

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Институт прикладной математики, физики и информатики

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Хорьков К.С.

2021 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

(наименование дисциплины)

направление подготовки / специальность

02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

(код и наименование направления подготовки (специальности))

направленность (профиль) подготовки

Математические методы в экономике и финансах

(направленность (профиль) подготовки))

г. Владимир

2021

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» имеет своей целью:

- знакомство с фундаментальными понятиями и положениями дисциплины: формирование геометрического мышления;
- знакомство с аналитическими методами исследования геометрических объектов;
- демонстрация органичности сочетания методов различных математических дисциплин (математического анализа, дифференциальных уравнений, аналитической геометрии и алгебры) при исследовании геометрических объектов;
- формирование представлений о возможностях применения геометрических методов к исследованию объектов профессиональной деятельности.

Задачи:

- изучить основные положения теории дифференциальной геометрии и топологии;
- применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности;
- уметь строить математические модели объектов профессиональной деятельности.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» относится к обязательной части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: линейная алгебра, математический анализ, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук. ОПК-1.2. Умеет использовать базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности. ОПК-1.3. Владеет навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Знает свойства объектов данной области математики и имеет представление о сфере приложения методов дифференциальной геометрии и топологии; Умеет свободно оперировать основными понятиями дисциплины, формулировать геометрическую задачу на алгебраическом языке и дать геометрическую интерпретацию полученного алгебраического решения; Владеет аналитическим аппаратом дифференциальной геометрии.	Типовой расчет. Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.

ПК-1. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий.	ПК-1.1. Знает основы научной теории и системного мышления, полученные в области математических и (или) естественных наук, принципы построения и виды архитектуры программного обеспечения. ПК-1.2. Умеет строить схемы причинно-следственных связей, методологии разработки программного обеспечения и технологии программирования. ПК-1.3. Владеет навыками выявления существенных явлений проблемной ситуации, разработки и изменения архитектуры программного обеспечения.	Знает свойства объектов данной области математики и имеет представление о сфере приложения методов дифференциальной геометрии и топологии; Умеет свободно оперировать основными понятиями дисциплины, формулировать геометрическую задачу на алгебраическом языке и дать геометрическую интерпретацию полученного алгебраического решения; Владеет аналитическим аппаратом дифференциальной геометрии.	Типовой расчет. Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.
---	---	--	--

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 часа.

Тематический план форма обучения – очная

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа обучающихся с педагогическим работником				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	в форме практической подготовки		
1	Кривые на плоскости и в пространстве	3	1-3	6	6		6	7	Рейтинг-контроль 1
2	Поверхности в пространстве	3	4-6	6	6		6	8	Рейтинг-контроль 2
3	Тензоры	3	7-10	8	8		8	10	
4	Связности	3	11-14	8	8		8	10	Рейтинг-контроль 3
5	Элементы топологии	3	15-18	8	8		8	10	
Всего за 3 семестр:								45	Экзамен (27)
Итого по дисциплине								45	Экзамены (27)

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Раздел 1. Кривые на плоскости и в пространстве.

Тема 1. Касательная к кривой. Длина кривой, натуральный параметр.

Тема 2. Нормаль и кривизна к кривой на плоскости. Система уравнений Френе на плоскости.

Тема 3. Нормаль и бинормаль к кривой в пространстве. Параметры кривизны и кручения. Система уравнений Френе в пространстве.

Раздел 2. Поверхности в пространстве.

Тема 1. Различные способы задания поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Вычисление площади поверхности.

Тема 2. Первая квадратичная форма.

Тема 3. Вторая квадратичная форма.

Тема 4. Инварианты пары квадратичных форм. Кривизны.

Раздел 3. Тензоры.

Тема 1. Тензорная алгебра. Алгебраическая теория; типы тензоров, операции – тензорное произведение, свертка. Метрический тензор.

Тема 2. Дифференциальное исчисление тензоров. Внешний дифференциал форм. Производная Ли.

Раздел 4. Связности.

Тема 1. Объект связности; символы Кристоффеля. Ковариантное дифференцирование. Уравнение параллельного переноса.

Тема 2. Тензоры кручения и кривизны. Связность, согласованная с метрикой (связность Леви-Чивита).

Раздел 5. Элементы топологии.

Тема 1. Основные понятия и конструкции дифференциальной топологии, примеры.

Содержание практических занятий по дисциплине

Раздел 1. Кривые на плоскости и поверхности в пространстве.

Тема 1. Касательная к кривой, длина кривой, натуральный параметр. Решение задач.

