

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Под редакцией профессора В. В. Филатова



Владимир 2017

УДК 519.8
ББК 22.181
М34

Авторы:

А. М. Бурлакова (гл. 3), Л. Е. Кондратьева (гл. 4),
С. А. Маврина (гл. 5), В. В. Филатов (гл. 1, 2, 6, «Заключение»)

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
зав. кафедрой строительного производства
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Б. Г. Ким

Доктор физико-математических наук, доцент
зав. кафедрой теоретической и прикладной механики
Ивановского государственного энергетического университета
имени В. И. Ленина
Л. Б. Маслов

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Математическое моделирование : учеб. пособие / А. М. Бур-
М34 лакова [и др.] ; под ред. проф. В. В. Филатова ; Владим. гос. ун-т
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. –
128 с.

ISBN 978-5-9984-0786-4

Рассматривается суть метода математического моделирования. Даны решения задач при изучении напряженно-деформированного состояния различных строительных объектов: толстостенной трубы под действием внешнего и внутреннего давления, балки-стенки, плиты на сплошном упругом основании, а также определение критической нагрузки в грунте под действием внешней нагрузки.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению 08.04.01 «Строительство» по программам «Теория и проектирование зданий и сооружений», «Техническая эксплуатация и реконструкция зданий и сооружений», «Теплогазоснабжение населённых мест и предприятий», «Инновационные методы и технологии строительства автомобильных дорог».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 61. Табл. 10. Библиогр.: 15 назв.

УДК 519.8
ББК 22.181

ISBN 978-5-9984-0786-4

© ВлГУ, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
Глава 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	6
1.1. Общие сведения	6
1.2. Простое гармоническое движение.....	7
1.3. Гипотезы, принимаемые при построении математических моделей строительных объектов.....	11
Контрольные вопросы.....	12
Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	13
2.1. Напряжение	13
2.2. Смещение. Деформация.....	14
2.3. Связь между напряжением и деформацией. Закон Гука	17
2.4. Модули упругости изотропного объекта	19
2.5. Плоское напряжённое состояние	21
Контрольные вопросы.....	25
Глава 3. ОСНОВЫ РАСЧЁТА ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК И ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ.....	25
3.1. Общие сведения об оболочках	25
3.2. Основные уравнения безмоментной теории оболочек	27
3.3. Расчет толстостенных цилиндров.....	33
Контрольные вопросы.....	41
Глава 4. РАСЧЁТ КОНСТРУКЦИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ...	41
4.1. Общие сведения	41
4.2. Виды моделей грунтового основания.....	43
4.3. Расчет конструкций на упругом основании по модели Винклера.....	45
4.4. Пример расчета балки на упругом основании по модели Винклера.....	50
4.5. Расчет конструкций на упругом основании с двумя коэффициентами постели	52

4.6. Расчет конструкций на упругом основании по модели теории упругости.....	53
4.7. О расчете пластин на упругом основании	63
Контрольные вопросы	67
Глава 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ-СТЕНКИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ	
5.1. Плоская задача теории упругости.....	68
5.2. Функция напряжений	72
5.3. Бигармоническое уравнение плоской задачи	75
5.4. Метод конечных разностей.....	76
5.5. Применение метода конечных разностей к одномерной функции	77
5.6. Применение метода конечных разностей к двумерной функции	83
5.7. Бигармоническое уравнение.....	90
5.8. Рамная аналогия	92
5.9. Пример расчета балки-стенки методом конечных разностей.....	98
Контрольные вопросы	108
Глава 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ И МАКСИМАЛЬНОЙ ГЛУБИНЫ ЕГО ПРОЯВЛЕНИЯ В ГРУНТЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ.....	
6.1. Фазы деформированного состояния грунтов в зависимости от статических нагрузок.....	109
6.2. Методы расчета критических усилий	112
6.3. Расчет несущей способности многослойных и однослойных грунтовых сред.....	117
6.4. Треугольная нагрузка	118
Контрольные вопросы	124
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	125
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	126

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Математическое моделирование» является частью модуля «Механика» и представляет заключительную ступень изучения дисциплины «Сопротивление материалов». Эта особенность обуславливает основную цель дисциплины «Математическое моделирование», которая состоит в подготовке будущих специалистов к решению различных задач сопротивления материалов и строительной механики.

В учебном пособии рассматриваются суть метода математического моделирования и математической модели, этапы математического моделирования, понятия прямой и обратной задач на примере простого гармонического движения системы груз – пружина и движения той же системы с затуханием. Даны элементы теории упругости как основы для решения сложных задач математического моделирования при изучении напряженно-деформированного состояния различных строительных объектов: толстостенной трубы под действием внешнего и внутреннего давления, балки-стенки, плиты на сплошном упругом основании, а также для определения критической нагрузки в грунте и максимальной глубины её проявления под действием внешней нагрузки, обусловленной различными инженерными сооружениями и техногенными формами рельефа земной поверхности.

Изучение курса «Математическое моделирование» завершается выполнением магистрами курсовой работы на тему, соответствующую их программе подготовки.

Глава 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Общие сведения

Метод математического моделирования, или математическое моделирование – один из важнейших методов изучения явлений и объектов окружающего нас мира. Центральным понятием этого метода является понятие *математической модели*. Математическая модель – это приближённое описание какого-либо явления или объекта внешнего мира с помощью математических символов. Таким образом, в методе математического моделирования изучение явлений и объектов сведено к решению соответствующих математических задач. Метод позволяет не только изучать явления и объекты, но также осуществлять их прогнозирование и управление ими.

Связь математической модели с реальным явлением или объектом осуществляется с помощью специальных гипотез, идеализаций и упрощений, т. е. математическая модель – это своеобразный эквивалент реального явления и объекта, их свойства и законы, которым они подчиняются, описаны в математической форме в виде систем уравнений, функций или геометрических фигур, а также их различных комбинаций.

Математическое моделирование – это опосредованное, теоретическое или практическое исследование явлений и объектов, при котором изучается не само явление или объект, а их модель, находящаяся в некотором объективном соответствии с реальным явлением и объектом. При математическом моделировании выявляются данные о реальных явлениях и объектах. Эти данные служат основой для прогнозирования и управления, а также совершенствования и развития математических моделей.

Процесс математического моделирования состоит из четырёх этапов.

На *первом этапе* осуществляется формулировка законов, которыми описывается модель, и производится описание в математических понятиях качественных представлений о связях между элементами или составными частями модели.

На *втором этапе* выполняется исследование математических задач, к которым приводится математическая модель. Основным вопросом, решаемым на этом этапе, является *прямая задача*. Результатом решения прямой задачи будут теоретические данные, которые далее сопоставляются с результатами наблюдений исследуемого явления или объекта.

На *третьем этапе* устанавливается, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими данными принятой модели в пределах погрешности наблюдений. Если расхождение результатов наблюдений и теоретических данных не превышает погрешности наблюдений, то модель принимается. Если же расхождения превышают погрешность наблюдений, то модель отвергается.

Нередко некоторые характеристики модели могут быть неопределенными. В таких случаях они находятся из решения *обратной задачи* таким образом, чтобы теоретические данные не отличались в пределах погрешности наблюдений от результатов наблюдений. Если это условие не выполняется ни при каких значениях характеристик модели, то делается вывод о непригодности принятой модели для изучения рассматриваемого явления или объекта.

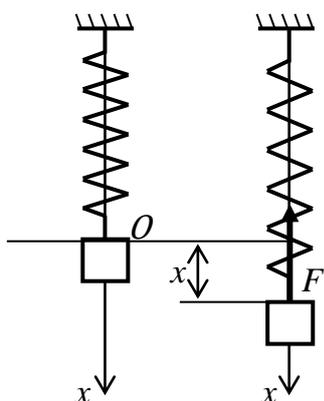
Таким образом, критерием оценки правильности математической модели служит практика. Только практика даёт основание делать вывод об истинности допущений, которые положены в основу модели того или иного явления или объекта.

Четвёртый этап заключается в анализе модели в связи с накоплением сведений об изучаемом явлении или объекте. Эти данные позволяют модернизировать модель. Но может наступить такой момент в математическом моделировании, когда теоретические данные станут существенно отличаться от результатов наблюдений. Это будет свидетельствовать о том, что при изучении явления или объекта следует переходить к принципиально иной модели.

1.2. Простое гармоническое движение

Простое гармоническое движение (ПГД) служит моделью различных видов движения, например, движения груза массой m , подвешенного на пружине (см. рисунок).

Пусть груз находится в положении равновесия (точка O). Если груз вывести из положения равновесия с помощью какой-нибудь силы F , то пружина деформируется (растянется или сожмётся) и будет действовать на груз силой F , которая будет стремиться вернуть груз в исходное состояние равновесия (в точку O).



Этой силой является сила упругости пружины F , которая согласно закону Гука равна

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент жесткости пружины; x – смещение груза от положения равновесия.

С приближением груза к положению равновесия (с уменьшением x) сила F будет стремиться к нулю. При $x = 0$ груз не остановится, а благодаря импульсу, обусловленному действием силы F , проскочит положение равновесия и продолжит движение, деформируя пружину (растягивая её). Сила F будет увеличивать деформацию пружины до момента, когда скорость движения груза не станет равной нулю. С этого момента груз под действием силы F будет двигаться в обратном направлении к положению равновесия.

Если в системе груз – пружина не будет потерь энергии на трение, то движение груза будет происходить сколь угодно долго. Такое движение называют простым гармоническим. Опишем это движение математически, т. е. создадим математическую модель этого явления.

Согласно второму закону Ньютона силу F можно представить как произведение массы груза m на ускорение a , с которым движется груз:

$$ma = -kx \text{ или } m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.1)$$

Дифференциальное уравнение (1.1) описывает гармоническое движение груза. Это уравнение есть математическая модель ПГД. Обозначим $\frac{k}{m} = \omega^2$. Возьмём решение дифференциального уравнения в следующем виде:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.2)$$

где A – амплитуда; ω – круговая частота собственных или свободных колебаний, равная $2\pi f$; f – частота в герцах; φ – начальная фаза; A , ω , f , φ – постоянные гармонического движения. Уравнение (1.2) есть решение прямой задачи.

Скорость и ускорение гармонического движения описываются функциями:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi);$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Процесс колебания груза сопровождается переходом энергии из потенциальной в кинетическую. За период энергия дважды превращается в кинетическую и дважды в потенциальную. Кинетическая энергия системы груз – пружина равна

$$E = \frac{1}{2}m(v(t))^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = 1/2kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Потенциальная энергия системы груз – пружина

$$\Pi = \frac{1}{2}Fx(t) = \frac{1}{2}mx(t)a(t) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Полная энергия системы груз – пружина в соответствии с законом сохранения энергии постоянна и равна

$$E + \Pi = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2.$$

При гармоническом колебании полная энергия колебаний груза пропорциональна квадрату амплитуды смещения.

Период T_0 и частота f_0 гармонического движения равны соответственно

$$T_0 = 2\pi \left[\frac{m}{k} \right]^{\frac{1}{2}}, f_0 = \frac{1}{(2\pi) \left[\frac{m}{k} \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.3)$$

Формулы (1.3) представляют результат решения прямой задачи математической модели системы груз – пружина. Задавшись массой груза m и коэффициентом жёсткости пружины k , можно по этим формулам вычислить теоретические значения периода T_0 и частоты f_0 и сопоставить эти значения с результатами измерения периода и частоты гармонического движения реальной системы груз – пружина.

Из наблюдений за движением груза в реальных условиях следует, что смещения груза $x(t)$ и скорость его движения $v(t)$ убывают со временем, т. е. движение реальной системы груз – пружина является затухающим. Такие затухающие колебания считаются негармониче-

скими. Следовательно, математическая модель, описанная уравнением (1.1), не соответствует реальному явлению движения груза на пружине и её необходимо уточнить.

Затухание колебаний обусловлено вязким трением (и не только). Сила вязкого трения направлена против движения груза. Её величина прямо пропорциональна скорости движения груза. Усовершенствуем исходную математическую модель, введя в дифференциальное уравнение (1.1) слагаемое, характеризующее силу вязкого трения, равную αv , где α – коэффициент вязкости; v – скорость движения груза. Тогда уравнение (1.1) приобретёт следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (1.4)$$

где $2\gamma = \alpha/m$; коэффициент γ называется постоянной затухания; он имеет размерность частоты. Уравнение (1.4) есть математическая модель движения системы груз – пружина с учётом затухания.

Решение дифференциального уравнения (1.4) имеет следующий вид:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (1.5)$$

где A и φ – амплитуда и фаза; $\omega_1 = [\omega^2 - \gamma^2]^{1/2}$ – частота свободных колебаний при наличии трения; $A = [x_0^2 + ((v_0 + \gamma x_0)/\omega_1)^2]^{1/2}$; $\text{tg}\varphi = x_0 \omega_1 / (v_0 + x_0\gamma)$, где x_0 и v_0 – смещение груза и его скорость для момента времени $t = 0$.

Формула (1.5) будет результатом решения прямой задачи при затухании. Период затухающих колебаний T_1

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{T_0}{[1 - (\frac{\gamma}{\omega})^2]^{1/2}},$$

где T_1 – условный период затухающего колебания при наличии трения; $T_0 = 2\pi/\omega$ – период свободных колебаний при отсутствии трения. В том случае, когда отношение γ/ω много меньше 1, то $T_1 \approx T_0$, т. е. в этом случае увеличение периода свободных колебаний за счёт трения незначительно и им можно пренебречь.

В дифференциальных уравнениях (1.1) и (1.4) фигурируют параметры системы груз – пружина: k , m , γ . Возможна ситуация, при которой один из этих параметров неизвестен, например γ . Определить его можно путём решения описанной выше обратной задачи. При её решении выполняют сравнение теоретического периода затухания $T_{1\text{теор}}$ с измеренным $T_{1\text{изм}}$

$$T_{1\text{теор}} = \frac{T_0}{[1 - (\frac{\gamma}{\omega})^2]} \approx T_{1\text{изм}}. \quad (1.6)$$

Решая уравнение (1.6) относительно γ , получим искомое значение неизвестной постоянной затухания

$$\gamma \approx \omega \left[1 - \frac{2\pi}{\omega T_{1\text{изм}}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

Знак приближённого равенства в формулах (1.6) и (1.7) поставлен потому, что существуют различия в значениях теоретического и измеренного периодов, обусловленные погрешностями измерения.

Математическая модель системы груз – пружина, описанная уравнением (1.4), более совершенна по сравнению с моделью, описанной уравнением (1.1). Но и она не отражает всех свойств системы груз – пружина. Эта модель не учитывает влияние на движение груза изменения со временем коэффициента жёсткости пружины, сопротивления воздушной среды, в которой движется груз (её температура, влажность), постоянной затухания и других факторов. Описав эти факторы математически и включив их в уравнение движения груза, можно получить математическую модель, более полно характеризующую свойства системы груз – пружина.

1.3. Гипотезы, принимаемые при построении математических моделей строительных объектов

Математические модели строительных объектов (как и любых других) строят исходя из некоторых предположений или гипотез относительно физико-механических свойств материала, из которого сделаны объекты, их строения и характера деформирования. Основными гипотезами, позволяющими упростить (в разумных пределах, диктуемых практикой), идеализировать реальные объекты, являются гипотезы:

- о *сплошности материала* объекта;
- об *однородности и изотропности материала* объекта;
- *малых деформаций*;
- об *идеальной упругости материала* объекта;
- о *суперпозиции внешних сил*, действующих на объекты.

Суть *гипотезы о сплошности материала* заключается в том, что материал, из которого состоит объект сплошь, т. е. без перерыва, заполняет объём, занимаемый объектом. Хотя на самом деле это не так. В элементах строительных конструкций: плитах, блоках, балках и тому подобное всегда есть каверны, пустоты, трещины. Но наличие

этих пустот (перерывов в сплошности материала) не принимается во внимание при построении математической модели объекта.

Согласно *второй гипотезе* материал, из которого состоит объект, в любой его точке обладает одинаковыми физико-механическими свойствами, т. е. является однородным. Кроме этого свойства материала по любому направлению также одинаковы, т. е. материал объекта является изотропным (*изос* – равный, *трос* – направление). Исключением из этой гипотезы можно назвать материалы с ярко выраженной анизотропией, например дерево.

Под действием внешних сил происходит деформирование объекта, которое количественно определяется относительными изменениями линейных и угловых размеров объекта. Если относительные изменения размеров объекта составляют первые тысячные доли ($0,00 n$), то такие *деформации считаются малыми*.

Реакция объектов на внешнее силовое воздействие считается упругой. Это означает, что если внешнее силовое воздействие на объект устранить, то объект примет исходную форму и размеры такие, какие у него были до силового воздействия. Материал объекта в этом случае называется *идеально упругим*. При идеальной упругости материала зависимость между напряжением, которое испытывает объект, и вызванной им деформацией описывается законом Гука – законом о прямой пропорциональности между напряжением и деформацией.

Гипотеза о *суперпозиции внешних сил* утверждает, что внешние силы действуют на объект независимо друг от друга и результирующее усилие в любой точке объекта представляет собой простую геометрическую сумму всех сил, действующих на объект независимо от порядка их приложения к объекту.

Контрольные вопросы

1. Что такое математическая модель?
2. Из скольких этапов состоит процесс математического моделирования?
3. Что такое прямая и обратная задача?
4. Какие гипотезы принимают при математическом моделировании строительных объектов?
5. Каким уравнением описывается математическая модель простого гармонического движения?
6. Каким уравнением описывается математическая модель гармонического движения с затуханием?

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1. Напряжение

Напряжённое состояние в любой точке объекта полностью характеризуется симметричным тензором напряжения

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix} \quad (2.1)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} – нормальные напряжения; τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} – касательные напряжения, которые в соответствии с законом взаимности удовлетворяют следующим условиям:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

благодаря которым тензор напряжения является симметричным. Двойная символика в подвалах компонентов тензора напряжений имеет следующий смысл: первый символ указывает на ориентировку в пространстве площадки, на которой определяется напряжение; второй символ – на направление действия напряжения.

Тензор напряжения (2.1) можно представить в виде двух тензоров: шарового и девиаторного. Шаровой тензор напряжения имеет следующий вид:

$$\begin{matrix} \sigma_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{ср}} \end{matrix}$$

Шаровой тензор характеризует напряжённое состояние объекта при изменении его объема в результате деформации. Девиаторный тензор напряжения имеет следующий вид:

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_{\text{ср}} \end{matrix}$$

Девиаторный тензор характеризует напряжённое состояние объекта при изменении его формы при деформации. В обоих тензорах

$$\sigma_{\text{ср}} = 1/3 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \text{ среднее напряжение.}$$

Компоненты напряжения тензора (2.1) зависят от той системы декартовых координат, которая используется для решения задачи. Поэтому при анализе напряжённого состояния пользуются главными напряжениями, суть которых заключается в следующем. В каждой точке деформируемого объекта всегда можно указать три взаимно

перпендикулярных направления, вдоль которых тензор напряжения принимает наибольшее, наименьшее и некоторое промежуточное значения. Эти направления называются главными направлениями, или главными осями напряжения, а соответствующие им напряжения – главными. Если построить бесконечно малый кубик, грани которого перпендикулярны главным направлениям, то на этих гранях касательные напряжения будут равны нулю и будут действовать только главные нормальные напряжения. В этом случае тензор напряжения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Количественно главные напряжения находятся в следующем соотношении: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. В отличие от компонентов тензора напряжения (2.1) главные значения не зависят от системы координат. Они определяются только свойствами и условиями закрепления деформируемого объекта.

Касательные напряжения, называемые главными, действуют на площадках, перпендикулярных биссектрисам углов, образованных главными направлениями:

$$\begin{cases} \tau_1 = \pm (\sigma_2 - \sigma_3)/2, \\ \tau_2 = \pm (\sigma_2 - \sigma_1)/2, \\ \tau_3 = \pm (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \end{cases}$$

Поскольку $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то главное касательное напряжение τ_3 является максимальным τ_{\max} .

Нормальные напряжения вызывают растяжение или сжатие деформируемого объекта. Касательные напряжения вызывают сдвиги или срезы объекта по плоскостям, ориентированным под углом в 45° к главным направлениям.

2.2. Смещение. Деформация

Под действием внешних сил (поверхностных и объемных) происходит деформация объекта. Она заключается в изменении расстояния между частицами объекта. Рассмотрим произвольную точку М объекта. Пусть её координаты равны x, y, z . В результате деформации точка М займет новое положение M_1 , координаты которого обозначим через x_1, y_1, z_1 . Соединим точки М и M_1 отрезком прямой и при-

дадим ему направление от точки M к точке M_1 . Вектор $MM_1 = S$ называется вектором смещения, или перемещения. Обозначим составляющие этого вектора по осям декартовой системы координат через u, v, w или через координаты точек M и M_1

$$u = x_1 - x, v = y_1 - y, w = z_1 - z.$$

Тогда вектор смещения S можно записать в следующем виде:

$$S = (x_1 - x)\mathbf{i} + (y_1 - y)\mathbf{j} + (z_1 - z)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы-орты.

Напряженное состояние объекта в любой его точке характеризуется тензором напряжения (2.1). Деформация в любой точке объекта характеризуется тензором деформации, компоненты которого выражаются через частные производные компонентов вектора смещения S

$$\begin{array}{ccc} \partial_u/\partial_x & \partial_u/\partial_y & \partial_u/\partial_z \\ \partial_v/\partial_x & \partial_v/\partial_y & \partial_v/\partial_z \\ \partial_w/\partial_x & \partial_w/\partial_y & \partial_w/\partial_z \end{array} \quad (2.2)$$

На главной диагонали тензора деформации (2.2) находятся компоненты, имеющие смысл относительных изменений длин линейных элементов деформируемого объекта. Выше и ниже главной диагонали расположены компоненты, характеризующие относительные сдвиги.

Согласно принципу Коши – Гельмгольца движение точки в деформируемом объекте в любой момент времени состоит из параллельного переноса, вращения и чистой деформации. Чистая деформация заключается в деформации растяжения – сжатия и деформации сдвига. Тензор деформации (2.2) описывает одновременно чистую деформацию и вращение. Поэтому он не симметричен в отличие от тензора напряжения (2.1). При изучении напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций изучаются только деформации растяжения – сжатия и сдвига. Поэтому из тензора деформации (2.2) выделяют тензор чистой деформации

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_{xx} & 1/2 \varepsilon_{xy} & 1/2 \varepsilon_{xz} \\ 1/2 \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 1/2 \varepsilon_{yz} \\ 1/2 \varepsilon_{zx} & 1/2 \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{array} \quad (2.3)$$

где $\varepsilon_{xx} = \partial_u/\partial_x, \varepsilon_{yy} = \partial_v/\partial_y, \varepsilon_{zz} = \partial_w/\partial_z,$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \partial_u/\partial_y + \partial_v/\partial_x,$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \partial_u/\partial_z + \partial_w/\partial_x,$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \partial_v/\partial_z + \partial_w/\partial_y.$$

Тензор чистой деформации является симметричным, как и тензор напряжения. Двойная символика в обозначениях компонентов тензора чистой деформации имеет тот же смысл, что и для тензора напряжения.

Компоненты тензора чистой деформации (2.3) зависят от системы координат, в которой они определяются. Поэтому тензор (2.3) для получения объективного представления о деформировании объекта сводится к главным значениям деформации, которые представляют собой растяжения-сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$). Эти направления называют главными направлениями, или главными осями деформации. Сдвиговые деформации на площадках, перпендикулярных главным направлениям, равны нулю. Между главными значениями деформации существует следующее соотношение: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

Сдвиговые деформации отличны от нуля на площадках, перпендикулярных к любым промежуточным направлениям, среди которых наибольший интерес представляют направления, совпадающие с биссектрисами углов, образованными главными осями деформации. Сдвиговые деформации на площадках, перпендикулярных биссектрисам, имеют максимальные значения для соответствующих октантов. Эти деформации называются главными сдвигами. Они определяются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \\ \gamma_2 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \\ \gamma_3 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \end{aligned} \right\}$$

Поскольку $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, то главный сдвиг γ_3 будет наибольшим из всех возможных. Деформация объектов заключается в изменении их объема и размеров (дилатация) и в искажении формы (дисторсия). Относительное изменение объема объекта определяется суммой главных значений деформации

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Изменение формы объекта обусловлено разностью главных значений деформации, т. е. разностью величин главных сдвигов. Чем она больше, тем сильнее изменится форма объекта. При равенстве главных значений деформации главные сдвиги будут равны нулю, т. е. в

этом случае форма объекта изменяться не будет, а будет происходить только изменение относительного объема объекта. Когда $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, то обобщенной характеристикой изменения формы объекта является интенсивность сдвиговых (касательных) деформаций

$$E = 2[1/2 ((\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2)]^{1/2},$$

при этом $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$.

2.3. Связь между напряжением и деформацией.

Закон Гука

Внешние усилия вызывают в объекте внутренние напряжения, под действием которых происходит его деформация. Следовательно, между напряжением и деформацией существует зависимость. На вид этой зависимости оказывает влияние много факторов: материал, из которого сделан объект; величина внешних усилий; режим нагружения; температура объекта и другие. Установить зависимость между напряжением и деформацией с учетом этих факторов не представляется возможным.

Рассмотрим зависимость между напряжением и деформацией, исходя из гипотез об упругой реакции материала объекта и его изотропности.

Экспериментально установлено, что для упругого объекта напряжение и деформация связаны между собой прямо пропорциональной зависимостью. Эта зависимость получила название закона Гука, согласно которому компоненты тензора напряжения (2.1) линейно связаны с компонентами тензора чистой деформации (2.3):

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = a_{11}\varepsilon_{xx} + a_{12}\varepsilon_{yy} + a_{13}\varepsilon_{zz} + a_{14}\varepsilon_{xy} + a_{15}\varepsilon_{xz} + a_{16}\varepsilon_{yz}, \\ \sigma_{yy} = a_{21}\varepsilon_{xx} + a_{22}\varepsilon_{yy} + a_{23}\varepsilon_{zz} + a_{24}\varepsilon_{xy} + a_{25}\varepsilon_{xz} + a_{26}\varepsilon_{yz}, \\ \sigma_{zz} = a_{31}\varepsilon_{xx} + a_{32}\varepsilon_{yy} + a_{33}\varepsilon_{zz} + a_{34}\varepsilon_{xy} + a_{35}\varepsilon_{xz} + a_{36}\varepsilon_{yz}, \\ \tau_{xy} = a_{41}\varepsilon_{xx} + a_{42}\varepsilon_{yy} + a_{43}\varepsilon_{zz} + a_{44}\varepsilon_{xy} + a_{45}\varepsilon_{xz} + a_{46}\varepsilon_{yz}, \\ \tau_{xz} = a_{51}\varepsilon_{xx} + a_{52}\varepsilon_{yy} + a_{53}\varepsilon_{zz} + a_{54}\varepsilon_{xy} + a_{55}\varepsilon_{xz} + a_{56}\varepsilon_{yz}, \\ \tau_{yz} = a_{61}\varepsilon_{xx} + a_{62}\varepsilon_{yy} + a_{63}\varepsilon_{zz} + a_{64}\varepsilon_{xy} + a_{65}\varepsilon_{xz} + a_{66}\varepsilon_{yz}, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $a_{11}, a_{12} \dots a_{66}$ – модули упругости материала объекта, Н/м².

Формулами (2.4) описывается обобщенный закон Гука, 36 модулей упругости которого характеризуют свойства анизотропной среды. Свойства изотропной среды характеризуются только двумя модулями: $\lambda = a_{11} - 2a_{44}$ и $\mu = a_{44}$, которые называются коэффициентами Ламе.

Независимо от свойств материала объекта связь между компонентами тензора напряжения и тензора чистой деформации выражается формулами Грина:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \partial V / \varepsilon_{xx}, \sigma_{yy} = \partial V / \varepsilon_{yy}, \sigma_{zz} = \partial V / \varepsilon_{zz}, \\ \tau_{xy} = \partial V / \varepsilon_{xy}, \tau_{yz} = \partial V / \varepsilon_{yz}, \tau_{xz} = \partial V / \varepsilon_{xz}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где V – упругий потенциал, который для изотропной среды равен

$$2V = \lambda \theta^2 + 2\mu(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \mu(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2). \quad (2.6)$$

Подставляя в формулы Грина (2.5) выражение упругого потенциала (2.6), получим выражение компонентов тензора напряжения, или закон Гука в изотропной среде

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}, \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy}, \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\ \tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \tau_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}, \tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Совместим оси декартовой системы координат с главными осями напряжения. Тогда $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Следовательно, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Отсюда можно сделать вывод, что в изотропном объекте главные оси напряжения совпадают с главными осями деформации. И, наоборот, если главные оси напряжения совпадают с главными осями деформации, то материал объекта является изотропным.

Теперь закон Гука будет иметь следующий вид:

$$\sigma_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3.$$

2.4. Модули упругости изотропного объекта

Растянем стержень силой F вдоль оси x (рис. 2.1). В этом случае его напряжённое состояние, отвечающее равновесию стержня, будет характеризоваться следующим образом: $\sigma_{xx} \neq 0$, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

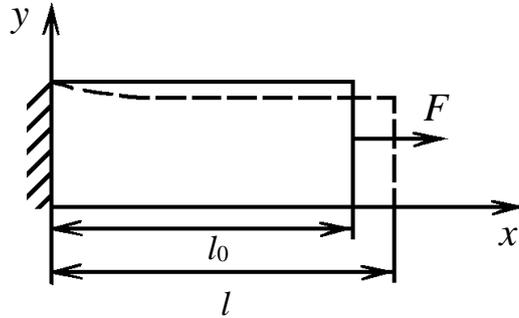


Рис. 2.1

Закон Гука (2.7) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu \varepsilon_{xx}, & 0 = \lambda\theta + 2\mu \varepsilon_{yy}, \\ 0 = \lambda\theta + 2\mu \varepsilon_{zz}, & 0 = 2\mu \varepsilon_{xy}, \\ 0 = 2\mu \varepsilon_{xz}, & 0 = 2\mu \varepsilon_{yz}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Сложим первые три выражения. Получим

$$\sigma_{xx} = (3\lambda + 2\mu)\theta \quad \text{или} \quad \theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{xx}.$$

Подставим θ в первую формулу закона Гука. Получим

$$\sigma_{xx} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{xx} + 2\mu \varepsilon_{xx}$$

или

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \varepsilon_{xx}. \quad (2.9)$$

Коэффициент пропорциональности между напряжением и деформаций в (2.9)

$$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

называется модулем деформации, или модулем Юнга E . Это один из модулей упругости. Определим его физический смысл. Найдём отношение

$$\sigma_{xx}/\varepsilon_{xx} = E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)};$$

$$\sigma_{xx}/E = \varepsilon_{xx} = (l - l_0)/l_0.$$

Положим $E = \sigma_{xx}$. Тогда $l = 2l_0$. Таким образом, модуль Юнга численно равен напряжению, при котором первоначальная длина объекта при растяжении увеличивается вдвое.

Из второй и третьей формул (2.8) следует

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu}\theta = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx}$$

или, учитывая выражение (2.9), получим

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) описывает закон Пуассона о поперечном сжатии объекта (на это указывает знак «-») при его продольном растяжении. Коэффициент

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.11)$$

называется коэффициентом Пуассона. Из (2.11) следует, что коэффициент Пуассона представляет безразмерную величину, равную отношению относительного поперечного сжатия тела к относительному продольному растяжению. Коэффициент Пуассона – это ещё один модуль упругости.

Коэффициенты Ламе и модули упругости E и ν связаны между собой следующими соотношениями:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.12)$$

Поскольку упругий потенциал всегда положительный, то из (2.6) следует, что коэффициенты Ламе тоже положительные. Следовательно, из (2.12) видно, что $E > 0$, $\nu \leq 1/2$.

