

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

Кафедра сопротивления материалов

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и задания  
к выполнению расчетно-графических работ

Составитель  
С.А. МАВРИНА

Библиотека ВлГУ  
Брошюрный фонд

Владимир 2009

Б-2807

624.04  
М12

*248058*  
Маврина С. А.

Строительная механика  
2009 40,00

*248058*

УДК 624.04(07)  
ББК 38.112 я2  
С86

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент  
зав. кафедрой автомобильных дорог  
Владимирского государственного университета  
*Э.Ф. Семехин*

Печатается по решению редакционного совета  
Владимирского государственного университета

**Строительная механика** : метод. указания и задания к выполнению расчетно-графических работ / Владим. гос. ун-т ; сост. С. А. Маврина. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 32 с.

Содержат варианты заданий к выполнению расчетно-графических работ, а также подробные указания по выполнению каждого задания. Задания составлены в соответствии с программой изучения курса строительной механики, разработанной на основе Федерального стандарта специальности.

Предназначены для студентов строительных специальностей всех форм обучения, прежде всего для студентов специальности 270205 – Автомобильные дороги и аэродромы.

Табл. 6. Ил. 7. Библиогр. : 4 назв.

УДК 624.04(07)  
ББК 38.112 я2

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика рассматривает основные методы расчета различных конструкций на неподвижную и подвижную нагрузки. Расчет на неподвижную нагрузку представляет собой прежде всего построение эпюр внутренних силовых факторов; расчет на подвижную нагрузку – построение линий влияния для дальнейшего нахождения внутренних силовых факторов по линиям влияния.

Строительная механика является одной из фундаментальных общенаучных дисциплин в образовании инженера, обучающегося по строительному направлению, изучает поведение строительных конструкций на основе расчетных схем под действием различных внешних факторов: нагрузки, температуры, осадки опорных связей. Рассматривает и анализирует расчетные схемы основных типовых строительных конструкций: многопролетных балок различного очертания, рам, арок и ферм. Изучение поведения данных конструкций с позиций строительной механики дает будущему инженеру представление о различных методах анализа работы строительных сооружений на основе изучения работы соответствующих расчетных схем; позволяет определить эффекты (внутренние силовые факторы, перемещения и др.), возникающие в сооружении под внешним воздействием. При этом одной из важнейших задач дисциплины является получение и развитие практических навыков определения внутренних силовых факторов при статической, динамической и подвижной нагрузке. Этим обусловлена тематика представленных заданий.

Самостоятельное выполнение расчетно-графических работ по строительной механике позволяет получить навыки расчета простых видов строительных конструкций, способствует развитию инженерного мышления.

## ЗАДАНИЯ

### Задание 1. Расчет многопролетной разрезной балки на неподвижную и подвижную нагрузки

Для многопролетной балки (рис. 1), выбранной в соответствии с заданным преподавателем четырехзначным индивидуальным шифром, требуется:

1. Выполнить кинематический анализ многопролетной балки.
2. Построить поэтажную схему многопролетной балки.
3. Построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  от заданной неподвижной нагрузки. Построение проводить с учетом поэтажной схемы балки.
4. Построить линии влияния опорной реакции (по выбору студента), поперечной силы и изгибающего момента в двух указанных сечениях от подвижной единичной нагрузки.
5. Учитывая заданную на балку нагрузку, найти усилия опорной реакции, поперечной силы и изгибающего момента по построенным линиям влияния.
6. Сравнить значения внутренних силовых факторов, найденные по линиям влияния, со значениями, вычисленными аналитически (см. п. 3). Составить сравнительную таблицу полученных данных.

Данные для расчета представлены в табл. 1.

#### Указания к выполнению задания

1. Нарисовать заданную балку с найденными в соответствии с индивидуальным шифром значениями нагрузки и размеров в масштабе.
2. Построить поэтажную схему, мысленно разрезая балку по имеющимся шарнирам и выделяя основные и подвесные балки.
3. Выполнить кинематический анализ балки (вычислить число степеней свободы системы, выполнить структурный анализ).

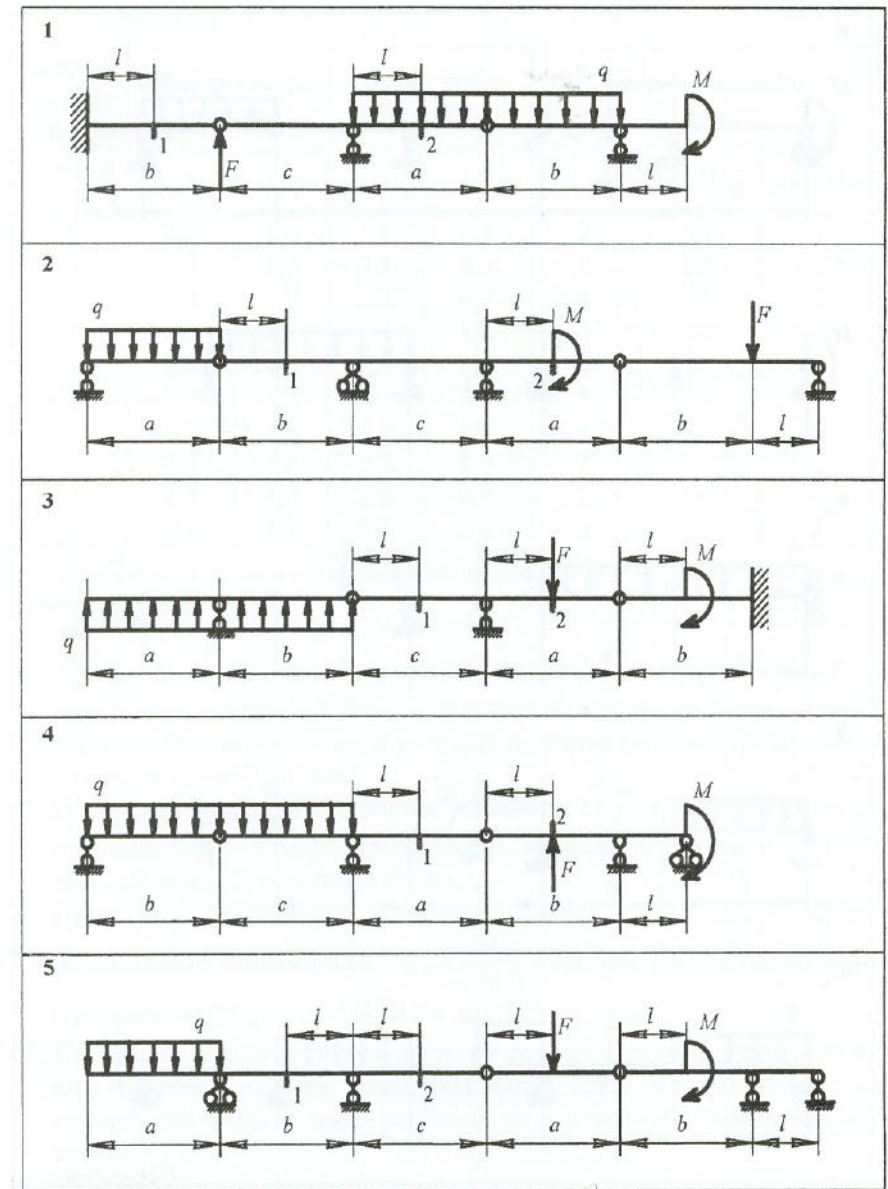


Рис. 1. (см. также с. 6)

