

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Институт прикладной математики, физики и информатики

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Хорьков К.С.



» 08 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

(наименование дисциплины)

направление подготовки / специальность

02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

(код и наименование направления подготовки (специальности))

направленность (профиль) подготовки

Математические методы в экономике и финансах

(направленность (профиль) подготовки))

г. Владимир

2021

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Теория оптимального управления» заключается в ознакомлении с основными методами исследования задач оптимального управления возникающими в инженерных задачах и экономике.

Задачи:

- получение основного представления о решении задач оптимального управления в конечно мерном пространстве в частности используя принцип максимума Понтрягина
- используя пакеты прикладных программ (Maple, MatLab, MatCAD, и т.д.) и численные методы научиться приближённо решать задачи оптимального управления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Теория оптимального управления» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана (дисциплина по выбору).

Пререквизиты дисциплины: математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, функциональный анализ

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ПК-1. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий.	ПК-1.1. Знает основы научной теории и системного мышления, полученные в области математических и (или) естественных наук, принципы построения и виды архитектуры программного обеспечения. ПК-1.2. Умеет строить схемы причинно-следственных связей, методологии разработки программного обеспечения и технологии программирования. ПК-1.3. Владеет навыками выявления существенных явлений проблемной ситуации, разработки и изменения архитектуры программного обеспечения.	Знать основные понятия и методы теории оптимального управления. Уметь применять принцип максимума для решения конкретных экономических задач. Владеть навыками решения задач оптимального управления на уровне, позволяющем анализировать простейшие экономические проблемы.	Отчеты по лабораторным работам. Контрольные вопросы к лабораторным работам. Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации
ПК-3. Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов	ПК-3.1. Знает возможности современных и перспективных средств разработки программных продуктов и технических	Знать основные понятия и методы теории оптимального управления. Уметь применять принцип максимума для решения	Отчеты по лабораторным работам.

<p>экономико-математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования.</p>	<p>средств, типовые решения, используемые при разработке и реализации алгоритмов экономико-математических моделей в конкретной области экономической деятельности. ПК-3.2. Умеет использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения. ПК-3.3. Владеет навыками проведения маркетинговых исследований научно-технической информации и реализации алгоритмов экономико-математических моделей на базе современных языков программирования.</p>	<p>конкретных экономических задач. Владеть навыками решения задач оптимального управления на уровне, позволяющем анализировать простейшие экономические проблемы.</p>	<p>Контрольные вопросы к лабораторным работам. Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации</p>
<p>ПК-5. Способен принимать участие в управлении проектами создания информационных систем и программных комплексов на стадиях их жизненного цикла.</p>	<p>ПК-5.1. Знает методы и средства проектирования программного обеспечения, баз данных и программных интерфейсов, методы концептуального проектирования и методы публичной защиты проектных работ. ПК-5.2. Умеет применять методы и средства проектирования программного обеспечения, структур данных, баз данных, программных интерфейсов, разрабатывать технико-экономическое обоснование и проводить презентации. ПК-5.3. Владеет навыками проектирования структур данных, баз данных, программных интерфейсов, предложений принципиальных вариантов концептуальной архитектуры системы и проведением презентаций концепции и технического задания заинтересованным лицам.</p>	<p>Знать основные понятия и методы теории оптимального управления. Уметь применять принцип максимума для решения конкретных экономических задач. Владеть навыками решения задач оптимального управления на уровне, позволяющем анализировать простейшие экономические проблемы.</p>	<p>Отчеты по лабораторным работам. Контрольные вопросы к лабораторным работам. Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации</p>

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 часов.

Тематический план форма обучения – очная

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа обучающихся с педагогическим работником				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	в форме практической подготовки		
1	Введение.	6	1-3	3	3	3	4,5	9	
2	Управляемость. Релейный режим.	6	4-6	3	3	3	4,5	9	Рейтинг-контроль 1
3	Линейная задача оптимального быстродействия.	6	7-9	3	3	3	4,5	9	
4	Принцип Максимума Понтрягина.	6	10-12	3	3	3	4,5	9	Рейтинг-контроль 2
5	Динамическое программирование.	6	13-15	3	3	3	4,5	9	
6	Введение в стохастическую теорию управления.	6	16-18	3	3	3	4,5	9	Рейтинг-контроль 2
Всего за 6 семестр:				18	18	18		54	Зачет
Итого по дисциплине				18	18	18		54	Зачет

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Раздел 1. Введение.

Основные определения: динамика, управляемая динамика, управление, множество допустимых управлений, функционал выгоды. Основная задача оптимального управления. Примеры: управление производством и потреблением; управление маятником; задача о приземлении лунохода. Геометрическое решение задачи об оптимальном времени остановки вагонетки.

Раздел 2. Управляемость. Релейный режим.