Решим уравнения (2.7) относительно ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{zz} , учтя выражения коэффициентов Ламе через модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Тогда получим ещё одно выражение закона Гука

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = 1/E [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ \varepsilon_{yy} = 1/E [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \\ \varepsilon_{zz} = 1/E [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{cases}$$

или, совмещая оси декартовой системы координат с главными направлениями, получим

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1/E [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = 1/E [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 = 1/E [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases}$$

2.5. Плоское напряженное состояние

Частным случаем напряжённого состояния, рассмотренного в п. 2.1, является плоское напряжённое состояние. Рассмотрим тонкую пластину, которая нагружена силами, приложенными к её границе и действующими параллельно её плоскости. Пусть силы равномерно распределены по толщине пластины (рис. 2.2). В этом случае компоненты тензора напряжения σ_{zz} , τ_{xz} и τ_{yz} на обеих плоскостях пластины будут равны нулю, как и внутри пластины. Тензор напряжения будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \delta_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \delta_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

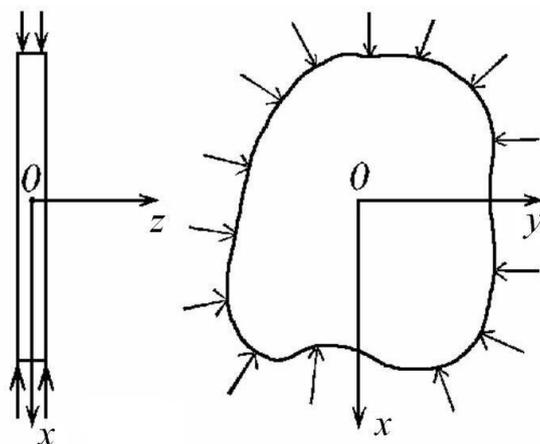


Рис. 2.2

Такое напряженное состояние называют плоским, при котором компоненты напряжения являются функциями только x и y . Оно характерно не только для тонких пластин, но и для объектов очень сильно вытянутых вдоль оси z , если объект нагружен силами, перпендикулярными к его продольной оси и не меняющимся вдоль неё. Примерами таких объектов являются трубопроводы, подпорные стенки, туннели, трубы цилиндрической формы, находящиеся под действием внешнего и внутреннего давления и т. д. Деформация тонких пластин и вытянутых объектов называется плоской.

Компоненты тензора (2.13) характеризуют напряжение на границах пластины, параллельных и перпендикулярных осям прямоугольной системы координат. Зная эти компоненты в любой точке пластины, можно найти напряжения на грани, произвольно ориентированной по отношению к осям x и y и проходящей через эту точку. Построим в

точке A малый плоский элемент треугольной формы (рис. 2.3), на границах которого действуют напряжения σ_{xx} , σ_{yy} и τ_{xy} . Тогда компоненты напряжения, действующие на грани BC , будут равны

$$\begin{cases} \delta_n \cos(\alpha) = \delta_{nx} = \delta_{xx} \cos(\alpha) + \tau_{xy} \sin(\alpha), \\ \delta_n \sin(\alpha) = \delta_{ny} = \delta_{yy} \sin(\alpha) + \tau_{xy} \cos(\alpha). \end{cases}$$

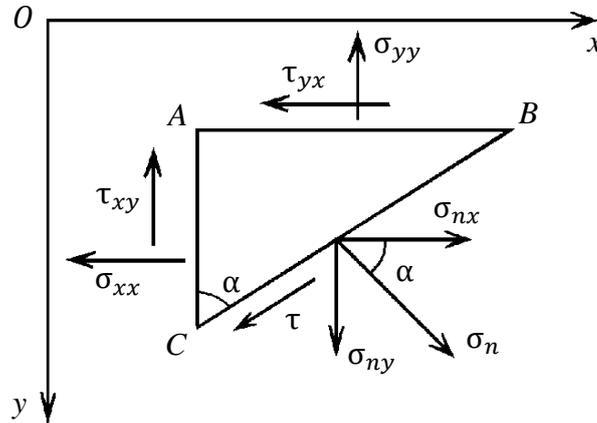


Рис. 2.3

Заменим $\cos(\alpha)$ на $\cos \alpha$, а $\sin(\alpha)$ на $\sin \alpha$ и вычислим нормальное и касательное напряжения на грани BC

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{nx} \cos \alpha + \delta_{ny} \sin \alpha = \\ &= \delta_{xx} \cos^2 \alpha + \delta_{yy} \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cdot \sin \alpha, \\ \tau &= \sigma_{ny} \cos \alpha + \delta_{nx} \sin \alpha = \\ &= \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos \alpha \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Совместим оси координат x и y с главными направлениями. $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_{xx} = \sigma_1$, $\sigma_{yy} = \sigma_2$ и формулы (2.14) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_n = \delta_1 \cos^2 \alpha + \delta_2 \sin^2 \alpha, \\ \tau = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (2.15)$$

Формулы (2.15) позволяют определить напряжения на произвольно ориентированной грани (в зависимости от угла α) через главные напряжения. Ту же задачу можно решить графически с помощью диаграммы, или круга Мора. Этот круг изображён на рис. 2.4. Его центр расположен в системе прямоугольных координат σ_n, τ в точке с координатами $(\sigma_1 + \sigma_2)/2, 0$, а радиус круга равен $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Покажем, что напряжения на любой грани BC , наклонённой под углом α , равны координатам точки, лежащей на окружности. Отло-

жим от точки M по часовой стрелке дугу, равную 2α . Получим точку N , координаты которой равны

$$OK = (\delta_1 + \delta_2)/2 + \cos 2\alpha (\delta_1 - \delta_2)/2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$

$$KN = 1/2 (\delta_1 - \delta_2) \sin 2\alpha.$$

Из сопоставления этих формул с формулами (2.15) следует, что координатами точки N действительно являются нормальное и касательное напряжения, действующие на грани BC .

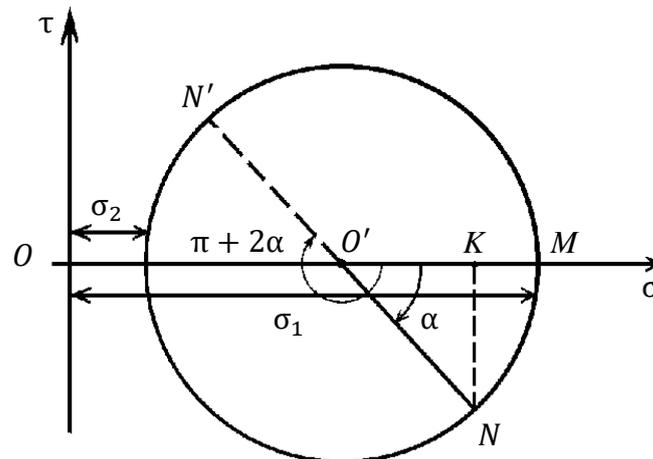


Рис. 2.4

Нижняя часть круга Мора характеризует напряжения при изменении угла α от 0 до $\pi/2$, верхняя – от $\pi/2$ до π . Вопрос о положительном и отрицательном направлениях τ решается на договорных началах. Напряжение τ считается положительным, если его момент направлен по часовой стрелке.

Продолжим радиальный отрезок $O'N$ до пересечения его с окружностью. Получим точку N' . Угол, соответствующий этой точке, равен $\pi + 2\alpha$, а напряжения численно равны её координатам. Эти напряжения будут действовать на грани, перпендикулярной грани BC , т. е. на двух взаимно перпендикулярных гранях касательные напряжения равны (см. рис. 2.3).

Из второй формулы (2.15) следует, что наибольшее касательное напряжение будет при угле $\alpha = \pi/4$. Оно численно равно радиусу круга Мора $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ и действует на грани, нормаль к которой представляет биссектрису угла, образованного главными осями напряжения. Напряжение τ_{\max} называют главным касательным напряжением.

Круг Мора можно использовать и для нахождения главных напряжений и ориентировок главных направлений, если известны напряжения σ_{xx} , σ_{yy} и τ_{xy} . Для этого необходимо в системе координат σ_n, τ построить две точки с координатами σ_{xx} , σ_{yy} и τ_{xy} (рис. 2.5). Отрезок $L'L$ является диаметром круга. Пересечение круга с осью σ_n даст две точки с абсциссами, равными σ_1, σ_2 :

$$\begin{cases} \sigma_1 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 + [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/4 + \tau_{xy}^2]^{1/2}, \\ \sigma_2 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 - [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/4 + \tau_{xy}^2]^{1/2}. \end{cases}$$

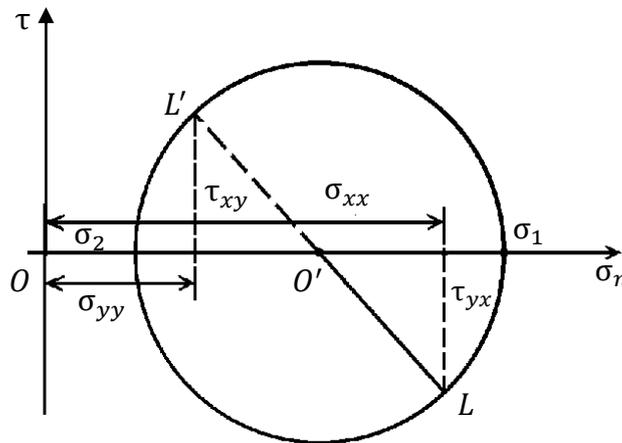


Рис. 2.5

Максимальное касательное напряжение теперь будет вычисляться по формуле

$$\tau_{\max} = [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/4 + \tau_{xy}^2]^{1/2}.$$

Главные напряжения можно получить также из решения квадратного уравнения, которое для плоского напряжённого состояния будет иметь следующий вид:

$$\sigma_n^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma_n + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим искомые главные значения напряжения

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 \pm [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/4 + \tau_{xy}^2]^{1/2}.$$

Главные направления определяются из формулы $1/2 \operatorname{tg} 2\alpha = \tau_{xy}/(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$.

Контрольные вопросы

1. Что такое тензор напряжения?
2. Какими свойствами обладает тензор напряжения?
3. Что представляют собой главные значения и главные напряжения тензора напряжения?
4. Какие тензоры напряжения называют девиаторным и шаровым?
5. Что такое смещение?
6. Что такое тензор упругой деформации?
7. Что такое главные значения и главные направления деформации?
8. Какими свойствами обладает тензор чистой деформации?
9. Что такое дилатация?
10. Что такое обобщённый закон Гука?
11. Как выглядит закон Гука для изотропного объекта?
12. Какими модулями упругости характеризуется изотропный объект?
13. Какое напряжённое состояние называют плоским?
14. Что такое круг Мора?

Глава 3. ОСНОВЫ РАСЧЁТА ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК И ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

3.1. Общие сведения об оболочках

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина δ) мало по сравнению с другими размерами тела. В настоящей главе рассматриваются наиболее часто применяемые в машиностроении оболочки постоянной толщины, широко используемые в различных отраслях техники. Цистерны, резервуары, газовые баллоны обычно представляют собой оболочки вращения цилиндрической, шаровой, конической и других форм. Как оболочки рассматриваются строительные конструкции – перекрытия и купола различных очертаний со значительными пролетами, элементы конструкций летательных аппаратов и различных судов, аппараты химического производства и т. д.

Срединной поверхностью оболочки называется геометрическое место точек, равноудаленных от ее наружной и внутренней поверхностей. Считается, что кромка незамкнутой оболочки образована поверхностью, нормальной к срединной поверхности.

Условно в зависимости от отношения толщины δ оболочки к радиусам кривизны ρ ее срединной поверхности различают два класса оболочек: толстые, у которых $\frac{\delta}{\rho} > \frac{1}{20}$, и тонкие, у которых $\frac{\delta}{\rho} \leq \frac{1}{20}$.

Большая часть оболочек, применяемых в машиностроении, относится к тонким оболочкам. Теория расчета таких оболочек основана на использовании достаточно сложного математического аппарата. При расчете тонкостенных оболочек для упрощения решения задачи принимают ряд допущений. Наиболее просто данная задача решается в рамках безмоментной теории оболочек, согласно которой из шести внутренних усилий в сечениях элемента оболочки отлична от нуля лишь нормальная к сечению сила, а все моменты и поперечные силы равны нулю. Полагают также, что нормальные напряжения по толщине стенки распределяются равномерно [9]. Безмоментная теория оболочек применима при следующих условиях:

а) оболочка не имеет мест с резким изменением формы (резких переходов);

б) отсутствуют жесткие защемления оболочки; свободный край оболочки закреплен так, что на него могут действовать только усилия, касательные к меридиональным кривым;

в) оболочка не нагружена сосредоточенными силами и моментами;

г) толщина оболочки является малой $\delta \leq 0,1\rho_{\min}$, где ρ_{\min} – минимальный радиус кривизны срединной поверхности оболочки. Чем меньше толщина оболочки, тем ближе к действительности предполагаемый закон постоянства напряжений по толщине стенки и тем более точные результаты дает безмоментная теория.

В зонах резкого изменения формы и жестких защемлений в стенке оболочки возникают изгибающие моменты и допущение о равномерности распределения напряжений по толщине является неприемлемым. Однако по мере удаления от указанных зон влияние изгиба быстро уменьшается. Поэтому безмоментная теория может быть использована для расчета участков, достаточно удаленных от указанных зон [13].

3.2. Основные уравнения безмоментной теории оболочек

Рассмотрим осесимметричную оболочку толщиной δ . Срединная поверхность оболочки представляет собой поверхность двойкой кривизны (рис. 3.1). Обозначим через ρ_m радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности, а через ρ_t – радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного дуге меридиана. Радиус ρ_t равен отрезку нормали к поверхности, заключенному между срединной поверхностью и осью симметрии OO . Радиусы ρ_m и ρ_t являются в общем случае функцией угла θ – угла между нормалью и осью симметрии. Радиусы кривизны ρ_m и ρ_t в какой-либо точке K оболочки совпадают по направлению, так как оба радиуса направлены по нормали к касательной плоскости $I-I$ в этой точке. Центр кривизны O_1 меридиональной кривой может лежать как внутри очертания оболочки, так и вне оболочки в зависимости от того, выпуклая она или вогнутая, и в зависимости от величины радиуса кривизны ρ_m , а центр кривизны нормального сечения O_2 лежит на оси симметрии.

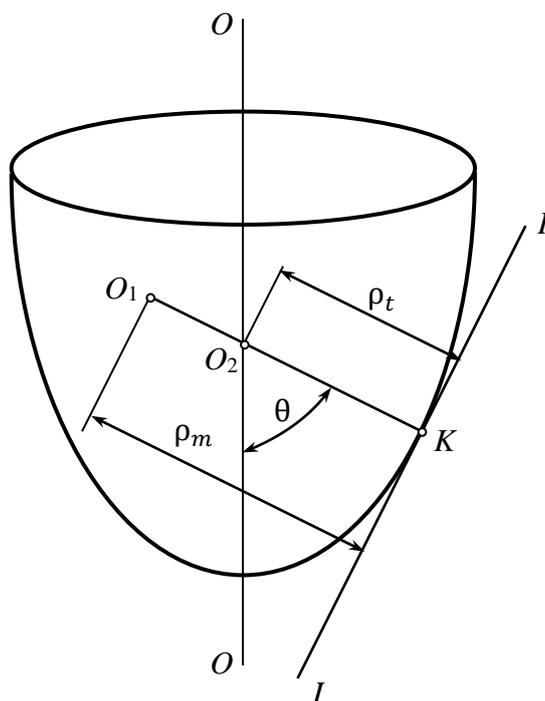


Рис. 3.1

Геометрическое место радиусов ρ_t представляет собой коническую поверхность с вершиной O_2 , расположенной на оси OO . Свободный край оболочки закреплен так, что на неё действуют только усилия, касательные к меридиональным кривым.

Определим напряжения в осесимметричной оболочке по безмоментной теории [9, 13]. Оболочка находится под действием внутреннего давления (жидкости или газа), нормального к стенкам оболочки и обладающего осевой симметрией. Свободный край оболочки закреплен так, что на неё действуют только усилия, касательные к меридиональным кривым.

Двумя парами меридиональных и нормальных конических сечений (рис. 3.2) вырежем из оболочки малый элемент и рассмотрим его равновесие. Со стороны отброшенной части оболочки на грани элемента действуют меридиональное σ_m и окружное σ_t напряжения (рис. 3.3). В соответствии с безмоментной теорией считаем, что напряжения σ_m и σ_t по площади граней элемента распределены равномерно. Кроме того, все размеры оболочки будем относить к её средней поверхности.

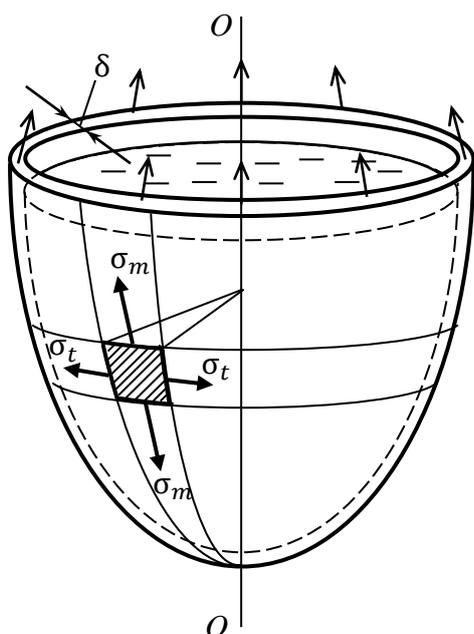


Рис. 3.2

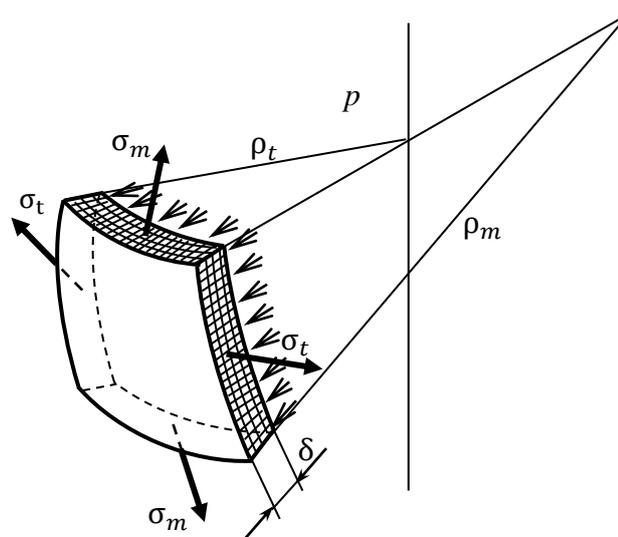


Рис. 3.3

Для определения двух неизвестных напряжений необходимо иметь два уравнения. Первое уравнение получим из условия равновесия вырезанного элемента. Составим уравнение равновесия элемента в виде суммы проекций всех сил, действующих на элемент, на нормаль n к оболочке, проведенную в центре элемента. Так как по четырем граням, которыми выделен элемент, в силу симметрии оболочки и нагрузки относительно оси вращения касательные напряжения от-

сутствуют, то эти грани представляют собой главные площадки, а нормальные напряжения – меридиональное σ_m и окружное σ_t – являются главными напряжениями.

По граням элемента действуют силы от напряжений σ_m и σ_t , умноженных на площади соответствующих граней элемента. На внутреннюю поверхность выделенного элемента действует давление p . Равнодействующая сил нормального давления равна произведению давления p на площадь внутренней поверхности элемента. Спроектируем все указанные силы на нормаль к срединной поверхности элемента (рис. 3.4)

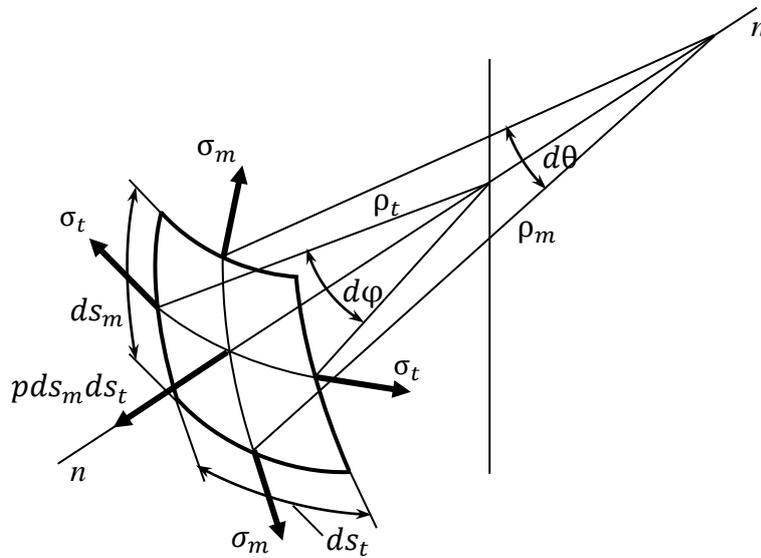


Рис. 3.4

$$2\sigma_m \delta ds_m \sin \frac{d\theta}{2} + 2\sigma_t \delta ds_t \sin \frac{d\varphi}{2} - p ds_m ds_t = 0. \quad (3.1)$$

Ввиду малости углов примем $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$; $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$.

Также учтем соотношения $d\varphi = \frac{ds_t}{\rho_t}$, $d\theta = \frac{ds_m}{\rho_m}$.

После деления всех слагаемых на произведение $\delta ds_1 ds_2$ из уравнения (3.1) получим

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}. \quad (3.2)$$

Соотношение (3.2) называется уравнением Лапласа [9].

При выводе формулы Лапласа внутреннее давление p считалось положительным. Наружное давление p_n следует подставлять в формулу (3.2) со знаком минус. Радиусы кривизны ρ_m и ρ_t считаются положительными для выпуклой оболочки и отрицательными для вогнутой. В этом случае положительное напряжение соответствует растяжению, а отрицательное – сжатию.

В уравнение Лапласа входят две неизвестные – меридиональное σ_m и окружное σ_t напряжения. Для определения σ_m составим уравнение равновесия для отсеченной части оболочки, которую получим, отсекая от оболочки ее часть коническим нормальным сечением на расстоянии h от верхнего края (рис. 3.5). На отсеченную нижнюю часть оболочки действуют сила от напряжения σ_m , умноженного на площадь окружного сечения $2\pi r_t \delta$, сила давления жидкости $p\pi r^2$, а также сила Q – сила тяжести отсеченной части сосуда и жидкости, находящихся ниже рассматриваемого окружного сечения.

Давление p в жидкости по закону Паскаля одинаковое во всех направлениях и равно γh , где h – глубина рассматриваемого сечения, а γ – вес единицы объема жидкости.

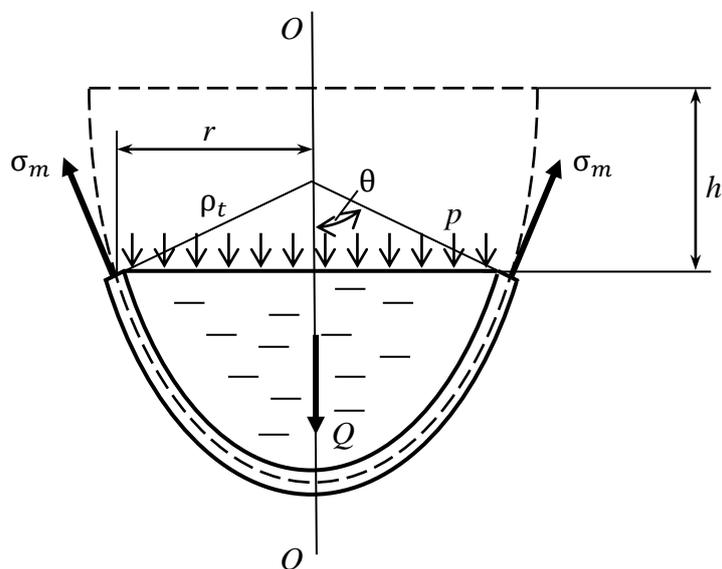


Рис. 3.5

Составляя сумму проекций всех сил, действующих на отсеченную часть, на ось симметрии OO и приравнивая ее нулю, находим

$$\sigma_m 2\pi r \delta \sin\theta - p\pi r^2 - Q = 0. \quad (3.3)$$

Отсюда

$$\sigma_m = \frac{pr}{2\delta \sin\theta} + \frac{Q}{2\pi r\delta \sin\theta}. \quad (3.4)$$

Зная уравнение меридиональной кривой, можно найти θ , r и p для каждого значения h и по выражению (3.4) найти σ_m , а затем из уравнения Лапласа определить σ_t в каждой точке стенки оболочки. Поскольку оболочка тонкая, то вместо радиусов ρ_t , ρ_m и r срединной поверхности оболочки в расчетные формулы можно подставлять соответствующие радиусы наружной или внутренней поверхности оболочки.

Выше было отмечено, что напряжения σ_m и σ_t являются главными напряжениями. Третье главное напряжение возникает на грани элемента, совпадающей с внутренней или наружной поверхностью оболочки, направлено по нормали к ней и равно давлению p соответственно на той грани, на которую действует давление, на противоположной грани оно равно нулю. Как показывают расчеты, в тонкостенных оболочках напряжения σ_m и σ_t значительно больше p . Величиной третьего главного напряжения можно пренебречь по сравнению с σ_m и σ_t , т. е. считать его равным нулю. Таким образом полагаем, что материал оболочки находится в плоском напряженном состоянии. Расчет на прочность можно проводить по соответствующей теории прочности, например по III теории прочности (теории наибольших касательных напряжений) или по IV теории прочности (энергетической) [9].

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Сферическая оболочка (баллон) находится под действием равномерного внутреннего давления газа p (рис. 3.6). Собственным весом баллона и весом газа пренебрегаем.

Вследствие центральной симметрии оболочки и нагрузки полагаем $\rho_m = \rho_t = R$; $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$. Тогда из (3.2) найдем $\sigma = pR/2\delta$.

Главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{pR}{2\delta}$, $\sigma_3 = 0$. Условие прочности по третьей и четвертой теориям прочности приводится к виду

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{pR}{2\delta} \leq [\sigma].$$

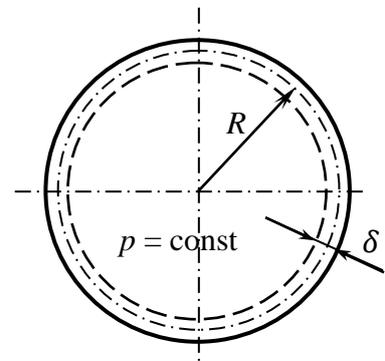


Рис. 3.6

2. Цилиндрический баллон заполнен газом, давление которого равно p (рис. 3.7, а).

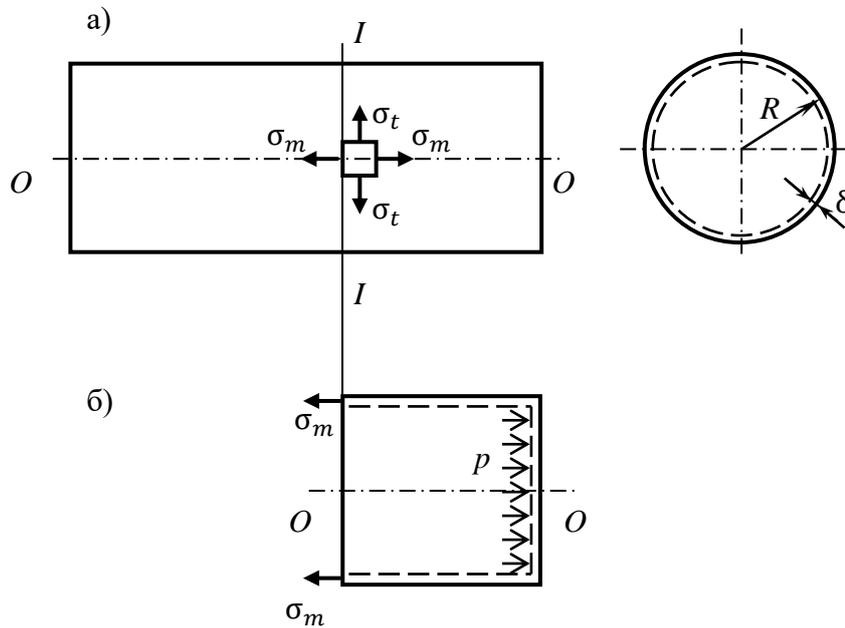


Рис. 3.7

В этом случае $\rho_t = R$; $\rho_m = \infty$. Из формулы (3.2) получим

$$\sigma_t = pR/\delta.$$

Для определения σ_m рассмотрим равновесие части цилиндра, отсеченной плоскостью $I-I$ (рис. 3.7, б). Составим уравнение проекций сил на ось OO

$$\sigma_m 2\pi R\delta - p\pi R^2 = 0.$$

Отсюда получим

$$\sigma_m = \frac{\pi R}{2\delta} p.$$

Окружные σ_t напряжения в два раза больше меридиональных σ_m . Это необходимо учитывать при изготовлении подобных баллонов, котлов и других изделий. Условие прочности по третьей теории

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 = \sigma_t \leq [\sigma].$$

3.3. Расчет толстостенных цилиндров

При расчете тонкостенных цилиндрических оболочек, подвергнутых внутреннему давлению, принималось, что напряжения равномерно распределены по толщине стенки. Это допущение мало влияет на точность расчета.

В цилиндрах, у которых толщина стенок не мала по сравнению с радиусом, подобное предположение приводит к большим погрешностям. Цилиндр принято называть толстостенным, если толщина его стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра. Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 , находящимся под действием внутреннего давления p_1 и наружного p_2 (рис. 3.8). В этом случае внешняя нагрузка является осесимметричной и вдоль оси цилиндра не изменяется. Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок напряжения и деформации также симметричны относительно оси цилиндра [9, 13].

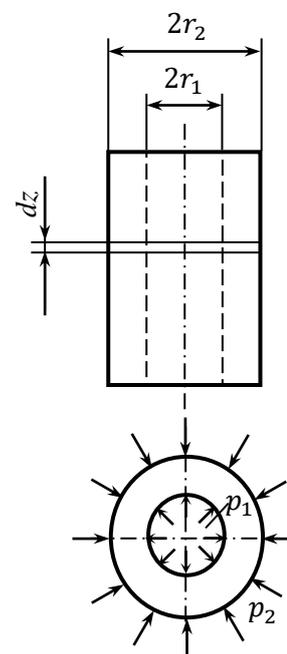


Рис. 3.8

Выделим из цилиндра малый элемент. Из узкого кольца материала радиусом r и толщиной dz внутри стенки цилиндра двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра и образующими между собой угол $d\theta$ (рис. 3.9, а), вырежем малый элемент в форме криволинейного шестигранника с размерами dr, dz и $rd\theta$. (рис. 3.9, б). Нормальные напряжения на цилиндрической поверхности элемента радиусом r обозначим σ_r , нормальные напряжения на цилиндрической поверхности радиусом $r + dr$ получают приращения $d\sigma_r$ и равны $\sigma_r + d\sigma_r$. Эти напряжения направлены по радиусу r и называются радиальными. По боковым плоским граням элемента, образованными осевыми сечениями, действуют нормальные напряжения σ_θ , называемые окружными.

Вследствие осевой симметрии цилиндра и действующей нагрузки элемент перекашиваться не будет, и касательные напряжения по его граням отсутствуют. Таким образом, нормальные напряжения σ_r и σ_θ являются главными напряжениями. По граням элемента, сов-

падающим с поперечными сечениями цилиндра, может возникнуть третье главное напряжение σ_z , вызванное нагружением цилиндра силами вдоль его оси или давлением на днище цилиндра. Это напряжение можно считать постоянным по всем точкам поперечного сечения цилиндра. На элемент действуют следующие усилия: на внутренней цилиндрической грани сила $\sigma_r r d\theta dz$, на внешней цилиндрической грани сила $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dz$; на каждой плоской боковой грани силы $\sigma_\theta dr dz$, эти две силы составляют между собой угол $d\theta$ (см. рис. 39, б).

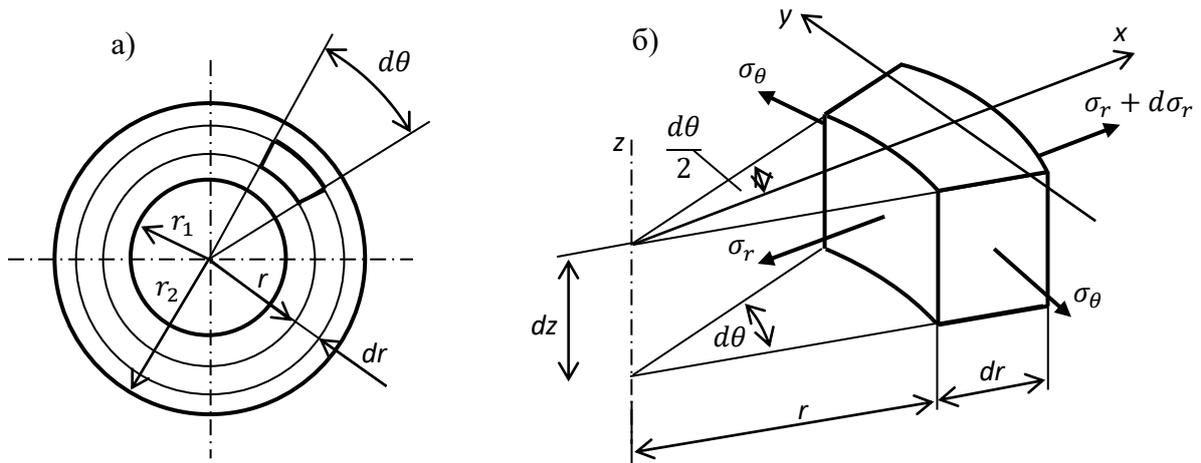


Рис. 3.9

Все указанные силы расположены в одной плоскости и их линии действия пересекаются в одной точке. Для равновесия такой системы сил необходимо выполнение уравнений равновесия на две взаимно перпендикулярные оси x и y (рис. 3.9, б). На рис. 3.10 показан вид на элемент сверху.

