

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Институт прикладной математики, физики и информатики

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Хорьков К.С.

08 2021 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(наименование дисциплины)

направление подготовки / специальность

02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

(код и наименование направления подготовки (специальности))

направленность (профиль) подготовки

Математические методы в экономике и финансах

(направленность (профиль) подготовки))

г. Владимир

2021

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Теория случайных процессов» – научное представление о случайных процессах, а также о методах их исследования, знакомство с основными моделями и методами моделирования стохастических систем.

Задачи:

- усвоить методы случайных процессов;
- разобраться в особенностях стохастического анализа;
- научиться содержательно интерпретировать формальные результаты.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Теория случайных процессов» относится к обязательной части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: линейная алгебра, математический анализ, функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2. Умеет использовать базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности. ОПК-1.3. Владеет навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Знает теорию случайных процессов. Умеет использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования. Владеет методами теории случайных процессов и, кроме того, научиться содержательно интерпретировать формальные результаты.	Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.
ПК-1. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий.	ПК-1.1. Знает основы научной теории и системного мышления, полученные в области математических и (или) естественных наук, принципы построения и	Знает теорию случайных процессов. Умеет применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной	Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.

	<p>виды архитектуры программного обеспечения. ПК-1.2. Умеет строить схемы причинно-следственных связей, методологии разработки программного обеспечения и технологии программирования. ПК-1.3. Владеет навыками выявления существенных явлений проблемной ситуации, разработки и изменения архитектуры программного обеспечения.</p>	<p>деятельности; строить математические модели объектов профессиональной деятельности; использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования. Владеет методами статистического анализа.</p>	
--	--	--	--

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов

Тематический план форма обучения – очная

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа обучающихся с педагогическим работником				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	в форме практической		
1	Основные понятия теории меры и теории вероятностей.	5	1-2	4	4		4	6	
2	Обзор основных методов теории случайных процессов и важнейших классов случайных процессов.	5	3	2	2		2	6	
3	Определение стационарных процессов. Примеры.	5	4	2	2		2	6	
4	Сохраняющие меру преобразования и их свойства.	5	5-6	4	4		4	6	Рейтинг-контроль 1
5	Эргодические теоремы для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов.	5	7	2	2		2	6	
6	Мартингал, субмартингал и супермартингал. Примеры.	5	8	2	2		2	6	
7	Разложение Дуба для субмартингалов.	5	9	2	2		2	6	
8	Построение стохастического интеграла Ито.	5	10	2	2		2	6	
9	Понятие стохастических дифференциальных уравнений.	5	11	2	2		2	6	Рейтинг-контроль 2
10	Определения марковских процессов.	5	12	2	2		2	6	
11	Модели испытаний, связанных в цепь Маркова.	5	13-14	4	4		4	8	
12	Однородные цепи Маркова.	5	15-16	4	4		4	5	
13	Классификация состояний марковской цепи.	5	17-18	4	4		4	8	Рейтинг-контроль 3
Всего за 5 семестр:				36	36		81		Экзамен (27)
Итого по дисциплине				36	36		81		Экзамен (27)

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Тема 1. Основные понятия теории меры и теории вероятностей. Определение случайного процесса, конечномерные распределения, построение процесса с заданным распределением, теорема Колмогорова.

Тема 2. Обзор основных методов теории случайных процессов и важнейших классов случайных процессов. Примеры случайных процессов: винеровский процесс, пуассоновский процесс и т.д.

Тема 3. Определение стационарных процессов. Примеры. Определение стационарных процессов в узком смысле и стационарных в широком смысле случайных процессов и случайных последовательностей.

Тема 4. Сохраняющие меру преобразования и их свойства. Теорема Пуанкаре о "возвратности". Эргодичность и перемешивание. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина.

Тема 5. Эргодические теоремы для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов. Связь сохраняющего меру преобразования и стационарной последовательности. Понятие эргодической стационарной последовательности. Формулировки эргодических теорем для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов.

Тема 6. Мартингал, субмартингал и супермартингал. Примеры. Определения случайных процессов и последовательностей, образующих мартингал, субмартингал и супермартингал. Напоминание свойств условных математических ожиданий.

Тема 7. Разложение Дуба для субмартингалов. Свойства мартингалов и полумартингалов с дискретным временем. Пример из теории игр.

Тема 8. Построение стохастического интеграла Ито. Мартингалы с непрерывным временем на примере винеровского процесса. Построение стохастического интеграла по винеровскому процессу от случайных функций.

Тема 9. Понятие стохастических дифференциальных уравнений. Диффузионные процессы, задаваемые стохастическими уравнениями. Их связь с уравнениями в частных производных.

Тема 10. Определения марковских процессов. Определение марковских последовательностей и марковских цепей. Разные формы марковского свойства. Примеры.

Тема 11. Модель испытаний, связанных в цепь Маркова. Примеры из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов ("очередь", "бесперебойное обеспечение", задача "рождения и гибели" и т.д.)

Тема 12. Однородные цепи Маркова. Уравнение Колмогорова-Чэпмена. Эргодическая теорема.