Задача управляемости. Управляемость линейными ОДУ. Множество достижимости. Структура множества достижимости. Матрица управляемости. Критерии управляемости. Примеры. Наблюдаемость. Задача наблюдаемости. Связь между наблюдаемостью и управляемостью. Релейный режим. Теорема существования релейного режима. Экстремальность и релейный режим.

Раздел 3. Линейная задача оптимального быстродействия.

Постановка задачи. Существование оптимального решения в задаче быстродействия. Геометрия множества достижимости в линейной задаче оптимального быстродействия.

Принцип максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстродействия. Гамильтониан. Условие максимизации. Система сопряжённых уравнений. Принцип Максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстродействия (гамильтонов формализм). Примеры.

Раздел 4. Принцип Максимиума Понтрягина.

Лагранжиан. Основные задачи вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан динамической системы. Гамильтонова динамика. Ограничения и множители Лагранжа. Безусловная оптимизация. Оптимизация при наличии ограничений.

Принцип Максимиума Понтрягин (общий случай). Применение и примеры. Принцип максимиума и условия трансверсальности. Принцип максимиума с ограничениями на фазовые траектории.

Раздел 5. Динамическое программирование.

Вывод уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Метод динамического программирования. Проверка оптимальности. Примеры. Метод характеристик и связь динамического программирования и Принципа Максимиума Понтрягина.

Раздел 6. Введение в стохастическую теорию управления.

Стохастические дифференциальные уравнения. Цепное правило Ито. Стохастическое уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Задача оптимального выбора портфелей.

Содержание практических занятий по дисциплине

Тема 1. Задача синтеза оптимальных управлений (случай линейных систем). Геометрическое решение. Решение задач.

Тема 2. Множество достижимости. Структура множества достижимости. Матрица управляемости. Решение задач.

Тема 3. Задачи с подвижными концами и условия трансверсальности. Решение задач.

Тема 4. Принцип максимиума для неавтономных систем. Решение задач.

Тема 5. Динамическое программирование. Решение задач.

Содержание лабораторных занятий по дисциплине

Тема 1. Необходимые условия экстремума функционала. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 2. Вариационные задачи с подвижными концами. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 3. Ломаные экстремали. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 4. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 5. Задачи с функционалом, содержащим производные высших порядков. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 6. Условный экстремум. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 7. Каноническая форма уравнений Эйлера. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 8. Оптимальное управление. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 9. Методы решения. Прямые методы. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 10. Метод множителей Лагранжа. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 11. Принцип Максимиума. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 12. Динамическое программирование. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5.1. Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль 1.

1. Решение задач оптимального управления с фиксированным состоянием на правом конце временного отрезка.
2. Поиск оптимального перераспределения инвестиций по регионам.
3. Исследование задачи оптимального управления запасами и производством.

Рейтинг-контроль 2.

1. Задачи оптимального управления в которых присутствуют сингулярные управления.
2. Задачи оптимизации в которых присутствуют только релейные управления.
3. Модель оптимального потребления с ограничениями на траектории системы в виде неравенств.

Рейтинг-контроль 3.

1. Простейшие задачи оптимального управления денежным балансом.
2. Задача оптимального управления финансированием фирмы.
3. Оптимальное управление производством и хранения товара в задачах с бесконечным горизонтом времени.
4. Задача оптимального вылова рыбы.
5. Поиск оптимального решения в задаче накопления капитала.

5.2. Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (зачет).

Контрольные вопросы к зачету

1. Основные определения: динамика, управляемая динамика, управление, множество допустимых управлений, функционал выгоды.
2. Основная задача оптимального управления.
3. Геометрическое решение задачи об оптимальном времени остановки вагонетки.
4. Задача управляемости. Управляемость линейными ОДУ.
5. Множество достижимости. Структура множества достижимости.
6. Матрица управляемости. Критерии управляемости. Примеры.
7. Наблюдаемость. Задача наблюдаемости.
8. Связь между наблюдаемостью и управляемостью.
9. Релейный режим. Теорема существования релейного режима.
10. Экстремальность и релейный режим.
11. Существование оптимального решения в задаче быстрогодействия.
12. Геометрия множества достижимости в линейной задаче оптимального быстрогодействия.
13. Принцип максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстрогодействия.
14. Гамильтониан. Условие максимизации. Система сопряжённых уравнений.
15. Принцип Максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстрогодействия (гамильтонов формализм).
16. Лагранжиан. Основные задачи вариационного исчисления.
17. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан динамической системы.
18. Гамильтонова динамика. Ограничения и множители Лагранжа.
19. Безусловная оптимизация. Оптимизация при наличии ограничений.
20. Принцип Максимума Понтрягин (общий случай).