Составим уравнение равновесия $\sum X = 0$;

$$-\sigma_r r d\theta dz + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta dz - 2\sigma_\theta dr dz \sin \frac{d\theta}{2} = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение равновесия $\sum Y = 0$ вследствие симметрии элемента и нагрузки выполняется тождественно.

В уравнении (3.5) все слагаемые сокращаются на множитель dz . После раскрытия скобок взаимно уничтожаются члены $\pm\sigma_r r d\theta$. Угол $\frac{d\theta}{2}$ мал, поэтому принимаем $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$. Пренебрегаем членом высшего порядка малости $\sigma_r dr d\theta$ и делим оставшиеся слагаемые на произведение $dr d\theta$. После этих преобразований из (3.5) получим

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \quad (3.6)$$

Преобразование уравнения (3.5) и приведение его к виду (3.6) может служить примером составления математической модели. Применили упрощение полученного соотношения, отбросили несущественные факторы и привели уравнение к типовому виду. Надо иметь в виду, конечно, что и уравнение (3.5) получено на основе ранее принятых допущений и упрощений.

Уравнение (3.6) содержит два неизвестных напряжения. Задача статически неопределима. Поэтому необходимо рассмотреть перемещения и деформации элемента.

Деформация цилиндра симметрична относительно оси и заключается в радиальных перемещениях всех точек его поперечных сечений. Обозначим радиальное перемещение точек внутренней поверхности рассматриваемого элемента через u (рис. 3.11). Точки наружной поверхности переместятся по радиусу на величину $u + du$. Таким образом, толщина dr выделенного элемента увеличится на du , и относительное удлинение материала в радиальном направлении будет

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}.$$

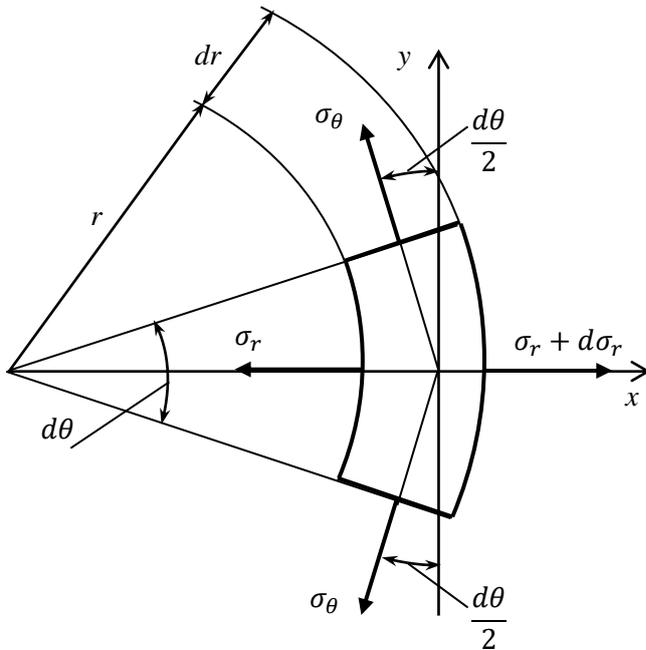


Рис. 3.10

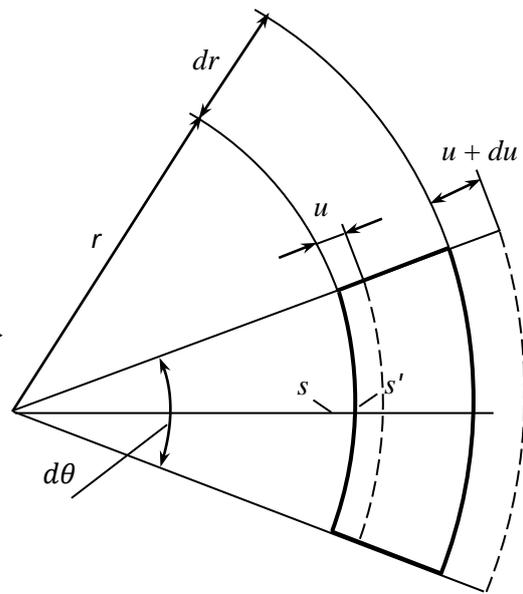


Рис. 3.11

В направлении напряжений σ_t относительное удлинение ε_t будет равно относительному удлинению дуги s , занявшей положение s' . Так как относительное удлинение дуги такое же, как относительное удлинение радиуса r , то $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$.

Для плоского напряженного состояния по закону Гука напряжения и деформации связаны между собой следующими зависимостями [9]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Учитывая выражения для относительных деформаций ε_r и ε_θ и подставляя их в (3.7), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Для определения перемещения u подставим выражения (3.8) в уравнение (3.5). Получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (уравнение Эйлера) [11]

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (3.9)$$

Общее решение уравнения (3.9) имеет вид

$$u = Ar + B \frac{1}{r}. \quad (3.10)$$

Подставляя решение (3.10) в формулы (3.7), получим выражения для определения напряжений в точках на расстоянии r от оси цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2} B \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2} B \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Постоянные интегрирования A и B найдем из граничных условий, а именно на внешней поверхности цилиндра ($r = r_2$) радиальные напряжения равны внешнему давлению $\sigma_r = -p_2$, а на внутренней ($r = r_1$) – внутреннему давлению $\sigma_r = -p_1$. Подставляя эти значения напряжения σ_r в формулы (3.11), найдем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2} B \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2} B \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Выражения для радиального перемещения u , напряжений σ_θ и σ_r с учетом значений постоянных интегрирования имеют вид (формулы Ламе):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}, \\ \sigma_r &= \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Как видно из этих формул сумма радиального и окружного напряжений – величина постоянная $\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}$ и не зависит от r . Относительная деформация вдоль оси цилиндра ε_z во всех точках сечения одинакова и поперечное сечение остается плоским

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const}.$$

Если цилиндр кроме внешнего и внутреннего давлений воспринимает и продольную нагрузку N (например, при наличии днищ), в его поперечных сечениях возникает напряжение вдоль оси z

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)},$$

а в первом выражении (3.13) для радиального перемещения u в этом случае надо учесть дополнительно слагаемое $\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r$. Напряжения σ_r и σ_θ при этом не изменяются.

Необходимо отметить, что полученные формулы для напряжений и перемещений справедливы для сечений, достаточно удаленных от днищ. Вблизи днищ цилиндра напряжения и деформации искажаются.

Расчет толстостенных цилиндров на прочность рассмотрим для некоторых частных случаев.

1. Цилиндр нагружен только внутренним давлением, наружного давления нет или оно мало и им можно пренебречь ($p_1 = p$, $p_2 = 0$). В этом случае формулы (3.13) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1 - \mu}{E} \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}, \\ \sigma_r &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) p, \\ \sigma_\theta &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) p. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Радиальные напряжения σ_r в этом случае всюду сжимающие, а окружные σ_θ – всюду растягивающие (т. е. $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_3 = \sigma_r$) и достигают наибольших значений на внутренней поверхности цилиндра ($r = r_1$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p, \\ \sigma_\theta &= \frac{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} p. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Радиальное перемещение внутренней поверхности цилиндра (увеличение внутреннего радиуса)

$$u = \frac{r_1}{E} \left(\frac{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} + \mu \right) p. \quad (3.16)$$

Напряжения и перемещения на наружной поверхности цилиндра при $r = r_2$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0, \\ \sigma_\theta &= \frac{2 \frac{r_1^2}{r_2^2}}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} p, \\ u &= \frac{r_2}{E} \frac{2 \frac{r_1^2}{r_2^2}}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} p. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Задаваясь соотношением $\frac{r_1}{r_2}$, по формулам (3.17) можно построить эпюры напряжений σ_r и σ_θ в зависимости от величины внутреннего напряжения p [9]. Запишем условие прочности по III теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Учитывая формулы (3.15), найдем

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{2p}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} \leq [\sigma].$$

Определим допускаемое внутреннее давление в цилиндре при безграничном увеличении толщины стенки, т. е. при $r_2 \rightarrow \infty$. В этом случае

$$\sigma_{\text{экв}} = 2p \leq [\sigma]. \text{ Отсюда } [p] \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Как видим, начиная с определенного внутреннего давления $[p]$, увеличение толщины стенки цилиндра перестает быть эффективным способом увеличения прочности. Дальнейшее увеличение прочности возможно либо за счет использования более прочных материалов (увеличение $[\sigma]$), либо за счет мероприятий, направленных на создание внешнего давления на наружной поверхности цилиндра (см. формулу (3.17)). Для этого можно, например, сделать цилиндр составным, при этом его внутренний слой необходимо запрессовать с натягом в наружный, за счет чего и создается внешнее давление на поверхности внутреннего слоя.

2. Цилиндр нагружен только внешним давлением: $p_1 = 0$; $p_2 = p$. В этом случае формулы (3.13) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1-\mu}{E} \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}, \\ \sigma_r &= -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) p, \\ \sigma_\theta &= -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) p. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

В этом случае оба напряжения сжимающие. Окружное напряжение по абсолютной величине больше радиального $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$. Радиальное перемещение отрицательное, т. е. направлено к оси цилиндра, при этом радиусы r_1 и r_2 уменьшаются. По формулам (3.18) можно найти напряжения и перемещения на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Наибольших значений по абсолютной величине напряжения достигают на внутренней поверхности цилиндра. Как и в случае внутреннего давления, наиболее опасной точкой является точка на внутренней поверхности цилиндра. Эпюры напряжений качественно имеют вид, показанный на рис. 3.12, эпюры σ_r и σ_θ при $p_1 \neq 0, p_2 = 0$ приведены на рис. 3.12, а; при $p_1 = 0, p_2 \neq 0$ – на рис. 3.12, б.

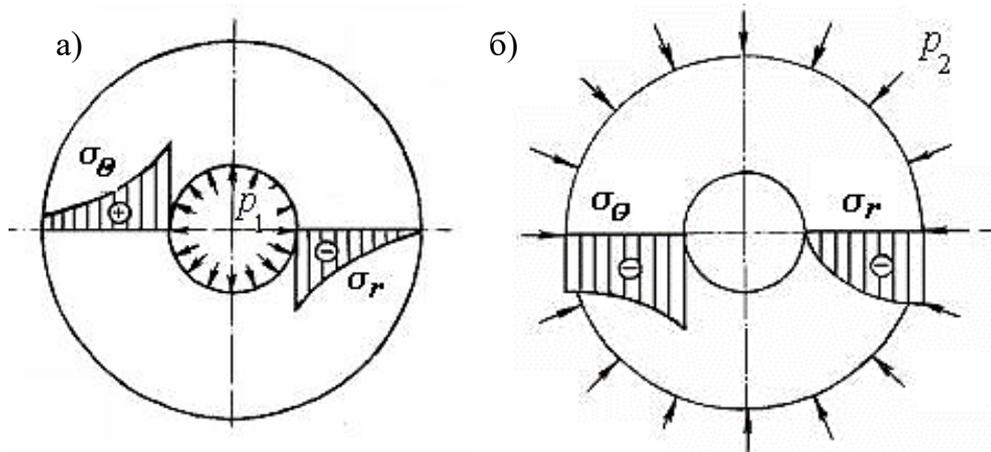


Рис. 3.12

Контрольные вопросы

1. Что такое оболочка?
2. Какими свойствами характеризуются оболочки?
3. Какую трубу называют толстостенной?
4. Каким уравнением описывается математическая модель напряжённо-деформированного состояния толстостенной трубы?
5. Как выглядят эпюры радиального и окружного напряжений?
6. Чему равна сумма радиального и окружного напряжений?
7. Для чего толстостенные цилиндры делают составными?
8. В каком случае осевое напряжение отлично от нуля?

Глава 4. РАСЧЁТ КОНСТРУКЦИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

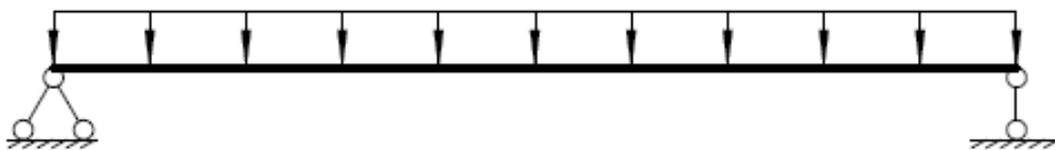
4.1. Общие сведения

Инженерные сооружения, в частности дорожное полотно, опираются на грунт. Грунтовое основание представляет собой специфический вид опор: опирание осуществляется не частью поверхности, много меньшей, чем вся поверхность сооружения, т. е. в точке (рис. 4.1: *a* – балка перекрытия; *b* – её расчетная схема), а всей нижней поверхностью сооружения (рис. 4.2).

Учитывая это, а также то, что грунтовое основание часто неоднородно, что его механические характеристики меняются в зависимости от увлажнения, и т. д., моделирование такого опирания является непростой задачей.

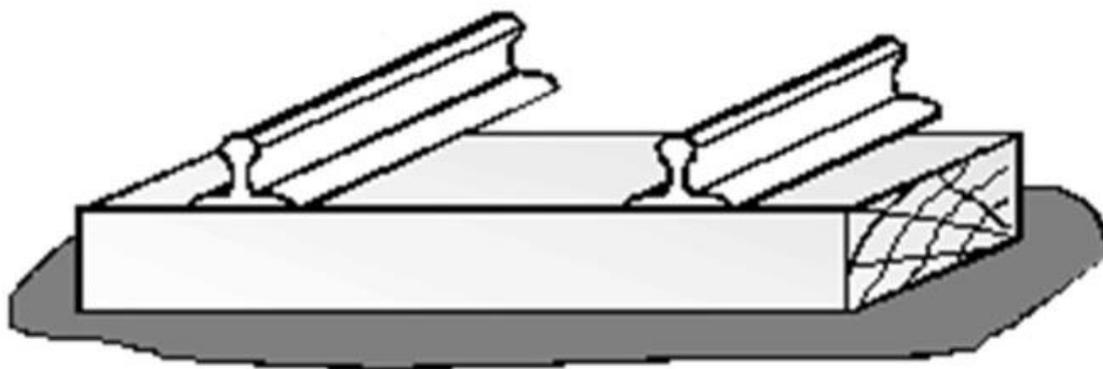


a)



б)

Puc. 4.1



Puc. 4.2

4.2. Виды моделей грунтового основания

Модели (расчетные схемы) грунтового основания различаются степенью точности, этапом расчета инженерного сооружения, на котором используется расчетная схема грунтового основания.

Рассмотрим основные расчетные схемы грунтового основания.

Модель Винклера

Это простейшая расчетная схема. Она основывается на следующей гипотезе: в каждой точке балки (плиты), находящейся под нагрузкой, возникает отпор (реакция) основания r , прямо пропорциональный просадке (перемещению) балки (плиты) y

$$r = -ky, \quad (4.1)$$

где k – коэффициент, зависящий от упругого основания и размеров балки.

Такая расчетная схема может быть, например, у балки, опирающейся на колонны (рис. 4.3, а), на рис. 4.3, б приведена расчетная схема этой балки, а также у балки, находящейся на поверхности воды (рис. 4.4) (отсюда другое название модели Винклера: гидростатическая модель).

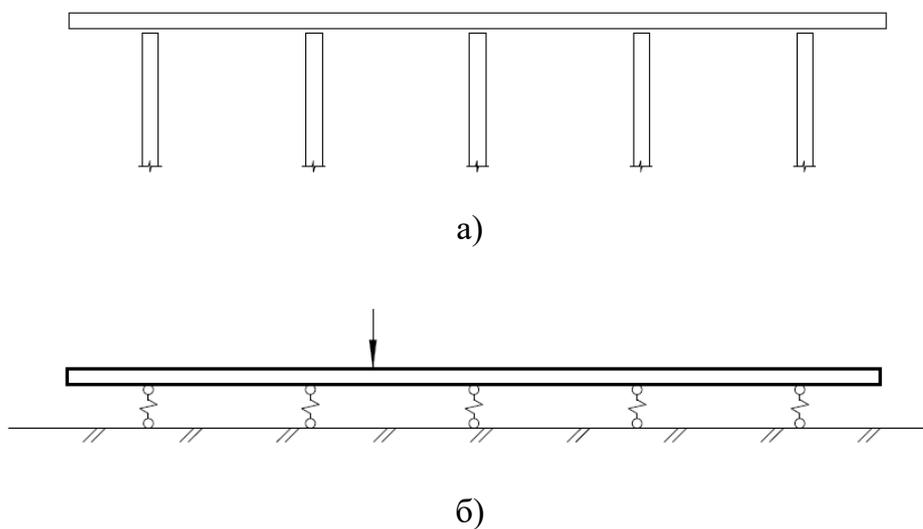


Рис. 4.3

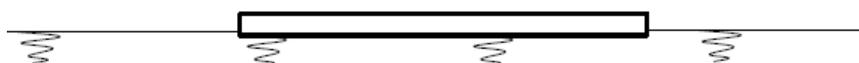


Рис. 4.4

Упругое основание в этой модели характеризуется коэффициентом k . Если в частном случае рассчитывается балка на упругом основании, $k = k_1 b$, где b – ширина балки; k_1 – коэффициент, зависящий от упругого основания (называется *коэффициентом жесткости основания*, или *коэффициентом постели*).

Коэффициент жесткости основания k_1 можно определить как сопротивление единицы площади основания при вдавливании его на единицу длины (измеряется в Н/м³, кГ/см³).

Для грунтов эти характеристики определяются экспериментально (в грунт вдавливаются штамп). В табл. 4.1 приведены значения коэффициентов жесткости некоторых оснований [4].

Таблица 4.1

№ п/п	Грунты	Коэффициент жесткости основания k_1 , кГ/см ³
1	Грунты средней плотности (слежавшийся песок, гравий, влажная глина)	0,5 – 5
2	Плотные грунты (плотно слежавшийся песок или гравий, щебень, глина малой влажности)	5 – 10
3	Весьма плотные грунты (песчано-глинистые, твердая глина)	10 – 20
4	Твердые грунты (известняк, песчаник, мерзлота)	10 – 20
5	Скалистые грунты	100 – 1500

Недостатки этой модели следующие:

– модель не отражает тот факт, что грунт оседает не только под конструкцией, но и около нее (рис. 4.5: а – реальная картина; б – картина по модели Винклера);

– модель не отражает ту особенность, что конструкция на грунте оседает не без деформации, а изгибаясь (см. рис. 4.5);

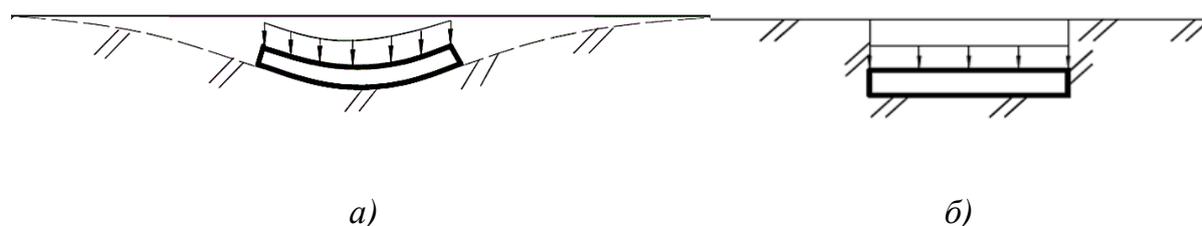


Рис. 4.5

- модель предполагает двустороннее сопротивление нагрузке (как нагрузке давления на грунт, так и нагрузке отрыва от грунта), реальное же основание не может удерживать балку (плиту) от отрыва;
- определяемые экспериментально величины коэффициентов жесткости оснований зависят от размеров штампов, используемых в испытаниях.

Модель основания с двумя упругими характеристиками

Это более точная, чем предыдущая, расчетная схема. Перемещения точек основания и реакция основания связаны следующим образом:

$$r = -k_1 y + k_2 y'', \quad (4.2)$$

где k_1 и k_2 – первая и вторая упругие характеристики соответственно, или коэффициенты постели (k_1 измеряется в Н/м³, кГ/см³; k_2 в Н/м, кГ/см).

Эта модель в отличие от предыдущей учитывает тот факт, что осадки основания могут иметь место не только под конструкцией, но и около нее.

Модель упругого полупространства

Эта модель базируется на следующем положении: прогиб в точке поверхности полупространства, моделирующего основание, от действия сосредоточенной единичной (вертикальной) силы с координатами x_F, z_F описывается формулой

$$y(x, z) = \frac{1}{\frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \sqrt{(x - x_F)^2 + (z - z_F)^2}},$$

где x, z – координаты точки поверхности упругого полупространства, в которой определяется прогиб; E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона упругого полупространства соответственно.

4.3. Расчет конструкций на упругом основании по модели Винклера

Рассмотрим балку на упругом основании. На рис. 4.6 показаны принятые положительными направления прогиба y , угла поворота сечения балки φ , изгибающего момента M , поперечной силы Q , система координат. Балка постоянного сечения шириной b с нагрузкой q .

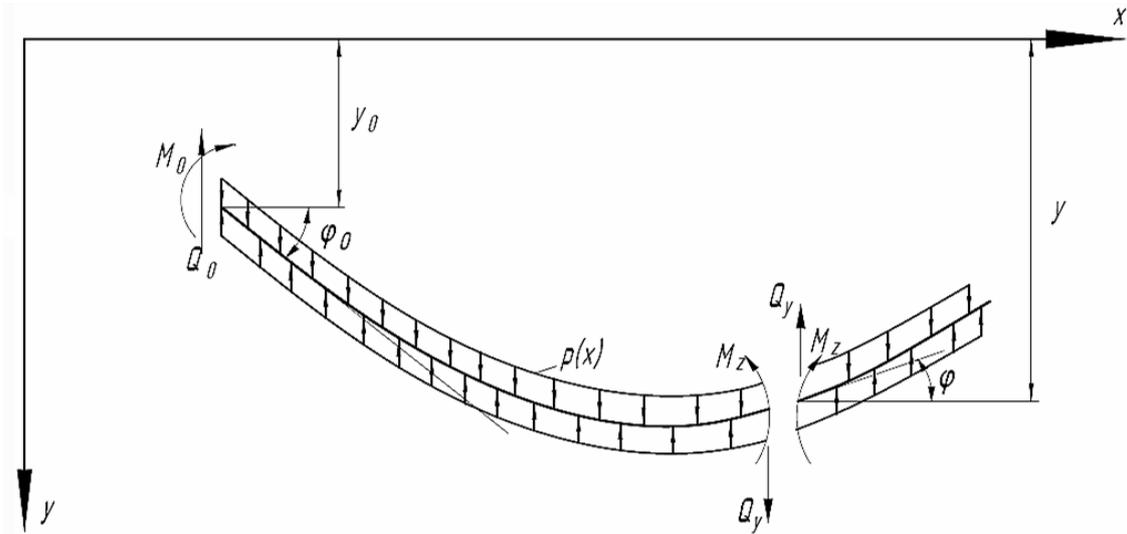


Рис. 4.6

Дифференциальное уравнение равновесия такой балки

$$EIy^{IV} = q + r, \quad (4.3)$$

а с учетом формулы (4.1)

$$EIy^{IV}(x) = q(x) - ky(x). \quad (4.4)$$

Примем $q = 0$ (т. е. рассмотрим ненагруженный участок балки). Тогда дифференциальное уравнение равновесия

$$EIy^{IV}(x) + ky(x) = 0. \quad (4.5)$$

Введем обозначения: $L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}}$ – характеристика жесткости системы «балка – основание», измеряется в метрах, сантиметрах; $\xi = \frac{x}{L}$ – приведенная абсцисса.

Решение дифференциального уравнения (4.5) с учетом введенных выше обозначений [7]:

$$y = y_0 A_x + L\varphi_0 B_x - \frac{L^2}{EI} M_0 C_x - \frac{L^3}{EI} Q_0 D_x, \quad (4.6)$$

где $A_x = A(\xi) = \cos \xi ch \xi$;

$B_x = B(\xi) = \frac{1}{2}(\sin \xi ch \xi + \cos \xi sh \xi)$;

$C_x = C(\xi) = \frac{1}{2} \sin \xi sh \xi$;

$D_x = D(\xi) = \frac{1}{4}(\sin \xi ch \xi - \cos \xi sh \xi)$,

y_0, φ_0, M_0, Q_0 – параметры, относящиеся к началу (левому концу) балки (см. рис. 4.6).

Используем выражения:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{1}{L}; \quad \frac{dA_x}{dx} = -\frac{4}{L} D_x; \quad \frac{dB_x}{dx} = \frac{1}{L} A_x; \quad \frac{dC_x}{dx} = \frac{1}{L} B_x; \\ \frac{dD_x}{dx} = \frac{1}{L} C_x.$$

Тогда, используя также известные дифференциальные зависимости, получим из (4.6) выражения для углов поворота поперечных сечений балки

$$\varphi(x) = y'(x) = \varphi_0 A_x - \frac{M_0}{EI} L B_x - \frac{Q_0}{EI} L^2 C_x - y_0 \frac{4}{L} D_x, \quad (4.7)$$

изгибающих моментов в поперечных сечениях балки

$$M(x) = -EI y''(x) = M_0 A_x + Q_0 L B_x - y_0 k L^2 C_x + \varphi_0 k L^3 D_x, \quad (4.8)$$

поперечных сил в поперечных сечениях балки

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = -EI y'''(x) = Q_0 A_x + y_0 k L B_x + \varphi_0 k L^2 C_x - M_0 \frac{4}{L} D_x \quad (4.9)$$

(при получении этих формул использовано также выражение для L).

При работе с формулами (4.6) – (4.9) пользуются таблицами значений функций A_x , B_x , C_x , D_x [10].

Проанализируем функции перемещений и внутренних усилий (4.6) – (4.9).

Эпюры, описываемые функциями (4.6) – (4.9), криволинейны (это обусловлено характером функций A_x , B_x , C_x , D_x):

- функция A_x описывает волнообразную кривую с неограниченно и быстро возрастающей амплитудой, пересекающуюся с осью x при $\xi = \frac{2n+1}{2} \pi$ ($n > 1, 2, 3, \dots$);

- функция B_x определяет кривую с аналогичными предыдущей свойствами;

- функция C_x характеризует кривую со свойствами, аналогичными свойствам кривой A_x , пересекающуюся с осью x при $\xi = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$);

- функция D_x определяет кривую со свойствами, аналогичными свойствам кривой B_x).

Если изменяется параметр L (т. е. изменяется модуль упругости балки E или осевой момент инерции сечения балки I или жесткость основания k), то изменяется переменная ξ функций A_x , B_x , C_x , D_x , а значит, и значения этих функций. При этом эпюры перемещений y , φ и внутренних усилий Q , M будут менять свой характер, а не только значения ординат.

Теперь получим решение дифференциального уравнения равновесия (4.3) балки при загрузении ее произвольной нагрузкой.

Для этого воспользуемся известным принципом независимости действия сил (принципом суперпозиции).

Если на участке балки нет нагрузки, решение описывается функциями (4.6) – (4.9). Если на балку действует сила F с координатой x_F , то на основе принципа суперпозиции вызванный ею прогиб можно добавить к прогибу (4.6); так же учитываются изменения угла поворота φ , изгибающего момента M и поперечной силы Q от действия силы F .

Эти добавки запишем, переместив начало координат в точку приложения силы F (т. е. абсцисса сечения, в котором определяются y, φ, M, Q , будет не x , а $(x - x_F)$). В сечении под силой F добавляются:

$$\Delta y_0 = 0, \quad \Delta \varphi_0 = 0, \quad \Delta M_0 = 0, \quad \Delta Q_0 = -F.$$

Если на балку действует момент M с координатой x_M , имеем добавки:

$$\Delta y_0 = 0, \quad \Delta \varphi_0 = 0, \quad \Delta M_0 = M, \quad \Delta Q_0 = 0.$$

Если на балку действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = q(x)$, ее можно заменить совокупностью сосредоточенных сил величиной $(q \cdot dx)$.

Итак, решение дифференциального уравнения равновесия при загрузении балки произвольной нагрузкой будет выглядеть следующим образом:

$$y_x = y_0 A_x + L \varphi_0 B_x - \frac{L^2}{EI} M_0 C_x - \frac{L^3}{EI} Q_0 D_x - \frac{L^2}{EI} \sum_{i=1}^m M_i C_{x-x_{Mi}} + \\ + \frac{L^3}{EI} \sum_{j=1}^n F_j D_{x-x_{Fj}} + \frac{L^3}{EI} \sum_{k=1}^s \int_{x_k}^x q_k D_{x-x_{qk}} dx; \quad (4.10)$$

$$\varphi_x = \varphi_0 A_x - \frac{L}{EI} M_0 B_x - \frac{L^2}{EI} Q_0 C_x - \frac{4}{L} y_0 D_x - \frac{L}{EI} \sum_{i=1}^m M_i B_{x-x_{Mi}} + \\ + \frac{L^2}{EI} \sum_{j=1}^n F_j C_{x-x_{Fj}} + \frac{L^2}{EI} \sum_{k=1}^s \int_{x_k}^x q_k C_{x-x_{qk}} dx; \quad (4.11)$$

$$M_x = M_0 A_x + L Q_0 B_x + k L^2 y_0 C_x + k L^3 \varphi_0 D_x + \sum_{i=1}^m M_i A_{x-x_{Mi}} - \\ - L \sum_{j=1}^n F_j B_{x-x_{Fj}} - L \sum_{k=1}^s \int_{x_k}^x q_k B_{x-x_{qk}} dx; \quad (4.12)$$

$$Q_x = Q_0 A_x + k L y_0 B_x + k L^2 \varphi_0 C_x - \frac{4}{L} M_0 D_x - \frac{4}{L} \sum_{i=1}^m M_i D_{x-x_{Mi}} - \\ - \sum_{j=1}^n F_j A_{x-x_{Fj}} - \sum_{k=1}^s \int_{x_k}^x q_k A_{x-x_{qk}} dx, \quad (4.13)$$

где m – число моментных нагрузок; n – число сосредоточенных сил; s – число участков распределенных нагрузок; $x_F \leq x$.

Параметры y_0, φ_0, M_0, Q_0 определяются условиями опирания балки. Опишем наиболее распространенные варианты опирания:

– балка шарнирно оперта по концам (рис. 4.7); тогда

$$\text{при } x = 0 \quad y_0 = 0, M_0 = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad y_l = 0, M_l = 0;$$

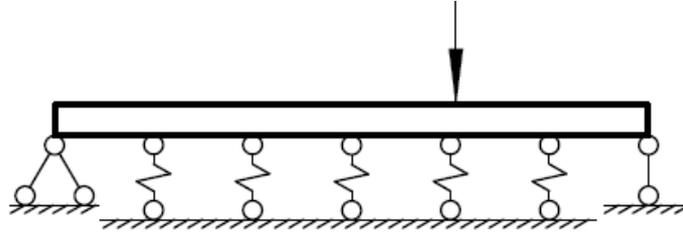


Рис. 4.7

– балка имеет свободные концы (рис. 4.8); тогда

$$\text{при } x = 0 \quad Q_0 = 0, M_0 = 0, \quad (4.14)$$

$$\text{при } x = l \quad Q_l = 0, M_l = 0. \quad (4.15)$$

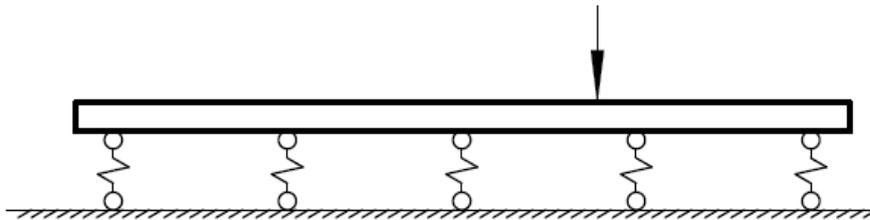


Рис. 4.8

Покажем, как вычислить остальные параметры (например, y_0 и φ_0 при опирании по рис. 4.8). Используем выражения (4.12) и (4.13), условия (4.14), (4.15):

$$\begin{cases} M_l = kL^2 y_0 C_l + kL^3 \varphi_0 D_l + [M_l] = 0, \\ Q_l = kL y_0 B_l + kL^2 \varphi_0 C_l + [Q_l] = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

где $[M_l]$ – краткая запись последних трех слагаемых выражения (4.12); $[Q_l]$ – краткая запись последних трех слагаемых выражения (4.13). Решение системы этих уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{kL^2} \frac{LD_l [Q_l] - C_l [M_l]}{C_l^2 - D_l B_l}, \\ \varphi_0 = \frac{1}{kL^3} \frac{B_l [M_l] - LC_l [Q_l]}{C_l^2 - B_l D_l}. \end{cases} \quad (4.17)$$

4.4. Пример расчета балки на упругом основании по модели Винклера

Рассмотрим железобетонную балку длиной 6 м прямоугольного сечения размерами $b \cdot h = 120 \text{ см} \cdot 40 \text{ см}$, упругое основание характеризуется коэффициентом жесткости $11,5 \text{ кг/см}^3$; нагрузка – сила 80 кН (рис. 4.9)¹.

