,0	1,2	1,8
7	1	2	1,8	3	-1,4	0 - 2	1,2	1,8	2,2
8	-2	0	-1,8	2	-1,6	1 - 3	1,4	2,0	2,6
9	2	1	2	4	-2	2 - 4	1,6	1,0	3,0
0	-3	4	-2	0	2	0 - 2	1,0	2,0	2,4

При расчете принять расчетное сопротивление на сжатие $R_{сж} = 12$ МПа; расчетное сопротивление на растяжение – $R_p = 8$ МПа.

Указания к выполнению задания № 3

Цель выполнения задания – овладеть методикой расчета на прочность (одного из основных расчетов сопротивление материалов) при наиболее часто встречающихся в строительной практике видах деформирования. В данном задании рассматривается построение эпюр внутренних силовых факторов и расчет на прочность по нормальным напряжениям при центральном растяжении (сжатии) – задача 1, при плоском поперечном изгибе – задача 2. В задаче 1 находятся осевые перемещения.

Внутренними силовыми факторами являются: продольная сила N_x (задача 1), изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y (задача 2). Построение эпюр внутренних силовых факторов выполняется методом сечений (см. задание № 1).

Рекомендуется следующий порядок выполнения каждой задачи.

1. Определить реакции опор.
2. Разбить рассматриваемую расчетную схему на участки так, чтобы в пределах каждого участка разбиения характер внешней нагрузки и площадь поперечного сечения не менялись.

3. Для каждого участка разбиения составить выражения N_x (задача 1), M_z и Q_y (задача 2) и построить соответствующие эпюры на базисных линиях, параллельных заданным расчетным схемам.

Располагают эпюры непосредственно под расчетными схемами.

4. В задаче 1 построить эпюру нормальных напряжений для каждого i -го участка разбиения:

$$\sigma_{x_i} = \frac{N_{x_i}}{A_i},$$

где A_i – искомая площадь поперечного сечения на i -м участке.

5. Определить искомые характеристики поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям при центральном растяжении – сжатии:

$$|\sigma_{\max_i}| = \frac{|N_{x \max}|}{A_i} \leq R.$$

Отсюда

$$A_i \geq \frac{|N_{x \max}|}{R}.$$

Для дальнейшего расчета принять наименьшее допустимое значение площади, полученное из условия прочности.

6. Построить эпюру продольных деформаций

$$\epsilon_{x_i} = \frac{\sigma_{x_i}}{E} = \frac{N_{x_i}}{EA_i},$$

где E – модуль упругости материала.

7. Построить эпюру осевых перемещений поперечных сечений стержня по правилу

$$u_i = u_{i-1} + \int_0^{x_i} \epsilon_{x_i} dx = u_{i-1} + \int_0^{x_i} \frac{N_{x_i}}{EA_i} dx,$$

где u_{i-1} – начальное перемещение, которое в общем случае является неизвестной величиной. Однако в закрепленной точке заданного стержня (в точке 0) $u_0 = 0$, поэтому расчет заданного стержня необходимо выполнять рассматривая сечение слева направо. В этом случае для каждого последующего расчетного участка начальное перемещение известно как конечное перемещение, полученное для предыдущего участка.

8. В задаче 2 искомые характеристики поперечного сечения находятся из условия прочности по нормальным напряжениям при прямом изгибе:

$$|\sigma_{\max_i}| = \frac{|M_{z \max}|}{W_z} \leq R,$$

где $W_z = \frac{J_z}{y_{\max_i}}$ – момент сопротивления сечения при изгибе; y_{\max_i} – расстояние от центра тяжести поперечного сечения до наиболее удаленной точки контура сечения.

Заметим, что условие прочности при изгибе записано для пластичного материала, одинаково хорошо сопротивляющегося и растяжению, и сжатию (т. е. $R_p = R_{сж} = R$).

Если материал по-разному сопротивляется сжатию и растяжению (хрупкий материал), то $R_p \neq R_{сж}$ и условие прочности следует писать в виде системы неравенств:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max}^p &= \frac{M_{z \max}^p}{J_z} y_{\max_i} \leq R_p, \\ |\sigma_{\max}^{сж}| &= \frac{|M_{z \max}^{сж}|}{J_z} y_{\max_i} \leq R_{сж}. \end{aligned} \right\}$$

За искомые характеристики принимаются значения, удовлетворяющие записанной системе неравенств.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется прочностью стержня, жесткостью стержня?
2. Какой метод используется при построении эпюр внутренних силовых факторов?
3. Что называется нормальным напряжением?
4. Как вычисляются нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии), при изгибе? Какова размерность напряжений?
5. Что называется опасным сечением балки?
6. Запишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии); объясните смысл каждой величины.
7. Запишите условие прочности при изгибе для пластичного материала; объясните смысл каждой величины.
8. Запишите условие прочности при изгибе для материала, неодинаково работающего на растяжение (сжатие). Как называются такие материалы?

ЗАДАНИЕ № 4

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Задача 1. Для балки, изображенной на рис. 13, требуется:

1) начертить схему балки с соответствующей нагрузкой в каждой отдельной плоскости: в вертикальной плоскости yx и горизонтальной плоскости zx . При этом считать, что закрепление балки в разных плоскостях одного типа, шарнирные опоры приложены в одних и тех же сечениях балки;

2) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в каждой плоскости нагружения: эпюры M_z, Q_y – в плоскости yx ; эпюры M_y, Q_z – в плоскости zx ;

3) определить опасные сечения балки;

4) найти опасные точки поперечного сечения балки;

5) из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры прямоугольного сечения (B – основание сечения; H – высота).

Расчетное сопротивление при растяжении и сжатии принять одинаковым $R = 16$ МПа;

6) построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки.

Исходные данные приведены в табл. 8.

Задача 2. Стержень (рис. 14), изготовленный из материала, неодинаково работающего на растяжение и сжатие, находится под действием внецентренно приложенной в точке O сосредоточенной силы F .

Требуется:

1) начертить поперечное сечение в масштабе. Показать полюс – точку O с координатами e_z, e_y ;

2) найти центр тяжести поперечного сечения, главные центральные оси сечения и вычислить геометрические характеристики сечения: площадь сечения и главные осевые моменты инерции сечения;

3) найти положение нейтральной линии;

4) определить опасные точки поперечного сечения;

5) из условия прочности по нормальным напряжениям определить значение сжимающей силы F ;

6) вычислить напряжения в опасных точках поперечного сечения и построить эпюру нормальных напряжений. (Построить эпюры нормальных напряжений по контуру поперечного сечения – по усмотрению преподавателя);

7) построить эпюры нормальных напряжений для каждого отдельного вида внутреннего силового фактора: эпюры $\sigma_{N_x}, \sigma_{M_z}, \sigma_{M_y}$;

8) построить эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в стержне: эпюры N_x , M_z , M_y ;