Таблица 1

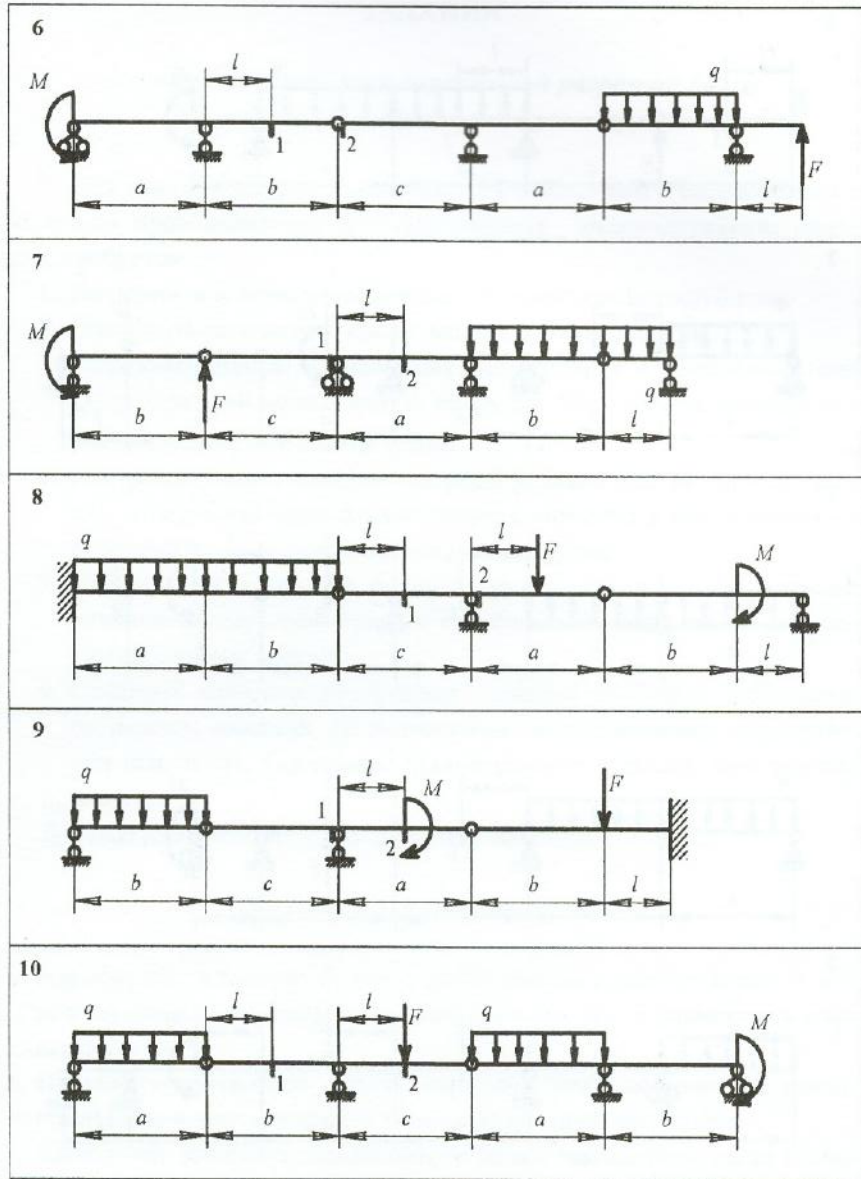


Рис. 1. Окончание

Первая цифра шифра	Вторая цифра шифра	Третья цифра шифра		Четвертая цифра шифра			
		$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$l$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м
6	2,0	1,6	1,8	0,8	2	20	4
7	2,2	1,8	2,1	0,9	3	22	6
8	2,4	2,0	2,3	0,7	4	24	2
9	2,6	2,2	2,4	1,0	5	26	5
10	2,8	2,4	2,0	1,2	6	20	3
1	3,0	2,2	2,1	1,1	5	12	8
2	3,2	1,8	1,8	1,4	4	10	6
3	2,4	2,0	2,2	1,3	3	14	3
4	2,8	1,6	2,6	0,9	2	16	4
5	2,6	2,4	2,3	0,8	4	18	2

*Примечание.* Изгибающий момент  $M$  приложен посередине соответствующего пролета.

- Построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  для каждой отдельной балки поэтажной схемы, начиная с самой верхней. Все вычисления и соответствующие рисунки представить в пояснительной записке.
- Построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  для заданной многопролетной балки, объединив эпюры, построенные для каждой отдельной балки.
- Проверить правильность построенных эпюр на основании дифференциальной зависимости  $Q_y = \frac{dM_z}{dx}$ . (Так как расчет проводится в плоскости  $XU$ , то  $Q = Q_y$ ,  $M = M_z$ .)
- Построить линии влияния опорной реакции (рассматривать реакции фактических опор заданной балки), изгибающего момента и поперечной силы в двух сечениях от единичной подвижной нагрузки.
- Учитывая заданную нагрузку, вычислить соответствующие усилия по построенным линиям влияния. Все необходимые ординаты ли-

ний влияния найти из подобия треугольников, образованных при построении линии влияния.

9. Сравнить аналитические значения усилий (п. 4) с соответствующими усилиями, найденными по линии влияния (п. 7). Результаты сравнения представить в таблице.

*Вопросы для самоконтроля*

1. Какая балка называется многопролетной?
2. Как построить поэтажную балку?
3. Какие балки могут служить основными балками и почему?
4. Какие балки поэтажной схемы являются подвесными? Почему?
5. Назовите порядок расчета многопролетной балки от неподвижной нагрузки (построение эпюр) на основе поэтажной схемы.
6. Что называется линией влияния? Существует ли единица измерения линии влияния?
7. Назовите основные правила построения линий влияния опорных реакций, изгибающих моментов и поперечных сил для трех основных типов балок (каких?).
8. Назовите правила нахождения усилий по линиям влияния.

**Задание 2. Расчет статически определимой плоской фермы на неподвижную и подвижную нагрузки**

Для заданной плоской фермы (рис. 2) требуется:

1. Начертить ферму с указанием всех параметров и нагрузки.
2. Начертить основную ферму; шпренгельные устройства. Показать распределение заданной нагрузки применительно к основной ферме.
3. Выполнить кинематический анализ фермы.
4. Найти аналитически усилия в каждом стержне заданной панели фермы.
5. Построить линии влияния опорных реакций фермы и линии влияния продольного усилия в стержнях заданной панели.
6. Найти усилия в тех же стержнях по построенным линиям влияния.
7. Сравнить усилия, найденные аналитически (п. 4) и по линиям влияния (п. 6). Результаты представить в таблице.

Данные для расчета приведены в табл. 2.