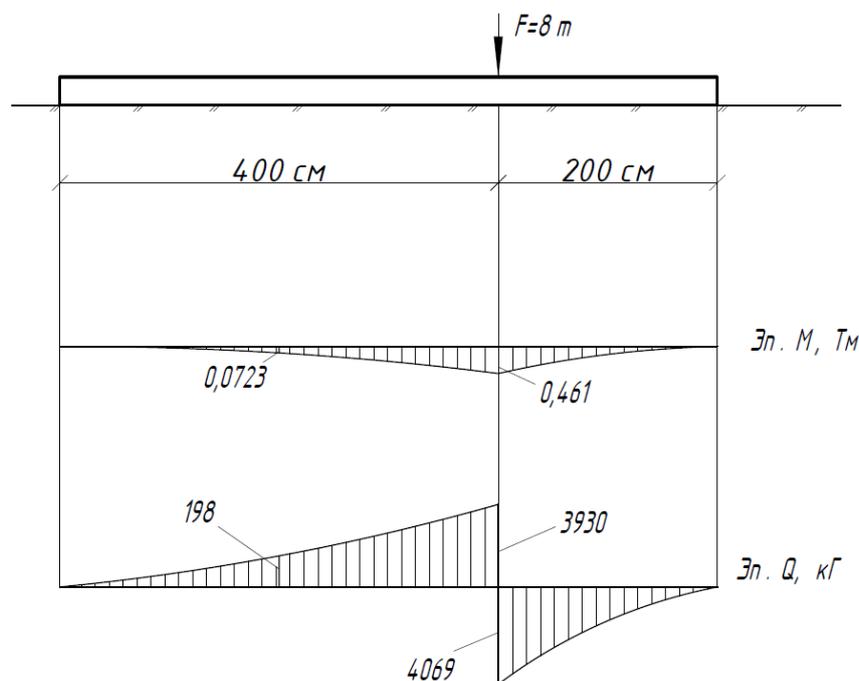


Рис. 4.9

Определим поперечные силы и изгибающие моменты.

Жесткость при изгибе

$$EI = E \frac{bh^3}{12} = 200000 \frac{120 \cdot 40^3}{12} = 128 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Параметр

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 128 \cdot 10^9}{1400}} = 138 \text{ см},$$

где $k = k_1 b = 11,5 \cdot 120 = 1400 \text{ кг/см}^2$.

При $x = 200 \text{ см}$ ($\xi = \frac{x}{L} = 1,446$)

$$A_x = A(\xi) = \cos \xi ch \xi = \cos 1,446 \frac{1}{2} (e^{1,446} + e^{-1,446}) = 2,234;$$

¹ Пример подготовлен студентами гр. С-213 К. Афанасьевой, Ю. Кречко, Е. Малковой.

$$\begin{aligned}
B_x = B(\xi) &= \frac{1}{2}(\sin \xi ch \xi + \cos \xi sh \xi) = \\
&= \frac{1}{2}(\sin 1,446 \frac{1}{2}(e^{1,446} + e^{-1,446}) + \\
&+ \cos 1,446 \frac{1}{2}(e^{1,446} - e^{-1,446})) = 0,2280; \\
C_x = C(\xi) &= \frac{1}{2} \sin \xi sh \xi = \frac{1}{2} \sin 1,446 \frac{1}{2}(e^{1,446} - e^{-1,446}) = 0,0253; \\
D_x = D(\xi) &= \frac{1}{4}(\sin \xi ch \xi - \cos \xi sh \xi) = \\
&= \frac{1}{4}(\sin 1,446 \frac{1}{2}(e^{1,446} + e^{-1,446}) - \\
&- \cos 1,446 \frac{1}{2}(e^{1,446} - e^{-1,446})) = -0,4871.
\end{aligned}$$

На основе формул (4.12), (4.13), (4.16)

$$[M_l] = -LFB_{x-400};$$

$$[Q_l] = -FA_{x-400}.$$

На основе формул (4.17)

$$kLy_0 = -\frac{D_l A_{x-400} - C_l B_{x-400}}{C_l^2 - D_l B_l} F; \quad kL^2 \varphi_0 = -\frac{B_l B_{x-400} - C_l A_{x-400}}{C_l^2 - D_l B_l} F.$$

Тогда

$$kLy_0 = -\frac{-8,8162 \cdot 2,234 - 1,4473 \cdot 0,2280}{1,4473^2 - (-8,8162)20,53} 8000 = 874,8 \text{ кг},$$

$$kL^2 \varphi_0 = -\frac{20,53 \cdot 0,2280 - 1,4473 \cdot 2,234}{1,4473^2 - (-8,8162)20,53} 8000 = -63,29 \text{ кг}.$$

Теперь по формулам (4.12), (4.13) вычислим изгибающий момент и поперечную силу в сечении с координатой $x = 200$ см:

$$\begin{aligned}
M_{200} &= kL^2 y_0 C_x + kL^3 \varphi_0 D_x - LFB_{x-400} = 874,8 \cdot 138 \cdot 0,0253 + \\
&+ (-63,29)138,3(-0,4871) = 7320 \text{ кг} \cdot \text{см} = 0,0732 \text{ Т} \cdot \text{м};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{200} &= kLy_0 B_x + kL^2 \varphi_0 C_x - FA_{x-400} = \\
&= 874,8 \cdot 0,2280 + (-63,29)0,0253 = 197,5 \text{ кг}.
\end{aligned}$$

Подобным образом вычисляются внутренние усилия в других характерных сечениях. Результаты этих расчетов сведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

x , см	ξ	A	B	C	D	M , Т · м	Q , кГ
0	0		0	0	0	0	0
200	1,446	2,234	0,2280	0,0253	-0,4871	0,0732	197,5
400	2,892	9,042	4,51	0,2269	-2,130	0,461	3930/ -4069
600	4,338	38,17	20,52	1,447	-8,816	0	0

По этим данным построены эпюры внутренних усилий (см. рис. 4.9).

4.5. Расчет конструкций на упругом основании с двумя коэффициентами постели

Дифференциальное уравнение равновесия балки на упругом основании с двумя коэффициентами постели с учетом формулы (4.2)

$$EIy^{IV}(x) = q - k_1y(x) + k_2y''(x),$$

или

$$EIy^{IV}(x) - k_2y''(x) + k_1y(x) = q. \quad (4.18)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения [7]

$$y = e^{-\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\alpha x}(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + y^*,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные; $\pm\alpha, \pm\beta$ – корни характеристического уравнения $EI\lambda^4 - k_2\lambda^2 + k_1 = 0$; y^* – частное решение, зависящее от q .

Примем $q = 0$ (нагрузка отсутствует). На таком участке дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$k_1y(x) + k_2y''(x) = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения [7]

$$y = C_1e^{-vx} + C_2e^{vx}, \quad (4.19)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $v = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$.

На рис. 4.10 представлена картина деформаций такого упругого основания.

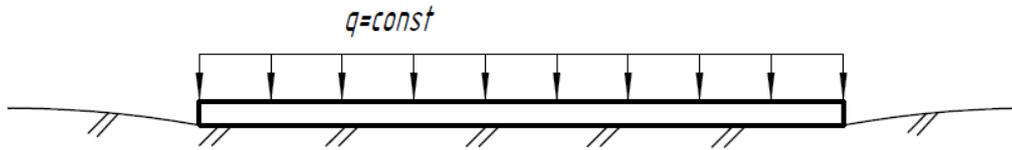


Рис. 4.10

Здесь прогиб под балкой $y = y^* = \frac{q}{k_1} = \text{const}$. Прогибы около балки описываются уравнением (4.19); запишем следующие условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \infty & \quad y = 0; \Rightarrow C_2 = 0; \\ \text{при } x = 0 & \quad y = \frac{q}{k_1}; \Rightarrow C_1 = \frac{q}{k_1}, \end{aligned}$$

тогда $y = \frac{q}{k_1} e^{-\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} x}$.

4.6. Расчет конструкций на упругом основании по модели теории упругости

Эта модель базируется на плоской задаче теории упругости (плоской деформации). Основание рассматривается как однородная сплошная упругая среда с модулем упругости E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 . Отсутствует зазор между упругой линией деформированной балки и поверхностью деформированного основания.

Для описания нагрузок используются функции Герсеванова, позволяющие избежать математических проблем, связанных с дискретностью нагрузок.

Функции Герсеванова имеют свойство принимать нулевое значение при одних величинах переменной и значение «единица» при других величинах переменной. Такие функции называются прерывателями. Они могут быть следующих видов:

1. Односторонний прерыватель – это функция, которая имеет один разрыв при некоторой величине a переменной

$$\Gamma_a = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta < 0, \eta \rightarrow 0} \text{arctg} \frac{\eta}{x - a}, \quad (4.20)$$

где x – переменная, т. е.

$$\Gamma_a = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = a, \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

При умножении какой-либо непрерывной функции $f(x)$ на одно-сторонний прерыватель (4.20) получается разрывная функция $\varphi(x)$ (рис. 4.11):

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ f(x) & \text{при } x > a. \end{cases}$$

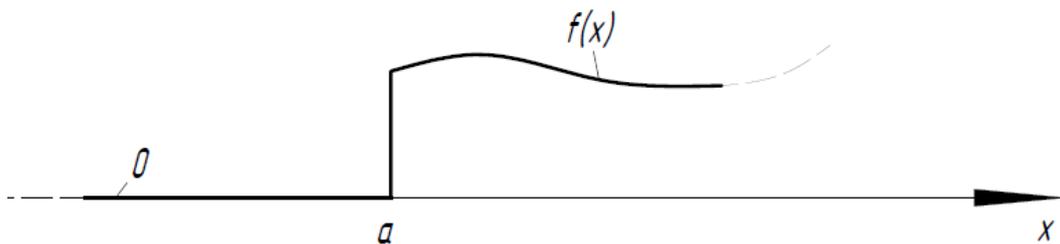


Рис. 4.11

2. Двусторонний прерыватель – это функция, которая имеет два разрыва при некоторых величинах a и b переменной, т. е.

$$\Gamma_a^b = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ 1 & \text{при } a < x < b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

При умножении какой-либо непрерывной функции $f(x)$ на двусторонний прерыватель получается разрывная функция $\varphi(x)$ (рис. 4.12).

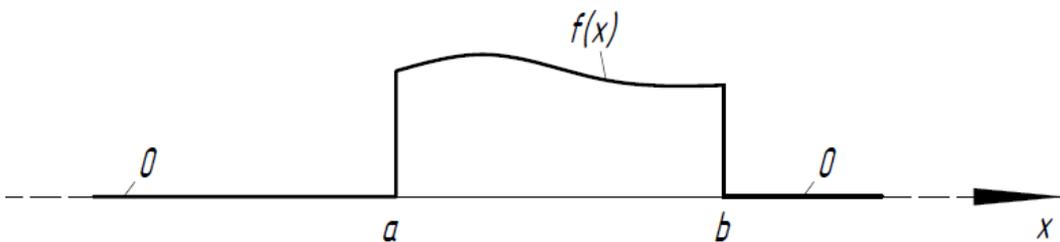


Рис. 4.12

Двусторонний прерыватель равен разности односторонних

$$\Gamma_a^b = \Gamma_a - \Gamma_b. \quad (4.21)$$

Очевидно, двусторонний прерыватель удобен для аналитического описания распределенной нагрузки $q = q(x)$ с координатами начала и конца $x_n = a$, $x_k = b$ соответственно.

3. Мгновенный прерыватель – это производная функции прерывателя:

а) мгновенный прерыватель первого порядка – это первая производная функции одностороннего прерывателя

$$\Gamma'_a = -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta < 0, \eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{(x-a)^2 + \eta^2}, \quad (4.22)$$

$$\text{т. е. } \Gamma'_a = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \infty & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Очевидно, мгновенный прерыватель первого порядка (4.22) удобен для аналитического описания нагрузки в виде сосредоточенной силы F с координатой $x = a$;

б) мгновенный прерыватель второго порядка – это вторая производная функции одностороннего прерывателя

$$\Gamma''_a = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta < 0, \eta \rightarrow 0} \frac{2\eta(x-a)}{[(x-a)^2 + \eta^2]^2}, \quad (4.23)$$

$$\text{т. е. } \Gamma''_a = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \infty & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Мгновенный прерыватель второго порядка (4.23) удобен для аналитического описания нагрузки в виде сосредоточенного момента M с координатой $x = a$.

Например, нагрузка, показанная на рис. 4.13, описывается при помощи функций Герсеванова следующим образом:

$$\varphi(x) = q(x)\Gamma_a^b + F \cdot \Gamma'_c + M \cdot \Gamma''_d.$$

Дифференциальное уравнение равновесия балки на упругом основании (4.3):

$$EI \cdot y^{IV}_{(x)} = q(x) + r(x).$$

Реактивный отпор $r(x)$ упругого основания опишем алгебраической функцией третьего порядка

$$r(x) = -\left(d_0 + \frac{1}{l}(x-l)d_1 + \frac{1}{l^2}(x-l)^2d_2 + \frac{1}{l^3}(x-l)^3d_3\right), \quad (4.24)$$

где $l = \frac{L}{2}$ (здесь L – длина балки); d_0, d_1, d_2, d_3 – постоянные, зависящие от жесткости и длины балки, материала основания и нагрузки.

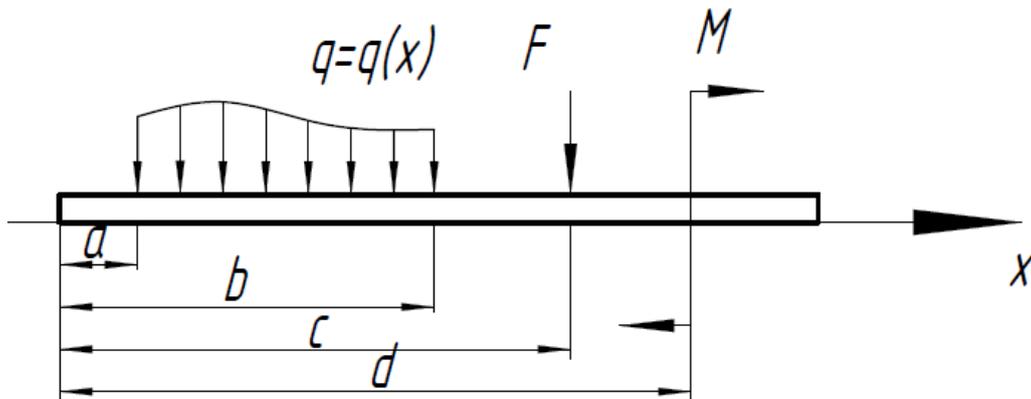


Рис. 4.13

Нагрузку $q(x)$, включающую участки распределенных нагрузок, сосредоточенные силы и моменты (рис. 4.14), опишем при помощи функций Герсеванова

$$q(x) = \sum_i q_i(x) \Gamma_{a_i}^{b_i} + \sum_j F_j \Gamma'_{c_j} + \sum_k M_k \Gamma''_{d_k}.$$

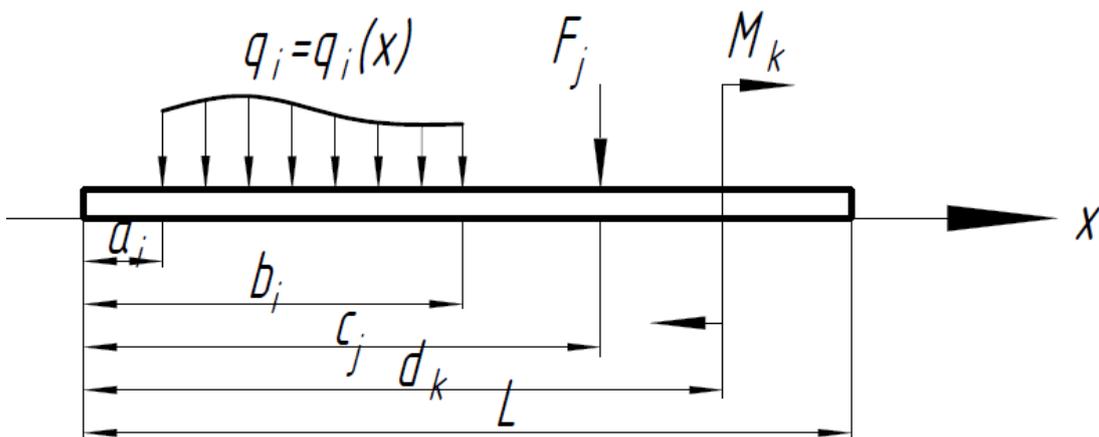


Рис. 4.14

Тогда дифференциальное уравнение равновесия (4.3) имеет вид

$$EI y_{(x)}^{IV} = -d_0 - \frac{1}{l}(x-l)d_1 - \frac{1}{l^2}(x-l)^2 d_2 - \frac{1}{l^3}(x-l)^3 d_3 + \sum_i q_i(x) \Gamma_{a_i}^{b_i} + \sum_j F_j \Gamma'_{c_j} + \sum_k M_k \Gamma''_{d_k}.$$

Проинтегрируем это уравнение четыре раза:

$$\begin{aligned}
EIy'''(x) &= -d_0x - \frac{(x-l)^2}{2!l}d_1 - \frac{2(x-l)^4}{3!l^2}d_2 - \frac{6(x-l)^4}{4!l^3}d_3 + \\
&+ \sum_i \Gamma_{a_i} \int_{a_i}^x q_i(x)dx - \sum_i \Gamma_{b_i} \int_{b_i}^x q_i(x)dx + \sum_j \Gamma_{c_j} F_j + \sum_k \Gamma'_{d_k} M_k + D_3; \\
EIy''(x) &= -\frac{x^2}{2!}d_0 - \frac{(x-l)^3}{3!l}d_1 - \frac{2(x-l)^4}{4!l^2}d_2 - \frac{6(x-l)^5}{5!l^3}d_3 + \\
&+ \sum_i \Gamma_{a_i} \int_{a_i}^x q_i(z)(x-z)dz - \sum_i \Gamma_{b_i} \int_{b_i}^x q_i(z)(x-z)dz + \\
&+ \sum_j \Gamma_{c_j} F_j(x-c_j) + \sum_k \Gamma_{d_k} M_k + D_3x + D_2; \\
EIy'(x) &= -\frac{x^3}{3!}d_0 - \frac{(x-l)^4}{4!l}d_1 - \frac{(x-l)^5}{5!l^2}d_2 - \frac{6(x-l)^6}{6!l^3}d_3 + \\
&+ \sum_i \Gamma_{a_i} \int_{a_i}^x q_i(z) \frac{(x-z)^2}{2!} dz - \sum_i \Gamma_{b_i} \int_{b_i}^x q_i(z) \frac{(x-z)^2}{2!} dz + \\
&+ \sum_j \Gamma_{c_j} F_j \frac{(x-c_j)^2}{2!} + \sum_k \Gamma_{d_k} M_k (x-d_k) + D_3 \frac{x^2}{2!} + D_2x + D_1; \\
EIy(x) &= -\frac{x^4}{4!}d_0 - \frac{(x-l)^5}{5!l}d_1 - \frac{2(x-l)^6}{6!l^2}d_2 - \frac{6(x-l)^7}{7!l^3}d_3 + \\
&+ \sum_i \Gamma_{a_i} \int_{a_i}^x q_i(z) \frac{(x-z)^3}{3!} dz - \sum_i \Gamma_{b_i} \int_{b_i}^x q_i(z) \frac{(x-z)^3}{3!} dz + \\
&+ \sum_j \Gamma_{c_j} F_j \frac{(x-c_j)^3}{3!} + \sum_k \Gamma_{d_k} M_k \frac{(x-d_k)^2}{2!} + \\
&+ D_3 \frac{x^3}{3!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + D_1x + D_0, \tag{4.25}
\end{aligned}$$

где D_0, D_1, D_2, D_3 – постоянные интегрирования. При интегрировании использовано свойство функций Герсеванова (4.21).

Для определения постоянных интегрирования D_0, D_1, D_2, D_3 и постоянных функции реактивного отпора упругого основания (4.24) d_0, d_1, d_2, d_3 используются уравнения равновесия балки, условия опирания балки, условия контактности (отсутствия зазора между балкой и основанием при деформации).

Запишем уравнения равновесия балки:

$$\sum F_y = 0; \quad (4.26)$$

$$\sum M_0 = 0. \quad (4.27)$$

Условие (4.26)

$$\begin{aligned} & - \int_0^L \left[d_0 + \frac{x-l}{l} d_1 + \frac{(x-l)^2}{l^2} d_2 + \frac{(x-l)^3}{l^3} d_3 \right] dx + \sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) dz - \\ & - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) dz + \sum_j F_j = 0, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[d_0 + \frac{x-l}{l} d_1 + \frac{(x-l)^2}{l^2} d_2 + \frac{(x-l)^3}{l^3} d_3 \right] dx = \\ & = \sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) dz + \sum_j F_j. \end{aligned}$$

После интегрирования в левой части имеем

$$\left(d_0 + \frac{1}{3} d_2 \right) L = \left[\sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) dz + \sum_j F_j \right],$$

,
ИЛИ

$$\left(d_0 + \frac{1}{3} d_2 \right) = \frac{1}{L} \left[\sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) dz + \sum_j F_j \right];$$

обозначим правую часть последнего уравнения A , тогда

$$d_0 + \frac{1}{3} d_2 = A. \quad (4.28)$$

Условие (4.27)

$$\int_0^L \left[d_0 + \frac{x-l}{l} d_1 + \frac{(x-l)^2}{l^2} d_2 + \frac{(x-l)^3}{l^3} d_3 \right] x dx -$$

$$- \sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) z dz + \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) z dz - \sum_j F_j c_j + \sum_k M_k,$$

ИЛИ

$$\int_0^L \left[d_0 + \frac{x-l}{l} d_1 + \frac{(x-l)^2}{l^2} d_2 + \frac{(x-l)^3}{l^3} d_3 \right] x dx =$$

$$= \sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) z dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) z dz + \sum_j F_j c_j - \sum_k M_k.$$

После интегрирования в левой части

$$\left(\frac{d_0}{2} + \frac{d_1}{6} + \frac{d_2}{6} + \frac{d_3}{10} \right) L^2 =$$

$$= \sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) z dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) z dz + \sum_j F_j c_j - \sum_k M_k,$$

ИЛИ

$$\left(\frac{d_0}{2} + \frac{d_1}{6} + \frac{d_2}{6} + \frac{d_3}{10} \right) =$$

$$= \frac{1}{L^2} \left(\sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) z dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) z dz + \sum_j F_j c_j - \sum_k M_k \right).$$

Обозначим правую часть последнего уравнения C , тогда

$$\left(\frac{d_0}{2} + \frac{d_1}{6} + \frac{d_2}{6} + \frac{d_3}{10} \right) = C. \quad (4.29)$$

Запишем условия опирания балки:

$$\text{при } x = 0 \quad y''_{(x)} = 0; \quad (4.30)$$

$$\text{при } x = L \quad y''_{(x)} = 0. \quad (4.31)$$

Из условия (4.30) можно получить

$$D_2 = -\frac{L}{6!} (30d_1 - 15d_2 + 9d_3). \quad (4.32)$$

Из условия (4.31)

$$D_3 = \frac{L}{2} d_0 + \frac{L}{5!} (10d_1 + 3d_3) + K, \quad (4.33)$$

$$\text{где } K = -\frac{1}{L} \left[\sum_i \int_{a_i}^L q_i(z)(L-z)dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z)(L-z)dz + \right. \\ \left. + \sum_j F_j(L-c_j) - \sum_k M_k \right].$$

Используем условия контактности. Деформация поверхности основания, соответствующая (4.24), описывается формулой, полученной И. А. Симвулиди [12]:

$$V = -\frac{(1-\nu_0^2)L}{12\pi E_0} \left\{ 24d_0 \left[\frac{x}{L} \ln \frac{x}{L} + \frac{L-x}{L} \ln \frac{L-x}{L} \right] + \right. \\ \left. + 24d_1 \left[\frac{(L-x)x}{L^2} \ln \frac{L-x}{L} - \frac{x}{L} \right] + \right. \\ \left. + 8d_2 \left[\frac{L^3 + (2x-L)^3}{2L^3} \ln \frac{x}{L} + \frac{L^3 - (2x-L)^3}{2L^3} \ln \frac{L-x}{L} + 4 \frac{(L-x)x}{L^2} \right] + \right. \\ \left. + d_3 \left[3 \frac{L^4 - (2x-L)^4}{L^4} \times \ln \frac{L-x}{x} - 6 \frac{L^3 + (2x-L)^3}{L^3} - 4 \frac{x}{l} \right] \right\}.$$

Прогибы балки и основания на первом конце балки одинаковы: при $x=0$ $y(x) = V(x)$. Отсюда можно получить

$$D_0 = -\frac{L^4}{8!} (21d_1 - 7d_2 + 3d_3). \quad (4.34)$$

Прогибы балки и основания в середине балки также одинаковы: при $x = \frac{L}{2} = l$ $y(x) = V(x)$. Отсюда можно получить

$$D_1 = 2L^3 \left\{ \frac{d_0}{128\alpha} (256 \ln 2 - \alpha) + \frac{1}{8!} (161d_1 - 112d_2 + 45d_3) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8! \alpha} [40320d_1 - 26880(1 - \ln 2)d_2 + 26880d_3] - W - \frac{1}{48L} K \right\}, \quad (4.35)$$

где $\alpha = \frac{\pi E_0 L^3}{(1 - \nu_0^2) EI}$ – показатель гибкости балки,

$$W = \frac{1}{L^4} \left[\sum_i \Gamma_0^l \int_{a_i}^l q_i(z) \frac{(l-z)^3}{3!} dz - \sum_i \Gamma_0^l \int_{b_i}^l q_i(z) \frac{(l-z)^3}{3!} dz + \right. \\ \left. + \sum_j \Gamma_0^l F_j \frac{(l-c_j)^3}{3!} - \sum_k \Gamma_0^l M_k \frac{(l-d_k)^2}{2!} \right].$$

Эффект цилиндрического изгиба учитывается множителем $(1 - \nu^2)$ [11], тогда

$$\alpha = \frac{1 - \nu^2}{1 - \nu_0^2} \frac{\pi E_0 L^3}{EI}$$

(α называется *гибкостью балки на упругом основании*).

Площади, ограниченные эпюрами прогибов балки и основания, одинаковы:

$$\int_0^L y(x) dz = \int_0^L V(x) dz.$$

Отсюда получается следующее соотношение:

$$\frac{1}{640\alpha} (640 - 3\alpha - 1280 \ln 2) d_0 - \frac{1}{8! \alpha} [34\alpha - 26880(1 - \ln 2)] d_2 = B, \quad (4.36)$$

$$\text{где } B = \frac{1}{L^5} \left[\sum_i \int_{a_i}^L q_i(z) \frac{(L-z)^4}{4!} dz - \sum_i \int_{b_i}^L q_i(z) \frac{(L-z)^4}{4!} dz + \right. \\ \left. + \sum_j F_j \frac{(L-c_j)^4}{4!} - \sum_k M_k \frac{(L-d_k)^3}{3!} + \frac{L^4}{48} K - W' L^5 \right].$$

Третьи производные функций прогибов балки и основания в середине балки одинаковы

$$y'''(l) = V'''(l).$$

Отсюда получается следующее соотношение:

$$\frac{1}{EI} \left[NL + \frac{L}{120} (10d_1 + 3d_3) \right] = - \frac{32(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0 L^2} (d_1 - d_3), \quad (4.37)$$

$$\text{где } N = \frac{1}{L} \left[\sum_i \Gamma_0^l \int_{a_i}^l q_i(z) dz - \sum_i \Gamma_0^l \int_{b_i}^l q_i(z) dz + \sum_j \Gamma_0^l F_j + K \right].$$

Решение уравнений (4.28), (4.29), (4.36), (4.37) дает

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{(8252 - 34\alpha)A - 13440B\alpha}{13440 + 29\alpha}, \\ d_1 &= 3 \frac{(2C - A)(1280 - \alpha) - 8N\alpha}{2048 + \alpha}, \\ d_2 &= 3 \frac{(5188 + 63\alpha)A + 13440B\alpha}{13440 + 29\alpha}, \\ d_3 &= 10 \frac{(2C - A)(384 + \alpha) + 4N\alpha}{2048 + \alpha}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Формулы для поперечных сил изгибающих моментов в балке в таком случае имеют вид:

$$\begin{aligned} Q &= \left[(x - l)d_0 - \frac{l}{120} (10d_1 + 3d_3) - K \right] + \frac{(x - l)^2}{2!l} d_1 + \frac{2(x - l)^3}{3!l^2} d_2 + \\ &+ \frac{6(x - l)^4}{4!l^3} d_3 - \sum_i \Gamma_{a_i} \int_{a_i}^x q_i(z) dz + \sum_i \Gamma_{b_i} \int_{b_i}^x q_i(z) dz - \sum_j \Gamma_{c_j} F_j; \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{L^2}{240} (10d_1 - 5d_2 + 3d_3) + \left[\frac{(x - l)}{2} d_0 - \frac{L}{120} (10d_1 + 3d_3) - K \right] x + \\ &+ \frac{(x - l)^3}{3!l} d_1 + \frac{2(x - l)^4}{4!l^2} d_2 + \frac{6(x - l)^5}{5!l^3} d_3 - \\ &- \sum_i \Gamma_{a_i} \int_{a_i}^x q_i(z)(x - z) dz + \sum_i \Gamma_{b_i} \int_{b_i}^x q_i(z)(x - z) dz - \\ &- \sum_j \Gamma_{c_j} F_j (x - c_j). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Технология расчета конструкции на упругом основании по модели теории упругости обычно такова:

1. Задают предварительные размеры балки и определяют момент инерции I .
2. Вычисляют гибкость балки α .
3. Определяют параметры A, B, C, K, N, W .
4. Определяют постоянные d_0, d_1, d_2, d_3 .
5. Формируют выражение для реактивного отпора упругого основания $r(x)$ (4.24); строят эпюру $r(x)$.
6. По формулам (4.39), (4.40) строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в балке.

4.7. О расчете пластин на упругом основании

В настоящее время решение задач расчета пластин на упругом основании выполняется преимущественно численными методами. Аналитические решения получены для частных ситуаций [3] и не доведены до инженерного вида, как это сделано для балок.

Известное дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины [14] (рис. 4.15)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

где $w = w(x, y)$ – прогиб; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины толщиной h , для пластины, лежащей на упругом основании, изменится следующим образом.

В соответствии с гипотезой Винклера полная нагрузка на пластину (плиту) на упругом основании определяется нагрузкой на плиту и отпором основания

$$p(x, y) = q(x, y) + r(x, y) = q(x, y) - kw(x, y).$$

Тогда дифференциальное уравнение упругой поверхности плиты на упругом основании

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{kw}{D} = \frac{q}{D}. \quad (4.41)$$

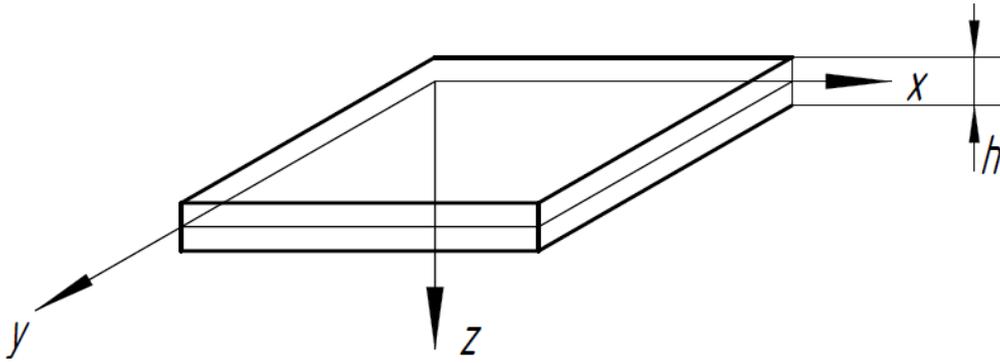


Рис. 4.15

Аналитически в общем виде это уравнение решить невозможно. Поэтому для расчета плит на упругом основании используют приближенные численные методы – метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей.

При расчете пластин (плит) на поперечную нагрузку МКЭ [6] обычно используются прямоугольные и треугольные конечные элементы (рис. 4.16).