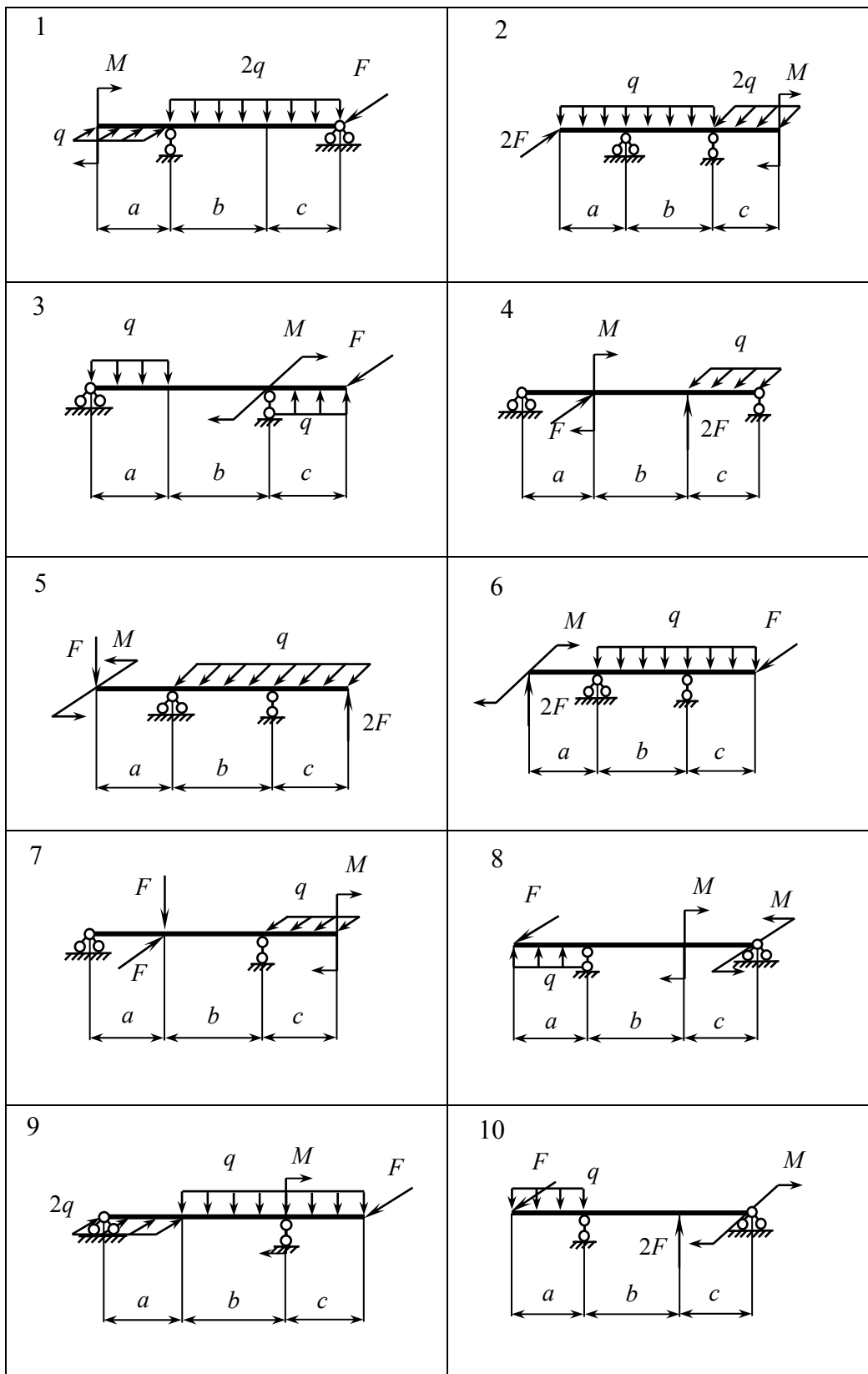


Рис. 13

9) построить ядро сечения.

Исходные данные приведены в табл. 9. Схемы поперечных сечений стержня представлены на рис. 15.

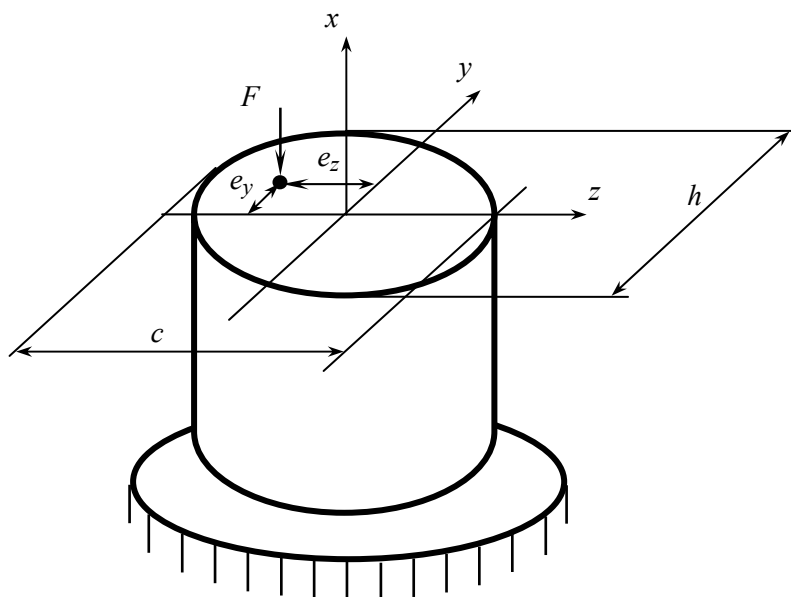
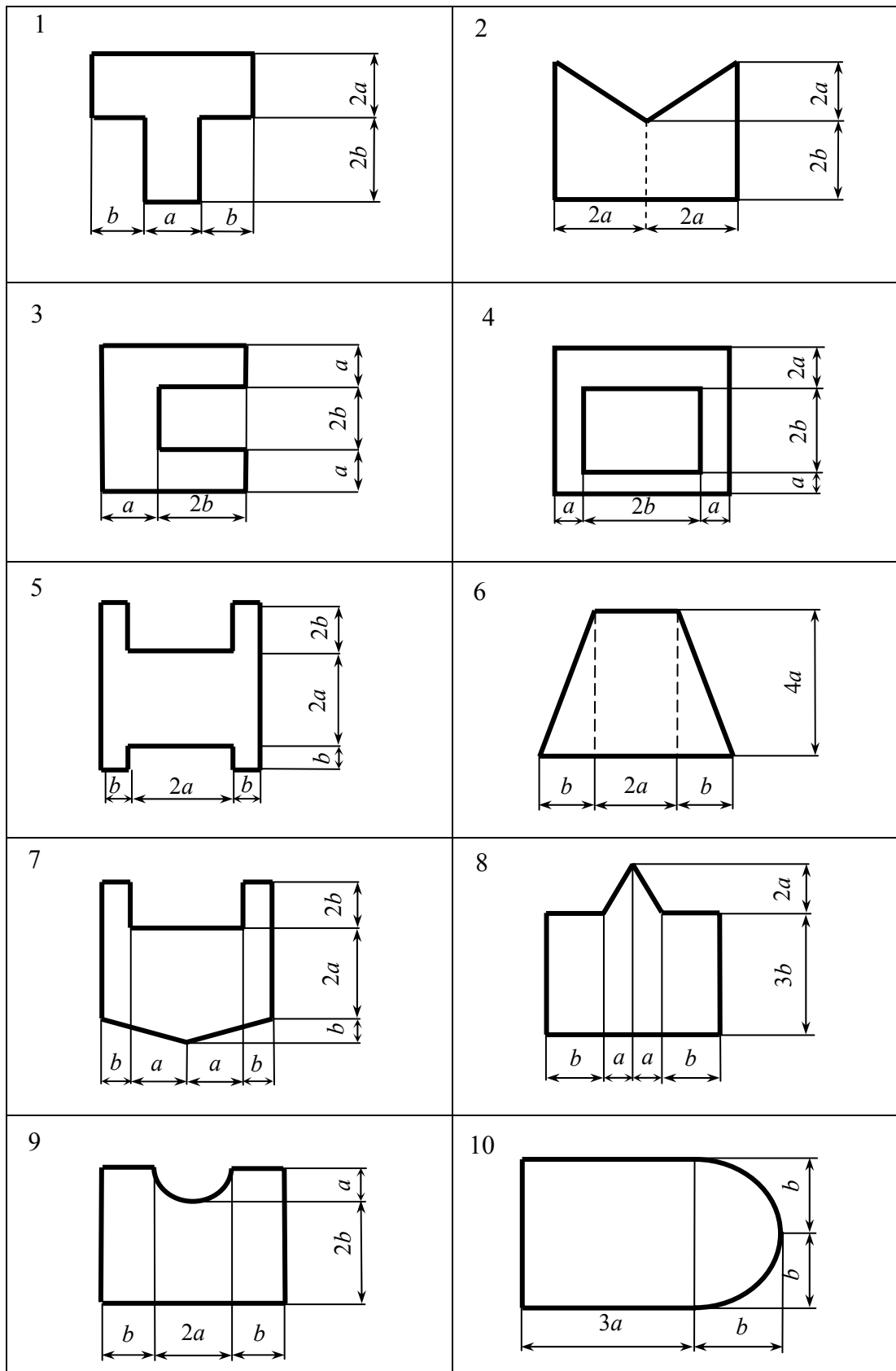


Рис. 14

Таблица 8

Цифра варианта	I	II			III			IV
	Номер схемы	a , м	b , м	c , м	M , кН·м	q , кН/м	F , кН	H/B
1	1	0,8	2,0	1,2	20	10	12	3,0
2	3	1,0	2,2	1,8	22	9	14	2,8
3	5	1,2	2,4	0,6	24	8	16	2,6
4	7	1,4	2,6	0,8	26	7	10	2,4
5	9	1,6	2,0	1,4	28	6	11	3,2
6	8	1,0	1,8	1,6	30	12	13	1,8
7	6	0,9	2,5	0,8	27	11	8	3,4
8	4	0,8	2,4	1,2	29	13	9	2,0
9	2	0,7	2,3	1,4	25	15	10	3,6
0	10	1,2	2,6	1,0	23	14	12	2,5



Puc. 15

Таблица 9

Цифра вари- анта	I	II		III		IV	
	Номер схемы	a , м	b , м	e_z/c	e_y/h	R_p , МПа	$R_{сж}$, МПа
1	10	6	2	0,1	-0,1	25	100
2	9	5	3	0,2	0,2	30	110
3	8	4	5	0,25	-0,3	40	120
4	7	3	6	-0,2	0,15	20	90
5	6	2	4	0,35	-0,3	20	80
6	1	5	3	-0,1	0,1	45	130
7	2	6	2	-0,2	-0,2	50	140
8	3	2	4	-0,3	0,25	30	100
9	4	3	5	-0,15	-0,2	25	90
0	5	4	6	-0,2	-0,3	35	120

Примечание. R_p – расчетное сопротивление материала при растяжении; $R_{сж}$ – расчетное сопротивление материала при сжатии.