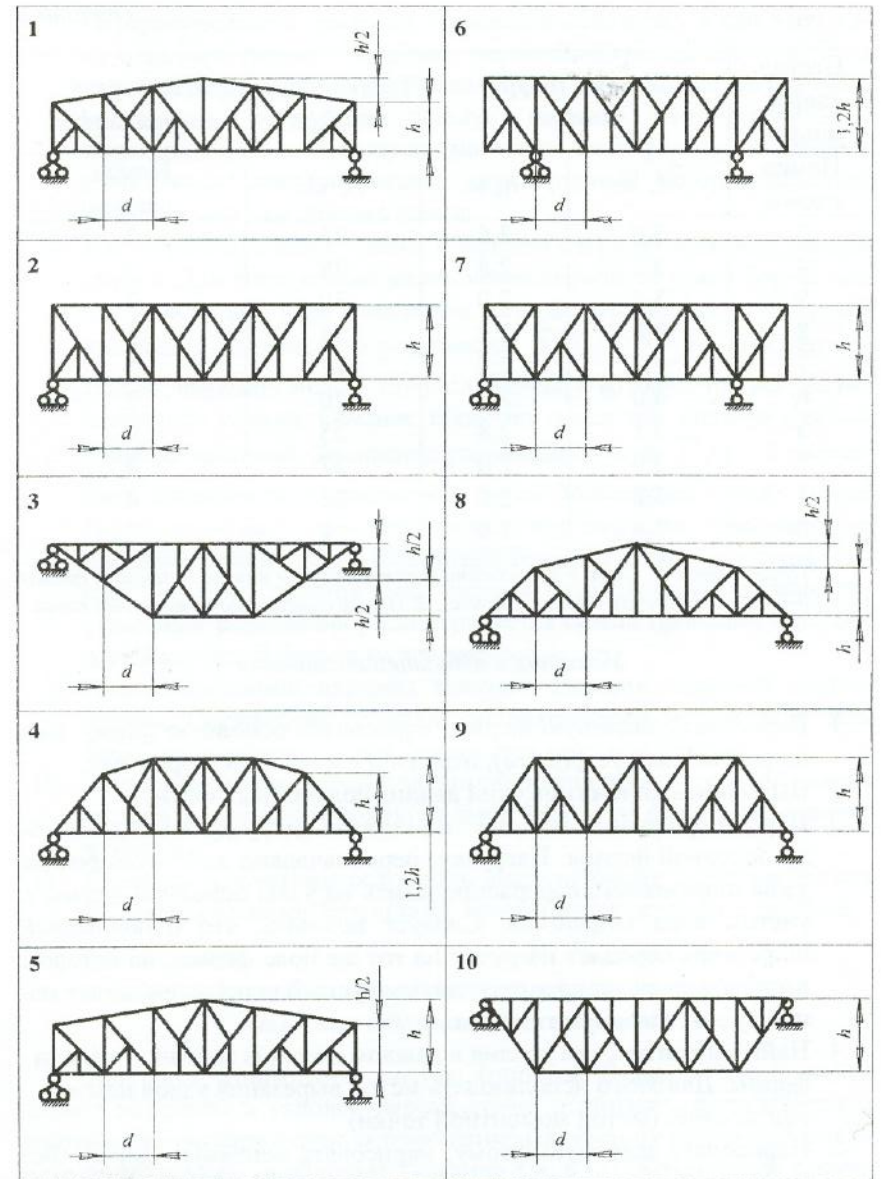


Рис. 2.

Таблица 2

Первая цифра шифра	Вторая цифра шифра		Третья цифра шифра	Четвертая цифра шифра
	Номер схемы	$d$ , м		
5	3,0	3,6	26	2
4	3,2	2,8	28	3
9	3,4	2,0	30	3
8	3,6	2,2	24	4
7	2,8	2,4	22	3
6	4,0	2,2	20	2
3	3,2	2,8	25	4
2	3,0	2,0	27	3
1	3,8	2,6	23	4
10	3,6	1,6	21	2

**Примечания:** 1. Сила  $F$  приложена к каждому узлу нижнего пояса (в схемах 3-й и 10-й – к каждому узлу верхнего пояса); 2. Номер панели отсчитывается слева.

#### Указания к выполнению задания

1. Нарисовать заданную ферму; нарисовать основную ферму (без шпренгельных устройств); отдельно нарисовать шпренгели.
2. Выполнить кинематический анализ полученных ферм.
3. Перераспределить нагрузку: приложить нагрузку к каждому узлу основной фермы. Нагрузку, первоначально действующую на узлы шпренгелей, перераспределить на узлы основной фермы с учетом вида шпренгеля. Следует помнить, что одноярусный шпренгель передает нагрузку на тот же пояс фермы, на котором расположен сам шпренгель; двухъярусный перераспределяет нагрузку на узлы другого пояса.
4. Найти аналитически усилия в каждом стержне заданной панели фермы. Для этого использовать метод вырезания узлов или метод сечений (метод моментной точки).
5. Нарисовать заданную ферму; нарисовать основную ферму (без шпренгельных устройств); отдельно нарисовать шпренгели.
6. Выполнить кинематический анализ основной фермы.

7. Перераспределить нагрузку: приложить нагрузку к каждому узлу основной фермы. Нагрузку, первоначально действующую на узлы шпренгелей, перераспределить на узлы основной фермы с учетом вида шпренгеля. Следует помнить, что одноярусный шпренгель передает нагрузку на тот же пояс фермы, на котором расположен сам шпренгель; двухъярусный перераспределяет нагрузку на узлы другого пояса.
8. Найти аналитически усилия в каждом стержне заданной панели фермы. Для этого использовать метод вырезания узлов фермы или метод сечений. При вырезании узла фермы рассматривают два уравнения статического равновесия:  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ . Следовательно, вырезать можно тот узел фермы, в котором только два неизвестных усилия. Сечение проводят через три стержня фермы, включая искомый. Уравнение равновесия в виде  $\sum M = 0$  составляют относительно моментной точки. Моментная точка – точка пересечения двух, не интересующих нас стержней, через которые проходит сечение. Если моментная точка находится в бесконечности (не интересующие нас стержни параллельны), в качестве уравнения равновесия рассматривается сумма проекций всех сил одной из частей фермы на вертикальную ось.
9. Построить линии влияния каждого стержня заданной панели фермы. Построение проводят аналитическим методом, то есть методом вырезания узлов фермы или методом сечений.
10. Загрузить линии влияния заданной по условию нагрузкой; найти усилия в каждом стержне заданной панели фермы по линиям влияния.
11. Сравнить полученные результаты аналитического расчета и расчета по линиям влияния. Результаты сравнения представить в таблице.

#### Задание 3. Определение перемещений в плоских стержневых системах

Для двух стержневых систем (простой балки и рамы) найти полное линейное и угловое перемещение заданного преподавателем сечения. Вычислить любое перемещение (по выбору преподавателя) в матричной форме; подробные указания см. в [3]. Конкретные схемы, геометрические размеры и нагрузку выбрать в соответствии с заданным ранее шифром задания по рис. 3 и 4 и таблице данных 3.



Таблица 3

Первая цифра шифра (номер схемы)		Вторая цифра шифра			Третья цифра шифра			Четвертая цифра шифра $J_p/J_c$
Балка	Рама	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	a, м	b, м	c, м	
10	1	20	30	16	2,0	3,0	2,0	1/2
9	2	22	25	18	2,2	2,8	1,8	1/3
8	3	24	28	20	2,4	2,6	1,6	1/4
7	4	26	23	21	2,6	2,4	1,4	2/1
6	5	28	26	23	2,8	2,2	2,0	2/2
5	6	30	21	22	3,0	2,0	2,8	2/3
4	7	24	24	24	3,2	1,8	2,6	2/4
3	8	22	19	26	3,4	1,6	2,4	3/2
2	9	26	22	28	3,6	1,4	2,2	4/3
1	10	28	17	30	3,8	1,2	2,0	3/1

*Примечание.*  $J_p$ ,  $J_c$  – соответственно осевые моменты ригеля и стойки рамы. Для балки принять  $J = const$ .