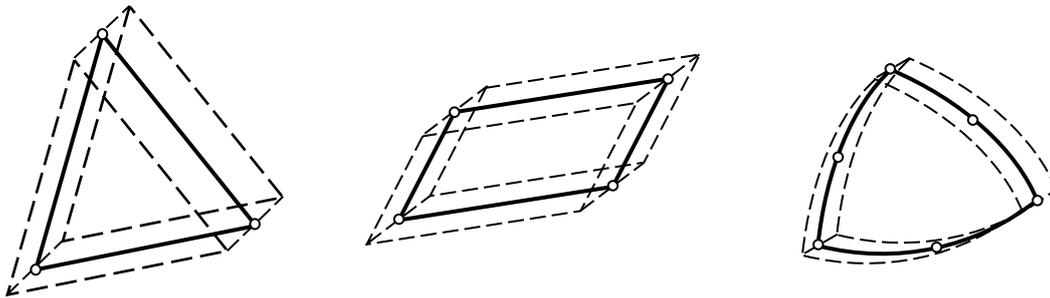


Рис. 4.16

Прямоугольные конечные элементы (КЭ) обычно используются для прямоугольных пластин. Треугольные КЭ применяются для пластин со сложным контуром, с отверстиями.

Дифференциальное уравнение (4.41) при расчете МКЭ является однородным (так как в модели МКЭ нагрузка узловая и $q(x,y) = 0$).

Матрица жесткости прямоугольного конечного элемента выводится следующим образом:

– функция формы (функция упругой поверхности КЭ) задается полиномом

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^3 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3;$$

- получаются выражения для угловых перемещений $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$;
- формируется матрица перемещений точек КЭ $q = L \cdot a$, где

$$L = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 2xy & y^2 & 3x^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & x^2 & 2xy & 0 & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \quad -$$

координатная матрица,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix};$$

- формируется матрица соединения H ;

для квадратного конечного элемента размером a матрица соединения имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a & a^2 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 1 & a & a & a^2 & a^2 & a^2 & a^3 & a^3 & a^3 & a^3 & a^4 & a^4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & a & 2a^2 & a^2 & 3a^2 & 0 & 3a^3 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2a & a & a^2 & 2a^2 & 0 & 3a^2 & a^3 & 3a^3 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

тогда вектор узловых перемещений $Z = H \cdot a$, откуда $a = H^{-1} \cdot Z$;

– с учетом последнего выражения матрица перемещений точек конечного элемента находится через вектор узловых перемещений следующим образом:

$$q = L \cdot H^{-1} \cdot Z;$$

– формируется матрица относительных деформаций

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix};$$

она связана с матрицей a следующим образом: $\varepsilon = B \cdot a$,

$$\text{где } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2y & 0 & 6x & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 0 & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 2y & 0 & 0 & 3x^2 & 3y^2 \end{bmatrix} \text{ – матрица}$$

деформационных коэффициентов;

– вектор погонных изгибающих и крутящих моментов

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \text{ связан с матрицей относительных деформаций сле-}$$

дующим образом:

$$M = C \cdot \varepsilon,$$

где C – матрица физических констант (для изотропных материалов

$$C = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix}).$$

Тогда внутренние усилия также можно найти через вектор узловых перемещений

$$M = C \cdot B \cdot H^{-1} \cdot Z;$$

– рассматривая вариации потенциальной энергии деформации КЭ и работы узловых нагрузок, можно получить выражение для матрицы жесткости

$$R = (H^{-1})^T \left[\int_V (B^T \cdot C \cdot B) dV \right] H^{-1},$$

где интегрирование проводится по объему V конечного элемента.

При расчете плиты на упругом основании [15] его моделируют упругоподатливыми связями, располагающимися в каждом узле конечноэлементной модели. Жесткость упругоподатливой связи

$$C = \alpha \cdot a^2 \cdot k,$$

где a – размер квадратного КЭ; α – коэффициент площади.

В матрице жесткости плиты наличие упругоподатливых опор учитывается добавкой жесткости упругоподатливой опоры C к элементам R_{ii} матрицы.

Реализацию расчета МКЭ эффективно проводить на ЭВМ.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры конструкций на упругом основании.
2. Какие существуют модели грунтового основания?
3. Чем отличаются друг от друга модели грунтового основания?
4. На какой гипотезе основана модель Винклера?
5. Что называют коэффициентом жесткости основания?
6. Каковы особенности расчетной схемы конструкции на упругом основании при расчете по модели теории упругости?
7. Какие методы используются для расчета плит на упругом основании?

Глава 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ-СТЕНКИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

5.1. Плоская задача теории упругости

Наиболее распространенной в задачах классической (линейной) теории упругости является *задача о нахождении напряжений* [8]: в этом случае за неизвестные принимают 6 компонентов напряжений, соответственно для их нахождения достаточно иметь 6 уравнений. Очевидно, что уравнения теории упругости существенно упрощаются, если все напряжения параллельны одной плоскости, например, плоскости $x - y$. Тогда исследуемая задача сводится к отысканию не шести (как в общем случае), а только трех напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , которые не зависят от координаты z , но являются функциями координат x и y : $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$, $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$. Подобная задача называется *плоской задачей теории упругости*. Она делится на 2 вида: *плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние*.

В случае *плоской деформации* неизвестными являются перемещения в исследуемой плоскости: $u = f_1(x, y)$; $v = f_2(x, y)$. Перемещение вдоль оси z отсутствует, $w = 0$; деформация происходит в плоскостях, параллельных плоскости $x - y$. Важно подчеркнуть, что напряжения, параллельные оси z , в данном случае существуют, но они являются функциями только координат x и y :

$$\varepsilon_z = 0; \quad \sigma_z \neq 0; \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y).$$

Примерами плоской деформации могут служить длинная подпорная стена или плотина постоянной высоты; тоннель метрополитена. Тоннель метрополитена представляет собой замкнутую трубу постоянного сечения, испытывающую давление грунта, направленное перпендикулярно оси трубы. Так как длина трубы велика по сравнению с поперечным сечением, то на прямолинейных участках пути она может рассматриваться как плоская деформация.

В случае *обобщенного плоского напряженного состояния* неизвестными являются напряжения $\sigma_x = f_1(x, y)$, $\sigma_y = f_2(x, y)$, $\tau_{xy} = f_3(x, y)$. При этом доказано, что напряжения вдоль оси z отсутствуют, но деформация в этом направлении существует:

$$\sigma_z = 0; \quad \varepsilon_z \neq 0; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y).$$

Подобное напряженное состояние наблюдается при нагружении тонкой пластины по контуру силами, лежащими в плоскости этой пластины (рис. 5.1, а).

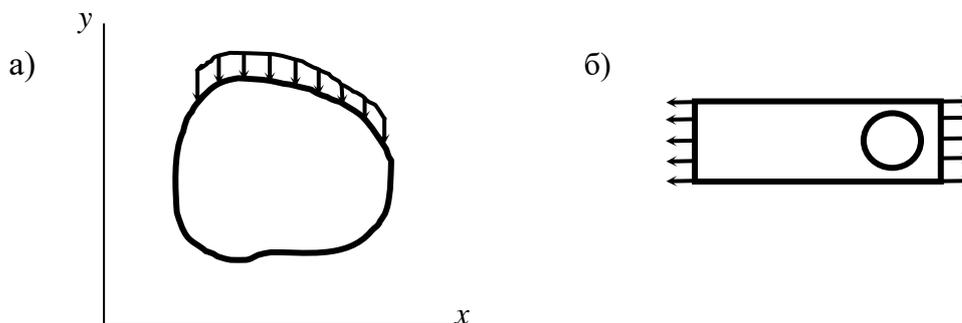


Рис. 5.1

На практике к плоскому напряженному состоянию относят также осевое (центральное) растяжение стальной полосы, ослабленной круглым отверстием (рис. 5.1, б).

В инженерной практике встречаются сравнительно короткие балки с очень высокой стенкой, названные «балки-стенки» (расчет подобных балок будет представлен далее). В балках-стенках высота и длина одного порядка. В таких балках все нагрузки, а также опорные реакции лежат в срединной плоскости. Доказано, что расчет возникающих напряжений в балках-стенках необходимо проводить также по формулам обобщенного плоского напряженного состояния.

Рассмотрим (без вывода) **систему уравнений для плоской задачи теории упругости.**

1. Дифференциальные уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Здесь X и Y – проекции на координатные оси объемных сил, отнесенные к единице объема тела.

2. Условия на поверхности тела

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Эти уравнения рассматривают для точек, *расположенных у поверхности тела*. Они позволяют получить связь между внешними нагрузками, распределенными по наклонной поверхности тела (давление воды, грунта, ветра и т. п.), и напряжениями в тех же точках по площадкам, параллельным координатным плоскостям. Положение площадки определяют косинусы углов наклона внешней нормали v с осями координат. Поэтому индекс v указывает, что X_v и Y_v – проекции объемных сил именно на площадке с внешней нормалью v . Буквами l и m принято обозначать величины, которые называются **направляющими косинусами нормали**,

$$l = \cos(x, v), m = \cos(y, v).$$

3. Соотношения Коши

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

4. Уравнения неразрывности или совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.4)$$

5. Уравнения обобщенного закона Гука (уравнения упругости)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

или в несколько ином виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Уравнения упругости подчеркивают линейную зависимость между деформациями и напряжениями для изотропного упругого тела. В этих уравнениях μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона); E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга); G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига). Модули упругости находятся экспериментально, для них существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Замечание. В соответствии со Строительными нормами и правилами (сокращенно СНиП) коэффициент Пуассона требуется обозначать греческой буквой «ню» ν . Поэтому именно такое обозначение коэффициента Пуассона можно встретить в учебной литературе для направления «Строительство».

Как видим, имеем сложную систему уравнений даже для плоской задачи теории упругости. Возникает естественный вопрос: а можно ли упростить эту систему? Оказывается, можно на столько, насколько вообще можно говорить о «простоте» решений задач теории упругости.

Итальянский ученый Бельтрами в 1892 году представил выражение уравнений совместности деформации для объемного случая в виде уравнений, выраженных через напряжения. Эти уравнения в дальнейшем были применены к решению плоской задачи теории упругости, для которой они имеют достаточно простой вид

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.6)$$

Фактически уравнение (5.6) – это уравнение (5.4), выраженное в напряжениях. Уравнение (5.6) часто называют *условием Мориса Леви. Оно справедливо для постоянных объемных сил или их отсутствия вовсе.* Символом ∇^2 (∇ – греческая буква «набла», ∇^2 – «квадрат набла») сокращенно обозначается математическая операция по вычислению вторых производных по всем переменным исследуемой функции. Например, для некоторой функции $f(x, y, z)$ эта запись принимает вид

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Символ ∇^2 также называется *оператором Лапласа*. Равенство (5.6) читается так: *оператор Лапласа от суммы нормальных напряжений равен нулю.*

Применяя оператор Лапласа к функции напряжений для плоской задачи теории упругости, выражение (5.6) запишем в раскрытом виде

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Таким образом, уравнение Мориса Леви фактически заменяет первоначальное уравнение неразрывности деформаций.

5.2. Функция напряжений

Следует обратить внимание на следующее. Существуют два основных способа решения задачи теории упругости.

1) *в напряжениях* – за неизвестные принимают нормальные и касательные напряжения σ_x , σ_y , σ_z и τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} ;

2) *в перемещениях* – за неизвестные принимают перемещения u , v , w , которые представляют собой непрерывные функции координат.

Эти способы применимы и к решению плоской задачи теории упругости.

В большинстве задач инженерно-строительной практики важнейшую роль играет оценка прочности отдельного элемента или всей конструкции в целом. Как известно из курса «Сопротивление материалов», эта оценка прочности в инженерном подходе представляет собой *условие прочности по нормальным и касательным напряжениям*. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать решение плоской задачи теории упругости именно в напряжениях. За неизвестные в этом случае принимаем нормальные $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$, $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ и касательные $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ напряжения, которые являются непрерывными функциями координат исследуемой точки на плоскости. В качестве нагрузки рассматривается только собственный вес тела, постоянный для всех точек тела. Очевидно, вес тела представляет вертикальную нагрузку. В выбранной системе координат (см. рис. 5.1) вертикально направлена ось y , поэтому ненулевой в уравнениях (5.1) является проекция объемных сил именно на ось y : $Y = g$ – ускорение силы тяжести; $X = 0$; $\rho Y = \rho g = p$ – вес единицы объема.

Очевидно, для нахождения трех неизвестных имеем систему трех дифференциальных уравнений: два уравнения равновесия в виде (5.1) и уравнение совместности деформаций в виде (5.6).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - p &= 0, \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Уравнения системы (5.7) представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных. Из математики (именно из курса дифференциальных уравнений) известно, что решение подобных уравнений находится интегрированием. При интегрировании любого уравнения получают выражение, содержащее константу интегрирования. Сложность решения системы (5.7), во-первых, в том, что константы интегрирования (как и сами напряжения) также являются функциями координат исследуемой точки. Во-вторых, система дифференциальных уравнений (5.7) – это система неоднородных дифференциальных уравнений: второе уравнение записанной системы содержит свободный член p , который не зависит от неизвестных функций.

Решение неоднородных дифференциальных уравнений находится как суммарное решение системы однородных дифференциальных уравнений и частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Частное решение, как правило, находится подбором функций напряжения. Например, в рассматриваемом случае можно принять следующее частное решение:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = px. \quad (5.8)$$

Выразив производные и подставив их в систему (5.7), можно убедиться, что данное решение удовлетворяет этой системе.

Система однородных дифференциальных уравнений, полученная из системы (5.7), имеет вид системы уравнений (5.9).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Доказано, что *общее решение системы однородных дифференциальных уравнений (5.9)* можно выразить через некоторую функцию $\varphi(x, y)$ в виде следующих зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

С учетом ранее найденного частного решения касательного напряжения из (5.8) выражение для касательных напряжений в общем виде определяется зависимостью

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px.$$

Тогда *общее решение системы неоднородных дифференциальных уравнений* принимает окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Здесь $\varphi(x, y)$ – функция напряжений, или функция Эри (англ. астроном Airy, 1862; читается как Эри или Эйри) [8]. Введение функции Эри позволяет выразить три искомых напряжения плоской задачи теории упругости через одну эту функцию. На практике вид функции задается предварительно (обычно подбирается на основе существующих определенных правил); см., например, подбор функции Эри при

рассмотрении задачи об изгибе балки под действием распределенной нагрузки [8].

Заметим, что введение функции Эри упрощает решение плоской задачи теории упругости с точки зрения количества требуемых уравнений. При решении плоской задачи в напряжениях рассматривается решение задачи в виде (5.10) для системы однородных дифференциальных уравнений или в виде (5.11) – для системы неоднородных дифференциальных уравнений.

5.3. Бигармоническое уравнение плоской задачи

Подставим выражения нормальных напряжений через функцию Эри из (5.11) в уравнение Мориса Леви (5.6); получим следующее выражение:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5.12)$$

Выражение (5.12) часто записывается в сокращенном виде

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^4 \varphi = 0. \quad (5.13)$$

(Правое сокращенное выражение в (5.13) читается как «набла четыре от фи равно нулю».)

Запишем выражение (5.12) в развернутом виде

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Вычисляя производные и приводя подобные члены, получим **бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости**

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (5.14)$$

Любая функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению в виде (5.14), называется **бигармонической функцией**.

Таким образом, введение функции напряжений позволяет рассматривать вместо системы уравнений плоской задачи теории упругости в виде трех дифференциальных уравнений (5.7) только одно бигармоническое уравнение в виде (5.13) или (5.14). После нахождения функции напряжений нормальные и касательные напряжения в общем случае определяются формулами (5.11).

5.4. Метод конечных разностей

Для приближенного решения краевых задач дифференциальных уравнений существует метод конечных разностей (МКР), или метод сеток. Система уравнений (5.7), которая применяется для решения плоской задачи теории упругости, фактически является краевой задачей, так как рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных при определенных граничных условиях. Поэтому МКР можно успешно применять и к решению плоской задачи теории упругости.

Основная идея МКР: все частные и обыкновенные производные, входящие в дифференциальные уравнения, заменяются приближенными выражениями. Приближение заключается в том, что все дифференциалы функций и аргументов заменяются простыми алгебраическими выражениями, которые называются *конечными приращениями*, или по-другому *конечными разностями*.

Можно выделить следующие основные шаги МКР.

1. Рассматривают дифференциальное уравнение (в частности, уравнение (5.14)) для решения плоской задачи теории упругости.

2. Вся область исследуемого тела (например, ось балки, плоскость пластины) покрывается сеткой линий. В большинстве случаев это сетка взаимно перпендикулярных линий в декартовой системе координат, но встречаются и косоугольная сетка, и сетка в полярной системе координат. В дальнейшем будем рассматривать *сетку взаимно перпендикулярных линий* как наиболее простую и часто используемую на практике. *Точки пересечения линий сетки принято называть узлами*.

3. За неизвестные принимают значения исследуемых функций в узлах сетки.

4. Строят приближенные формулы для вычисления производных, выраженные через узловые ординаты исследуемых функций. Эти приближенные формулы называют *конечно-разностными операторами производных*. Они представляют собой *линейные выражения*, которые с небольшой погрешностью заменяют выражения производных.

5. Построенные конечно-разностные операторы (см. п. 4) подставляют в исходное дифференциальное уравнение.

6. Выполняют проверку: дифференциальное уравнение должно выполняться в каждом узле сетки.

7. Записывают граничные условия также с помощью конечно-разностных операторов.

8. Пункты 4 – 7 приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых ординат исследуемых функций. Узловые ординаты – это фактические значения исследуемой функции в конкретных узлах сетки. Решение полученной системы уравнений представляет собой значения исследуемой функции в конкретных узлах сетки.

Таким образом, в методе конечных разностей заданное линейное дифференциальное уравнение заменяется приближенным алгебраическим выражением, в котором производные искомой функции представлены конечными разностями.

Для понимания МКР необходимо рассмотреть понятие производной. Так как в прикладных задачах теории упругости часто встречаются одно- и двумерные функции, рассмотрим применение метода конечных разностей к такому типу функций.

5.5. Применение метода конечных разностей к одномерной функции

Рассмотрим одномерную функцию $f = f(x)$, т. е. функцию, зависящую от одного аргумента. На рис. 5.2 показан вид произвольной одномерной функции на участке ab .

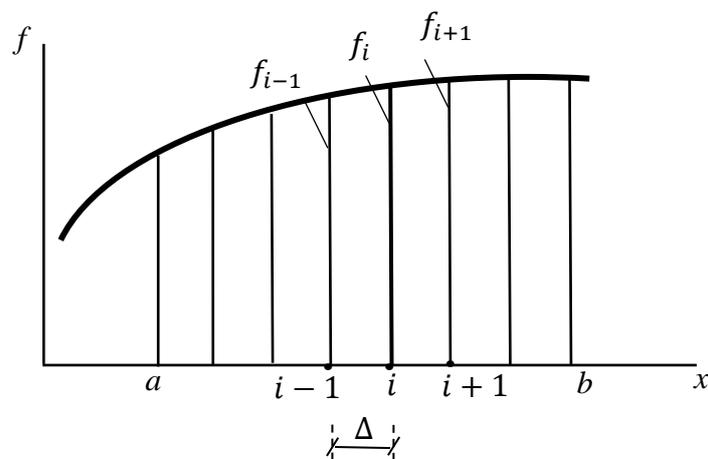


Рис. 5.2

Разобьем участок ab на равные интервалы длиной Δ . В математике известна формула Тейлора: если функция непрерывна вместе со своими производными на некотором интервале, то приращению аргумента функции соответствует приращение самой функции, выраженное через производные. На основании этого утверждения в математике существует ряд Тейлора

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + f''(x_0)\frac{\Delta^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{\Delta^3}{3!} + \dots \quad (5.15)$$

Здесь штрихами показаны соответствующие производные: f' – первая производная; f'' – вторая производная и т. д. В знаменателе каждой дроби указан **факториал числа** (факториал обозначается цифрой с восклицательным знаком справа). Напомним, что факториал вычисляется как произведение чисел натурального ряда, ограниченное указанным цифровым значением, например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

За начальное значение аргумента x_0 принимаем значение x_i в i -м узле координатной оси x , тогда запишем значения функции в трех соседних узлах (см. рис. 5.2):

$$f(x_i) = f_i; \quad f(x_i + \Delta) = f_{i+1}; \quad f(x_i - \Delta) = f_{i-1}.$$

Применим формулу ряда Тейлора для $(i - 1)$ -го и $(i + 1)$ -го узлов

$$f_{i+1} = f_i + f_i' \Delta + f_i'' \frac{\Delta^2}{2!} + f_i''' \frac{\Delta^3}{3!} + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - f_i' \Delta + f_i'' \frac{\Delta^2}{2!} - f_i''' \frac{\Delta^3}{3!} + \dots$$

Преобразуем записанные выражения узловых функций. Ограничимся рассмотрением только трех членов формулы в каждом разложении, отбрасывая члены более высшего порядка малости, по сравнению с оставшимися. Далее последовательно вычтем и сложим представленные выражения функций (соответственно их левые и правые части)

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2f_i' \Delta; \quad (a)$$

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + 2f_i'' \frac{\Delta^2}{2!}. \quad (б)$$

Из представленных выражений (а) и (б) можно выразить производные первого и второго порядков для функции в i -м узле через значения функции в соседних (слева и справа) узлах сетки

$$f_i' = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2\Delta}; \quad (5.16)$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta^2}. \quad (5.17)$$

Обратим внимание: формулы (5.16) и (5.17) записаны так, чтобы узлы сетки рассматривались строго слева направо. На рис. 5.3 представлены схемы вычисления производных в соответствии с формулами (5.16) и (5.17). В этих схемах цифрами показаны коэффициенты, которые надо поставить у значения узловой функции в конкретном узле сетки. Алгебраическую сумму значений узловых функций необходимо умножить на соответствующий коэффициент, показанный на каждой схеме справа.

$$f_i': \begin{array}{c} -1 \qquad 0 \qquad 1 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \hline i-1 \qquad i \qquad i+1 \end{array} \times \left(\frac{1}{2\Delta}\right)$$

$$f_i'': \begin{array}{c} 1 \qquad -2 \qquad 1 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \hline i-1 \qquad i \qquad i+1 \end{array} \times \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)$$

Рис. 5.3

Для дальнейших рассуждений обратимся к рис. 5.4, на котором представлен график исследуемой функции для трех соседних узлов сетки. Непрерывной линией показана касательная к графику в узле i . Угол наклона касательной к горизонтالي обозначим α . Пунктирной линией показана секущая, которая составляет угол β с горизонталью. В соответствии с рисунком имеем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta}. \quad (в)$$

Очевидно, выражение (в) и правая часть формулы вычисления первой производной (5.16) совпадают. Следовательно, формула (5.16) показывает, что первая производная исследуемой функции в узле i

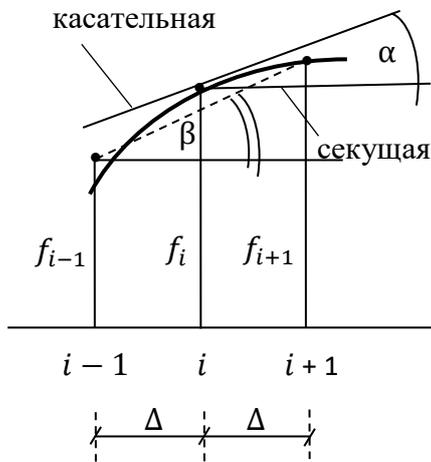


Рис. 5.4

вычисляется как **тангенс угла наклона секущей**, проведенной на отрезке кривой. Но по определению (см. учебники по математике) **производная есть тангенс угла наклона касательной**, проведенной к истинной кривой исследуемой функции в i -м узле.

В общем случае углы α и β не совпадают, фактически не совпадают и тангенсы рассматриваемых углов: обсуждаемое равенство является приближен-

ным. Заметим, что с уменьшением шага сетки секущая и касательная сливаются в одну линию, углы наклона секущей и касательной становятся одинаковыми. Поэтому формулы (5.16) и (5.17) с достаточной для практики точностью позволяют вычислять производные первого и второго порядков исследуемой функции через значения самих функций в соседних узлах сетки. Вторая производная вычисляется уже по более сложной схеме с участием также соседних узлов относительно исследуемого узла i .

Полученные выражения первой и второй производных (формулы (5.16) и (5.17)) можно рассматривать как некий алгоритм для вычисления последующих производных более высокого порядка. Этот алгоритм принято называть **оператором для вычисления производных**. Очевидно, каждый оператор для вычисления последующей производной (производной более высокого порядка) можно вычислить на основе производной предыдущего порядка. Фактически рассматривается следующая схема вычисления производных:

$$f'' = \frac{d}{dx}(f'), \quad f''' = \frac{d}{dx}(f'').$$

Например, запись $\left(\frac{d}{dx}\right)$ в следующем выражении (г) означает, что необходимо применить оператор вычисления первой производной (фактически формулу (5.16)) к функции второй производной

$$f_i''' = \frac{d}{dx} (f'')_i = \frac{-f_{i-1}'' + f_{i+1}''}{2\Delta}. \quad (\Gamma)$$

Замечание. Индекс i , вынесенный за скобки, указывает, что внутри скобки необходимо рассматривать оператор вычисления производной (в рассматриваемом случае оператор вычисления второй производной) в узле сетки, соответствующем именно указанному индексу.

Вычислим третью производную. Так как алгоритм вычисления второй производной известен (5.17), то в правой части выражения (г) запишем вычисления вторых производных по алгоритму формулы (5.17), но с учетом изменения индексов, которые соответствуют узлам сетки в данном случае

$$\begin{aligned} f_i''' &= \frac{-\frac{(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)}{\Delta^2} + \frac{(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})}{\Delta^2}}{2\Delta} = \\ &= \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - f_i + f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta \cdot \Delta^2}. \end{aligned}$$

Окончательно оператор вычисления третьей производной имеет вид

$$f_i''' = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta^3}. \quad (5.18)$$

Очевидно, этот же результат можно получить, если вычислять производную в следующем порядке (в этом читатели могут убедиться самостоятельно):

$$f_i''' = \frac{d^2}{dx^2} (f')_i.$$

Далее вычислим производную четвертого порядка. Для этого применим оператор вычисления второй производной (5.17) к оператору тоже второй производной

$$\begin{aligned} f_i^{IV} &= \frac{d^2}{dx^2} (f'')_i = \frac{f_{i-1}'' - 2f_i'' + f_{i+1}''}{\Delta^2} = \\ &= \frac{\frac{(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)}{\Delta^2} - 2\frac{(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})}{\Delta^2} + \frac{(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})}{\Delta^2}}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Как видим, первоначально применяем именно оператор вычисления второй производной (5.17) к самой производной, указанной в скобках. Далее снова применяем формулу (5.17) к вычислению каждой второй производной правой части с учетом изменения соответствующих индексов. После раскрытия скобок и проведения некоторых преобразований получим окончательное выражение оператора вычисления производной четвертого порядка

$$f_i^{IV} = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta^4}. \quad (5.19)$$

Полученные выражения производных на основе формул (5.16) – (5.19) представляют собой **центральные конечные разности**, так как их правые части симметричны относительно некоторого центрального узла, в данном случае – узла i . Как видим, в правых частях формул (5.16) – (5.19) коэффициенты перед значениями узловых функций меняются по строго определенной схеме. Для удобства вычислений далее представлена табл. 5.1, которую можно рассматривать как схему вычисления конечных разностей производных с первого по четвертый порядок.

Центральным узлом, относительно которого рассматриваются все другие узлы, является i -й узел сетки. Для вычисления производных в любом другом узле сетки с использованием этой таблицы необходимо именно узлу i поставить в соответствие фактически исследуемый узел и наложить соответствующий оператор. При этом не забыть учесть изменение индексов соседних узлов, расположенных слева и справа от центрального узла. Пустые клетки таблицы указывают, что данные узловые функции не участвуют при вычислении определенной производной.

Таблица 5.1

Узловые функции \ Производная	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	Множитель
	Значения коэффициентов узловых функций					
f_i'		-1	0	1		$1/2\Delta$
f_i''		1	-2	1		$1/\Delta^2$
f_i'''	-1	2	0	-2	1	$1/2\Delta^3$
f_i^{IV}	1	-4	6	-4	1	$1/\Delta^4$

5.6. Применение метода конечных разностей к двумерной функции

Рассмотрим двумерную функцию $F(x, y)$, т. е. функцию двух аргументов. В этом случае необходимо рассматривать частные производные по каждому аргументу функции. Заметим, что для лучшего визуального восприятия читателем двумерную функцию будем обозначать прописной латинской буквой F . Вспомним: ранее одномерную функцию обозначили строчной латинской буквой f .

Выражение функции $F(x, y)$ можно считать уравнением некоторой поверхности с ординатами F над плоскостью $x - y$. Подобная плоскость показана далее на рис. 5.5.

Вертикальные сечения этой поверхности плоскостями, параллельными горизонтальной координатной оси или вертикальной координатной оси, представляют собой некоторые кривые. На рис. 5.5 эти кривые показаны в плоскости, параллельной координатной оси x .

В математике доказано, что для подобных кривых частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{и т. д.}$$

можно вычислять по приведенным ранее операторным схемам вычисления производных одномерной функции с учетом коэффициентов, представленных в табл. 5.1.

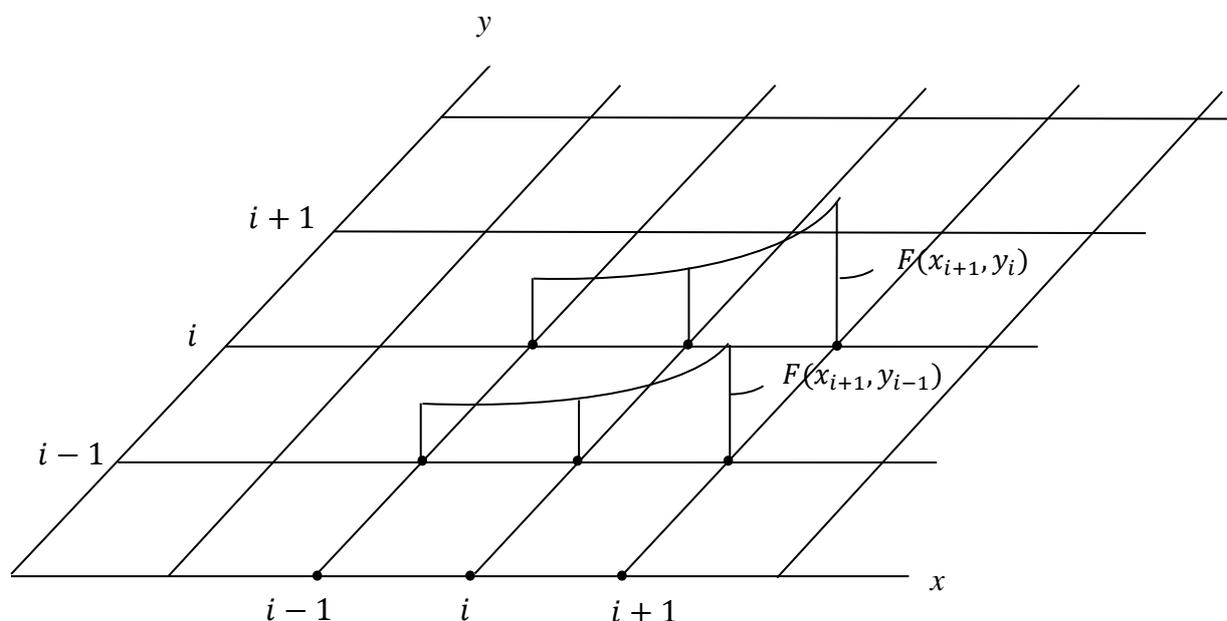


Рис. 5.5

Составим операторы вычисления частных производных двумерной функции. Для практического удобства и сокращения записи исключим двойные индексы узловых функций, как это первоначально показано на рис. 5.5 (такой подход принят в [8]). Введем дополнительные буквенные обозначения узлов. На рис. 5.6 показана схема принятых обозначений соседних узлов сетки в горизонтальном направлении, т. е. вдоль оси x (рис. 5.6, а), и в вертикальном направлении, т. е. вдоль оси y (рис. 5.6, б). Узел k рассматривается как центральный (исследуемый).

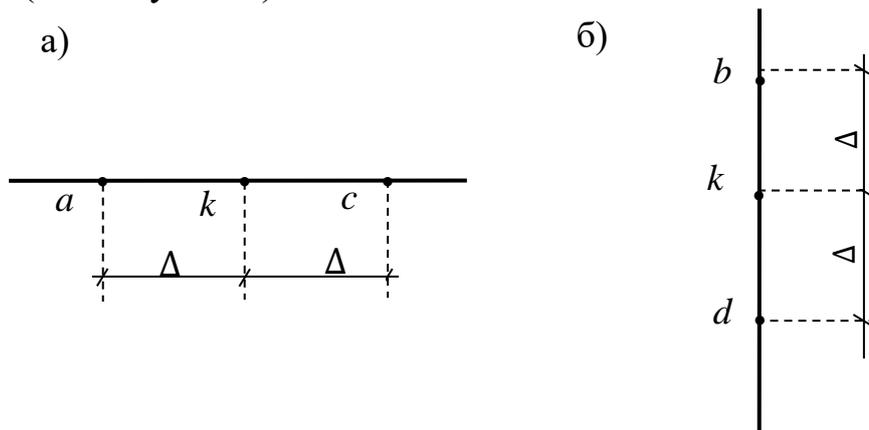


Рис. 5.6

В табл. 5.2 и 5.3 приведены операторные схемы вычисления частных производных первого и второго порядков двумерной функции $F(x, y)$.