Указания к выполнению задания № 4

Цель задания – овладение методикой расчета на прочность при сложном напряженно-деформированном состоянии: косом изгибе прямого бруса (задача 1) и внецентренном сжатии (задача 2).

Задача 1. Косой изгиб в сопротивлении материалов рассматривается как сочетание двух прямых поперечных изгибов в вертикальной плоскости (yx) и горизонтальной плоскости (zx). В этом случае внутренними силовыми факторами являются изгибающие моменты M_z , M_y и поперечные силы Q_y , Q_z . В каждой точке i -го поперечного сечения возникают нормальные напряжения, которые определяются по общей формуле

$$\sigma_x^i = \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_z}{J_z} y^i \pm \frac{M_y}{J_y} z^i,$$

где z , y – координаты рассматриваемой точки в системе главных центральных осей.

Рекомендуется следующий порядок выполнения задачи 1.

1. Рассмотреть две плоскости: yx – вертикальная плоскость, zx – горизонтальная плоскость. В каждой плоскости начертить балку с соответствующей нагрузкой.

2. В каждой плоскости построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от соответствующего действия нагрузки (в вертикальной плоскости yx – эпюры M_z , Q_y ; в горизонтальной плоскости zx – эпюры M_y , Q_z).

Эпюры строятся методом сечений, рассмотренным достаточно подробно в указаниях к выполнению задания № 1. Для удобства и лучшего представления изображения горизонтальную плоскость можно повернуть до положения вертикальной плоскости.

3. Определить опасные сечения балки по построенным эпюрам.

Опасными сечениями балки являются сечения, в которых изгибающие моменты M_z и M_y достигают наибольших по модулю значений. В большинстве расчетных случаев $M_{z\max}$ и $M_{y\max}$ расположены в разных сечениях балки при рассмотрении плоскостей ux и zx , поэтому опасным является сечение, в котором M_z и M_y хотя могут и не принимать одновременно наибольшие значения, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание.

4. Начертить прямоугольное сечение в масштабе, показав главные центральные оси.

5. Найти опасные точки поперечного сечения. Опасными являются точки поперечного сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии. Нейтральная линия в случае косоугольного изгиба проходит через центр тяжести поперечного сечения и составляет угол β (β – острый угол) с горизонтальной центральной осью сечения. Угол β находим из соотношения

$$|\operatorname{tg}\beta| = \left| \frac{M_y}{M_z} \right| \frac{J_z}{J_y},$$

где J_z, J_y – главные осевые моменты инерции сечения.

Данная формула позволяет найти угол β по величине (при правильном вычислении угол β – острый угол). Для проведения нейтральной линии необходимо предварительно определить знаки нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении балки от изгиба в разных плоскостях. Пусть в опасном сечении i балки имеем: M_z растягивает нижние относительно оси z волокна, а M_y растягивает правые относительно оси y волокна. Так как эпюры изгибающих моментов строятся на растянутых волокнах, то там, где волокна растянуты, имеем напряжение растяжения, т. е. положительное напряжение по знаку.

На рис. 16 показано распределение знаков нормальных напряжений в каждом квадранте координатной плоскости, соответствующее данному предположению о действии изгибающих моментов. Здесь y, z – главные центральные оси сечения.

Нейтральная линия – линия нулевых напряжений, поэтому в данном примере она проходит через 1-й и 3-й квадранты поперечного сечения, т. е. угол β в этом случае откладывается от горизонтальной оси z против часовой стрелки (см. рис. 16).

Опасные точки поперечного сечения – точка 1 (в области сжатия) и точка 2 (в области растяжения), так как эти точки – наиболее удаленные точки контура сечения от построенной нейтральной линии.

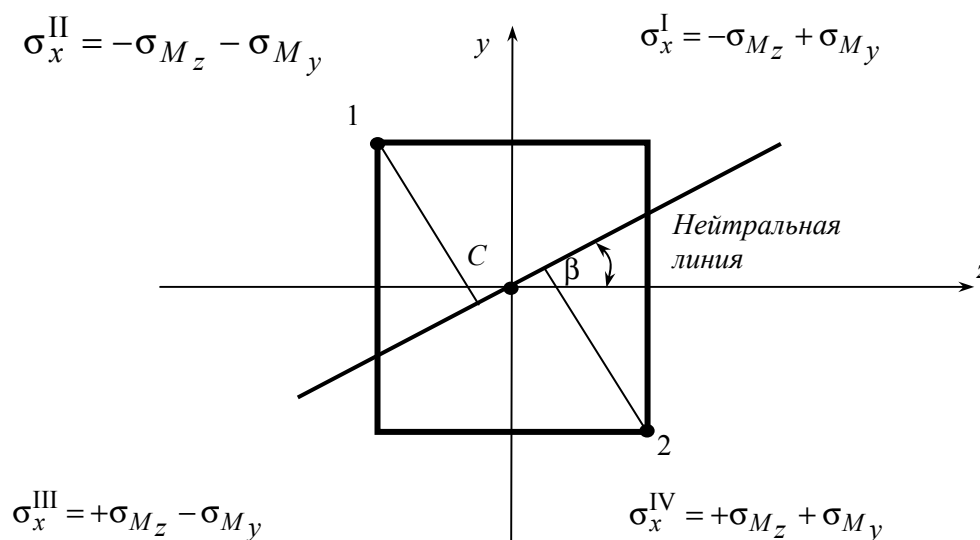


Рис. 16

6. Записать условие прочности по нормальным напряжениям в виде

$$|\sigma_{\max}^{\text{сж}}| \leq R \text{ или } |\sigma_{\max}^{\text{р}}| \leq R,$$

так как по условию задачи расчетные сопротивления на сжатие и растяжение одинаковы.

В данном примере максимальные нормальные напряжения в точках 1 и 2 можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\max}^{(1)} = -\sigma_{M_z} - \sigma_{M_y} = -\frac{M_z}{J_z} y^{(1)} - \frac{M_y}{J_y} z^{(1)},$$

$$\sigma_{\max}^{(2)} = +\sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = +\frac{M_z}{J_z} y^{(2)} + \frac{M_y}{J_y} z^{(2)},$$

где $y^{(1)}, z^{(1)}, y^{(2)}, z^{(2)}$ – координаты точек 1 и 2 соответственно относительно центральной системы координат.

Рассматривая условие прочности, можно найти параметры прямоугольного поперечного сечения.

7. Необходимо окончательно вычислить напряжения в точках 1 и 2 с учетом найденных в предыдущем пункте значений параметров B и H для прямоугольного сечения. По полученным значениям построить эпюру нормальных напряжений. Очевидно, значения вычисленных напряжений не должны превышать значения заданного расчетного сопротивления.

Задача 2. Внецентренное сжатие (растяжение) представляет собой сложный вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса действует не только продольная сила, но и изгибающие моменты в двух плоскостях. От каждого внутреннего силового фактора возникает соответствующее нормальное напряжение. В общем случае напряжения рассчитываются по формуле

$$\sigma_x^i = \pm \sigma_{N_x} \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_z}{J_z} y^i \pm \frac{M_y}{J_y} z^i.$$

Учитывая, что $M_z = Fe_y$, $M_y = Fe_z$ ($-e_y$, $-e_z$ – эксцентриситеты точки приложения сжимающей силы), формулу можно переписать в виде

$$\sigma_x^i = \pm F \left(\frac{1}{A} + \frac{e_y}{J_z} y^i + \frac{e_z}{J_y} z^i \right).$$

Рекомендуется следующий порядок выполнения задачи 2.

1. Начертить заданное поперечное сечение в масштабе. Показать точку O – полюс, предварительно вычислив эксцентриситеты e_y , e_z .