Все перемещения в строительной механике для плоских систем, испытывающих деформацию изгиба, находятся методом Максвелла – Мора с применением правила Верещагина. Метод Максвелла – Мора заключается в перемножении эпюр изгибающих моментов двух состояний плоской системы: действительного состояния от заданной внешней нагрузки (грузовое состояние) и состояния от вспомогательной единичной нагрузки (единичное состояние). В строительной механике известен интеграл Максвелла – Мора, который учитывает влияние изгибающих моментов, продольных и поперечных сил на величину упругих перемещений. Практически в системах, состоящих из прямолинейных стержней, которые работают преимущественно на изгиб (балки, рамы), влияние продольных и поперечных сил на перемещения незначительно и им обычно пренебрегают. В таких системах интеграл Мора имеет вид

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_F}{EJ} dx.$$

Если жесткость в пределах каждого элемента системы постоянна, то

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_F dx.$$

**Правило Верещагина.** В системах, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости, вычисление интеграла вида

$\int_0^l \bar{M}_i M_F dx$  значительно упрощается с применением способа перемножения эпюр. Способ был предложен в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А. Верещагиным и называется правилом Верещагина: при перемножении эпюр, одна из которых линейна, а другая имеет произвольное очертание, интеграл  $\int_0^l \bar{M}_i M_F dx$  можно вычислить как произведение площади эпюры произвольного очертания на ординату под ее центром тяжести, взятую из линейной эпюры. Таким образом,  $\int_0^l \bar{M}_i M_F dx = \omega y_{цт}$ .

Здесь  $\omega$  – площадь участка перемножаемых эпюр (как правило, криволинейного),  $y_{цт}$  – ордината, взятая из второй перемножаемой эпюры и лежащая под центром тяжести первой. Если оба перемножаемых участка линейны, площадь вычисляется для любого участка.

#### Указания к выполнению задания

1. Для заданной схемы балки (рамы) построить эпюру изгибающих моментов от заданного внешнего силового воздействия.
2. В заданной схеме в точке искомого перемещения приложить единичное воздействие и построить единичную эпюру изгибающих моментов. Правило выбора единичного воздействия: для нахождения линейного перемещения нужно приложить единичную силу по направлению искомого перемещения, для нахождения углового перемещения – единичный сосредоточенный момент.
3. Перемножить построенные эпюры. Перемножение производить по участкам так, чтобы в пределах выбранного участка закон изменения эпюры изгибающих моментов был постоянным. При этом можно пользоваться любой известной формулой перемножения.



4. Полное линейное перемещение указанного сечения в плоскости определить по формуле  $\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$ , где  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  – соответственно горизонтальное и вертикальное перемещения рассматриваемого сечения.

*Вопросы для самоконтроля*

1. Каким методом находят перемещения упругих систем в строительной механике?
2. Запишите интеграл Максвелла – Мора, ограничиваясь только внешним силовым воздействием. Объясните все входящие величины.
3. Какой вид принимает интеграл Максвелла – Мора при нахождении перемещений в балках и рамах?
4. Назовите два обязательных состояния системы для нахождения любого перемещения.
5. Назовите правила выбора единичного воздействия.
6. Объясните правило Верещагина.
7. Какие формулы Вы знаете для практического определения перемещений в балках и рамах?

*Задание 4. Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил*

Для заданной статически неопределимой рамы (рис. 5) требуется:

1. Определить степень статической неопределимости рамы.
2. Выбрать рациональную основную систему.
3. Записать канонические уравнения в общем виде.
4. Построить эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_i$  от единичных сил и от внешней нагрузки  $M_F$  в выбранной основной системе.
5. Вычислить все перемещения, входящие в канонические уравнения метода сил, и решить систему полученных уравнений относительно неизвестных.
6. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$ .
7. Проверить правильность построения окончательных эпюр.

Данные для расчета и схему рамы взять из табл. 4 по заданному преподавателем индивидуальному шифру.