Тема 2. Задачи связанные с построением системы Френе кривой на плоскости и в пространстве. Решение задач.

Раздел 2. Поверхности в пространстве.

Тема 1. Задачи, связанные с вычислением атрибутов поверхности в пространстве. Решение задач.

Тема 2. Построение первой и второй квадратичных форм. Решение задач.

Тема 3. Параметры (кривизны) пары квадратичных форм. Решение задач.

Раздел 3. Тензоры.

Тема 1. Решение задач, связанных с алгебраической теорией тензоров. Различные виды произведений, свертка.

Тема 2. Задачи, связанные с дифференциальной теорией тензоров. Поведение параметров тензоров при замене координат. Внутренний и внешний дифференциалы. Формула Ли. Решение задач.

Для направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки рекомендуется использовать практикум, который положен в основу проведения практических занятий по указанной теме.

[*] Звягин М.Ю., Васильченкова Д.Г. Тензорный анализ. Алгебраическая теория: задания к типовым расчетам [Электронный ресурс] // Владимир: ВлГУ. - 2017. – 22 с. – Режим доступа: <http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/6145>

[**] Звягин М.Ю., Васильченкова Д.Г. Тензорный анализ. Дифференциальное исчисление тензоров: задания к типовым расчетам [Электронный ресурс] // Владимир: ВлГУ. - 2017. – 32 с. – Режим доступа: <http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/6166>

Раздел 4. Связности.

Тема 1. Решение задач вычисления ковариантных производных.

Тема 2. Задачи параллельного переноса. Геодезические задачи. Решение задач.

Раздел 5. Элементы топологии.

Тема 1. Решение некоторых задач по дифференциальной топологии. Решение задач.

5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5.1. Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль 1 «Кривые»

Типы задач

1. Найти касательную к кривой, нормальную плоскость.
2. Вычислить натуральный параметр.
3. Найти кривизну кривой.
4. Найти кручение кривой.
5. Построить сопровождающий трехгранник Френе.

Рейтинг-контроль 2 «Поверхности»

Типы задач

1. Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности.
2. Найти 1-квадратичную форму поверхности.
3. Вычислить угол между кривыми на поверхности двумя способами. Сравнить результат.
4. Найти 2-ю квадратичную форму поверхности.
5. Найти главные кривизны, гауссову и среднюю кривизны.

Рейтинг-контроль 3 «Тензорный анализ. Аффинные связности»

Типы задач

1. Тензоры. Операции с тензорами.
2. Внешний и внутренний дифференциалы.
3. Производная Ли.
4. Связности, параллельный перенос.
5. Связность, согласованная с метрикой.

5.2. Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)

Вопросы к экзамену

1. Понятие кривой. Способы задания кривой. Гладкие и регулярные кривые.
2. Касательная к кривой. Длина дуги кривой. Натуральная параметризация.
3. Кривизна гладкой кривой. Вычисление, геометрический смысл.
4. Репер Френе и сопровождающий трехгранник Френе
5. Кручение кривой. Вычисление, геометрический смысл.
6. Формулы Френе для плоской и пространственной кривой.
7. Определение регулярной кривой её кривизной и кручением (формулировка теоремы и идея доказательства). Натуральные уравнения кривой.
8. Простая поверхность. Координатная сеть. Замена координат на простой поверхности.
9. Примеры поверхностей (общая поверхность вращения, сфера, тор, прямой геликоид, линейчатая поверхность, цилиндрическая и коническая поверхности)
10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
11. Первая квадратичная форма поверхности. Первая квадратичная форма графика функции $z = f(x, y)$ и поверхности вращения.
12. Вычисление длин, углов и площадей на поверхности.
13. Нормальная кривизна поверхности. Вторая квадратичная форма. Вторая квадратичная форма графика функции $z = f(x, y)$ и поверхности вращения.

14. Главные направления и главные кривизны поверхности. Формула Эйлера.
15. Гауссова и средняя кривизны. Формулы для гауссовой и средней кривизны графика функции. $z = f(x, y)$ и поверхности вращения.
16. Классификация точек поверхности.
17. Линии кривизны. Дифференциальное уравнение линий кривизны.
18. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности.
19. Асимптотические направления. Асимптотические линии. Дифференциальное уравнение асимптотических линий.
20. Тензоры. Операции с тензорами.
21. Внешний и внутренний дифференциалы форм. Свойства.
22. Производная Ли. Свойства.
23. Аффинные связности, параллельный перенос.
24. Аффинная связность, согласованная с метрикой (Леви - Чивита).
25. Топологическое пространство. База топологии. Замкнутые подмножества. Метрическое пространство. Топология, индуцированная метрикой.
26. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфизм.
27. Связность, линейная связность. Компактные топологические пространства. Их свойства.
28. Индуцированная топология. Подпространства. Фактор-топология. Фактор-пространство.
29. Понятие n - мерного топологического многообразия. Карта. Атлас.
30. Гладкий атлас. Гладкое многообразие. Задание многообразия системой уравнений.