2. Найти центр тяжести поперечного сечения, показать главные центральные оси сечения, вычислить геометрические характеристики. Заданные сечения представляют собой сложные симметричные сечения, поэтому при выполнении данного пункта необходимо вспомнить процесс выполнения задачи 1 из задания № 2 (см. указания к выполнению задания № 2).

3. Найти положение нейтральной линии. При внецентренном сжатии (растяжении) нейтральная линия не проходит через центр тяжести поперечного сечения, а отсекает на главных центральных осях отрезки a_y , a_z .

Длины отрезков находятся по формулам

$$a_z = -\frac{i_y^2}{e_z}, \quad a_y = -\frac{i_z^2}{e_y},$$

где e_y , e_z – координаты точки приложения внецентренно сжимающей силы F (эксцентриситеты); $i_z^2 = \frac{J_{zc}}{A}$, $i_y^2 = \frac{J_{yc}}{A}$ – квадраты радиусов инерции

сечения. При этом A – площадь поперечного сечения; J_{z_c} , J_{y_c} – главные осевые моменты инерции сечения.

На рис. 17 показано предположительное положение нейтральной линии в зависимости от положения полюса. Заметим, что полюс и нейтральная линия расположены по разные стороны от центра тяжести сечения, при этом нейтральная линия проходит через области разных знаков нормальных напряжений. В каждом квадранте координатной плоскости знаки напряжений от каждого вида внутренних силовых факторов находятся в зависимости от положения полюса. Напряжение σ_{N_x} везде отрицательно, так как заданная сила F является сжимающей. Полюс расположен выше оси z , следовательно, выше оси z имеем сжатые волокна и напряжения сжатия ($-\sigma_{M_z}$); соответственно ниже оси z волокна растянуты и имеем напряжения растяжения ($+\sigma_{M_z}$). Относительно оси y полюс расположен слева, следовательно, слева от оси y волокна сжаты и имеем напряжения сжатия ($-\sigma_{M_y}$); соответственно справа от оси y волокна растянуты и имеем напряжения растяжения ($+\sigma_{M_y}$).

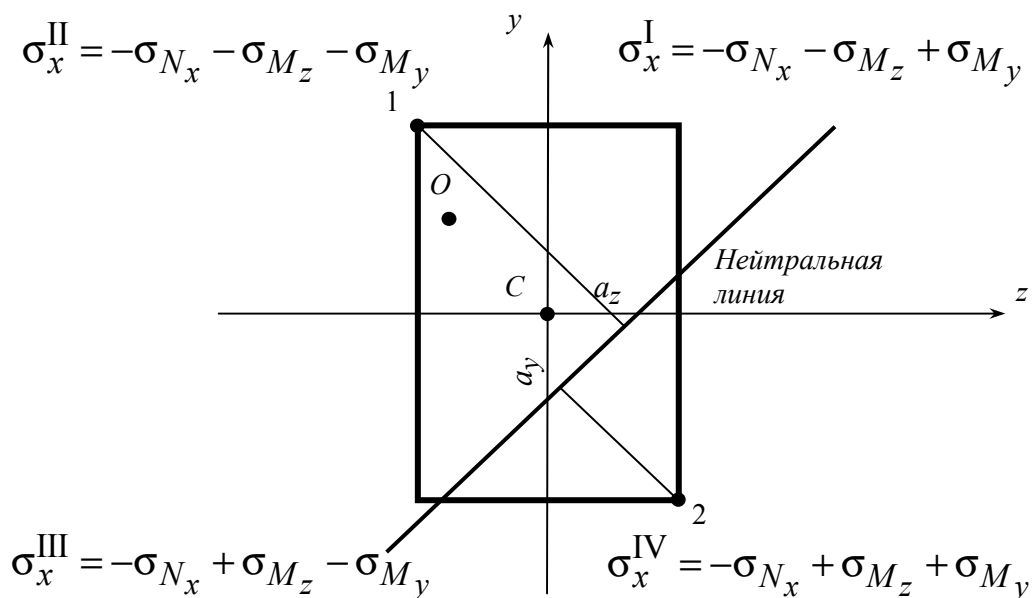


Рис. 17

4. Определим опасные точки поперечного сечения. Очевидно (см. рис. 17), опасными являются точка 1 (в области сжатия) и точка 2

(в области растяжения). Они наиболее удалены от нейтральной линии. В этих точках возникают наименьшее (в точке 1) и наибольшее (в точке 2) нормальные напряжения:

$$\sigma_{\min}^{(1)} = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{e_y}{J_z} y^{(1)} + \frac{e_z}{J_y} z^{(1)} \right),$$

$$\sigma_{\max}^{(2)} = F \left(-\frac{1}{A} + \frac{e_y}{J_z} y^{(2)} + \frac{e_z}{J_y} z^{(2)} \right).$$

5. Из условия прочности по нормальным напряжениям находим сжимающую силу F . Условие прочности записывается в виде системы неравенств:

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_{\max}^{\text{сж}}| &\leq R_{\text{сж}}, \\ \sigma_{\max}^{\text{р}} &\leq R_{\text{р}}. \end{aligned} \right\}$$

В данном случае (см. рис. 17) будем иметь следующее:

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_{\max}^{\text{сж}}| = |\sigma_{\min}^{(1)}| &\leq R_{\text{сж}}, \\ \sigma_{\max}^{(2)} &\leq R_{\text{р}}. \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, все величины, входящие в левые и правые части неравенств, должны иметь одинаковую размерность: расчетные сопротивления, заданные по условию в мегапаскалях, должны быть переведены в единицы измерения, соответствующие вычислению величин в левых частях неравенства.

Окончательным значением сжимающей силы принимается значение, удовлетворяющее каждому неравенству записанной системы.

6. Найденное значение сжимающей силы подставляем в формулы напряжений в опасных точках поперечного сечения (см. п. 4). По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений в опасных точках поперечного сечения. Очевидно, полученные значения напряжений должны находиться в интервале $[R_{\text{сж}}; R_{\text{р}}]$.

7. Нормальные напряжения от каждого отдельного вида внутреннего силового фактора находятся по формулам: $\sigma_{N_x} = \frac{F}{A}$ – нормальные напряжения при центральном сжатии; $\sigma_{M_z} = \frac{M_z}{J_z} y$, $\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{J_y} z$ – нормальные напряжения при изгибе относительно оси z и оси y соответственно. Оче-

видно, что σ_{M_z} линейно меняется в зависимости от y ; базисная линия эпюры σ_{M_z} проводится параллельно оси y . Соответственно σ_{M_y} линейно зависит от z ; базисная линия эпюры σ_{M_y} проводится параллельно оси z . Базисная линия эпюры σ_{N_x} параллельна оси стержня, поэтому данную эпюру нужно показать для заданного стержня, т. е. нарисовать сжатый стержень (расчетную схему), а не ограничиваться видом поперечного сечения стержня.

8. Эпюры внутренних силовых факторов, возникающие в стержне, строим по формулам:

$$N_x = \frac{F}{A} \text{ – продольная сила;}$$

$M_z = Fe_y$ – изгибающий момент относительно оси z (изгиб происходит в плоскости xy);

$M_y = Fe_z$ – изгибающий момент относительно оси y (изгиб происходит в плоскости zx).

9. Построить ядро сечения.

Ядро сечения – область вокруг центра тяжести сечения, обладающая следующим свойством: если действующая сила приложена в ядре сечения, то нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения имеют одинаковый знак. Знак нормальных напряжений определяется направлением действующей силы: если она сжимающая, то напряжения отрицательны; если сила растягивающая, то напряжения положительные. Построение ядра сечения основывается на свойстве нейтральной линии: если нейтральная линия совпадает с контуром поперечного сечения, то полюс находится на контуре ядра сечения.

Таким образом, для построения ядра сечения необходимо задать положение нейтральной линии, совпадающей с одной из сторон контура поперечного сечения. При этом известны величины отрезков, которые нейтральная линия отсекает на координатных осях, $-a_z$, a_y . Тогда координаты полюса находим из выражений $e_z = -\frac{i_y^2}{a_z}$, $e_y = -\frac{i_z^2}{a_y}$.

Положений нейтральной линии необходимо задать столько, сколько потребуется для получения замкнутого многоугольника для обхода контура поперечного сечения. При этом обход сечения проводится по внешним точкам контура сечения.

Например, на рис. 18 пунктирными линиями показаны возможные положения нейтральной линии для построения ядра сечения: линии AB , BC , CD , DE и AE .

Соединяя точки полюса, полученные для каждого положения нейтральной линии, получим замкнутый многоугольник – ядро сечения. Заметим, если сечение симметричное, то ядро сечения также симметрично.