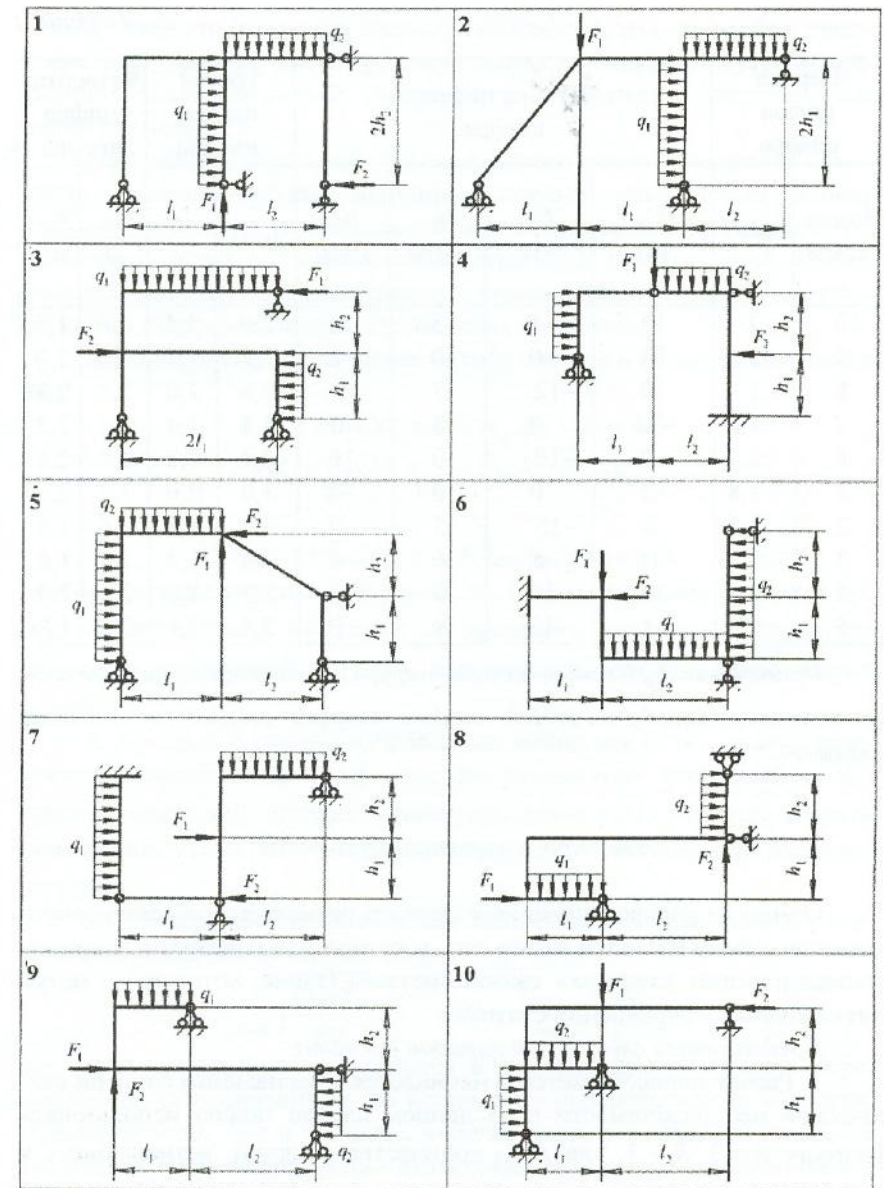


Рис. 5

Таблица 4

Первая цифра шифра	Вторая цифра шифра				Третья цифра шифра		Четвертая цифра шифра		
	Номер схемы	$J_p/J_c$	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$h_1$ , м
10	2	15	-8	5	0	2,0	1,4	2,0	1,5
9	3	18	0	0	-8	2,2	1,8	3,0	2,0
8	1	0	-12	7	-16	2,6	2,0	2,2	2,3
7	1,6	-24	0	8	0	1,8	1,4	2,4	2,2
6	2,2	0	-10	0	10	2,4	2,2	2,8	2,1
1	1,8	12	0	0	-8	3,0	2,0	3,2	2,0
2	1,5	0	-15	5	0	3,2	1,8	2,6	1,8
3	2,2	-16	8	6	0	2,8	1,9	2,4	1,6
4	2,4	0	12	0	12	2,0	1,6	2,2	2,0
5	1,4	14	13	8	0	2,4	2,1	2,0	1,8

*Примечание.*  $J_p$  – осевой момент инерции сечения горизонтальных и наклонных стержней;  $J_c$  – осевой момент инерции сечения вертикальных стержней.

#### Указания к выполнению задания

Одним из распространенных методов расчета статически неопределимых систем является метод сил, в котором за неизвестные принимаются реакции «лишних» связей системы (такие, которые не могут быть найдены из уравнений статики).

Предлагается следующий порядок расчета:

1. Расчет плоской системы начинается с вычисления степени статической неопределимости  $n$ . В данном случае можно использовать формулу  $n = \sum R_i - 3$ , где  $R_i$  – количество реакций, возникающих в опорах системы; 3 – число уравнений статики для плоских систем; суммирование проводится по количеству реакций.

2. Выбрать основную систему метода сил, то есть любую статически определимую систему, полученную из заданной путем отбрасывания «лишних» связей (лишних с точки зрения количества уравнений статики).

При выборе основной системы можно удалять опорные связи, вводить дополнительные шарниры (каждый однократный шарнир удаляет одну связь), выполнять разрезы системы. Важно помнить, что основная система должна быть геометрически неизменяемой. Рациональной является основная система, позволяющая наиболее простым способом построить эпюры изгибающих моментов.

3. Канонические уравнения метода сил для  $n$  неизвестных имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение  $i$ -й точки от  $k$ -го единичного воздействия,  $\Delta_{iF}$  – перемещения  $i$ -й точки от заданного внешнего воздействия (грузовые перемещения),  $X_i$  – неизвестные реакции отброшенных связей.

4. Построить эпюры изгибающих моментов (для строительных специальностей эпюры строятся на растянутых волокнах) в выбранной основной системе: единичные эпюры  $\bar{M}_i$  строятся в предположении, что  $X_i = 1$ , а грузовая эпюра  $M_F$  – от заданной внешней нагрузки.

5. Все коэффициенты системы канонических уравнений определяются с помощью интеграла Мора

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} dx \quad \text{и} \quad \Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F}{EJ} dx.$$

Здесь интегрирование выполняется в пределах длины участка перемножения, суммирование – по количеству перемножаемых участков. Предполагается, что в пределах участка перемножения жесткость  $EJ$  постоянна. Для нахождения интегралов в случае прямолинейных стержней с постоянной жесткостью удобно использовать правило Верещагина

$$\int_0^l \overline{M_i M_j} dx = \omega y_{цг},$$

где  $\omega$  – площадь криволинейного участка перемножаемой эпюры,  $y_{цг}$  – ордината, взятая из другой перемножаемой эпюры и лежащая под центром тяжести первой. В результате получаем знак «+», если перемножаемые участки расположены по одну сторону от базисной линии, и знак «-», если по разные стороны.

6. Решить систему канонических уравнений относительно неизвестных  $X_i$ .

7. После нахождения неизвестных  $X_i$  окончательная эпюра изгибающих моментов в первоначально заданной системе строится на основании принципа независимости действия сил следующим образом:

$$M = \overline{M_1} X_1 + \overline{M_2} X_2 + \dots + \overline{M_n} X_n + M_F.$$

Здесь  $\overline{M_i} X_i$  – эпюры, построенные в основной системе от найденных значений неизвестных  $X_i$ . Эти эпюры получаются в результате умножения построенных ранее (см. п. 4) эпюр  $\overline{M_i}$  на найденные величины неизвестных  $X_i$ . С учетом найденных реакций и заданной нагрузки можно найти все оставшиеся реакции из уравнений статики. После их нахождения эпюры поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  строятся в соответствии с общепринятыми в курсе сопротивления материалов правилами.

8. Выполнить деформационную и статическую проверки. Деформационная проверка эпюры  $M$ :

$$\sum \int \frac{\overline{M_i} M}{EJ} dx = 0 \text{ или } \sum \int \frac{\overline{M_s} M}{EJ} dx = 0,$$

где  $\overline{M_s}$  – суммарная эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от одновременного воздействия всех единичных воздействий.

Статическая проверка эпюр  $Q$  и  $N$ :  $\left. \begin{array}{l} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{array} \right\}$ , то есть система

под воздействием внешней нагрузки и опорных реакций должна находиться в равновесии.

### Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Как вычисляется степень статической неопределимости системы? Какие связи называются лишними?
3. Что представляет собой основная система?
4. Напишите систему канонических уравнений для  $n$  неизвестных ( $n = 1; 2; 3$ ).
5. Что означают величины  $X_i$ ,  $\delta_{ii}$ ,  $\delta_{ik}$ ,  $\Delta_{iF}$ ?
6. Как определяются коэффициенты при неизвестных и грузовые члены системы канонических уравнений?
7. Назовите порядок построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

### Задание 5. Расчет статически неопределимой плоской рамы методом перемещений

Для заданной статически неопределимой рамы (рис. 6) требуется:

1. Определить степень кинематической неопределимости.
2. Выбрать основную систему метода перемещений.
3. Записать канонические уравнения метода перемещений в общем виде.
4. Построить эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений  $\overline{M_i}$  и от внешней нагрузки  $M_F$  в выбранной основной системе по специальным таблицам метода перемещений.
5. Вычислить все коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений метода перемещений и решить полученную систему уравнений относительно неизвестных перемещений.
6. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$ .
7. Проверить правильность построения окончательных эпюр.  
Данные для расчета и схему рамы взять из табл. 5 по заданному преподавателем индивидуальному шифру.