Таблица 5.2

Производная \ Узловые функции	F_a	F_k	F_c	Множитель
	Значения коэффициентов узловых функций			
$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_k$	-1	0	1	$1/2\Delta$
$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_k$	1	-2	1	$1/\Delta^2$

Таблица 5.3

Производная \ Узловые функции	F_d	F_k	F_b	Множитель
	Значения коэффициентов узловых функций			
$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_k$	-1	0	1	$1/2\Delta$
$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_k$	1	-2	1	$1/\Delta^2$

Используя данные табл. 5.2 и 5.3, запишем выражения частных производных двумерной функции в виде конечных разностей:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_k = \frac{-F_a + F_c}{2\Delta}; \quad (5.20)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_k = \frac{-F_d + F_b}{2\Delta}; \quad (5.21)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_k = \frac{F_a - 2F_k + F_c}{\Delta^2}; \quad (5.22)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_k = \frac{F_d - 2F_k + F_b}{\Delta^2}. \quad (5.23)$$

Таким образом, операторные схемы вычисления частных производных первого и второго порядков двумерной функции идентичны вычислению производных первого и второго порядков одномерной функции. Сравним, например, формулы (5.16) и (5.20) (или (5.16) и (5.21)). Также можно сравнить формулы (5.17) и (5.22) (или (5.17) и (5.23) соответственно).

Однако для решения плоской задачи теории упругости с помощью МКР необходимо вычислить частные производные третьего и четвертого порядков, а также смешанные производные четвертого порядка. Вычислим предварительно эти производные.

Рассмотрим сначала **вычисление смешанной производной второго порядка** на основе конечных разностей. Используем соотношение

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_k.$$

Очевидно, мы находим частную производную по x от оператора частной производной по y . Фактически надо сначала применить схему вычисления, представленную на рис. 5.6, *a* и в табл. 5.2, к оператору вычисления частной производной по y .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_k = \frac{-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_a + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_c}{2\Delta}.$$

В числителе дроби правой части полученные операторы частных производных по y необходимо вычислить на основе схемы рис. 5.6, *b* и табл. 5.3. При вычислении за центральные узлы приняты узлы *a* и *c* соответственно.

Заметим, что конечно-разностная схема вычисления второй производной по аргументу x использует точки, расположенные вдоль оси x , а конечно-разностная схема вычисления второй производной по аргументу y использует узлы, расположенные вдоль оси y ; центральным узлом рассматривается узел k .

На рис. 5.7 представлены операторные схемы вычисления вторых частных производных функции двух аргументов. Обратим внимание: их можно представить подобно коэффициентам, приведенным в табл. 5.1 для функции одного аргумента. В представленных схемах цифрами указаны множители функции в соответствующем узле сетки.

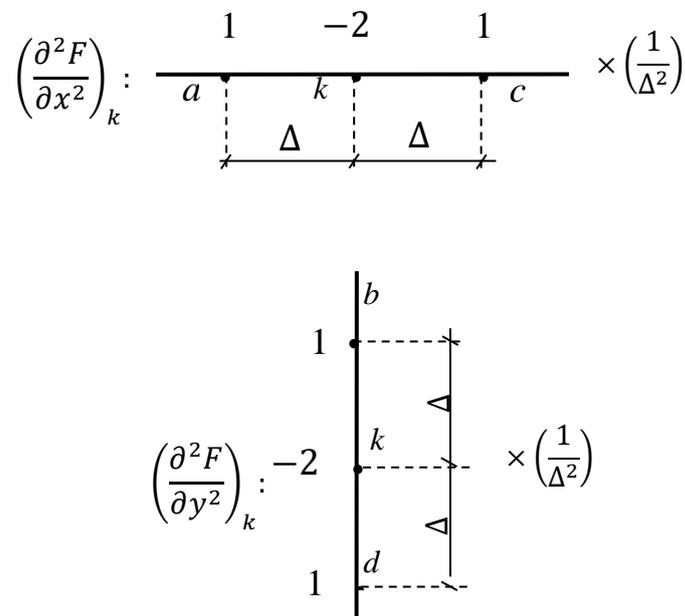


Рис. 5.7

Для вычисления частных производных более высокого порядка (чем второй) схема рис. 5.6, a и b должна быть расширена: количество используемых узлов сетки возрастает как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Далее на рис. 5.8 показана общая схема используемых узлов относительно центрального узла k . Как видим, все соседние узлы образуют крестообразную схему.

Тогда правая часть выражения смешанной производной второго порядка усложнится и примет вид с учетом обозначения узлов крестообразной схемы (см. рис. 5.8).

$$\frac{-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_a + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_c}{2\Delta} = \frac{-\left(\frac{-F_h + F_e}{2\Delta}\right) + \left(\frac{-F_g + F_f}{2\Delta}\right)}{2\Delta} = \frac{F_h - F_e - F_g + F_f}{4\Delta^2}.$$

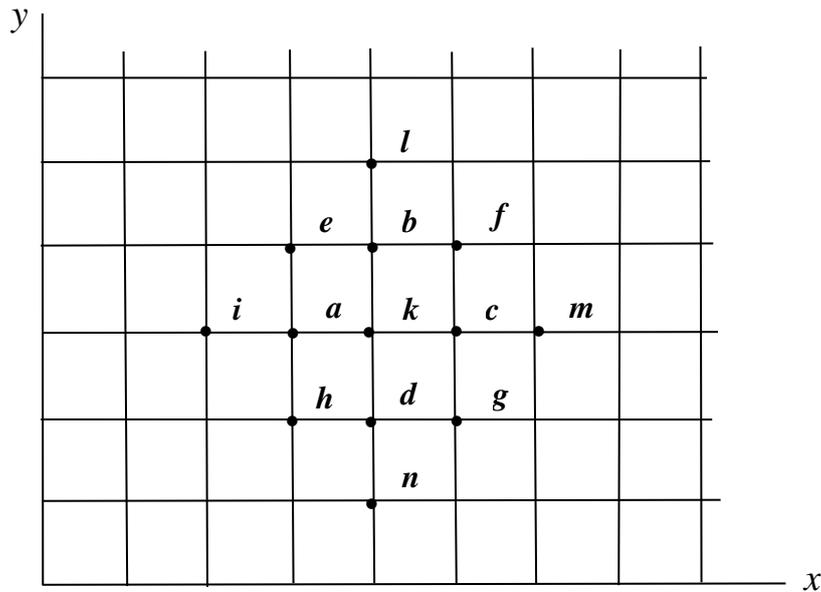


Рис. 5.8

Заметим, что для вычисления смешанной производной второго порядка можно также использовать соотношение

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_k.$$

Читателю предлагается самостоятельно выполнить соответствующие выкладки и убедиться в верности результата. Окончательно

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{F_h - F_e - F_g + F_f}{4\Delta^2}. \quad (5.24)$$

Вычислим производные четвертого порядка. Используем следующий алгоритм:

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)_k = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_k.$$

В этом случае оператор второй производной по x формулы (5.22) применяется также к оператору вычисления второй производной.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_k &= \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_a - 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_c}{\Delta^2} = \\ &= \frac{\frac{F_i - 2F_a + F_k}{\Delta^2} - 2 \frac{(F_a - 2F_k + F_c)}{\Delta^2} + \frac{F_k - 2F_c + F_m}{\Delta^2}}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Как видим, в правой части последнего выражения к каждому оператору вычисления производной второго порядка по x применен оператор вычисления этой производной (5.22). Индекс оператора указывает центральный узел, относительно которого производится вычисление. Напомним, что обозначение узлов сетки показано ранее на рис. 5.8. После раскрытия скобок и приведения подобных членов в числителе получим окончательное выражение частной производной четвертого порядка по x в виде формулы (5.25):

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right)_k = \frac{F_i - 4F_a + 6F_k - 4F_c + F_m}{\Delta^4}. \quad (5.25)$$

Подобным образом вычислим частную производную четвертого порядка по второму аргументу y .

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right)_k &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_k = \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_d - 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_b}{\Delta^2} = \\ &= \frac{\frac{F_n - 2F_d + F_k}{\Delta^2} - 2 \frac{(F_d - 2F_k + F_b)}{\Delta^2} + \frac{F_k - 2F_b + F_l}{\Delta^2}}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Окончательно получим выражение

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right)_k = \frac{F_n - 4F_d + 6F_k - 4F_b + F_l}{\Delta^4}. \quad (5.26)$$

Далее вычислим смешанную производную четвертого порядка. Оператор ее вычисления можно найти двумя способами. Как и при вычислении оператора смешанной производной второго порядка, представим один из возможных способов.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_k &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_k = \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_a - 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_c}{\Delta^2} = \\ &= \frac{\frac{F_h - 2F_a + F_e}{\Delta^2} - 2 \frac{(F_d - 2F_k + F_b)}{\Delta^2} + \frac{F_g - 2F_c + F_f}{\Delta^2}}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Окончательное выражение смешанной производной принимает вид

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_k = \frac{F_h - 2F_a + F_e - 2F_d + 4F_k - 2F_b + F_g - 2F_c + F_f}{\Delta^4}. \quad (5.27)$$

Очевидно, смешанную частную производную можно найти следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_k.$$

Предоставим читателю самостоятельно провести соответствующие математические выкладки и убедиться в верности результата.

Таким образом, конечно-разностные операторы частных производных двумерной функции подчиняются сложным зависимостям узловых функций. Однако с использованием приведенной крестообразной схемы можно увидеть определенный алгоритм учета узловых функций в формулах (5.25) – (5.27). Разумеется, необходимо строго соблюдать принятое обозначение узлов сетки крестообразной схемы. За центральный узел на этой схеме принят узел k . Как уже упоминалось ранее, при вычислении конечно-разностных операторов производных в произвольном узле сетки необходимо крестообразную схему обозначений узлов наложить на участок плоскости так, чтобы исследуемый (центральный) узел совпал с указанным узлом k . Затем при использовании формул (5.25) – (5.27) необходимо тщательно учесть соответствующие соседние узлы крестообразной схемы.

Замечание. Все представленные формулы конечно-разностных операторов производных получены для квадратной сетки разбиения участка плоскости: шаг разбиения сетки вдоль осей x и y постоянный и одинаковый, $\Delta = \text{const}$. Существуют формулы вычисления и для более сложных случаев неквадратной сетки разбиения, у которых $\Delta_x \neq \Delta_y \neq \text{const}$. Такие формулы приведены, в частности, в [8].

5.7. Бигармоническое уравнение

Запишем оператор Лапласа над функцией $F(x, y)$. На основании (5.12) имеем

$$(\nabla^2 F)_k = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_k. \quad (5.28)$$

Представим это выражение в виде конечно-разностных операторов производных. Для этого при вычислении вторых частных производных правой части (5.28) используем формулы (5.22) и (5.23).

$$(\nabla^2 F)_k = \frac{F_a - 2F_k + F_c}{\Delta^2} + \frac{F_d - 2F_k + F_b}{\Delta^2}.$$

Складывая выражения правой части, получим окончательный вид оператора Лапласа на основе конечно-разностных производных узловых функций сетки

$$(\nabla^2 F)_k = \frac{F_a + F_b + F_c + F_d - 4F_k}{\Delta^2}. \quad (5.29)$$

Далее вычислим бигармонический оператор. Для этого к выражению (5.29) применим еще раз оператор Лапласа.

$$\nabla^2 (\nabla^2 F)_k = \frac{(\nabla^2 F)_a + (\nabla^2 F)_b + (\nabla^2 F)_c + (\nabla^2 F)_d - 4(\nabla^2 F)_k}{\Delta^2}. \quad (5.30)$$

В числителе правой части выражения (5.30) каждое слагаемое есть оператор Лапласа над функцией $F(x, y)$ в конкретном узле сетки. Напомним, что узел обозначен буквенным индексом за скобками; буквенные индексы соответствуют обозначениям на рис. 5.8. Для вычисления каждого оператора в числителе необходимо использовать формулу (5.29), но вместо центрального узла k (принятого в формуле (5.29)) рассматривать последовательно центральными узлы a, b, c, d и k . Практически на каждый из указанных узлов надо наложить крестообразную схему рис. 5.8 и учесть соседние узлы сетки в конкретном случае. После выполнения некоторых преобразований получим следующие выражения:

$$(\nabla^2 F)_a = \frac{F_i + F_e + F_k + F_h - 4F_a}{\Delta^2}; \quad (д)$$

$$(\nabla^2 F)_b = \frac{F_e + F_l + F_f + F_k - 4F_b}{\Delta^2}; \quad (е)$$

$$(\nabla^2 F)_c = \frac{F_k + F_f + F_m + F_g - 4F_c}{\Delta^2}; \quad (ж)$$

$$(\nabla^2 F)_d = \frac{F_h + F_k + F_g + F_n - 4F_d}{\Delta^2}. \quad (з)$$

Подставим в (5.30) записанные уравнения оператора Лапласа через функции в узлах сетки (д) – (з) и выражение (5.29). Будем иметь следующее:

$$\begin{aligned} \nabla^2(\nabla^2 F)_k &= \frac{F_i + F_e + F_k + F_h - 4F_a + F_e + F_l + F_f + F_k - 4F_b}{\Delta^4} + \\ &+ \frac{F_k + F_f + F_m + F_g - 4F_c + F_h + F_k + F_g + F_n - 4F_d}{\Delta^4} - \\ &- 4 \frac{(F_a + F_b + F_c + F_d - 4F_k)}{\Delta^4}. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов предыдущего выражения получим окончательный вид бигармонического уравнения функции двух переменных с использованием конечно-разностных операторов в виде

$$\begin{aligned} (\nabla^4 F)_k &= (\nabla^2 \nabla^2 F)_k = \\ &= \frac{20F_k - 8(F_a + F_b + F_c + F_d) + 2(F_e + F_f + F_g + F_h)}{\Delta^4} + \\ &+ \frac{(F_l + F_m + F_n + F_i)}{\Delta^4}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

На рис. 5.9 показана схема коэффициентов узловых функций вычисления бигармонического уравнения. Для функции в каждом конкретном узле (напомним, что узлы в аналогичной крестообразной схеме показаны на рис. 5.8) представлены коэффициенты, с которыми соответствующая узловая функция учитывается в выражении (5.31).

				1			
			2	-8	2		
		1	-8	20	-8	1	
			2	-8	2		
				1			

Рис. 5.9

Таким образом, конечно-разностное выражение бигармонического оператора легко записывается на основании крестообразной схемы рис. 5.9 с учетом обозначений узлов сетки на рис. 5.8.

5.8. Рамная аналогия

В п. 5.7 показано, что метод конечных разностей позволяет приближенно решить плоскую задачу теории упругости с использованием конечно-разностных операторов функции напряжений.

Применим метод конечных разностей для расчета плоской пластины. Пластину покрываем квадратной сеткой с шагом $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = \text{const}$.

Для каждого внутреннего узла сетки составим конечно-разностный аналог бигармонического уравнения в виде выражения (5.31). При этом обратимся к классическому обозначению бигармонической функции как функции φ

$$\nabla^2(\nabla^2\varphi)_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (5.32)$$

где n – общее количество узлов сетки. Равенства (5.32) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых ординат φ_j . Этой системе необходимо

добавить граничные условия, записанные для любого узла (точки) контура. Как это сделать? В каждой точке контура пластины известна интенсивность поверхностной нагрузки: p_n – по нормали к контуру; p_s – по касательной к контуру (рис. 5.10).

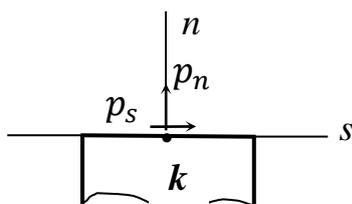


Рис. 5.10

Для двух взаимно перпендикулярных направлений (на рис. 5.10 это направления n и s) можно записать выражения напряжений по этим направлениям через бигармоническую функцию (подобно записанным ранее выражениям (5.11)) в виде представленных далее выражений (5.33)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \\ \sigma_s &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}, \\ \tau_{ns} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Тогда в произвольном узле контура пластины (узле k) граничные условия можно записать как $\sigma_n = p_n$; $\sigma_s = p_s$. С учетом (5.33) граничные условия в этом узле k принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= p_n, \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k &= p_s. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Выражения (5.34) лежат в основе так называемой *рамной аналогии* [1]. Суть рамной аналогии заключается в замене исследуемой пластины рамой (или ее основной системой), очертание которой повторяет очертание пластины (рис. 5.11). Очевидно, рама должна быть подвержена действию той же нагрузки, что и контур пластины.

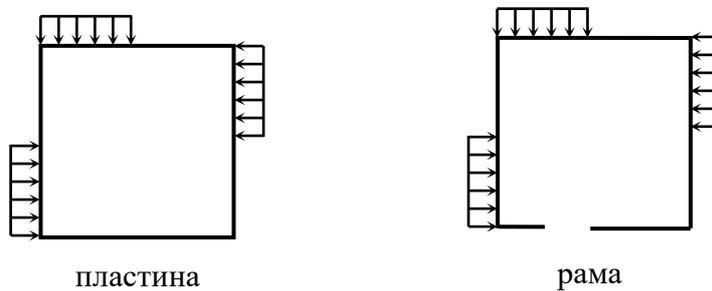


Рис. 5.11

Доказано, что в этом случае изгибающие моменты M , возникающие в раме, равны функции напряжений на контуре, а продольные N и поперечные силы Q соответственно равны производным функции напряжений по внешней нормали n и координате s . Это отражено в выражениях

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= M_k, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k &= N_k, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_k &= Q_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Равенства (5.35) представляют собой окончательные выражения рамной аналогии. Теперь граничные условия, т. е. формулы (5.34) можно переписать в виде соотношений (5.36).

С учетом (5.35) формулы вычисления напряжений (5.33) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = p_n, \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k &= -\frac{\partial N}{\partial s} = p_s. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Таким образом, равенства (5.35) показывают, что на контуре пластины значения функции напряжений φ_k в произвольном узле k могут рассматриваться как ординаты изгибающего момента в некоторой условной раме, очертание которой совпадает с контуром пластины. Второе условие выражений (5.35) позволяет вычислить значение функции напряжений φ в законтурных узлах через ординаты во внутренних узлах пластины.

Приведем правило знаков использования выражений (5.35). Известно, что в строительной практике эпюры изгибающего момента принято строить со стороны растянутых волокон. **Положительными** принимают **ординаты изгибающего момента, отложенные внутри контура рамы** (в этом случае растянуты волокна именно внутри контура рамы). Тогда значения функции напряжений также положительны

$$\varphi_k = M_k > 0.$$

Если ординаты изгибающего момента отложены с внешней стороны контура пластины, то значения функции напряжений отрицательны

$$\varphi_k = M_k < 0.$$

Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение элемента. Поэтому растягивающей продольной силе соответствует положительное граничное условие

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k = N_k > 0.$$

Сжимающей продольной силе соответствует отрицательное граничное условие

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k = N_k < 0.$$

Поперечная сила положительна, если при увеличении координаты s возрастают значения изгибающего момента. Однако в дальнейшем поперечная сила рассматриваться не будет. Так как нагрузка действует в плоскости самой пластины, поперечная сила в каждой точке пластины отсутствует.

Рассмотрим некоторые вспомогательные положения для определения функции напряжений в законтурных точках.

Пусть произвольный узел k расположен на контуре пластины (рис. 5.12).

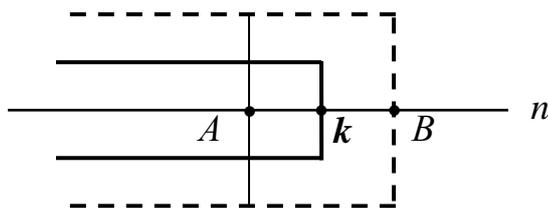


Рис. 5.12

На основании рамной аналогии ((5.35), условие $\varphi_k = M_k$) значение функции напряжений φ_k принимается по эпюре изгибающего момента рамы в этой точке. Применим бигармонический оператор (5.31) к пластине с наложенной на нее сеткой так, чтобы центральным был именно узел k . Но при вычислении конечно-разностного оператора производной требуется учесть еще два узла: внутренний узел A и законтурный (внешний) узел B (см. указанные узлы на рис. 5.12). Конечно-разностный оператор производной запишется как

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_k = \frac{-\varphi_A + \varphi_B}{2\Delta} = N_k.$$

Отсюда для ординаты законтурного узла получим следующее:

$$\varphi_B = \varphi_A + 2\Delta N_k. \quad (\text{и})$$

Полученное выражение (и) подчеркивает тот факт, что **функция напряжений в законтурном узле** вычисляется через функцию напряжений внутреннего узла сетки и значение продольной силы в узле контура. Значение продольной силы принимается в конкретном узле из эпюры продольной силы рамы на основании рамной аналогии.

Некоторые выводы. При расчете пластины неизвестными являются ординаты только во внутренних узлах сетки. На каждый узел накладывается бигармонический оператор (5.31), в результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых функций. Решая эту систему, определяем значения функции напряжений в узлах сетки, которая покрывает пластину. Далее по формулам (5.11) переходим от функций в узлах сетки к выражениям нормальных и касательных напряжений в этих узлах, которые принимают вид формул (5.37). В каждой строке формул (5.37) справа указана ссылка на аналогичную формулу, вывод которой сделан ранее при рассмотрении функции двух переменных.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_k = \frac{\varphi_d - 2\varphi_k + \varphi_b}{\Delta^2} \quad (\text{см. (5.23)}), \\ \sigma_y^{(k)} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_k = \frac{\varphi_a - 2\varphi_k + \varphi_c}{\Delta^2} \quad (\text{см. (5.22)}), \\ \tau_{xy}^k &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_k = - \frac{\varphi_h - \varphi_e - \varphi_g + \varphi_f}{4\Delta^2} \quad (\text{см. (5.24)}). \end{aligned} \right\} (5.37)$$

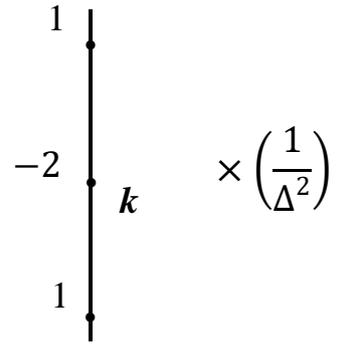
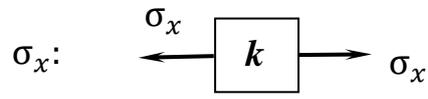
1) Очевидно, при вычислении $\sigma_x^{(k)}$ (нормальное напряжение вдоль оси x в узле k) необходимо рассматривать ближайшие (соседние нижний и верхний) узлы по вертикальной линии сетки. Расстояние между узлами равно шагу сетки Δ .

2) При вычислении $\sigma_y^{(k)}$ (нормальное напряжение вдоль оси y в узле k) необходимо рассматривать ближайшие (соседние узлы слева и справа) по горизонтальной линии сетки. Расстояние между узлами равно шагу сетки Δ .

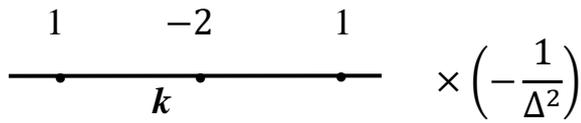
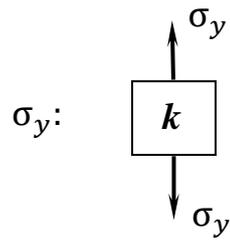
3) При вычислении τ_{xy}^k (касательное напряжение в узле k) необходимо рассматривать ближайшие узлы квадрата, внутри которого находится исследуемый узел. Расстояние между отмеченными узлами равно удвоенному шагу сетки, т. е. 2Δ .

Далее на рис. 5.13 представлены схемы учета коэффициентов при вычислении узловых функций указанных напряжений: на рис. 5.13, *a* – схема σ_x , на рис. 5.13, *б* – схема σ_y , на рис. 5.13, *в* – τ_{xy} .

a)



б)



в)

τ_{xy} :

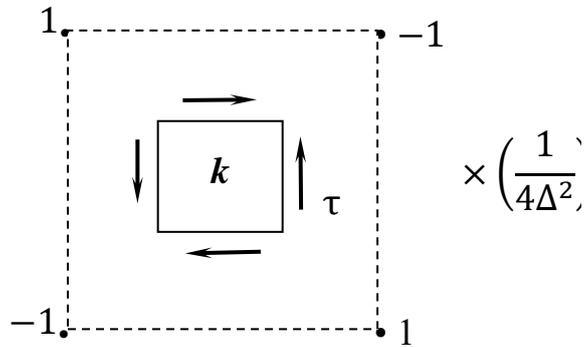


Рис. 5.13

5.9. Пример расчета балки-стенки методом конечных разностей

Задана пластина единичной толщины, размеры ее по высоте и ширине одного порядка. Эта пластина с действующей на нее распределенной нагрузкой представлена на рис. 5.14. Требуется вычислить нормальные и касательные напряжения, возникающие в балке-стенке.

Подобные пластины, у которых размеры по высоте и ширине одного порядка, как уже упоминалось ранее, называются балками-стенками. Плоскость заданной балки-стенки покроем сеткой взаимно перпендикулярных линий. Так как задана квадратная балка-стенка, логично рассматривать квадратную сетку с постоянным шагом вдоль горизонтальной и вертикальной осей, $\Delta_x = \Delta_y = a$. Линии пересечения сетки образуют узлы сетки. Нумерацию узлов сетки выполним построчно с учетом симметрии относительно линии 0 – 0: симметрично расположенные узлы нумеруем одинаково. Обратим внимание, что в нумерацию включены и узлы вне контура пластины (законтурные узлы), которые потребуются для решения задачи. Балка-стенка с наложенной сеткой и принятой нумерацией узлов показана на рис. 5.14.

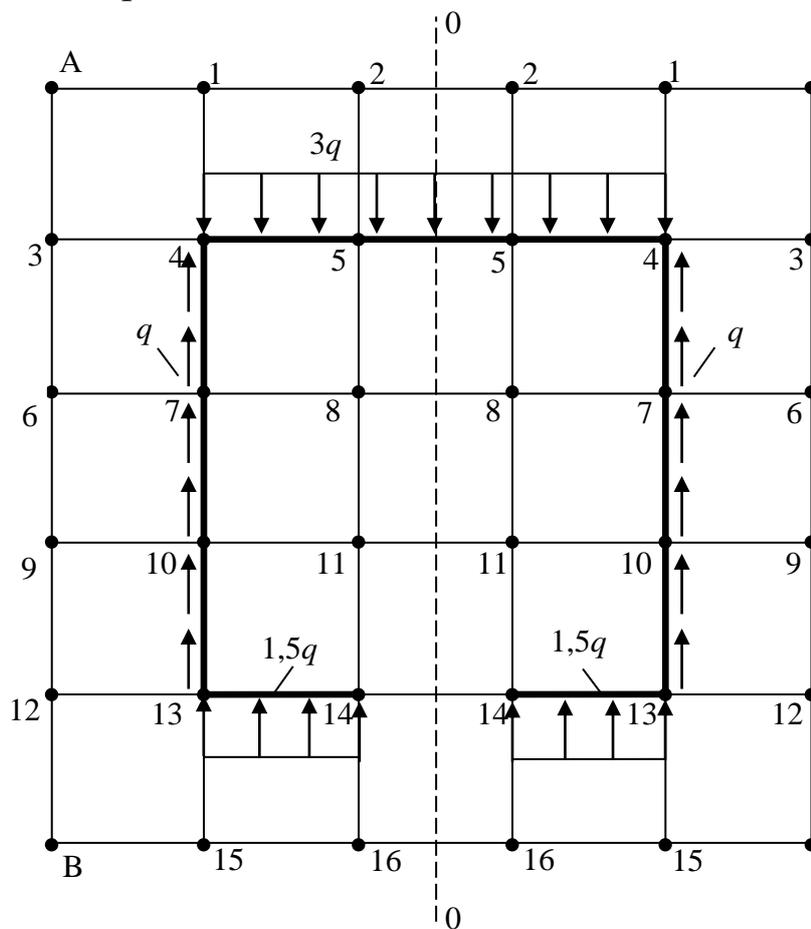


Рис. 5.14

Выделим типы рассматриваемых узлов сетки. Как видно из рис. 5.14, существует три типа узлов сетки.

Внутренние узлы: 8 и 11.

Контурные узлы: 4, 5, 7, 10, 13, 14.

Законтурные узлы: 1, 2, 3, 6, 9, 12, 15, 16.

Ранее обсуждалась «рамная аналогия». На основании ее существования исследуемую пластину заменим некоторой условной рамой, по очертанию похожей на контур пластины и нагруженной точно такой же нагрузкой. Для простоты вычислений в угловых точках рамы врезаны шарниры и выполнен разрез нижнего ригеля на оси симметрии рамы, т. е. рассматриваем статически определимую раму. Как указывается в [8], в раму можно ввести любые шарниры и выполнить любые разрезы, но при условии, что полученная схема рамы уравнивает заданную контурную нагрузку. Выбранная для расчета рама показана на рис. 5.15.

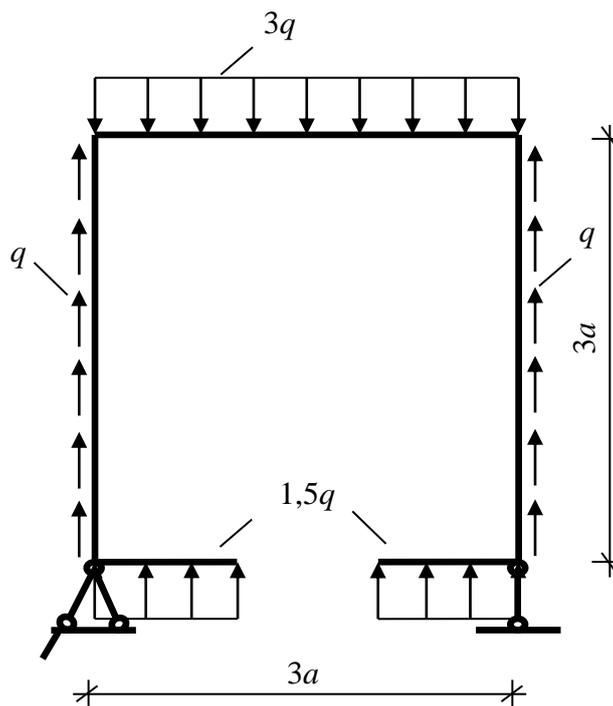


Рис. 5.15

На основе рамной аналогии значения гармонической функции в узлах сетки можно определить из соответствующих эпюр в раме. Выполним построение необходимых эпюр.

Далее предполагаем, что рама закреплена шарнирно, шарнирные опоры расположены в нижних угловых сечениях рамы. Найдем опорные реакции из условия равновесия рамы. Так как нагрузка действует вертикально, то существуют только вертикальные реакции рамы, равные между собой в силу симметрии действия нагрузки и симметрии расположения опор

$$\sum y = 0; \quad -9qa + 3qa \cdot 2 + 1,5qa \cdot 2 + R \cdot 2 = 0; \quad R = 0.$$

Решение показывает, что вертикальные реакции опор отсутствуют. Эпюры внутренних силовых факторов (продольной силы и изгибающего момента) показаны на рис. 5.16.