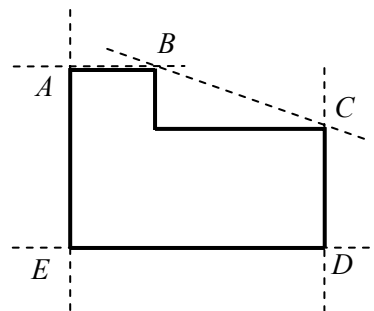


Рис. 18

Вопросы для самоконтроля

1. Какой случай действия нагрузки называется сложным сопротивлением? Назовите известные виды сложного сопротивления.
2. В каком случае действия нагрузки наблюдается косой изгиб? Назовите внутренние силовые факторы при косом изгибе.
3. Что называется опасным сечением балки в случае косоугольного изгиба?
4. Как вычисляются нормальные напряжения при косом изгибе?
5. Какая линия называется нейтральной? Как проходит нейтральная линия при косом изгибе?
6. Какие точки поперечного сечения называются опасными?
7. В каком случае приложения нагрузки наблюдается внецентренное сжатие (растяжение)? Назовите внутренние силовые факторы при внецентренном сжатии.
8. Как проходит нейтральная линия при внецентренном сжатии (растяжении)?
9. Как вычисляются нормальные напряжения при внецентренном сжатии (растяжении)?
10. Что такое ядро сечения?

ЗАДАНИЕ № 5

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Напряженное состояние в точке упругого тела задано его компонентами. Материал имеет коэффициент Пуассона $\mu=0,3$. Для задач 1 и 2 необходимо определить:

- 1) главные напряжения и проверить правильность их вычисления;
- 2) положение главных площадок;
- 3) главные деформации.

Задача 1. Плоское напряженное состояние.

Исходные данные в соответствии с заданным шифром взять из табл. 10.

Таблица 10

Цифра варианта	I	II	III	IV
	Напряжение, МПа			$E \cdot 10^5$, МПа
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	
0	60	100	30	1,2
1	80	-140	40	2,0
2	-20	60	-50	1,4
3	30	-40	60	1,6
4	-80	120	70	2,1
5	40	90	-80	2,2
6	100	-80	90	1,6
7	120	130	-60	2,1
8	50	-120	100	1,8
9	130	110	-70	2,2

Задача 2. Объемное напряженное состояние.

Исходные данные взять из табл. 11.

Таблица 11

Цифра варианта	I		II		III		IV
	Напряжение, МПа						$E \cdot 10^5$, МПа
	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{xz}	
0	100	80	60	40	-60	80	2,0
1	-60	40	80	50	70	-90	2,1
2	80	-60	100	60	-80	70	1,8
3	50	90	110	70	90	-60	1,6
4	90	-70	120	80	-100	110	1,4
5	70	120	90	100	110	-90	2,0
6	-90	100	80	90	-120	100	1,8
7	-100	80	100	110	80	-120	2,1
8	120	-100	90	60	-70	90	1,6
9	-80	60	120	80	60	-100	2,0

Указания к выполнению задания № 5

Цель задания – исследовать напряженное состояние в произвольной точке твердого тела; показать понимание основ теории деформации.

1. Записать заданные компоненты напряженного состояния в виде тензора напряжений. Показать графически заданное напряженное состояние.

Для этого в окрестности исследуемой точки рассматривается выделенный из тела параллелепипед бесконечно малых размеров; грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям выбранной системы координат.

На каждой грани параллелепипеда действуют три составляющие полного напряжения: нормальное напряжение σ_{ii} и два касательных напряжения τ_{ij} . В обозначениях индекс i указывает направление внешней нормали к рассматриваемой грани параллелепипеда, j – направление координатной оси, параллельно которой действует напряжение. Одинаковые индексы ($i = j$), как правило, заменяют одним индексом.

Все напряжения показывают в соответствии с правилом внешней нормали. Положительное нормальное напряжение совпадает по направлению с направлением внешней нормали к соответствующей грани параллелепипеда. Касательное напряжение действует параллельно соответствующей координатной оси (по индексу j). При этом оно положительно (совпадает по направлению с положительным направлением соответствующей координатной оси), если внешняя нормаль к рассматриваемой грани совпадает с положительным направлением перпендикулярной к этой грани координатной оси. На рис. 19 показаны положительные направления напряжений; v – внешняя нормаль.

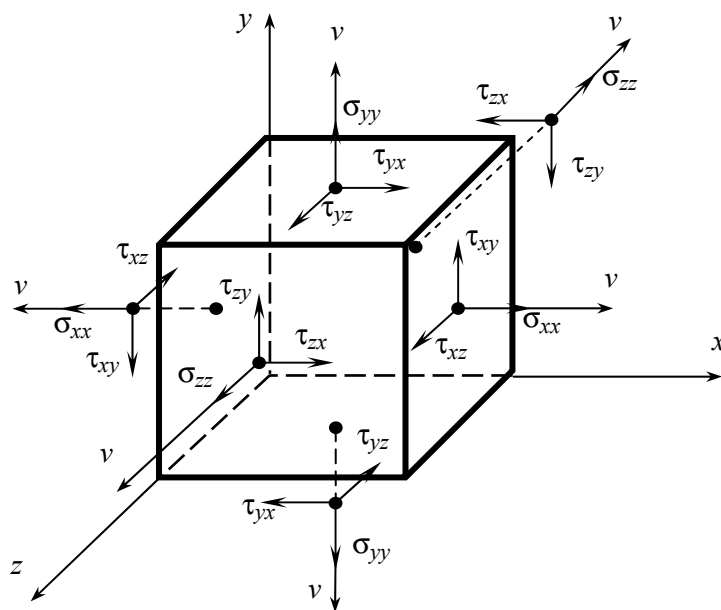


Рис. 19

2. Определить главные напряжения.

В курсе «Сопротивление материалов» предполагается, что через любую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а из трех действующих нормальных напряжений одно является максимальным, еще одно – минимальным. Такие площадки называются главными, а действующие на них нормальные напряжения – главными напряжениями.

Для нахождения главных напряжений существует кубическое уравнение

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (1)$$

где $I_i (i = 1, 2, 3)$ – инварианты тензора напряжений.

Первый инвариант $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Второй инвариант $I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$.

Третий инвариант $I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$.

Здесь учтено $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Сделаем замену переменных $\sigma = y + \frac{I_1}{3} = y + \sigma_{\text{ср}}$, где $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ – среднее напряжение.

Тогда заданное кубическое уравнение (1) принимает вид

$$y^3 + py + q = 0, \quad (2)$$

где $p = I_2 - \frac{I_1^2}{3} = I_2 - 3\sigma_{\text{ср}}^2$;

$$q = -\frac{2}{27}I_1^3 + \frac{1}{3}I_1I_2 - I_3 = -2\sigma_{\text{ср}}^2 + \sigma_{\text{ср}}I_2 - I_3.$$

Из математики известно, что число действительных решений уравнения (2) зависит от знака дискриминанта $D = p^3 + q^2$. Если $D < 0$, то уравнение имеет три действительных различных корня: $\sigma_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Используем тригонометрический способ решения уравнения (2).

Для удобства вводится вспомогательный параметр $r = \pm \sqrt{\frac{p}{3}} = \pm 0,5774\sqrt{|p|}$, причем знак принимается в соответствии со знаком величины q .

Тогда $\cos \varphi = \frac{q}{2r^3}$, $\varphi = \arccos\left(\frac{q}{2r^3}\right)$.

Окончательно корни уравнения (2) находим по правилу

$$y_1 = -2r \cos \frac{\varphi}{3};$$

$$y_2 = 2r \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right);$$

$$y_3 = 2r \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Проверкой найденного решения является выполнение равенства $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Возвращаясь к исходному уравнению (1), находим величины напряжений с учетом сделанной ранее подстановки:

$$\sigma'_i = y_i + \frac{I_1}{3} = y_i + \sigma_{\text{ср}}; \quad i=1, 2, 3.$$

Полученные значения должны удовлетворять соотношению $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, поэтому необходимо выполнить переобозначение найденных значений напряжений, чтобы выполнялось следующее:

$$\sigma_1 = \max(\sigma'_i); \quad \sigma_3 = \min(\sigma'_i); \quad i=1, 3.$$

Проверкой может служить вычисление инварианта тензора напряжений через найденные значения главных напряжений, именно:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1;$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

При правильном решении значения инвариант тензора напряжений, вычисленные через заданные напряжения и через найденные главные напряжения, должны совпадать.

3. Определить положение главных площадок.