Таблица 5

Номер схемы	Первая цифра шифра	Вторая цифра шифра				Третья цифра шифра		Четвертая цифра шифра	
		$J_p/J_c$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$h_1, \text{м}$
10	2	15	-8	5	0	2,0	1,4	2,0	1,5
9	3	18	0	0	-8	2,2	1,8	3,0	2,0
8	1	0	-12	7	-16	2,6	2,0	2,2	2,3
7	1,6	-24	0	8	0	1,8	1,4	2,4	2,2
6	2,2	0	-10	0	10	2,4	2,2	2,8	2,1
1	1,8	12	0	0	-8	3,0	2,0	3,2	2,0
2	1,5	0	-15	5	0	3,2	1,8	2,6	1,8
3	2,2	-16	8	6	0	2,8	1,9	2,4	1,6
4	2,4	0	12	0	12	2,0	1,6	2,2	2,0
5	1,4	14	13	8	0	2,4	2,1	2,0	1,8

Примечание.  $J_p$  – осевой момент инерции сечения горизонтальных и наклонных стержней;  $J_c$  – осевой момент инерции сечения вертикальных стержней.

## Указания к выполнению задания

Метод перемещений наряду с методом сил также является распространенным методом расчета статически неопределимых систем. За неизвестные в методе перемещений принимают возможные перемещения (линейные и угловые) точек системы. Принято называть степень неопределимости в методе перемещений степенью *кинематической неопределимости*. Методика расчета плоской системы методом перемещений полностью аналогична методике расчета методом сил.

1. Вычислить степень кинематической неопределимости рамы по формуле  $n = n_y + n_l$ , где  $n_y$  – количество возможных угловых перемещений рамы,  $n_l$  – количество возможных линейных перемещений рамы. Возможные угловые перемещения подсчитывают как количество жестких узлов рамы, возможные линейные перемещения определяют из анализа концевых вертикальных и горизонтальных перемещений каждого участка рамы.

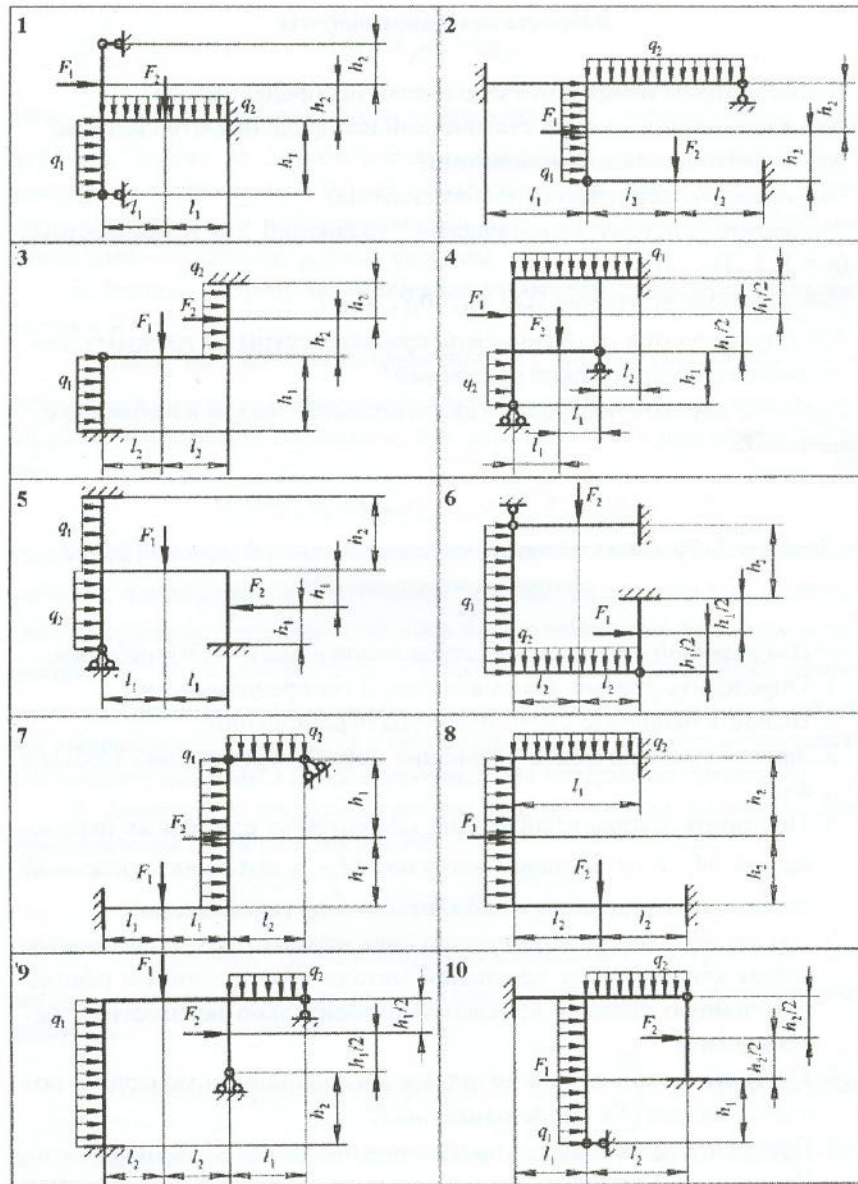


Рис. 6

2. Выбрать основную систему метода перемещений, исключая найденные возможные перемещения с помощью дополнительно наложенных на систему связей. Для устранения угловых перемещений вводится плавающая заделка (в отличие от жесткой заделки плавающая препятствует только угловым перемещениям и допускает линейные), для устранения линейных перемещений вводится шарнирно подвижная опора в направлении возможного линейного перемещения. Показать направления возможных перемещений для определенности дальнейшего расчета.

3. Записать канонические уравнения метода перемещений. Например, для системы  $n$  раз кинематически неопределимой канонические уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2F} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{m1}Z_1 + r_{m2}Z_2 + r_{m3}Z_3 + \dots + r_{mn}Z_n + R_{mF} = 0 \end{array} \right\}$$

4. Найти все коэффициенты при неизвестных  $r_{ik}$  и свободные члены аналитическим способом.  $r_{ik}$  – реактивное усилие (сила или момент), возникающее в связи  $i$  от единичного перемещения связи  $k$ . Нужно помнить, что во введенных плавающих заделках возникают реактивные усилия, а во введенных шарнирных опорах – реактивные силы. Для нахождения реактивных моментов вырезаем узел из эпюры; для нахождения линейных перемещений отсекаем часть рамы в направлении линейного перемещения и рассматриваем равновесие этой отсеченной части рамы.
5. Подставить найденные значения коэффициентов и свободных членов и решить полученную систему уравнений относительно неизвестных перемещений  $Z_i$ .
6. После нахождения неизвестных окончательная эпюра изгибающих моментов в первоначально заданной системе строится следующим образом:  $M = \sum \overline{M}_i Z_i + M_F$ . Здесь суммирование проводится по количеству исправленных эпюр (по количеству степени кинематической неопределимости); произведение  $\overline{M}_i Z_i$  носит название исправленной эпюры. Построение этих эпюр аналогично рассмотренному ранее построению в методе сил.