21. Принцип максимума и условия трансверсальности.
22. Принцип максимума с ограничениями на фазовые траектории.
23. Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.
24. Метод динамического программирования. Проверка оптимальности.
25. Метод характеристик и связь динамического программирования с Принципом Максимума Понтрягина.
26. Стохастические дифференциальные уравнения.
27. Цепное правило Ито.
28. Стохастическое уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.
29. Задача оптимального выбора портфелей.

Задачи к зачету

1. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^1 -x dt \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad u \in \Omega = [-1, 1]$$

2. Показать, что решение задачи оптимального управления

$$\int_0^2 (2x - 3u - u^2) dt \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 5$$

$$u \in \Omega = [0, 2]$$

не является релейным.

3. Решить задачу оптимального управления

$$8x_1(18) + 4x_2(18) \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \quad x_1(0) = 15$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - u, \quad x_2(0) = 20$$

$$u \in \Omega = [0, 1]$$

4. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^1 u dt \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1$$

$$u \geq 0, \quad x - u \geq 0.$$

5. Используя принцип максимума, решить задачу оптимального управления

$$\int_0^T e^{-\rho t} \ln C(t) dt \rightarrow \max$$

при условиях: $\dot{W} = rW - C, W(0) = W_0, W_0 > 0, W(T) = 0, W(t) \geq 0.$

6. Используя принцип максимума, решить задачу оптимального управления

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \ln C(t) dt \rightarrow \max$$

при условиях: $\dot{W} = rW - C, W(0) = W_0, W_0 > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0, W(t) \geq 0.$

7. Используя ПМП построить стратегию для фирмы торгующей зерном. Динамика которой имеет вид

$$\dot{x} = rx - h(y) - pv, \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0,$$

$$V_2 \leq v \leq V_1$$

Цель фирмы максимизировать выгоду к моменту T

$$x(T) + p(T)y(T) \rightarrow \max.$$

5.3. Самостоятельная работа обучающегося.

Темы самостоятельных работ

1. Достаточные условия оптимальности.
2. Принцип максимума со смешанными ограничениями. Достаточные условия оптимальности.
3. Задачи управления с бесконечным горизонтом и стационарность.
4. Модель оптимального финансирования фирмы. Синтез оптимального управления.
5. Модель рекламы (Vidale-Wolfe).
6. Модель управления природными ресурсами.
7. Модель оптимального экономического роста.
8. Модель оптимального управления в эпидемиологии.
9. Модель управления загрязнением окружающей среды.
10. Дифференциальная игра двух игроков с нулевой суммой.

Фонд оценочных материалов (ФОМ) для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ
		Наличие в электронном каталоге ЭБС
Основная литература		
1. Егоров, А. И. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами : учебное пособие / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 292 с. — ISBN 978-5-8114-2554-9.	2017	https://e.lanbook.com/book/93595
2. Бушуев, А. Ю. Примеры решения задач оптимального управления : методические указания / А. Ю. Бушуев, В. А. Кутыркин. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. — 40 с. — ISBN 978-5-7038-4425-0.	2016	https://e.lanbook.com/book/103595
3. Задорожная, Н. М. Основы теории и проектирования систем управления. Методология. Математические модели : методические указания / Н. М. Задорожная. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. — 36 с. — ISBN 978-5-7038-4306-2.	2016	https://e.lanbook.com/book/103603
Дополнительная литература		
1. Тихомиров, В. М. Оптимальное управление : учебное пособие : [16+] / В. М. Тихомиров, В. М. Алексеев, С. В. Фомин. — Москва : Физматлит, 2007. — 192 с. — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-9221-0589-7.	2007	https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67593
2. Егоров, А. И. Основы теории управления / А. И. Егоров. — Москва : Физматлит, 2007. — 506 с. — Режим доступа: по подписке. — ISBN 978-5-9221-0543-9.	2007	https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76677

6.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

6.3. Интернет-ресурсы

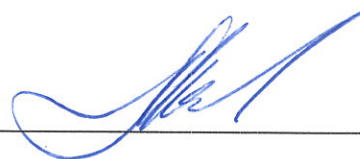
1. Образовательный математический сайт <http://www.exponenta.ru/>
2. Математическая энциклопедия <http://allmath.com/>
3. Образовательные ресурсы – <http://window.edu.ru/>
4. Основы оптимального управления: <http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-323-principles-of-optimal-control-spring-2008/>

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения: MATLAB.

Рабочую программу составил:
к.ф.-м.н., доцент каф. ФАиП Мастерков Ю.В. _____



Рецензент (представитель работодателя):
заместитель директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В. _____



Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП
Протокол № 1 от 30.08.2021 года
Заведующий кафедрой ФАиП к.ф.-м.н., доцент Бурков В.Д. _____



Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии
направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
Протокол № 1 от 30.08.2021 года
Председатель комиссии зав. кафедрой ФАиП Бурков В.Д. _____



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от ____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от ____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от ____ года

Заведующий кафедрой _____