Ориентацию главной площадки определяет нормаль \mathbf{v} , направляющие косинусы которой принято обозначать

$$l = \cos(x, \mathbf{v}); \quad m = \cos(y, \mathbf{v}); \quad n = \cos(z, \mathbf{v}).$$

Очевидно, определив значения l , m , n , можно считать известным положение соответствующей главной площадки.

Рассмотрим уравнения, связывающие компоненты данного напряженного состояния (действуют по площадкам, параллельным координатным плоскостям) с напряжениями, взятыми по наклонной площадке:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} – проекции полного напряжения на координатные оси.

Если полные напряжения совпадают с главными, то $\bar{X} = \sigma l$, $\bar{Y} = \sigma m$, $\bar{Z} = \sigma n$, причем σ – главное напряжение, действующее на рассматриваемой площадке с нормалью ν .

Направляющие косинусы должны удовлетворять геометрическому соотношению

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (4)$$

Найдем направляющие косинусы l_1 , m_1 , n_1 углов наклона нормали к площадке с главным напряжением σ_1 . Тогда уравнения (3) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= \sigma_1 l, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= \sigma_1 m, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= \sigma_1 n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Преобразуя данную систему уравнений, получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1 &= 0, \\ \tau_{xy} l_1 + (\sigma_y - \sigma_1) m_1 + \tau_{zy} n_1 &= 0, \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + (\sigma_z - \sigma_1) n_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Разделим все члены системы (6) на n_1 ($n_1 \neq 0$ по условию) и рассмотрим, например, первые два уравнения системы. Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) \frac{l_1}{n_1} + \tau_{yx} \frac{m_1}{n_1} &= -\tau_{zx}, \\ \tau_{xy} \frac{l_1}{n_1} + (\sigma_y - \sigma_1) \frac{m_1}{n_1} &= -\tau_{zy}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Очевидно, из системы двух уравнений можно найти два неизвестных отношения $\left(\frac{l_1}{n_1}\right)$, $\left(\frac{m_1}{n_1}\right)$, причем оставшееся третье уравнение преобразованной системы (6) может служить проверкой вычислений. Подставим найденные отношения $\left(\frac{l_1}{n_1}\right)$ и $\left(\frac{m_1}{n_1}\right)$ в соотношение (4) (предварительно разделим все члены этого соотношения также на $n_1 \neq 0$). Находим сначала величину n_1 , а затем l_1 , m_1 .

Аналогично определяем направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3 , соответствующие нормальям к площадкам с главными напряжениями σ_2 и σ_3 .

Направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 можно рассматривать как координаты некоторой точки A , лежащей на нормали v к соответствующей главной площадке с напряжением σ_1 . Графически можно построить параллелепипед, ребра которого равны найденным значениям l_1, m_1, n_1 , а диагональ является отрезком прямой, совпадающей с нормалью v (рис. 20).

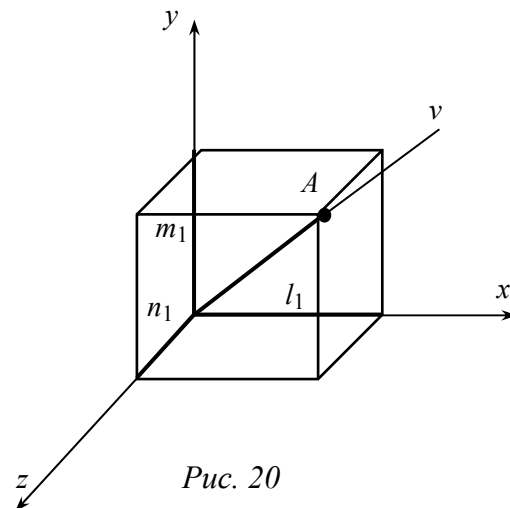


Рис. 20

4. Определить главные деформации.

Деформированное состояние в производной точке твердого тела определяется девятью компонентами, образующими тензор деформаций. Он записывается аналогично тензору напряжений, причем линейные деформации соответствуют нормальным напряжениям, а угловые деформации – касательным напряжениям.

Существуют три взаимно перпендикулярных направления таких, что проходящие по ним волокна только удлиняются или только укорачиваются (деформация сдвига при этом отсутствует). Такие направления называются главными осями деформации, а соответствующие им удлинения (укорочения) – главными деформациями. Главные деформации и главные оси деформации находятся аналогично главным напряжениям и их направлениям.

По условию не задано деформированное состояние в рассматриваемой точке, поэтому главные деформации находим из соотношений обобщенного закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)), \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)). \end{aligned} \right\}$$

Для плоского напряженного состояния рассматривается тензор напряжений второго порядка, существует два главных напряжения:

$$\sigma'_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Полученные величины необходимо переобозначить с учетом известной зависимости ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Если одно из найденных главных напряжений окажется положительным, а другое отрицательным, то обозначим их σ_1 и σ_3 соответственно. Если оба главных напряжения будут положительными (отрицательными), то их обозначают σ_1 и σ_2 (σ_2 и σ_3) соответственно.

Положение главных площадок определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y},$$

где α – угол наклона нормали главной площадки к горизонтальной оси координат (оси x). В зависимости от того, какое из главных напряжений

(σ_1 или σ_2) подставляют в эту формулу, получают тангенс угла наклона нормали к площадке с главным напряжением σ_1 или σ_2 .

Для плоского напряженного состояния можно нарисовать площадку главных напряжений (рис. 21), а не нормаль к площадке, подобно изображенной на рис. 20.

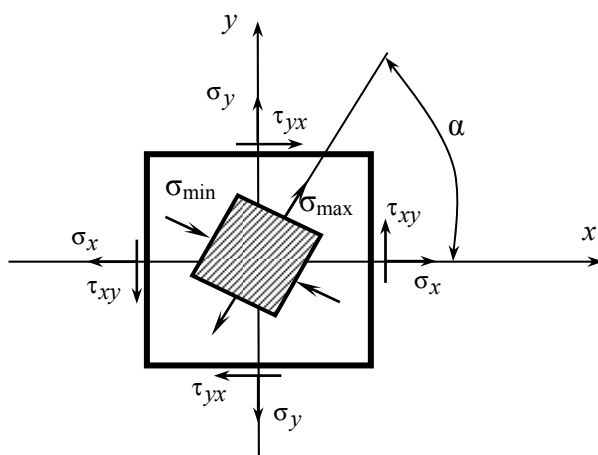


Рис. 21

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое нормальные и касательные напряжения? Каково правило показа напряжений?
2. Чем характеризуется напряженное состояние в произвольной точке тела? Напишите тензор напряжений и его составляющие – шаровой тензор и девиатор напряжений.
3. Какие существуют виды напряженного состояния материала?
4. Что называется главной площадкой? Какие напряжения действуют на главной площадке?
5. Напишите уравнение для нахождения главных напряжений. Напишите выражение для инвариантов напряженного состояния.
6. Как определяют положение главных площадок? Дайте определение понятию направляющих косинусов.
7. Что такое линейные и угловые деформации?
8. Чем характеризуется деформированное состояние в произвольной точке тела? Напишите тензор деформаций.
9. Что называется главными осями деформаций? Каковы особенности главных осей деформации?
10. Напишите уравнение обобщенного закона Гука.

ЗАДАНИЕ № 6

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Дана прямоугольная балка-полоса, для которой известна длина l , высота h , толщина t .

Требуется:

- 1) проверить, можно ли заданную функцию $\varphi(x, y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости;
- 2) определить неизвестные постоянные, входящие в выражение функции напряжений $\varphi(x, y)$;
- 3) построить эпюры нормальных и касательных напряжений в трех поперечных сечениях заданной балки-полосы. В каждом сечении рассматривать не менее пяти точек по высоте сечения;
- 4) сравнить величины напряжений, найденные с помощью функции напряжений, с величинами, найденными по формулам сопротивления материалов.

Объемными силами следует пренебречь.

Выражения функции напряжений содержатся в табл. 12, исходные данные – в табл. 13; схемы балки-полосы представлены на рис. 22. В качестве сечений (см. п. 3) необходимо принять крайнее левое сечение, сечение посередине балки и крайнее правое сечение.