7. По эпюре изгибающих моментов построить эпюру поперечных сил  $Q$  (на основании дифференциальной зависимости между изгибающими моментами и поперечными силами). Эпюра продольных сил  $N$  строится вырезанием соответствующих узлов из эпюры поперечных сил.
8. Проверкой построенных эпюр служит условие равновесия узлов эпюры изгибающих моментов, а также статическое равновесие построенных эпюр поперечных и продольных сил.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Как подсчитывается степень кинематической неопределимости? Как определить число угловых и линейных возможных перемещений?
2. Какие перемещения называются возможными?
3. Как выбирается основная система метода перемещений?
4. Что принимают за неизвестные в методе перемещений?
5. Напишите систему канонических уравнений метода перемещений для  $n$  неизвестных ( $n = 1; 2; 3$ ).
6. Объясните смысл всех коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях метода перемещений.
7. Как определяют коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений?
8. Назовите порядок построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

#### Задание 6. Расчет плоской системы на динамическое воздействие

Для плоской рамы (рис. 7), выбранной в соответствии с заданным преподавателем индивидуальным шифром, требуется:

1. Найти минимальную частоту  $\omega_{\min}$  свободных вертикальных и горизонтальных колебаний сосредоточенной массы. При этом заданную раму рассматривать как систему с двумя степенями свободы; собственный вес рамы не учитывать.

2. Построить эпюры динамических изгибающих моментов  $M_{\text{дин}}$ , поперечных сил  $Q_{\text{дин}}$ , продольных сил  $N_{\text{дин}}$  от заданной гармонической нагрузки  $F(t) = F_0 \sin \theta t$ . При расчете принять частоту возмущающей силы  $\theta = 0,8\omega_{\min}$ . Величину сосредоточенной массы  $m$  и жесткость стержней рамы  $EJ$  считать постоянными.

Данные для расчета представлены в табл. 6.

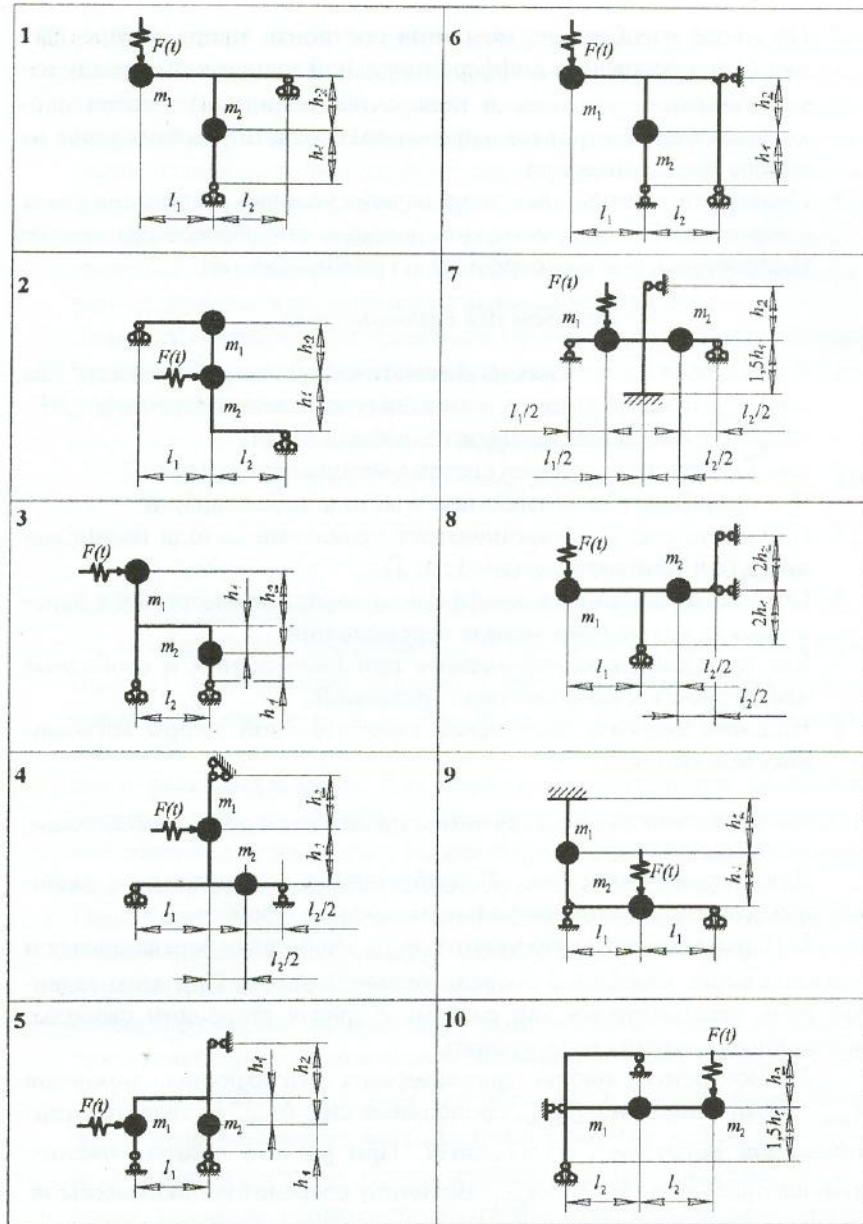


Рис. 7

Таблица 6

Первая цифра шифра	Вторая цифра шифра		Третья цифра шифра		Четвертая цифра шифра
Номер схемы	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$h_1$ , м	$h_2$ , м	$F$ , кН
1	2,0	2,6	1,8	3,0	3
2	2,2	1,8	1,6	2,9	4,5
3	2,4	2,8	2,2	2,8	5
4	1,8	2,2	1,4	2,7	3,5
5	1,6	2,4	2,6	2,6	6
10	2,0	2,2	2,1	2,5	2,5
9	2,2	1,8	1,8	2,4	4
8	2,4	2,0	2,4	2,3	5
7	1,8	2,4	2,6	2,2	2,5
6	1,6	3,2	2,8	2,0	3

Указания к выполнению задания

При выполнении задания можно выделить две части:

Часть 1. Свободные колебания систем с  $n$  степенями свободы.

Часть 2. Построение динамических эпюров в заданной раме от действия гармонической нагрузки.

При выполнении первой части заданная рама рассматривается как система с одной сосредоточенной массой. Система совершает свободные колебания, то есть предполагается, что заданная гармоническая нагрузка является причиной нарушения равновесия системы, но колебания происходят после прекращения взаимодействия система – нагрузка.

Необходимо выполнить следующее:

1. Вычислить степень свободы системы. В динамике степень свободы  $W$  понимается как число независимых возможных линейных перемещений сосредоточенной массы (или сосредоточенных масс). В качестве линейных перемещений рассматриваются возможные вертикальные и горизонтальные перемещения сосредоточенной массы (или сосредоточенных масс).

2. Записать определитель частот свободных колебаний (вековое уравнение). Например, для системы с двумя степенями свободы ( $W = 2$ ) определитель частот свободных колебаний имеет вид

$$\det \omega_i = \begin{vmatrix} \left( \delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \left( \delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь  $m_i$ ,  $i = 1, 2$  – величина сосредоточенной массы (или сосредоточенных масс), перемещающаяся при колебаниях в  $i$ -м направлении. В задании  $m_1 = m_2 = m$ .