Тема 13. Классификация состояний марковской цепи. Классификация состояний марковской цепи по свойствам переходных вероятностей и по асимптотическим свойствам переходных вероятностей. Существование предельных и стационарных распределений. Примеры, иллюстрирующие введенные понятия и полученные результаты.

Содержание практических занятий по дисциплине

Тема 1. Основные понятия теории меры и теории вероятностей. Определение случайного процесса, конечномерные распределения, построение процесса с заданным распределением, теорема Колмогорова. Решение задач.

Тема 2. Обзор основных методов теории случайных процессов и важнейших классов случайных процессов. Примеры случайных процессов: винеровский процесс, пуассоновский процесс и т.д. Решение задач.

Тема 3. Определение стационарных процессов. Примеры. Определение стационарных процессов в узком смысле и стационарных в широком смысле случайных процессов и случайных последовательностей. Решение задач.

Тема 4. Сохраняющие меру преобразования и их свойства. Теорема Пуанкаре о "возвратности". Эргодичность и перемешивание. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина. Решение задач.

Тема 5. Эргодические теоремы для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов. Связь сохраняющего меру преобразования и стационарной последовательности. Понятие эргодической стационарной последовательности. Формулировки эргодических теорем для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов. Решение задач.

Тема 6. Мартингал, субмартингал и супермартингал. Примеры. Определения случайных процессов и последовательностей, образующих мартингал, субмартингал и супермартингал. Напоминание свойств условных математических ожиданий. Решение задач.

Тема 7. Разложение Дуба для субмартингалов. Свойства мартингалов и полумартингалов с дискретным временем. Пример из теории игр. Решение задач.

Тема 8. Построение стохастического интеграла Ито. Мартингалы с непрерывным временем на примере винеровского процесса. Построение стохастического интеграла по винеровскому процессу от случайных функций. Решение задач.

Тема 9. Понятие стохастических дифференциальных уравнений. Диффузионные процессы, задаваемые стохастическими уравнениями. Их связь с уравнениями в частных производных. Решение задач.

Тема 10. Определения марковских процессов. Определение марковских последовательностей и марковских цепей. Разные формы марковского свойства. Примеры. Решение задач.

Тема 11. Модель испытаний, связанных в цепь Маркова. Примеры из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов ("очередь", "бесперебойное обеспечение", задача "рождения и гибели" и т.д.). Решение задач.

Тема 12. Однородные цепи Маркова. Уравнение Колмогорова-Чэпмена. Эргодическая теорема. Решение задач.

Тема 13. Классификация состояний марковской цепи. Классификация состояний марковской цепи по свойствам переходных вероятностей и по асимптотическим свойствам переходных вероятностей. Существование предельных и стационарных распределений. Примеры, иллюстрирующие введенные понятия и полученные результаты. Решение задач.

5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5.1. Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль №1

Вариант 1

1. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{-1\}$, $\{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.

2. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.

3. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами $\left[0, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

И функции, измеримые относительно нее.

Рейтинг-контроль №2

Вариант 1

1. Пусть w_t^0 , $0 \leq t \leq 1$ – условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.
2. Проверить, что если процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R$ – процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.
3. Доказать, что D_{w_t} , $t \geq 0$ является функцией, не убывающей по t . w_t – винеровский процесс.

Рейтинг-контроль №3

Вариант 1

1. Нарисовать граф и указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотреть вопрос о стационарных, предельных, эргодических распределениях для марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Проверить, что винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом.

5.2. Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)

Вопросы к экзамену

1. Два определения случайных процессов, эквивалентность определений.
2. Примеры (случайное блуждание, процесс восстановления, модель Крамера-Лундберга, винеровский и пуассоновский процессы).
3. Винеровский процесс (определение, конечномерные распределения, корреляционная функция).
4. Основные классы случайных процессов.
5. Стационарные в узком смысле случайные последовательности (определение, примеры).
6. Сохраняющее меру отображение. Теорема о возвратности.
7. Сохраняющее меру отображение. Эргодичность и перемешивание.
8. Эргодические теоремы для сохраняющих меру отображений и случайных процессов, стационарных в узком смысле.
9. Условное математическое ожидание (определение, корректность определения, примеры).
10. Свойства условного математического ожидания.
11. Теоремы о предельном переходе под знаком условного математического ожидания.
12. Мартингалы и полумартингалы с дискретным временем (определения, примеры).

13. Разложение Дуба для субмартигалов.
14. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от простой функции, его свойства.
15. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от функций, интегрируемых с квадратом и непрерывных по t .
16. Понятие стохастического дифференциального уравнения.
17. Определение марковского процесса. Разные формы марковского свойства.
18. Марковская цепь с конечным числом состояний. Модель испытаний, связанных в цепь Маркова и пример из теории игр.
19. Задачи из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов.
20. Однородная цепь Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
21. Пример эргодической марковской цепи. Формулировка теоремы об эргодичности и существовании стационарного распределения.
22. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний по арифметическим свойствам переходных вероятностей.
23. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний, по асимптотическим свойствам переходных вероятностей.
24. Пример простого случайного блуждания, иллюстрирующий введенные понятия классификации состояний и предельного поведения переходных вероятностей.