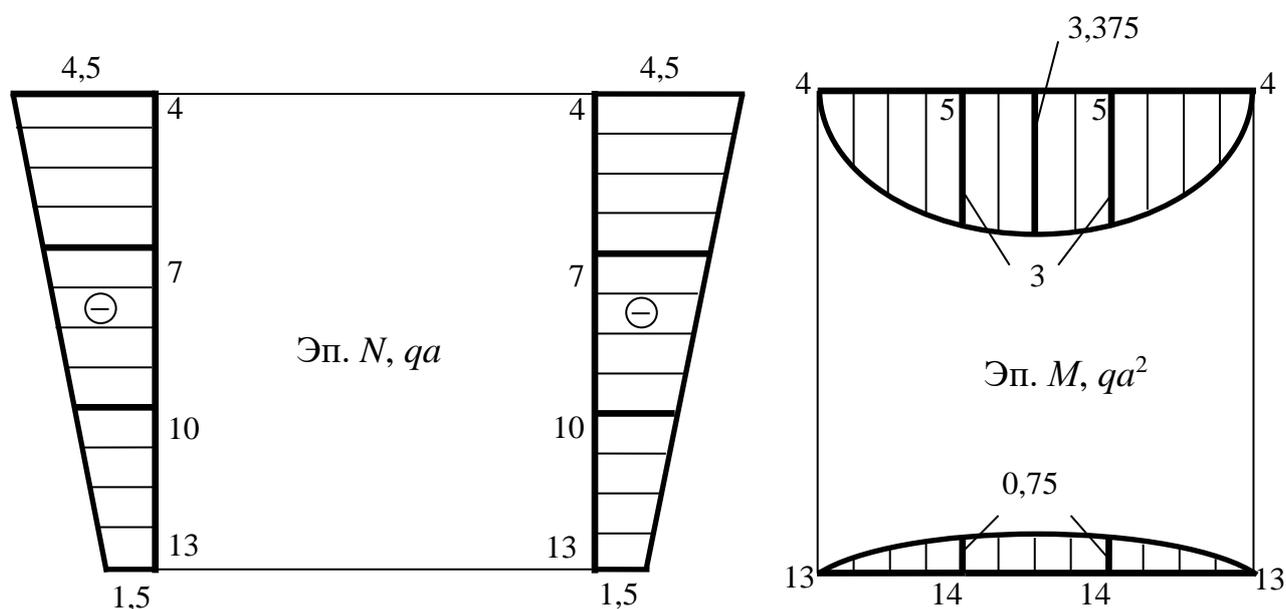


Рис. 5.16

Запишем граничные условия для контурных узлов. На основе построенных эпюр изгибающего момента рамной аналогии имеем следующие значения узловых функций:

$$\varphi_5 = 3qa^2; \quad \varphi_{14} = 0,75qa^2; \quad \varphi_4 = \varphi_7 = \varphi_{10} = \varphi_{13} = 0.$$

Значения функций в законтурных точках запишем по выражению (и):

$$\varphi_1 = \varphi_7 + 2N_4^p a = \varphi_7 = 0 \quad (N_4^p = 0 \text{ на эпюре продольной силы});$$

$$\varphi_2 = \varphi_8 + 2N_5^p a = \varphi_8 \quad (N_5^p = 0 \text{ на эпюре продольной силы});$$

$$\varphi_3 = \varphi_5 + 2N_4^c a = 3qa^2 + 2(-4,5qa)a = -6qa^2;$$

$$\varphi_6 = \varphi_8 + 2N_7^c a = \varphi_8 + 2(-3,5qa)a = \varphi_8 - 7qa^2;$$

$$\begin{aligned}\varphi_9 &= \varphi_{11} + 2N_{10}^c a = \varphi_{11} + 2(-2,5qa)a = \varphi_{11} - 5qa^2; \\ \varphi_{12} &= \varphi_{14} + 2N_{13}^c a = 0,75qa^2 + (-1,5qa)2a = -2,25qa^2; \\ \varphi_{15} &= \varphi_{10} + 2N_{13}^p a = 0 \quad (N_{13}^p = 0 \text{ на эпюре продольной силы}); \\ \varphi_{16} &= \varphi_{11} + 2N_{14}^p a = \varphi_{11} \quad (N_{14}^p = 0 \text{ на эпюре продольной силы}).\end{aligned}$$

В записанных граничных условиях N_i^p – значение продольной силы на ригеле рамы, т. е. на горизонтальной линии контура (ригель – горизонтальный стержень рамы, соответственно верхний индекс « p »). N_i^c – значение продольной силы на стойке рамы, т. е. на вертикальной линии контура (стойка – вертикальный стержень рамы, соответственно верхний индекс « c »). Как видим, граничные условия *содержат две неизвестные функции – функции внутренних узлов исследуемой балки-стенки φ_8 и φ_{11} .*

Составим конечно-разностный аналог бигармонического уравнения. На каждый внутренний узел наложим оператор (5.31).

$$i = 8$$

$$20\varphi_8 - 8(\varphi_5 + \varphi_8 + \varphi_{11} + \varphi_7) + 2(\varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_{11} + \varphi_{10}) + (\varphi_2 + \varphi_7 + \varphi_{14} + \varphi_6) = 0. \quad (5.38)$$

$$i = 11$$

$$20\varphi_{11} - 8(\varphi_8 + \varphi_{11} + \varphi_{14} + \varphi_{10}) + 2(\varphi_7 + \varphi_8 + \varphi_{14} + \varphi_{13}) + (\varphi_5 + \varphi_{10} + \varphi_{16} + \varphi_9) = 0. \quad (5.39)$$

Затем выражения функций контурных узлов подставим в полученные равенства (5.38) и (5.39). После некоторых преобразований (читателю предоставим возможность выполнить их самостоятельно) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных функций φ_8 и φ_{11}

$$\left. \begin{aligned}14\varphi_8 - 6\varphi_{11} &= 24,25qa^2, \\ -6\varphi_8 + 14\varphi_{11} &= 6,5qa^2.\end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений (5.40) используем метод Крамера (метод определителей системы). Составим определитель (детерминант, det) всей системы и вспомогательные определители для неизвестных φ_8 и φ_{11} :

$$\begin{aligned}det &= \begin{vmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 14 \end{vmatrix} = 14^2 - (-6)^2 = 160; \\ det_{\varphi_8} &= \begin{vmatrix} 24,25qa^2 & -6 \\ 6,5qa^2 & 14 \end{vmatrix} = 24,25qa^2 \cdot 14 - (-6)6,5qa^2 = \\ &= 378,5qa^2;\end{aligned}$$

$$\det_{\varphi_{11}} = \begin{vmatrix} 14 & 24,25qa^2 \\ -6 & 6,5qa^2 \end{vmatrix} = 6,5qa^2 \cdot 14 - (-6)24,25qa^2 =$$

$$= 236,5qa^2.$$

$$\varphi_8 = \frac{\det_{\varphi_8}}{\det} = \frac{378,5qa^2}{160} \approx 2,36qa^2;$$

$$\varphi_{11} = \frac{\det_{\varphi_{11}}}{\det} = \frac{236,5qa^2}{160} \approx 1,478qa^2.$$

Итак, все узловые функции балки-стенки известны: выражены через заданные параметры нагрузки и размеры балки-стенки.

Вычислим нормальные и касательные напряжения во всех узлах балки-стенки. Для этого используем формулы вычисления (5.37) или (что аналогично) операторные схемы, показанные на рис. 5.13. Результаты вычислений, равно как и сами вычисления, представим в соответствующих таблицах, приведенных далее. Для каждого вида напряжений представлена отдельная таблица (табл. 5.4 – 5.6). Обозначения узлов сетки, которые использованы в формуле вычислений напряжения σ_x , показаны на рис. 5.13, а. Соответственно обозначения узлов сетки для вычисления напряжения σ_y даны на рис. 5.13, б. При вычислении напряжений мысленно накладываем операторную схему на соответствующий узел, в котором находим напряжения, так, чтобы именно этот узел рассматривался как центральный; далее в соответствии со схемой учитываем все соседние узлы. При вычислении касательных напряжений использована система обозначений узлов сетки, представленная ранее на рис. 5.8.

Примечание. Представим вычисление некоторых вспомогательных функций, которые используются в расчетах табл. 5.4.

$$\varphi_6 = \varphi_8 - 7qa^2 = 2,366qa^2 - 7qa^2 = -4,634qa^2;$$

$$\varphi_9 = \varphi_{11} - 5qa^2 = 1,478qa^2 - 5qa^2 = -3,522qa^2;$$

$$\varphi_A = M_A = 0; \quad \varphi_B = M_B = 0;$$

$$\tau_{xy}^{(13)} = - \frac{0 - (-3,522qa^2) - 1,478qa^2 + 1,478qa^2}{4a^2} = -0,8805q \approx -0,88q.$$

Вычисление нормальных напряжений $\sigma_x^{(k)}$ приведено в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Номер узла сетки	$\sigma_x^{(k)} = \frac{\varphi_a - 2\varphi_k + \varphi_b}{\Delta^2}$		
	Расчетная формула	Расчет	Результат
4	$\frac{\varphi_7 - 2\varphi_4 + \varphi_1}{a^2}$	$\frac{0}{a^2}$	0
5	$\frac{\varphi_8 - 2\varphi_5 + \varphi_2}{a^2}$	$\frac{2,366qa^2 \cdot 2 - 2 \cdot 3qa^2}{a^2}$	-1,268q
7	$\frac{\varphi_{10} - 2\varphi_8 + \varphi_5}{a^2}$	$\frac{0}{a^2}$	0
8	$\frac{\varphi_{11} - 2\varphi_8 + \varphi_5}{a^2}$	$\frac{1,478qa^2 - 2 \cdot 2,366qa^2 + 3qa^2}{a^2}$	-0,254q
10	$\frac{\varphi_{13} - 2\varphi_{10} + \varphi_7}{a^2}$	$\frac{0}{a^2}$	0
11	$\frac{\varphi_{14} - 2\varphi_{11} + \varphi_8}{a^2}$	$\frac{0,75qa^2 - 2 \cdot 1,478qa^2 + 2,366qa^2}{a^2}$	0,16q
13	$\frac{\varphi_{15} - 2\varphi_{13} + \varphi_{10}}{a^2}$	$\frac{0}{a^2}$	0
14	$\frac{\varphi_{16} - 2\varphi_{14} + \varphi_{11}}{a^2}$	$\frac{2 \cdot 1,478qa^2 - 2 \cdot 0,75qa^2}{a^2}$	1,456q

Вычисление нормальных напряжений $\sigma_y^{(k)}$ приведено в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Номер узла сетки	$\sigma_y^{(k)} = \frac{\varphi_a - 2\varphi_k + \varphi_c}{\Delta^2}$		
	Расчетная формула	Расчет	Результат
4	$\frac{\varphi_3 - 2\varphi_4 + \varphi_5}{a^2}$	$\frac{-6qa^2 + 0 + 3qa^2}{a^2}$	-3q
5	$\frac{\varphi_4 - 2\varphi_5 + \varphi_5}{a^2}$	$\frac{0 - 2 \cdot 3qa^2 + 3qa^2}{a^2}$	-3q
7	$\frac{\varphi_6 - 2\varphi_7 + \varphi_8}{a^2}$	$\frac{2,366qa^2 - 7qa^2 - 0 + 2,366qa^2}{a^2}$	-2,268q
8	$\frac{\varphi_7 - 2\varphi_8 + \varphi_8}{a^2}$	$\frac{0 - 2 \cdot 2,366qa^2 + 2,366qa^2}{a^2}$	-2,366q
10	$\frac{\varphi_9 - 2\varphi_{10} + \varphi_{11}}{a^2}$	$\frac{1,478qa^2 - 5qa^2 - 0 + 1,478qa^2}{a^2}$	-2,044q
11	$\frac{\varphi_{10} - 2\varphi_{11} + \varphi_{11}}{a^2}$	$\frac{0 - 2 \cdot 1,478qa^2 + 1,478qa^2}{a^2}$	-1,478q
13	$\frac{\varphi_{12} - 2\varphi_{13} + \varphi_{14}}{a^2}$	$\frac{-2,256qa^2 - 0 + 0,75qa^2}{a^2}$	-1,5q
14	$\frac{\varphi_{13} - 2\varphi_{14} + \varphi_{14}}{a^2}$	$\frac{0 - 2 \cdot 0,75qa^2 + 0,75qa^2}{a^2}$	-0,75q

Вычисление касательных напряжений $\tau_{xy}^{(k)}$ приведено в табл. 5.6.

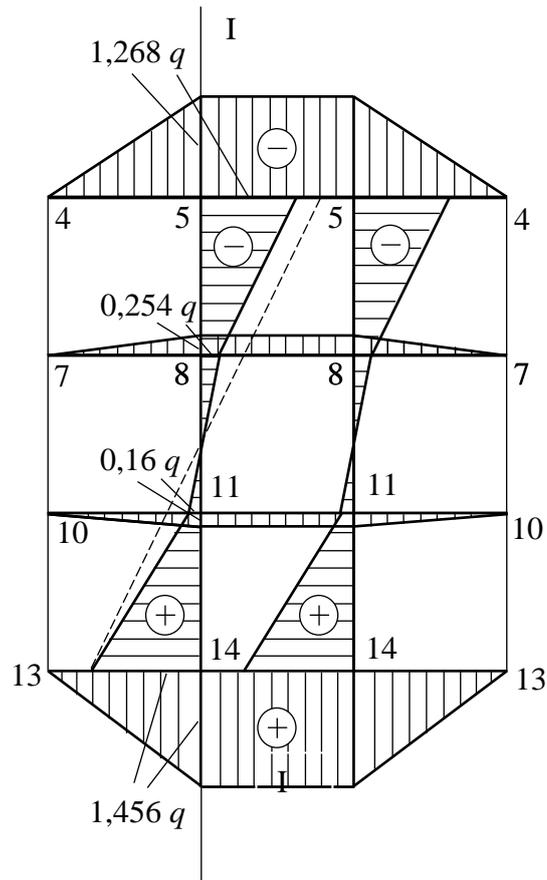
Таблица 5.6

Но- мер узла сетки	$\tau_{xy}^{(k)} = -\frac{\varphi_h - \varphi_e - \varphi_g + \varphi_f}{4\Delta^2}$		
	Расчетная формула	Расчет	Ре- зульт- тат
4	$-\frac{\varphi_6 - \varphi_A - \varphi_8 + \varphi_2}{4a^2}$	$-\frac{(-4,634 - 0 - 2,366 + 2,366)qa^2}{4a^2}$	1,158q
5	$-\frac{\varphi_7 - \varphi_1 - \varphi_8 + \varphi_2}{4a^2}$	$\frac{0 - \varphi_8 + \varphi_8}{4a^2}$	0
7	$-\frac{\varphi_9 - \varphi_3 - \varphi_{11} + \varphi_5}{4a^2}$	$-\frac{(-3,522 + 6 - 1,478 + 3)qa^2}{4a^2}$	-q
8	$-\frac{\varphi_{10} - \varphi_4 - \varphi_{11} + \varphi_5}{4a^2}$	$-\frac{0 - 0 - 1,478qa^2 + 3qa^2}{4a^2}$	-0,38q
10	$-\frac{\varphi_{12} - \varphi_6 - \varphi_{14} + \varphi_8}{4a^2}$	$-\frac{(-2,25 + 4,634 - 0,75 + 2,366)qa^2}{4a^2}$	-q
11	$-\frac{\varphi_{13} - \varphi_7 - \varphi_{14} + \varphi_8}{4a^2}$	$-\frac{0 - 0 - 0,75qa^2 + 2,366qa^2}{4a^2}$	-0,4q
13	$-\frac{\varphi_B - \varphi_9 - \varphi_{16} + \varphi_{11}}{4a^2}$	$-\frac{0 + 3,522qa^2 - 1,478qa^2 + 1,478qa^2}{4a^2}$	-0,88q
14	$-\frac{\varphi_{15} - \varphi_{10} - \varphi_{16} + \varphi_{11}}{4a^2}$	$-\frac{0 - 0 - 1,478qa^2 + 1,478qa^2}{4a^2}$	0

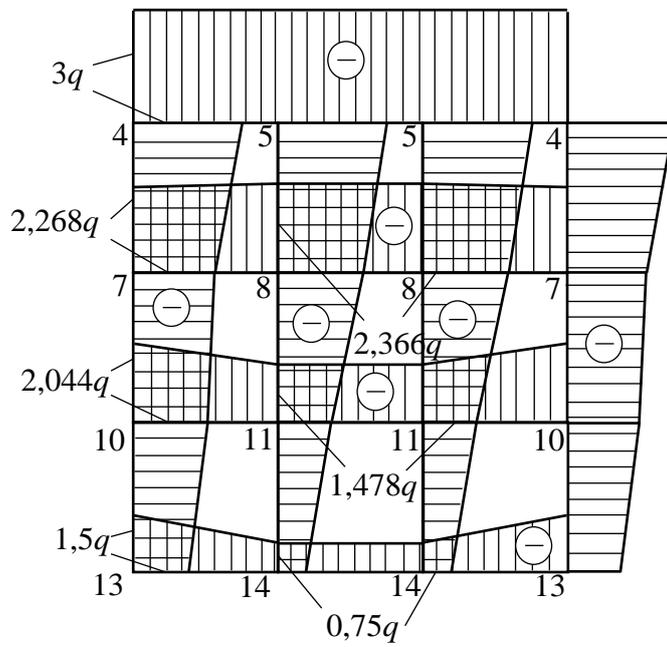
По расчетным значениям напряжений в узлах сетки, представленных в табл. 5.4 – 5.6, на рис. 5.17 – 5.19 показаны построенные эпюры исследуемых напряжений.

Выполним проверки значений построенных эпюр. Известно, что напряжения представляют собой интенсивность внутренних сил. Суммарным выражением внутренних сил являются внутренние силовые факторы, которые должны удовлетворять условиям равновесия.

Рассмотрим проекцию всех внешних и внутренних сил балки-стенки на горизонтальную ось. Так как по условию не действует внешняя горизонтальная нагрузка, следовательно, учитываем внутреннюю продольную силу. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x^{(k)}$ проиллюстрировано на рис. 5.17. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y^{(k)}$ мы видим на рис. 5.18, на рис. 5.19 – распределение касательных напряжений $\tau_{xy}^{(k)}$.



Puc. 5.17



Puc. 5.18

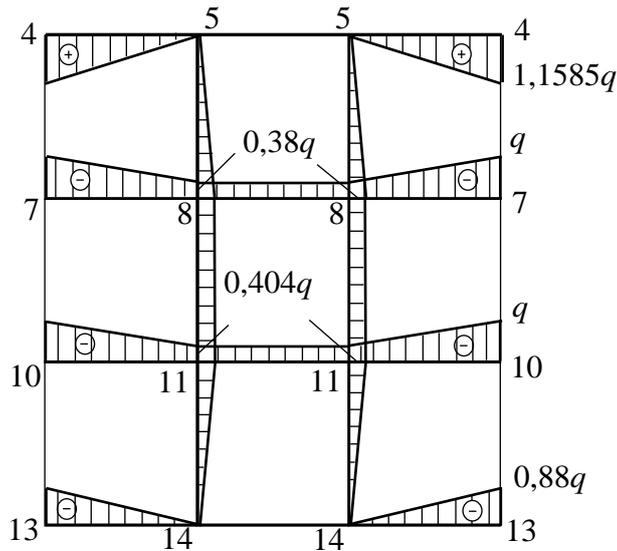


Рис. 5.19

Выполним проверку напряжений по произвольному сечению I – I (см. рис. 5.17). В этом сечении продольная сила должна быть равна нулю, следовательно, площадь эпюры нормальных напряжений σ_x (это и есть общая величина продольной силы) также должна быть равна нулю. Вычислим площадь этой эпюры по линии I – I.

$$\begin{aligned} \sum x &= 0; \\ -\left(\frac{1,268q + 0,254q}{2} a\right) - \left(\frac{0,254q - 0,16q}{2} a\right) + \left(\frac{1,456q + 0,16q}{2} a\right) &= \\ = (-0,761 - 0,047 + 0,808)qa &= (-0,808 + 0,808)qa = 0. \end{aligned}$$

Сравним результаты вычисления нормальных напряжений σ_x методом конечных разностей и методом сопротивления материалов. Максимальные напряжения в крайних волокнах поперечного сечения σ_x можно вычислить по известной формуле сопротивления материалов

$$\sigma_x = \frac{M}{W}.$$

Из эпюры рис. 5.16 $M = 3qa^2$. Величина в знаменателе W – момент сопротивления сечения изгибу (геометрическая характеристика поперечного сечения) есть отношение осевого момента инерции этого сечения J_x к расстоянию от центра тяжести поперечного сечения до наиболее удаленной точки контура этого сечения. В нашем случае рассматривается прямоугольное поперечное сечение основанием единица и высотой $3a$. Будем иметь

$$W = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{1(3a)^3}{12} : \frac{3}{2} a = 1,5a^2.$$

Тогда нормальное напряжение

$$\sigma_x = \frac{3qa^2}{1,5a^2} = 2q.$$

На рис. 5.17 пунктирной линией показана эпюра, построенная по формуле сопротивления материалов. Как видим, существует расхождение найденных значений МКР и методом сопротивления материалов.

Выполним проверку равновесия по произвольному горизонтальному сечению, например, сечению II – II. На рис. 5.20 показана часть балки-стенки, которая рассматривается в этом случае.

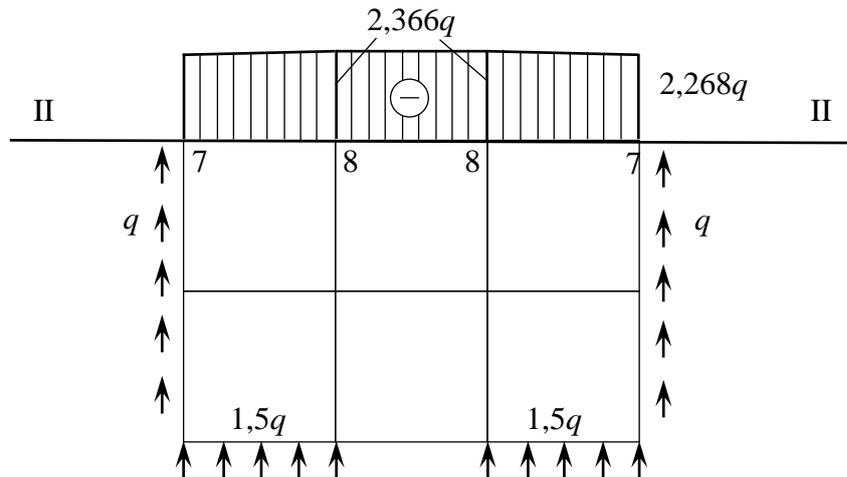


Рис. 5.20

$$\sum y = 0;$$

$$q \cdot 2a \cdot 2 + 1,5qa \cdot 2 - \left(\frac{2,268q + 2,366q}{2} a \cdot 2 + 2,366qa \right) =$$

$$= 7qa - (4,634qa + 2,366qa) = 7qa - 7qa = 0.$$

Вычислим суммарный момент этой же части балки-стенки (см. рис. 5.20) относительно узла 7, расположенного слева на сетке (симметричный узел 7 справа не рассматриваем).

$$\sum m_7^{\text{лев}} = 0;$$

$$- \left(2,268qa \frac{a}{2} + \frac{1}{2} (2,366q - 2,268q) a \frac{2}{3} a \right) - 2,366qa \frac{3}{2} a -$$

$$- \left(2,268qa \frac{5}{2} a + \frac{1}{2} (2,366q - 2,268q) a \left(\frac{2}{3} a + a + \frac{1}{3} a \right) \right) +$$

$$+ 1,5qa \frac{a}{2} + 1,5qa \left(2a + \frac{a}{2} \right) + q \cdot 2a \cdot 3a = (-10,48367 + +10,5)qa \approx 0.$$

Как видим, проверки выполняются. В последней проверке погрешность вычислений составляет менее 0,2 %.

В заключение можно отметить следующее. Выполненные проверки являются частным случаем проверок. При расчетах могут возникать существенные погрешности вычислений, которые уменьшаются с уменьшением шага сетки. Чем меньше шаг сетки, тем точнее поле напряжений можно получить.

Представленный пример расчета балки-стенки показывает, что аналитический расчет пластины методом конечных разностей является трудоемким и выполняем для ограниченного числа узлов. Трудоемкость расчета возрастает с уменьшением шага сетки и соответственно увеличением количества узлов сетки. В настоящее время существует множество программ численного расчета пластин методом конечных разностей. Поэтому в реальной практике выполняется именно численный расчет пластин. Однако знание аналитического расчета необходимо для понимания методики расчета и верной трактовки полученных (численно) результатов.

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеют дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи теории упругости?
2. Что такое бигармоническое уравнение и какую задачу решают с его помощью?
3. Какой вид имеют граничные условия в случае плоского напряжённого состояния?
4. Какой вид имеет обобщенный закон Гука в случае плоского напряжённого состояния?
5. Как связаны компоненты напряжения с функцией напряжения?
6. Какова размерность функции напряжения?
7. Что означают термины сетка, узлы сетки, конечные приращеня?
8. В чём заключается идея вычисления производных на основе метода конечных разностей?
9. Производные какого порядка входят в бигармоническое уравнение?
10. Какова методика применения метода конечных разностей для вычисления функции напряжения?
11. В чем состоит суть рамной аналогии?

Глава 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ И МАКСИМАЛЬНОЙ ГЛУБИНЫ ЕГО ПРОЯВЛЕНИЯ В ГРУНТЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Проектировщикам часто приходится сталкиваться с комплексом проблем, возникающих при строительстве новых и реконструкции существующих инженерных сооружений в районах распространения слабых водонасыщенных, глинистых, торфяных грунтов и илах, которые занимают значительное пространство территории России. На основании, конструкции, здания и сооружения действует комплекс неблагоприятных факторов, динамические нагрузки, технологические или аварийные температуры, вызывающие снижение прочностных и деформативных свойств грунтов. Всё это оказывает решающее влияние на несущую способность и долговечность зданий и сооружений. Несмотря на успешное строительство и эксплуатацию промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах, на практике приходится сталкиваться с авариями и деформациями инженерных сооружений. Причина аварий кроется в неправильной информации о характеристиках сжимаемости, прочности, ползучести грунтов, которую дают существующие исследования. Все это требует более обоснованного подхода к учёту особых условий при проектировании и строительстве сооружений на слабых грунтах, определяет необходимость проведения научно-исследовательских и опытно-экспериментальных работ для изучения несущей способности грунтов в городских и сельских регионах.

Ниже будут рассмотрены расчёты моделей устойчивости слабых однослойных и многослойных грунтов оснований инженерных сооружений под действием различных видов внешних нагрузок.

6.1. Фазы деформированного состояния грунтов в зависимости от статических нагрузок

Напряжённое состояние определяется с использованием решений теории линейно деформируемого грунта, если в основании фундамента или полностью отсутствуют зоны, в которых нарушена прочность грунта и он находится в предельном состоянии, или они незна-

чительны по своим размерам. Напряжения, возникающие в грунтовой среде, могут превзойти силу внутренних связей (предельную прочность). Это приведёт к нарушению существующего равновесия, потере устойчивости грунтовых оснований сооружений. При действии увеличивающихся статических нагрузок на слабые грунты основными прочностными показателями сопротивления грунтового слоя считаются показатели сопротивления их сдвигу. Показатели сопротивления грунтов сдвигу являются непостоянными и зависят от многих причин: давления, условий в точках контакта участков грунта, его плотности, сжимаемости, деформативности и других факторов. Вместе с этим при действии возрастающих вертикальных давлений в грунтовой среде возникает фазовое напряженно-деформированное состояние грунта, которое изучается для инженерных расчётов грунтового основания, его прочности, устойчивости, сжимаемости, горизонтальных и угловых перемещений.

Анализ испытания основания штампом [5] позволяет выделить следующие фазы напряженно-деформированного состояния грунта: 0 – фаза упругих деформаций; I – фаза уплотнения; II – фаза сдвигов; III – фаза выпора. Кратко охарактеризуем напряженно-деформированное состояние грунта в каждой из выделенных фаз (рис. 6.1).

На рисунке обозначено: $P_{стр}$ – структурная прочность; $^{нач}P_{кр}$ – начальное критическое давление; $^{пред}P_{кр}$ – предельное критическое давление; R – расчетное сопротивление грунта.

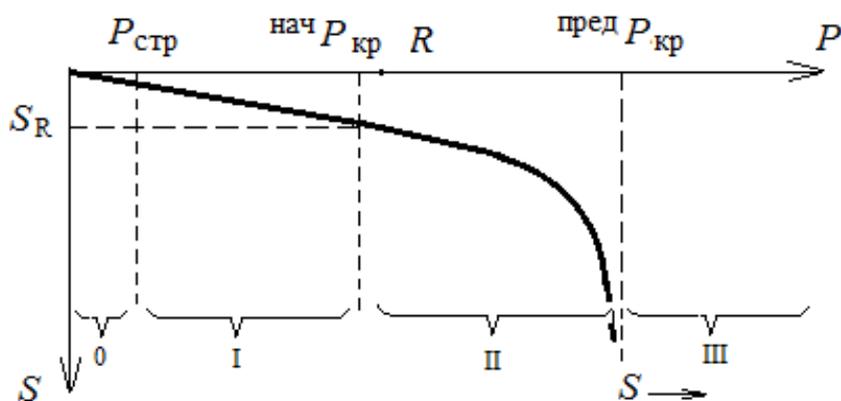


Рис. 6.1

Фаза упругих деформаций характеризуется уровнем напряжений в скелете грунта, не превышающим прочность структурных связей между минеральными частицами грунта или структурной прочностью грунта [5]. Деформации грунта в этой фазе обратимы и пренебрежимо малы, так как обусловлены сжимаемостью минеральных частиц. Уровень напряжений, соответствующий концу этой фазы, называется структурной прочностью грунта $P_{стр}$ и обычно не превышает 5 – 10 % допустимых на грунт давлений.

В этом случае в соответствии с диаграммой напряжений Мора соблюдается допредельное устойчивое напряжённое состояние, отвечающее условию [5]:

$$\tau \leq \operatorname{tg} \varphi + C \text{ или } \tau \leq \sigma f + C,$$

где постоянные $f = \operatorname{tg} \varphi$ и C – коэффициент внутреннего трения и коэффициент сцепления, τ – касательное напряжение, действующее в заданных точках грунта, σ – нормальное напряжение в этих точках.

Фаза уплотнения соответствует уровням напряжений в грунте, в диапазоне которых процесс его деформирования удовлетворительно подчиняется закону уплотнения Терцаги [5]. Линейная зависимость между деформациями и напряжениями в этой фазе не является обратимой. При разгрузке штампа из диапазона давлений, соответствующего фазе уплотнения, грунт деформируется по линейной зависимости, не совпадающей с ветвью нагрузки. При полной разгрузке штампа имеет место необратимая (пластическая) осадка, соответствующая нулевым напряжениям по подошве. Таким образом, закон уплотнения Терцаги устанавливает линейную зависимость между напряжением и суммой упругой и пластической деформации грунта.

Фаза сдвигов характеризует начало образования в грунте зон предельного равновесия [5]. Зоной предельного равновесия в грунте называют геометрическое место точек, в которых не удовлетворяются условия прочности Кулона – Мора. Первоначально эти зоны образуются по краям штампа, где имеет место концентрация напряжений. Уплотнение грунта в этой фазе практически не происходит. Грунт считается несжимаемым, а коэффициент Пуассона в этой фазе близок к 0,5. Давление на грунт, соответствующее началу фазы сдвигов, называют начальным критическим давлением $P_{кр}^{нач}$. В этом случае соблюдается предельное равновесие, отвечающее условию [5]:

$$\tau = \operatorname{tg} \varphi + C \text{ или } \tau = \sigma f + C.$$

Фаза выпора – это следствие развития фазы сдвигов в области грунтового массива, являющегося основанием штампа, с образованием поверхностей скольжения, отделяющих основание штампа от нижележащего грунтового массива. В результате этого осадки штампа происходят без увеличения нагрузки за счет перемещения грунта основания. Вокруг штампа происходит поднятие (выпор) грунта. Давление, при котором наступает фаза выпора, называется предельным критическим $P_{кр}^{пред}$ [5].

В соответствии с охарактеризованными выше фазами напряженно-деформированного состояния грунта применяются следующие расчетные модели, приведённые в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Уровень давлений P	Расчетная модель грунта	Характеристики модели грунта	Методы анализа
$P \leq P_{стр}$	Упругая среда	Модуль упругости	Теория упругости
$P_{стр} < P < P_{кр}^{нач}$	Линейно деформируемая неупругая среда	Модуль деформации при нагрузке и модуль упругости при разгрузке	Теория упругости анизотропной среды
$P_{кр}^{нач} \leq P < P_{кр}^{пред}$	Упругопластическая среда	Функциональная зависимость деформаций от напряжений	Теория пластичности

6.2. Методы расчёта критических усилий

Для определения размеров подошвы фундамента важно знать давление, при котором под краями фундамента в грунте начинает образовываться предельная зона, и как эта зона будет затем увеличиваться по мере возрастания нагрузки на грунтовое основание вплоть до своего максимального размера, соответствующего потере основанием несущей способности.

Задача о критической нагрузке на грунт была впервые рассмотрена немецким учёным Л. Прандтлем (1921 г.). Приняв, что среда обладает только сцеплением, и пренебрегая собственным весом грунта, он выразил критическую нагрузку в условиях плоской задачи следующей формулой [5]:

$$P_{\text{макс. кр}} = (\pi + 2,0) C = 5,14 C,$$

где C – сцепление в среде, отвечающее структурному сцеплению скалистых пород C_c и давления связности $P_e = C \operatorname{tg} \varphi$ для пластичных глинистых грунтов.