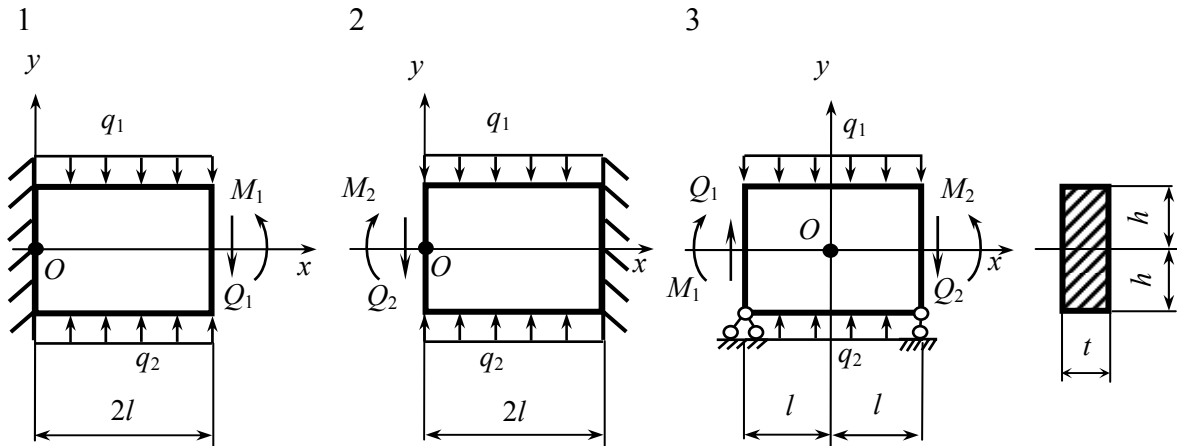


Рис. 22

Таблица 12

Номер функции	Функция напряжений $\varphi(x, y)$
1	$\varphi = axy + \frac{b}{2}x^2y + \frac{c}{6}y^3 + \frac{d}{6}xy^3 + \frac{k}{6}\left(x^2y^3 - \frac{y^5}{5}\right)$
2	$\varphi = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x^2y + \frac{c}{6}y^3 + \frac{d}{6}\left(x^2y^3 - \frac{y^5}{5}\right)$
3	$\varphi = axy + \frac{b}{6}y^3 + \frac{c}{6}x^3y^3 - \frac{c}{10}x^5y + \frac{d}{6}x^3y + \frac{k}{6}xy^3$
4	$\varphi = \frac{a}{6}\left(x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5\right) + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{6}x^3$
5	$\varphi = ay^3 + bx^2 + c(xy^3 - 3dxy) + \frac{k}{5}(x^5y - xy^5)$
6	$\varphi = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x^2y + \frac{d}{6}x^2y^3 - \frac{1}{30}dy^5 + \frac{k}{6}y^3$

Таблица 13

Цифра вари- анта	I		III						IV			
	Номер схемы	Номер $\varphi(x, y)$	q_1/ql	q_2/ql	M_1/ql^2	M_2/ql^2	Q/qh	Q_2/qh	$q, \text{кН/м}$	l/h	$h, \text{м}$	$t, \text{м}$
1	1	6	0	2	0	1	-1	0	20	2,5	0,4	0,1
2	2	5	1	-1	-1	0	0	1	22	3,0	0,5	0,15
3	3	4	2	0	2	3	1	0	24	3,0	0,6	0,2
4	2	3	3	1	0	2	0	-2	26	2,8	0,4	0,2
5	3	1	-1	2	-2	0	0	2	28	2,6	0,5	0,3
6	1	2	-2	0	1	0	3	0	21	3,2	0,6	0,15
7	2	6	0	3	-1	2	-2	0	23	3,2	0,6	0,2
8	1	5	0	-2	0	-1	1	3	25	2,6	0,5	0,1
9	3	2	2	-1	2	0	3	0	27	3,0	0,4	0,1
10	2	1	3	0	0	-2	-1	0	30	3,0	0,6	0,3

Указания к выполнению задания № 6

Цель выполнения задания – получить практическое представление о решении плоской задачи теории упругости в напряжениях. Выполнение задания позволяет понять, что решение указанной задачи существенно упрощается, если объемные силы считать постоянными или равными нулю. В этом случае можно перейти от трех неизвестных функций $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ к одной $\varphi = \varphi(x, y)$ – функции напряжений, или функции Эри (по имени английского математика и астронома Эри (Airy)).

1. Заданную функцию $\varphi = \varphi(x, y)$ можно принять для решения плоской задачи теории упругости только в том случае, если она является гармонической. Тогда функция $\varphi = \varphi(x, y)$ должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Следовательно, необходимо вычислить частные произведения заданной функции $\varphi = \varphi(x, y)$ и убедиться, что бигармоническое уравнение удовлетворяется тождественно, или найти условия, при которых уравнение выполняется.

Выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ записываются по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

2. Неизвестные постоянные, входящие в выражение $\varphi = \varphi(x, y)$ можно определить из граничных условий для заданной балки-полосы. Необходимо рассмотреть два вида граничных условий: вдоль длинной стороны балки-полосы и по торцам.

Вдоль длинных сторон (при $y = +h$ и при $y = -h$) в качестве граничных условий рассматриваются условия на поверхности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m &= p_x, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m &= p_y, \end{aligned} \right\}$$

где l, m – направляющие косинусы нормали к поверхности (к рассматриваемой стороне балки-полосы). Компоненты поверхностной нагрузки p_x, p_y находятся в зависимости от действующей по условию нагрузки вдоль длинных сторон балки.

По торцам балки-полосы граничные условия записываются в виде выражений для внутренних силовых факторов через напряжения, именно:

$$N_x = t \int_{-h}^h \sigma_x dy, \quad Q_y = -t \int_{-h}^h \tau_{xy} dy, \quad M_z = -t \int_{-h}^h \sigma_x y dy.$$

Значения N_x, Q_y, M_z определяются в соответствии с заданной нагрузкой, действующей по боковым граням балки-полосы, или в соответствии с опорными реакциями (их нужно предварительно найти). Правило знаков – общепринятое в курсе «Сопротивление материалов».

Таким образом, граничные условия позволяют не только найти неизвестные постоянные функции напряжений, но в некоторых случаях и выполнить проверку найденных значений.

3. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений.

Очевидно, окончательные выражения для напряжений с учетом найденных констант должны быть функциями координат x, y , поэтому эпюры строят для конкретного сечения балки (известна ордината y) не менее чем в пяти точках по высоте сечения (известны абсциссы x).

4. Сравнить полученные выражения напряжений с напряжениями, найденными по формулам сопротивления материалов. Для этого необходимо рассмотреть балку (шарнирно закрепленную или консольную), соответствующую по размерам и внешней нагрузке заданной балке-полосе. По известным из курса сопротивления материалов формулам запишем выражение для нормального и касательного напряжений:

$$\sigma_x^i = \frac{M_z}{J_z} y^i; \quad \tau_{\max} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)},$$

где σ_x – нормальное напряжение в i -й точке опасного сечения балки (см. задание № 3); τ_{\max} – максимальное касательное напряжение в опасном сечении балки. При вычислении касательных напряжений по указанной формуле (формуле Журавского) нужно определить из эпюры поперечных сил $Q_y = Q_{y\max}$ величину поперечной силы в опасном сечении балки; вычислить J – осевой момент инерции поперечного сечения и найти $b(y)$ – ширину поперечного сечения балки на уровне, для которого вычисляются касательные напряжения (в данном задании $b(y) = t$). В формуле $S_z^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части площади поперечного сечения. Касательные напряжения вычисляют для определенного уровня y , поэтому любая часть сечения (относительно данного уровня) может рассматриваться как отсеченная. В данном задании имеем балку-полосу прямоугольного поперечного сечения постоянной ширины, для которого

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{t(0,25h^2 - y^2)}{2}.$$

Построив эпюры нормальных и касательных напряжений, необходимо сформулировать выводы, полученные из анализа эпюр, построенных методом теории упругости и сопротивления материалов.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая совокупность уравнений существует для решения задач теории упругости? Что может приниматься в качестве неизвестных?
2. В чем заключается способ решения задач теории упругости в напряжениях? Назовите последовательность действий при решении задач в напряжениях.
3. Что называется оператором Лапласи?
4. Какая функция называется бигармонической?
5. Чему равна наивысшая степень полинома, при которой тождественно удовлетворяется бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости?
6. Как выражаются напряжения (нормальные и касательные) с помощью функции напряжений?
7. Сопоставьте напряжения, полученные по формулам теории упругости и сопротивления материалов: какие напряжения отличаются и почему?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по _____
(название курса)

(название расчетно-графической работы)

Шифр _____

Выполнил _____
(ФИО студента)