3. Найти величины  $\delta_{ij}$  – удельные перемещения  $i$ -й исследуемой точки от единичной силы, приложенной в  $j$ -й точке по направлению возможного перемещения. Все перемещения в строительной механике определяются методом Максвелла – Мора с применением правила Верещагина, а именно:

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EJ} dx.$$

Следовательно, необходимо построить две эпюры изгибающих моментов в заданной системе от единичных сил, приложенных в точке сосредоточенной массы: от силы, приложенной по первому выбранному направлению – для построения эпюры  $\overline{M}_1$ , и от силы, приложенной по второму возможному направлению перемещения массы – для построения эпюры  $\overline{M}_2$ . Тогда

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EJ} dx; \quad \delta_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_2}{EJ} dx; \quad \delta_{12} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EJ} dx.$$

Напомним, что интегрирование проводится в пределах участка стержня, на котором закон изменения эпюры изгибающих моментов сохраняется постоянным; суммирование проводится по количеству подобных участков.

4. Раскрыть определитель частот свободных колебаний и найти  $\omega_{\min}$ . Раскрывая определитель частот, получаем биквадратное относительно  $\omega$  уравнение. Поэтому удобнее использовать переобозначение, например  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ . В результате получим вековое уравнение в виде (учтено равенство масс):

$$(\delta_{11} m - \lambda)(\delta_{22} m - \lambda) - \delta_{12} \delta_{21} m^2 = 0.$$

Выполнив перемножение и необходимые преобразования, получим приведенное квадратное уравнение относительно  $\lambda$ . Решение уравнения дает два значения:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Возвращаясь к сделанному ранее переобозначению, окончательно находим частоты свободных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Заметим, что рассматриваем только положительные значения квадратных корней, так как по физическому смыслу  $\omega$  – частота – не может быть отрицательной величиной.

Далее необходимо проанализировать полученные величины и выбрать минимальное значение  $\omega_{\min} = \min(\omega_1, \omega_2)$ .

5. Найти частоту вынужденных колебаний по заданному в условии соотношению  $\theta = 0,8\omega_{\min}$ .

Для выполнения второй части контрольной работы необходимо найти наибольшие (амплитудные) значения сил инерции (или инерционных сил). Эти силы возникают в точках сосредоточенных масс от действия гармонической нагрузки и направлены по выбранным ранее (см. п. 1 первой части задания) возможным направлениям перемещений сосредоточенных масс.

Необходимо выполнить следующее:

1. Составить уравнения в форме метода сил для нахождения амплитудных значений сил инерции. Для системы с двумя степенями свободы  $W = 2$  уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F_0} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22}^* X_2 + \Delta_{2F_0} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}$ , причем удельные перемещения  $\delta_{ii}$  ( $\delta_{11}, \delta_{22}$ ), а также  $\delta_{12} = \delta_{21}$  найдены ранее (см. п. 3 первой части);  $X_i$  – неизвестные амплитудные значения сил инерции;  $\Delta_{iF_0}$  – свободные члены уравнений или перемещения, возникающие в  $i$ -х исследуемых точках от силы  $F_0$  – амплитуды заданной динамической нагрузки.

2. Для нахождения величин  $\Delta_{iF_0}$  построить эпюру изгибающих моментов в заданной системе от амплитуды динамической нагрузки, приложенной в виде статической силы, – эпюру  $M_{F_0}$ .

3. Найти все коэффициенты при неизвестных (см. п. 1). Свободные члены системы уравнений находятся по формуле

$$\Delta_{iF_0} = \sum \int \frac{M_i M_{F_0}}{EJ} dx.$$

(Более подробно см. п. 3 первой части.)

4. Решить записанную в п. 1 систему уравнений относительно амплитудных значений сил инерции  $X_1$  и  $X_2$ .

5. Построить эпюру динамических изгибающих моментов по следующему соотношению:  $M_{\text{дин}} = \overline{M_1} X_1 + \overline{M_2} X_2 + M_{F_0}$ .

6. Построить эпюры динамических поперечных сил  $Q_{\text{дин}}$  и динамических продольных сил  $N_{\text{дин}}$ , пользуясь известным из сопротивления материалов приемом. В этом случае эпюру  $Q_{\text{дин}}$  строят на каждом участке заданной рамы по эпюре динамических изгибающих моментов по формуле  $Q_{\text{дин}} = (M_{\text{дин}}^{\text{прав}} - M_{\text{дин}}^{\text{лев}}) / l$ , где  $l$  – длина рассматриваемого участка построенной эпюры динамических изгибающих моментов;  $M_{\text{дин}}^{\text{прав}}$ ,  $M_{\text{дин}}^{\text{лев}}$  – соответственно значения изгибающих моментов на правом и левом концах этого участка (негоризонтальные участки следует мысленно повернуть до горизонтального положения по часовой стрелке). Эпюру  $N_{\text{дин}}$  строят вырезанием узлов эпюры  $Q_{\text{дин}}$ .

7. Выполнить анализ построенных динамических эпюр. На эпюре динамических изгибающих моментов в точке приложения сосредоточенной гармонической нагрузки должен быть перелом, а на эпюрах поперечных и продольных сил – «скачки» в точках сосредоточенных масс. Величина «скачков» при правильном выполнении расчета равна значению силы  $F_0$  и (или) значениям найденных сил инерции.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется степень свободы системы в динамике?
2. Как происходят свободные колебания, вынужденные колебания?

3. Назовите основные характеристики свободных и вынужденных колебаний.
4. Запишите определитель частот второго (третьего) порядка. Объясните смысл величин, входящих в определитель частот свободных колебаний. Какой вид примет определитель первого порядка?
5. Запишите уравнения для нахождения амплитудных значений сил инерции в форме метода сил (при  $n = 1, 2, 3$ ).
6. Каким образом учитывается динамическая нагрузка при построении эпюр? Какая нагрузка называется гармонической?
7. Каким методом находятся коэффициенты при неизвестных  $\delta_{ij}$  и свободные члены  $\Delta_{iF_0}$ ?
8. Какое правило используется для построения эпюры динамических изгибающих моментов?
9. В каких точках возникают силы инерции, как они направлены? Как отражаются эти силы на построенных динамических эпюрах  $M_{\text{дин}}$ ,  $Q_{\text{дин}}$ ,  $N_{\text{дин}}$ ?

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Клейн, Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статики стержневых систем) / Г. К. Клейн [и др.] ; под ред. Г. К. Клейна. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.
2. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.
3. Определение перемещений в стержневых системах. Матричная форма расчета : метод. указания к курсовой работе по строительной механике / Владим. гос. ун-т ; сост.: С. А. Маврина, В. П. Валуйских. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2000. – 28 с.
4. Расчет многопролетной статически определимой балки : метод. указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по строительной механике / Владим. гос. ун-т ; сост.: В. М. Кислов, И. А. Черноусова. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – 24 с.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
Задания .....	4
Задание 1. Расчет многопролетной разрезной балки на неподвижную и подвижную нагрузки .....	4
Задание 2. Расчет статически определимой плоской фермы на неподвижную и подвижную нагрузки .....	8
Задание 3. Определение перемещений в плоских стержневых системах .....	11
Задание 4. Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил .....	16
Задание 5. Расчет статически неопределимой плоской рамы методом перемещений .....	21
Задание 6. Расчет плоской системы на динамическое воздействие .....	25
Библиографический список .....	31

### СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и задания  
к выполнению расчетно-графических работ

Составитель  
МАВРИНА Светлана Александровна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор А. Ф. Ковалев

Подписано в печать 18.06.2009.  
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1,86. Тираж 100 экз.  
Заказ 229-09г.

Издательство  
Владимирского государственного университета.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.

НБ ВлГУ



1000278058