5.3. Самостоятельная работа обучающегося.

1. Корреляционной функцией винеровского процесса является

$$\begin{aligned} K_1(t, s) &= \min[t, s], & t, s \geq 0; \\ K_2(t, s) &= \min[t, s] - ts, & t, s \in [0, 1]; \\ K_3(t, s) &= e^{-|t-s|}, & t, s \in R? \end{aligned}$$

2. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{-1\}$, $\{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.

3. Винеровский процесс является ли гауссовским процессом, т.е. процессом, конечномерные распределения которого нормальны?

4. Пусть w_t^0 , $0 \leq t \leq 1$ – условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.

5. Дать определение винеровского процесса.

6. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.

7. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{2\}$, $\{1\}$, $\{3\}$ одинаковые вероятности $1/3$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все трехмерные распределения процесса.

8. Пусть $\eta \sim U[0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$. Найти все одномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$ и $D\xi_1$.

9. Доказать: $\xi^{-1}(D_1 \cup D_2) = \xi^{-1}(D_1) \cup \xi^{-1}(D_2)$; (Взятие полного прообраза сохраняет теоретико-множественные операции.)

10. Как называются процессы $\xi_t(\omega)$ и $\xi'_t(\omega)$, если они определены на одном вероятностном пространстве (Ω, F, P) и при любом $t \in T$ верно, что $P\{\xi_t(\omega) \neq \xi'_t(\omega)\} = 0$.

11. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами $\left[0, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. И функции, измеримые относительно нее.

12. Что называют конечномерными распределениями случайного процесса.

13. Сформулировать условия симметрии и согласованности для конечномерных распределений случайного процесса.

14. Проверить, что если процесс $\xi_t, t \in T \subset R$ – процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.

15. Как называется процесс $\xi_t, t \in T \subset R$, если его конечномерные распределения не меняются при сдвиге, т.е., если $t_1, \dots, t_n \in T, (t_i \neq t_j)$, и для любого действительного h такого, что $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$, верно $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n)$.

16. Пусть F_1 и F_2 – две σ -алгебры подмножеств пространства Ω . Проверить является ли σ -алгеброй класс множеств $F_1 \cap F_2$?

17. Будет ли $D_w, t \geq 0$ функцией, не убывающей по t, w_t – винеровский процесс.

18. Нарисовать граф и указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Могут ли все состояния цепи Маркова с конечным числом состояний быть несущественными?

20. Винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом, субмартингалом или супермартингалом?

21. Два соперника соревнуются в безлимитном поединке. Первый выигрывает партию с вероятностью p , второй с вероятностью q , игра заканчивается вничью с вероятностью $1 - p - q$. Матч заканчивается, как только один из соперников обыграет другого на N партий. Найдите вероятность выигрыша первого игрока, если $N = 1, N = 2$. (<http://www.iam.khv.ru/articles/Ustinov/emath24.pdf>)

22. Три карты «тройка», «семерка», «туз» перемешивают двумя способами:

- i. верхняя карта с вероятностью p перемещается вниз колоды;
- ii. с вероятностью q меняются местами верхняя и средняя карты.

Пусть X_n – положение «туза» после n перемешиваний. Покажите, что X_n образует марковскую цепь. Найдите вероятность того, что после большого числа перемешиваний «туз» окажется сверху.

Фонд оценочных материалов (ФОМ) для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ
		Наличие в электронном каталоге ЭБС
Основная литература		
1. Матальцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич - Минск : Выш. шк. , 2017. - 591 с. - ISBN 978-985-06-2855-8.	2017	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9789850628558.html

2. Чжун, К. Л. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика / Чжун К. Л. - Москва : Лаборатория знаний, 2017. - 458 с. - ISBN 978-5-00101-524-6.	2017	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001015246.html
3. Лагутин, М. Б. Наглядная математическая статистика : учебное пособие / М. Б. Лагутин. — 7-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2019. — 475 с. — ISBN 978-5-00101-642-7.	2019	https://e.lanbook.com/book/116104
Дополнительная литература		
1. Модели в теории вероятностей [Электронный ресурс] / Федоткин М.А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012	2012	http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113847.html
2. Вероятность: В 2-х кн. Кн. 2. [Электронный ресурс] / Ширяев А.Н. - 4-е изд., переработ. и доп. - М.: МЦНМО, 2007.	2007	http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940571063.html

6.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

6.3. Интернет-ресурсы

1. <http://window.edu.ru/>
2. <http://www.exponenta.ru/>
3. <http://allmath.com/>

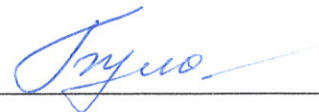
7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения:

1. Microsoft Excel
2. Maple

Рабочую программу составила:
к.ф.-м.н., доцент ФАиП Буланкина Л.А. _____



Рецензент (представитель работодателя):
заместитель директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В. _____



Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП
Протокол № 1 от 30.08.2021 года
Заведующий кафедрой ФАиП к.ф.-м.н., доцент Бурков В.Д. _____



Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии
направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
Протокол № 1 от 30.08.2021 года
Председатель комиссии зав. кафедрой ФАиП Бурков В.Д. _____



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____