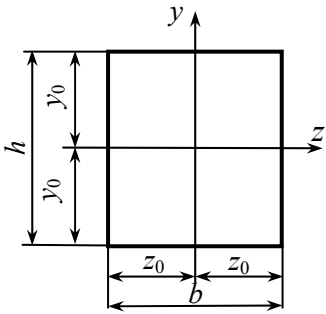
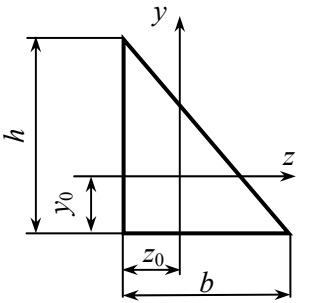
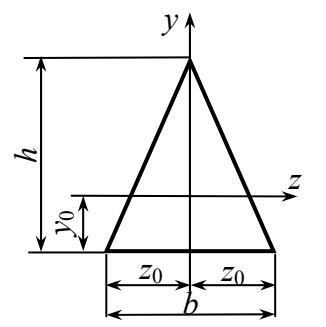
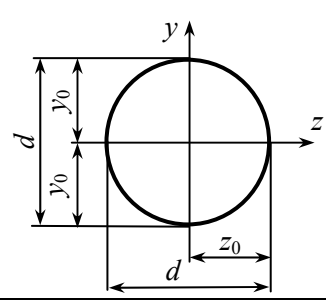
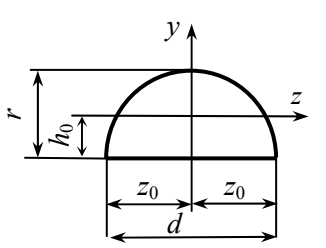
Гр. _____

Принял _____
(ФИО преподавателя)

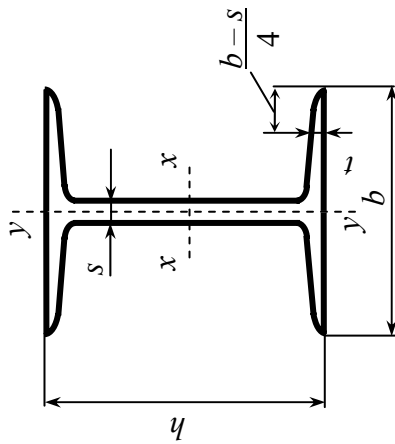
Владимир 200 _

Приложение 2

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ФИГУР ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ

Фигура	A	z_0	y_0	J_z	J_y	J_{zy}
	bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	0
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$	0
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0
	$\frac{\pi r^2}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0,1098r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$	0

ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ГОСТ 8239-89)



h – высота двутавра

b – ширина полки

s – толщина стенки

t – средняя толщина полки

A – площадь поперечного сечения

J – момент инерции

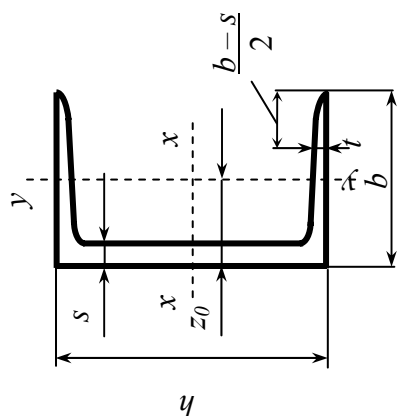
W – момент сопротивления

S – статический момент полусечения

i – радиус инерции

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ГОСТ 8240-89)



h – высота швеллера

b – ширина полки

s – толщина стенки

t – средняя толщина полки

A – площадь поперечного сечения

J – момент инерции

W – момент сопротивления

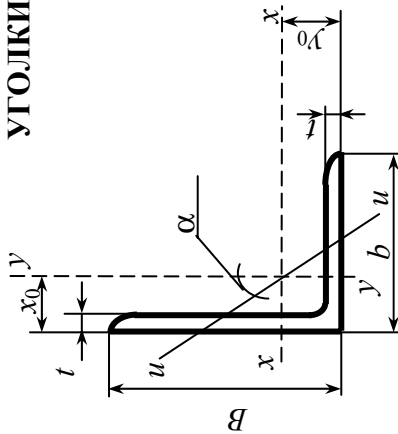
S – статический момент полусечения

i – радиус инерции

*z*₀ – расстояние от оси *y* до наружной грани

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				<i>A</i> , см ²	<i>J</i> _{<i>x</i>} , см ⁴	<i>W</i> _{<i>x</i>} , см ³	<i>i</i> _{<i>x</i>} , см	<i>S</i> _{<i>x</i>} , см ³	<i>J</i> _{<i>y</i>} , см ⁴	<i>W</i> _{<i>y</i>} , см ³	<i>i</i> _{<i>y</i>} , см	<i>z</i> ₀ , см
		<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>									
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16а	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ НЕРАВНОПОЛОЧНЫЕ (ГОСТ 8510-86)

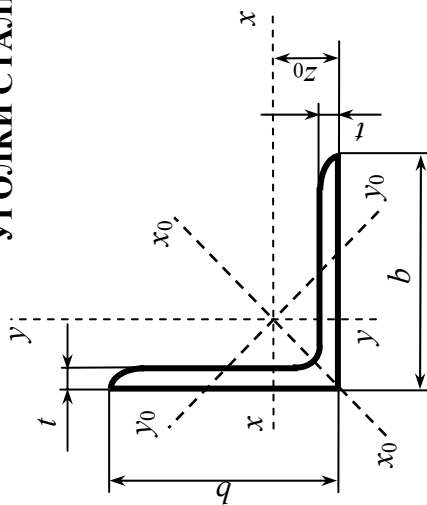


B – ширина большей полки
 b – ширина меньшей полки
 t – толщина полки
 A – площадь поперечного сечения
 J – момент инерции
 i – радиус инерции
 α – угол наклона главной центральной оси
 J_{xy} – центробежный момент инерции
 x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней полкок

$J_{x_0^2}$ – момент инерции относительно оси x_0
 $J_{y_0^2}$ – момент инерции относительно оси y_0
 J_{xy_0} – центробежный момент инерции

Номер уголка	Масса, кг	Размеры, мм		A_2 см ²	$J_{x_0^2}$ см ⁴	i_{x_0} см	$J_{y_0^2}$ см ⁴	i_{y_0} см	J_{amin} см ⁴	i_{amin} см	tg α	J_{xy_0} см ⁴	x_0 см	y_0 см
		B	t											
5/3,2	2,40	50	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12,0	1,17	2,39
9/5,6	6,70	90	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	6	9,58	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,70		7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
11/7	9,87	110	8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,50	3,32
	10,9		8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11,0	125	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,80	4,01
	12,6		8	16,0	256	4,0	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5		10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5		10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18,0	160	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	194	2,24	5,19
	19,8		10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	213	2,28	5,23
	23,6		12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4		12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,50
	29,7		12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4		14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	573	2,91	6,62
	39,1		16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ (ГОСТ 8509-93)



- b – ширина полки
- t – толщина полки
- A – площадь поперечного сечения
- J – момент инерции
- i – радиус инерции
- J_{xy} – центробежный момент инерции
- z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	J_{x0max} , см ⁴	i_{x0max} , см	J_{y0min} , см ⁴	i_{y0min} , см	$ J_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11,0	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
7	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
	5,38		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,90
7,5	6,39	70	6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
	5,80		5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
8	6,89	75	6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,10
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	38,3	2,23

Окончание таблицы

Номер УГОЛКА	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	J_{x0max} , см ⁴	i_{x0max} , см	J_{y0min} , см ⁴	i_{y0min} , см	$ J_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	105	2,83
11	17,9	110	12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
	11,9		7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3,00
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22,0	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,40
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,90
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,30
	27,0		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
18	34,0	180	14	43,6	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	615	4,47
	30,5		11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высш. шк., 2001. – 560 с. – ISBN 5-06-003732-0.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 400 с. – ISBN 5-06-004280-4.
3. Теребушко, О. И. Основы теории упругости и пластичности / О. И. Теребушко. – М. : Наука, 1984. – 320 с.
4. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 1982. – 264 с.
5. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Мирюлюбов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1985. – 399 с.
6. Рекач, В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости / В. Г. Рекач. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Высш. шк., 1984. – 287 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
<i>Задание № 1.</i> Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	4
<i>Задание № 2.</i> Геометрические характеристики плоских поперечных сечений стержней.....	11
<i>Задание № 3.</i> Расчет на прочность и жесткость при центральном растяжении – сжатии и изгибе	20
<i>Задание № 4.</i> Сложное сопротивление	26
<i>Задание № 5.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния в точке тела	37
<i>Задание № 6.</i> Исследование плоского напряженного состояния с помощью функции напряжений.....	45
Приложения	50
Рекомендательный библиографический список	57