5.3. Самостоятельная работа обучающегося.

Типовой расчет №1 «Кривые и поверхности»

1. Найти касательную к кривой, нормальную плоскость.
2. Вычислить натуральный параметр.
3. Найти кривизну кривой.
4. Найти кручение кривой.
5. Построить сопровождающий трехгранник Френе.
6. Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности.
7. Найти 1-квадратичную форму поверхности.
8. Вычислить угол между кривыми на поверхности двумя способами. Сравнить результат.
9. Найти 2-ю квадратичную форму поверхности.
10. Найти главные кривизны, гауссову и среднюю кривизны.

Типовой расчет №2 «Тензоры, связности. Элементы топологии»

1. Тензоры, закон преобразования тензора при замене координат.
2. Операции с тензорами; тензорное произведение, внешнее произведение форм, свертка.
3. Внешний и внутренний дифференциалы.
4. Производная Ли, свойства.
5. Связности, тензор кривизны и кручения.
6. Параллельный перенос тензоров.
7. Геодезические.
8. Связность, согласованная с метрикой.
9. Многообразия. Особенности топологии многообразий.
10. Дифференциальная структура: карты, атласы.

Фонд оценочных материалов (ФОМ) для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ
		Наличие в электронном каталоге ЭБС
Основная литература		
1. Уткин, А. А. Геометрическое моделирование окружающего мира : учеб. пособие / А. А. Уткин. - 3-е изд., стер. - Москва : ФЛИНТА, 2019. - 219 с. - ISBN 978-5-9765-1956-5.	2019	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976519565.html
2. Клименко, К. Г. Методы решения некоторых задач избранных разделов высшей математики : практикум / К. Г. Клименко, Е. А. Козловский, Г. В. Левицкая. - Москва : Прометей, 2014. - 107 с. - ISBN 978-5-7042-2529-4.	2014	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785704225294.html
3. Прасолов, В. В. Задачи по топологии / В. В. Прасолов. — Москва : МЦНМО, 2014. — 38 с. — ISBN 978-5-4439-3009-1.	2014	https://e.lanbook.com/book/80151
Дополнительная литература		
1. Кузовлев, В. П. Курс геометрии : элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии / Кузовлев В. П., Подаева Н. Г. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 208 с. - ISBN 978-5-9221-1360-1.	2012	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113601.html
2. Сизый, С. В. Лекции по дифференциальной геометрии. / Сизый С. В. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 376 с. - ISBN 978-5-9221-0742-6.	2007	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107426.html
3. Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах [Электронный ресурс] / Скопенков А.Б. - 2-е изд., испр. - М.: МЦНМО, 2010. - 72 с. - ISBN 978-5-94057-630-3.	2010	http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940576303.html
4. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. [Электронный ресурс] / Матвеев С.В. - М.: МЦНМО, 2007. -456 с. - ISBN 978-5-94057-209-1.	2007	http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940572091.html

6.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, Журнал РАН (корпус 3, ауд. 414) (1 шт)
2. Автоматика и телемеханика, Журнал РАН (корпус 3, ауд. 414) (1 шт)


6.3. Интернет-ресурсы

1. ПакетMicrosoftExcel
2. MathCad
3. VisualC++
4. Образовательный математический сайт <http://www.exponenta.ru/>
5. Математическая энциклопедия <http://allmath.com/>
6. Образовательные ресурсы – <http://window.edu.ru/>


7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного, практического и лабораторного типа. Лекционная аудитория (318-3): 75 посадочных мест, мультимедийный проектор с автоматическим экраном. Лаборатория численных методов (405-3): 25 посадочных мест, 13 персональных компьютеров со специализированным программным обеспечением, мультимедийный проектор с экраном. Электронные учебные материалы на компакт-дисках.

Рабочую программу составил:
Доцент каф. ФАиП Звягин М.Ю.



Рецензент (представитель работодателя):
заместитель директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В.



Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП
Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Заведующий кафедрой ФАиП к.ф.-м.н., доцент Бурков В.Д.



Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии
направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Председатель комиссии зав. кафедрой ФАиП Бурков В.Д.



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры №____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры №____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20____ / 20____ учебный года

Протокол заседания кафедры №____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____