Учитывая шероховатость подошвы фундаментов, Терцаги для условий плоской задачи дал такое выражение [5]:

$$P_{\text{кр}} = 5,7 C.$$

Формула Паукера была дана в следующем виде [5]:

$$P_{\text{макс. кр}} = \gamma h_{\text{заглуб}} \operatorname{tg}^4(45^\circ + \varphi/2).$$

В дореволюционной России формула Паукера применялась с коэффициентом запаса $k_{\text{зап}} = 1,5 \div 2,0$ и имела следующий вид [5]:

$$P_{\text{зап}} = \frac{1}{k_{\text{зап}}} \gamma (h_{\text{загл}} + h_c) \operatorname{tg}^4 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Давление, соответствующее началу возникновения области пластической деформации и названное начальной критической нагрузкой [5], было установлено Н. П. Пузыревским (1934 г.) для несвязного грунта, у которого $C = 0$, потом Н. М. Герсевановым [5] и О. К. Фрелихом (1938 г.). Ими был рассмотрен случай, когда распределение напряжений от собственного веса в грунте было гидростатическим, т. е. коэффициент бокового давления в условиях естественного залегания $\xi_0 = 1$.

Согласно обоснованному утверждению, высказанному В. А. Флоринным [5], этот коэффициент может изменяться в широких пределах и быть более или менее единицы. Коэффициент ξ_0 является отношением бокового давления к вертикальному в естественном массиве грунта и зависит от условий формирования грунта, а также изменения напряженного состояния вследствие выемки грунта из котлована, в который устанавливается фундамент. Кроме решения для случая $\xi_0 = 1$, Н. М. Герсевановым были получены зависимости для вычисления $P_{\text{кр}}$ путем подбора для

$$\xi_0 = v_0 / (1 - v_0) \leq 1 \text{ и } C = 0,$$

где v_0 – коэффициент Пуассона грунта.

В связи с тем, что ограничивать среднее давление под фундаментом таким низким пределом, как $P_{\text{кр}}$ оказалось нерациональным, в настоящее время вводится устанавливаемое для фундаментов, имеющих одинаковую нагрузку по бокам, ограничение, соответствующее образованию незначительных областей пластической деформации, по глубине не превосходящих одной четверти ширины подошвы фундамента. В связи с этим внутри пластической области оказывается такое

напряженное состояние, при котором угол наибольшего отклонения равнодействующей от нормали к площадке в несвязном грунте превышает угол внутреннего трения грунта.

Построение границ пластических областей конечных размеров на основе теории упругости было обстоятельно рассмотрено в работе М. И. Горбунова – Посадова (1949 г.), где показано, что такие области возникают либо под краями фундамента, либо при $\xi_0 < 1$ на оси симметрии на некоторой глубине и потом расширяются с увеличением нагрузки, занимая все больший объем. Здесь исследуется условие образования пластической области, под краем фундамента в случае, когда ξ_0 может иметь любое значение и быть как менее единицы, так и более нее, а влияние веса вышележащей толщи грунта, как это обычно делается, заменено нагрузкой P_0 . Расчетная схема этой задачи представлена на рис. 6.2, где рассматривается полубесконечная нагрузка.

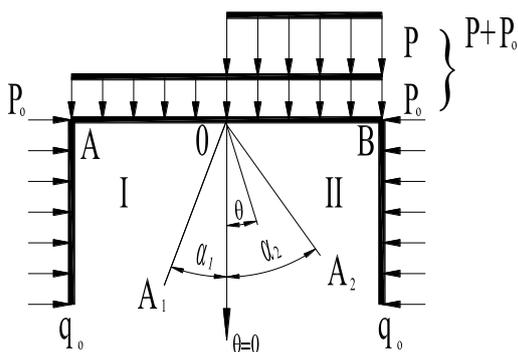


Рис. 6.2

До момента, пока P невелико, в полуплоскости наблюдается чисто упругое состояние, а при $P = P_{кр}$ происходит зарождение пластической области. Как показал И. В. Федоров [5], зарождение пластической области начинается вдоль луча, имеющего угол наклона к вертикали $\theta = -\varphi$.

Полуплоскость разделена на 3 клина: I – AOA_1 , II – A_2OB и III – A_1OA_2 . На их границах заданы следующие условия [5]:

- вдоль AO (при $\theta = -\pi/2$), $\sigma_\theta = P_0$; $\tau_{r\theta} = 0$;
- вдоль OB (при $\theta = \pi/2$), $\sigma_\theta = P + P_0$; $\tau_{r\theta} = 0$;
- вдоль OA_1 (при $\theta = \alpha_1$) и OA (при $\theta = \alpha_2$),

$$\sigma_r = \sigma_\theta (1 + \sin^2\varphi) / (\cos^2\varphi) + 2c \operatorname{ctg}\varphi; \quad \tau_{r\theta} = -(\sigma_\theta \operatorname{tg}\varphi + c).$$

Для компонент напряжений в областях I и II использованы выражения, удовлетворяющие основным уравнениям теории упругости [5]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_1 - C_2 2\theta + D_1 \sin 2\theta - D_2 \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= C_1 - C_2 2\theta - D_1 \cos 2\theta + D_2 \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= C_2 + D_1 \cos 2\theta + D_2 \sin 2\theta, \end{aligned} \right\}$$

где C_1 , C_2 , D_1 и D_2 – коэффициенты.

Для пластической области III используется решение Прандтля для клина, в котором произведены дальнейшие преобразования (σ_θ при $\theta = \alpha_1$ обозначено $\sigma_\theta^{\alpha_1}$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= (\sigma_0^{\alpha_1} + C \operatorname{ctg} \varphi) e^{2(\theta - \alpha_1) \operatorname{tg} \varphi} - C \operatorname{ctg} \varphi, \\ \sigma_r &= \sigma_\theta \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + C \operatorname{ctg} \varphi, \\ \tau_{r\theta} &= -(\sigma_\theta \operatorname{tg} \varphi + C). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

В результате теоретических преобразований было получено выражение для критической нагрузки [5]

$$P_{\text{кр}} = \pi \left[C - \frac{P_0^2}{4C} (1 - \xi_0)^2 \right], \quad (6.2)$$

где P_0 – начальная внешняя нагрузка; ξ_0 – коэффициент бокового давления в условиях естественного залегания.

Более сложными, чем выражения (6.1) и (6.2), получаются зависимости, если грунт обладает трением и сцеплением, т. е. $\varphi \neq 0$ и $C \neq 0$. В этом случае образование пластической области начнётся вдоль луча, у которого величина

$$[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2] / (\sigma_r + \sigma_\theta + 2C \operatorname{ctg} \varphi)^2 \quad (6.3)$$

достигает максимального значения и, в свою очередь, равно $\sin^2 \varphi$. Подставляя в выражение (6.3) зависимости (6.2), соответствующие упругому решению, и путем последующих теоретических преобразований получим известную формулу Герсеванова – Фрелиха [5]

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(P_0 + C \operatorname{tg} \varphi)}{\operatorname{ctg} \varphi - \pi/2 + \varphi},$$

где P_0 – начальная внешняя нагрузка.

При начальных значениях $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta_{\text{зар}}$ и конечных для полного раскрытия области III: $\alpha_1 = -(\pi/4 + \varphi/2)$; $\alpha_2 = (\pi/4 - \varphi/2)$ в результате расчётов [5] была получена формула Прандтля

$$\frac{P}{P_0 + C \operatorname{ctg} \varphi} + 1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\pi \operatorname{tg} \varphi}$$

Таким образом, оказывается, что нагрузка $P_{\text{кр}}$, при которой происходит зарождение (начало образования) пластической области, зависит от коэффициента бокового давления ξ_0 , причем $P_{\text{кр}}$ имеет наибольшее значение при $\xi = 1$. Предельное состояние может возникнуть вдоль луча, направленного как под фундамент при $\xi_0 < 1$, так и в противоположную сторону от него при $\xi_0 > 1$.

Предельное напряжённое состояние полуплоскости может быть получено путём решения задачи теории предельного равновесия.

Решение дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием предельного равновесия Кулона – Мора позволяет определить напряжения в полуплоскости, построить сетку линий скольжения и найти значение предельного давления на основание.

Предельное давление при полосовой нагрузке на невесомую полуплоскость описывается решением Прандтля [5] (рис. 6.3)

$$P_{\text{кр}}^{\text{пред}} = (q + C \operatorname{ctg} \varphi) \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} - C \operatorname{ctg} \varphi,$$

где C – удельное сцепление грунта ; φ – угол внутреннего трения; $q = \gamma h$ – боковая нагрузка ; h – глубина приложения полосообразной нагрузки; γ – удельный вес грунта.

При $P = P_{\text{пр}}$ среда во всей полуплоскости, ограниченной сверху поверхностью, снизу линиями скольжения, переходит в идеальное пластическое состояние. Деформации среды задача теории предельного равновесия не рассматривает.

Для водонасыщенных глинистых грунтов и нестабилизированного их состояния (когда внутреннее трение не реализуется) А. С. Строгановым была получена предельная нагрузка [5].

$$P_{\text{кр}}^{\text{пред}} = 6,025 C + \gamma h,$$

где C – удельное сцепление грунта; γh – боковая нагрузка от веса грунта; h – толщина грунтового слоя от уровня поверхности земли до подошвы фундамента.

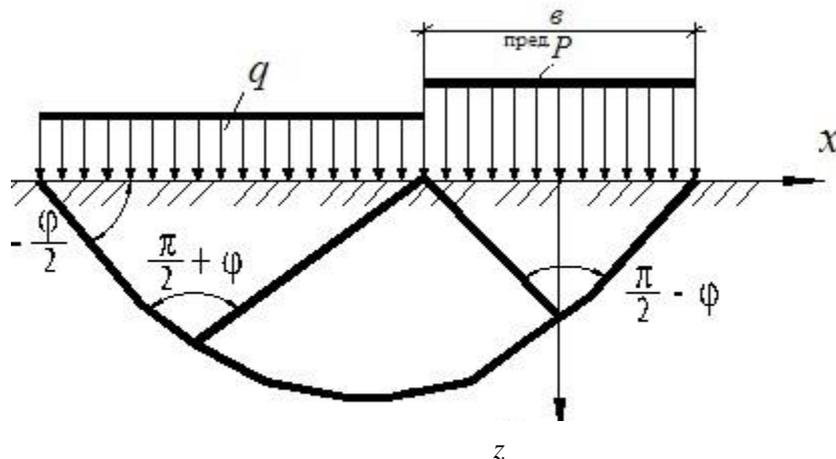


Рис. 6.3

При оценке несущей способности пластичных глинистых грунтов за рубежом часто используют формулу, предложенную А. Скемптоном [5]:

$$P_{кр} = CN_C + \gamma h_{загл},$$

$$\text{где } N_C = 5 \left(1 + 0,2 \frac{B}{L} \right) \left(1 + 0,2 \frac{h_{загл}}{B} \right);$$

$B = 2b$ – ширина и L – длина прямоугольного фундамента.

Таким образом, смешанная задача соединяет решение теории упругости для начальной стадии нагружения и решение теории предельного равновесия. Это преимущество важно с точки зрения получения единой теории, описывающей поведение грунтового основания в полном интервале нагрузок. Расчётные методы теории упругости и теории предельного равновесия широко используются в практике проектирования при исследовании слабых и неслабых грунтов.

Анализируя существующие методы расчёта критических усилий, нами было замечено отсутствие отдельных формул для расчёта критических усилий от действия некоторых внешних нагрузок. Используя известные законы теории предельного равновесия и экспериментальные исследования, были найдены аналитические зависимости критических усилий от действия внешних нагрузок.

6.3. Расчёт несущей способности многослойных и однослойных грунтовых сред

В [5] решена задача об оценке критического усилия в модели грунтовой среды в виде однородного, тяжёлого, упругого полупространства под действием внешней нагрузки, приложенной к полупространству, эпюра которой представляет прямоугольный треугольник (рис. 6.4). Такая ситуация характерна для откосов насыпи полотна автомобильных и железных дорог и других случаев.

В настоящей главе рассмотрены более общие случаи, когда модель грунтовой среды представляет собой два плоскопараллельных слоя, лежащих на однородном полупространстве, а эпюра внешней нагрузки имеет вид разных треугольных и трапециевидных нагрузок.

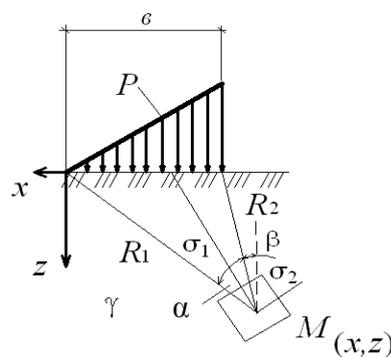


Рис. 6.4

Тогда напряжённое состояние слоистой модели будет определяться весом плоскопараллельных слоёв и полупространства $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ и влиянием плоской треугольной нагрузки $P_{кр}$, где σ_x^0 и σ_z^0 – начальные составляющие напряжений; $\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ – давление от собственного веса слоёв грунта с учётом водонасыщенного слоя до уровня z .

Для однослойной грунтовой среды расчётная схема представляет собой полупространство с распределённой внешней нагрузкой P . Полупространство находится в гидростатическом напряженном состоянии $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma z$, где σ_x^0 и σ_z^0 – начальные составляющие напряжений; γz – нагрузка от веса грунта до уровня z .

Напряжённое состояние в полупространстве определяется весом полупространства до уровня z и влиянием внешней нагрузки. Задача заключается в определении такой величины критического давления $P_{кр}$, при котором область предельного равновесия распространяется на глубину z_{\max} .

6.4. Треугольная нагрузка

Формулы для вычисления критического давления $P_{кр}$ и максимальной глубины его проявления z_{\max} были получены на основании известных аналитических решений [5] для модели грунтовой среды, изображенной на рис. 6.5.

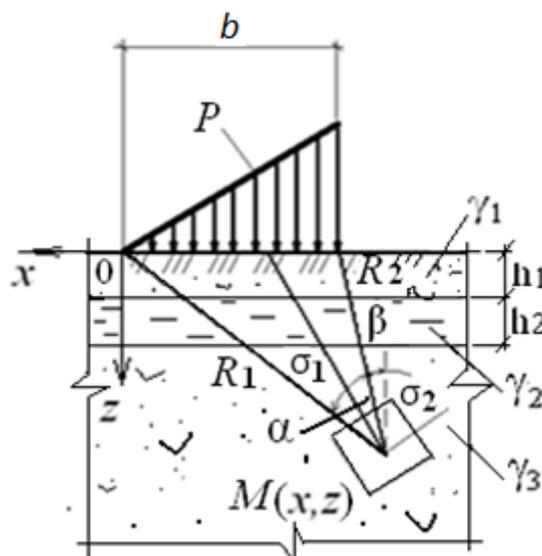


Рис. 6.5

Формулы главных напряжений, обусловленных действием треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{P}{\pi} \left(\frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left(\frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \\ &+ \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \\ \sigma_2 &= \frac{P}{\pi} \left(\frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left(\frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \\ &+ \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)],\end{aligned}$$

где P – внешняя нагрузка; x, z – координаты точки M ; b – длина базы действия треугольной нагрузки; α – угол видимости базы действия нагрузки. Подставим выражения σ_1 и σ_2 в формулу условия предельного равновесия [5]

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + P_e \right),$$

где $P_e = C \operatorname{tg} \varphi$ – давление связности; C – удельное сцепление связного грунта; φ – угол внутреннего трения грунта.

Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}P}{\pi} \left(\frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) &= 2 \sin \varphi \left(\frac{P}{\pi} \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{2P}{\pi} \frac{x}{b} \alpha + \gamma_1 h_1 + \right. \\ &+ \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)] + C \operatorname{ctg} \varphi \left. \right) \quad (6.4)\end{aligned}$$

Решая уравнение (6.4) относительно z , получим

$$z = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (6.5)$$

Найдём угол видимости α , при котором $z = z_{\max}$, продифференцировав для этого уравнение (6.5) по α :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}} = 0.$$

При условии, что $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$, т. е. $R_1 \neq R_2$

$$\frac{2x \sin \varphi}{b} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha = 0;$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos\left(\frac{x}{0,36b} \sin \varphi\right). \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в уравнение (6.5), получим формулу для z_{\max}

$$z_{\max} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{b}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}, \quad (6.7)$$

где x – ордината центра тяжести эпюры треугольной нагрузки; R_1 и R_2 – направляющие, соединяющие начало и конец полосовой нагрузки с точкой M на глубине z .

Для определения $P_{\text{кр}}$ подставим (6.7) в формулу

$$z_{\max} = \frac{0,88PB}{C_z},$$

где $C_z = E/(1 - \nu^2)$ – коэффициент упругого полупространства; $B = b$ – база действия нагрузки; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль деформации, принимаются постоянными для полупространства [5].

После выполнения всех преобразований получим квадратное уравнение

$$0,88P^2 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - P(0,88\pi b \gamma_3 + \frac{2xC_z \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71C_z \sin \frac{2}{3} \alpha) - \quad (6.8)$$

$$- \pi C_z \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] = 0.$$

Приведём уравнение (6.8) к следующему виду:

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (6.9)$$

где $M = 0,88 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi)$;

$$N = -(0,88\pi b \gamma_3 + \frac{2x C_z \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71C_z \sin \frac{2}{3} \alpha);$$

$$L = -\pi C_z \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi].$$

Решая квадратное уравнение (6.9), получим формулу для вычисления критического усилия $P_{кр}$

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[\left(1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (6.10)$$

Формулы (6.7) и (6.10) позволяют вычислять z_{\max} и $P_{кр}$ в полупространстве. В этих формулах z_{\max} и $P_{кр}$ зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая различные значения z_{\max} и $P_{кр}$, можно получить формулы для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. Например, при $b \rightarrow \infty$ эпюра внешней нагрузки будет иметь вид полубесконечной полосы; при $h_1 = h = 0$ получим формулу z_{\max} и $P_{кр}$ для однослойной грунтовой среды. На рис. 6.6, а, б и 6.7, а, б приведены зависимости $P_{кр}$ от удельного веса полупространства, удельного сцепления C и угла полного внутреннего трения φ . При расчёте принято $h_1 = h_2 = 0,3$ м, $\gamma_1 = 15,05$ кН/м³, $\gamma_2 = 10,3$ кН/м³, $b = 1$ м, коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды $\nu = 0,12$.

Расчёт z_{\max} и $P_{кр}$ выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл. 6.2), соответствующим глинам мягкопластичных пород.

Графически зависимости $P_{кр}$ и z_{\max} от физико-механических свойств грунтовой среды приведены на рис. 6.6, а, б и 6.7, а, б.

Таблица 6.2

Наименование грунта	Удельный вес γ , кН/м ³	Угол внутреннего трения φ , °	Макс. глубина пред. напряжённого состояния z_{\max} , м	Удельное сцепление грунта C , кПа	Модуль деформации грунта E , МПа	Коэффициент упругого полупространства C_z , МПа
Глины мягкопластичных пород	18,8	8	0,20	28	10	11,24
	18,9	9	0,22	29	13	14,61
	19,1	11	0,24	30	14	15,73
	19,3	13	0,30	31	16	17,98

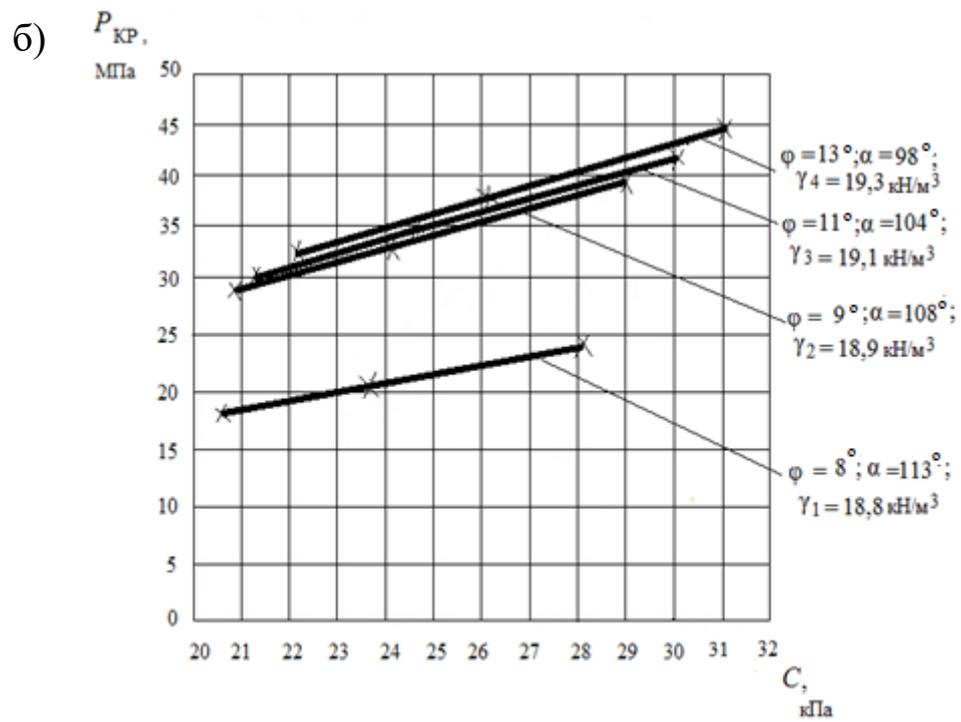
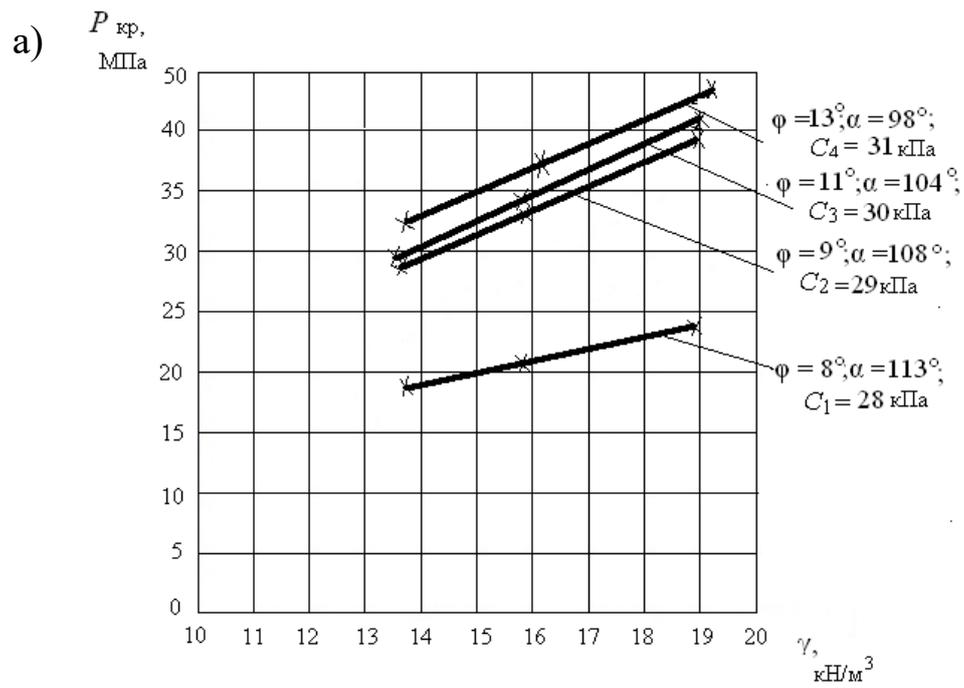


Рис. 6.6

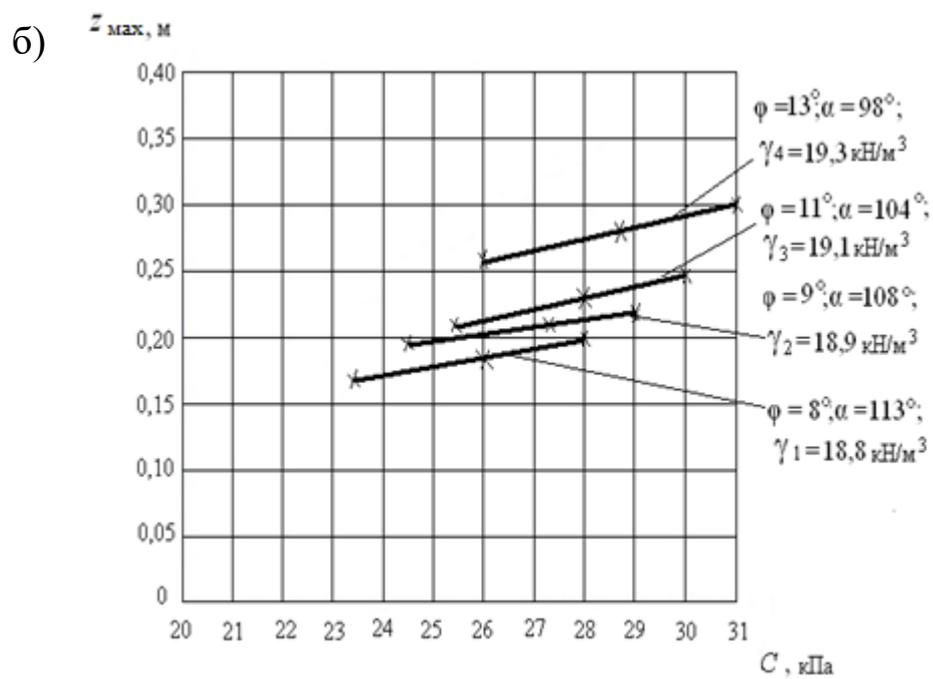
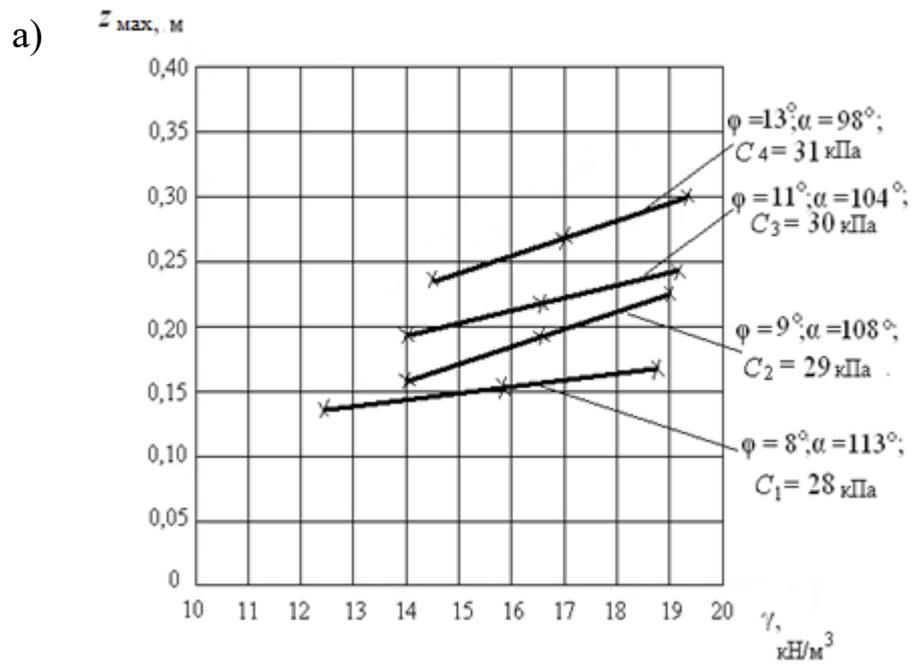


Рис. 6.7

Анализируя полученные зависимости и сопоставляя численные значения характеристик, следует отметить:

– зависимости $P_{кр}$ от физико-механических характеристик пространства являются квазилинейными, как и для случая, рассмотренного в [5];

– с увеличением значений физико-механических характеристик происходит увеличение $P_{кр}$ и z_{max} ;

– точки с координатами z_{max} , в которых усилия достигают критической величины $P_{кр}$, находятся в полупространстве, поскольку всегда $z_{max} > h_1 + h_2$;

– для зависимости $P_{кр}(\gamma)$ увеличение критического усилия происходит не только с ростом γ , но также с увеличением φ и C ; при этом угловой коэффициент (угол наклона графиков $P_{кр}(\gamma)$ к оси абсцисс) увеличивается с ростом φ и C .

Всё это указывает на возрастание несущей способности грунтовой среды, причем значения угла видимости уменьшаются. Линейные зависимости $P_{кр}$ от φ , γ , C , α позволяют упростить вычисление критических усилий для треугольной нагрузки.

Контрольные вопросы

1. Из каких фаз состоит процесс деформирования грунта под действием статической нагрузки?
2. Какими физико-механическими свойствами характеризуется грунт?
3. Какое напряжённое состояние называют гидростатическим?
4. От каких физико-механических свойств грунта зависит критическое усилие?
5. Что такое коэффициент бокового давления и от чего он зависит?
6. Какой вид имеет условие предельного равновесия грунта?
7. Как изменяется критическое усилие с увеличением физико-механических характеристик грунта?
8. Что такое фаза выпора при деформировании грунта?
9. Какие существуют методы расчёта критического усилия?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии изложены основы широко применяемого в настоящее время при проведении различных по тематике и целям научно-исследовательских работ метода математического моделирования. Его изучение призвано существенно расширить эрудицию и кругозор магистрантов и значительно дополнить их научно-методический инструментарий. В настоящем пособии область применения метода математического моделирования ограничена задачами только строительства в соответствии с направлением подготовки магистрантов.

Задача книги – познакомить магистрантов с методикой применения метода математического моделирования для решения типичных задач строительной науки и практики и дать им навыки составления математических моделей, т. е. научить математически адекватно описывать исследуемые объекты, их свойства и прогнозировать процессы изменения этих объектов в зависимости от изменения условий, в которых может находиться объект; обоснованно оценивать влияние свойств объектов на их поведение; выделять существенные свойства объектов; корректировать модель, сообразуясь с поведением реального объекта, для которого математическая модель служит некоторой идеализацией, обобщением и в некоторой степени упрощением.

Для закрепления навыков применения метода математического моделирования предусмотрено самостоятельное выполнение расчётно-графических работ по каждому из четырёх разделов пособия. Текущий контроль оценки степени понимания и усвоения теоретического материала осуществляется с помощью контрольных вопросов, приведенных после каждой главы.

Авторы пособия надеются, что освоение метода математического моделирования позволит магистрантам решать любые по сложности задачи строительной науки и практики и повысить их профессиональный уровень.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности : учеб. для строит. специальностей вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд, испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 400 с. – ISBN 5-06-004280-46-3.

2. *Безухов, Н. И.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач : учеб. пособие для втузов / Н. И. Безухов, О. В. Лужин. – М. : Высш. шк., 1974. – 200 с.

3. *Большаков, А. А.* Прямоугольная пластина на двухпараметрическом упругом основании: аналитическое решение / А. А. Большаков // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – № 8(89). – С. 128 – 133.

4. Расчет балок, лежащих на сплошном упругом основании : конспект лекций по механике твердого деформируемого тела для студентов специальности «Строительство автомобильных дорог и аэродромов» / Владим. гос. ун-т. ; сост.: В. П. Валуйских, Л. Е. Кондратьева. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 1998. – 40 с.

5. Расчёт однослойных и многослойных грунтовых сред от действия внешних нагрузок в линейной постановке задач : учеб. пособие / Т. И. Кравченко [и др.] ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 123 с. – ISBN 978-5-9984-0658-4.

6. Основы метода конечных элементов. Введение. Расчет стержневых систем : конспект лекций / Владим. гос. ун-т ; сост. Л. Е. Кондратьева. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2007. – 36 с.

7. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 832 с.

8. *Никифоров, С. Н.* Теория упругости и пластичности : учеб. для инженерно-строит. вузов / С. Н. Никифоров. – М. : Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1955. – 284 с.

9. *Писаренко, Г. С.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка ; под ред. Г. С. Писаренко. – Киев : Вища шк., 1986. – 696 с.

10. *Рабинович, И. М.* Курс строительной механики. В 2 ч. Ч. 2. Статически неопределимые системы / И. М. Рабинович. – М. : Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1954. – 377 с.

11. *Самуль, В. И.* Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М. : Высш. шк., 1982. – 264 с.

12. *Симвулиди, И. А.* Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. – М. : Высш. шк., 1987. – 576 с.

13. *Феодосьев, В. И.* Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – 13-е изд., стер. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 592 с.

14. *Филин, А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. В 3 т. Т. 1 / А. П. Филин. – М. : Наука, 1975. – 832 с.

15. *Цвей, А. Ю.* Балки и плиты на упругом основании. Лекции с примерами расчета по специальному курсу строительной механики : учеб. пособие / А. Ю. Цвей. – М. : МАДИ, 2014. – 96 с.

Учебное издание

БУРЛАКОВА Алла Михайловна
КОНДРАТЬЕВА Людмила Евгеньевна
МАВРИНА Светлана Александровна
и др.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Редактор А. П. Володина
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор В. С. Теверовский
Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Подписано в печать 16.10.17.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,44. Тираж 90 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.