

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор  
по образовательной деятельности

А.А.Панфилов

« 26 » 08 20 19 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**«УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ»**

Направление подготовки 02.03.01 - «Математика и компьютерные науки»

Профиль/программа подготовки - «Математические методы в экономике и финансах»

Уровень высшего образования - бакалавриат

Форма обучения - очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экзамен/зачет/зачет с оценкой)
6	5 / 180	36	36	-	63	Экзамен(45)
<b>Итого</b>	<b>5 / 180</b>	<b>36</b>	<b>36</b>	<b>-</b>	<b>63</b>	<b>Экзамен(45)</b>

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Уравнения с частными производными» – ознакомление с фундаментальными методами исследования соотношений между бесконечно малыми величинами, которые возникают при моделировании физических процессов.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Уравнения с частными производными» относится к базовой части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, функциональный анализ.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
1	2	3
<b>ОПК-1.</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	частичное	<b>знать</b> основные понятия и методы теории уравнений с частными производными; <b>уметь</b> использовать фундаментальные знания в области уравнений с частными производными в будущей профессиональной деятельности; <b>владеть</b> навыками анализа моделей физических явлений
<b>ПК-1.</b> Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	частичное	<b>знать</b> основные понятия и методы теории уравнений с частными производными; <b>уметь</b> использовать фундаментальные знания в области уравнений с частными производными в будущей профессиональной деятельности; <b>владеть</b> навыками анализа моделей физических явлений

#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Линейные однородные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка	6	1	2	2		4	2 / 50 %	
2	Канонический вид и классификация линейных уравнений 2-го порядка от $n$ переменных в точке.	6	2	2	2		4	2 / 50 %	
3	Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Теорема о канонической форме	6	3	2	2		4	2 / 50 %	
4	Уравнение колебаний струны. Формула Даламбера. Единственность решения задач Коши и Гурса	6	4	2	2		4	2 / 50 %	
5	Задача Штурма-Лиувилля. Схема метода Фурье в применении к гиперболическим уравнениям	6	5	2	2		4	2 / 50 %	
6	Первая краевая задача для уравнения колебаний струны. Общий случай неоднородности	6	6	2	2		4	2 / 50 %	Рейтинг-контроль 1
7	Понятие корректности краевой задачи. Примеры. Пример Адамара. Волновое уравнение. Задача Коши при $n > 1$ . Формулы Кирхгофа и Пуассона	6	7	2	2		4	2 / 50 %	
8	Задача Штурма-Лиувилля в пространстве. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом Фурье	6	8	2	2		4	2 / 50 %	
9	Цилиндрические функции и их свойства. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом Фурье	6	9	2	2		4	2 / 50 %	
10	Основные краевые задачи для эллиптических уравнений. Уравнение Лапласа и его общее решение в полярных координатах на плоскости	6	10	2	2		4	2 / 50 %	
11	Принцип максимума для эллиптических уравнений. Единственность решения краевых задач	6	11	2	2		3	2 / 50 %	
12	Представимость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда и в виде интеграла Пуассона.	6	12	2	2		4	2 / 50 %	
13	Фундаментальные решения оператора Лапласа. Формулы Грина и их следствия.	6	13	2	2		4	2 / 50 %	Рейтинг-контроль 2
14	Гармонические функции и их свойства.	6	14	2	2		4	2 / 50 %	

	Теоремы о среднем.								
15	Функция Грина оператора Лапласа и её свойства.	6	15	2	2		2	2 / 50 %	
16	Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при известной функции Грина. Формула Пуассона (случай шара).	6	16	2	2		2	2 / 50 %	
17	Одномерное уравнение теплопроводности. Постановка краевых задач. Решение смешанной задачи методом Фурье. Принцип максимума. Единственность решения смешанной задачи	6	17	2	2		2	2 / 50 %	
18	Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой. Единственность решения задачи Коши	6	18	2	2		2	2 / 50 %	Рейтинг-контроль 3
Всего за 6 семестр:				36	36		63	36 / 50 %	Экзамен (45)
Итого по дисциплине				36	36		63	36 / 50 %	Экзамен (45)

### Содержание лекционных занятий по дисциплине

*Раздел 1. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.*

*Тема 1. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.*

Характеристики. Теорема об общем решении. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.

*Тема 2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.*

Характеристики. Построение общего решения. Существование и единственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка. Метод построения решения задачи Коши. Примеры.

*Раздел 2. Классификация линейных уравнений 2-го порядка.*

*Тема 1. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от  $n$  переменных.*

Каноническая форма. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от  $n$  переменных в точке. Канонический вид. Примеры.

*Тема 2. Классификация линейных уравнений 2-го порядка на плоскости.*

Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Теорема о канонической форме. Пример уравнения смешанного типа.

*Раздел 3. Гиперболические уравнения.*

*Тема 1. Уравнение колебаний струны.*

Уравнение малых поперечных колебаний струны, его вывод из физических соображений. Формула Даламбера. Постановка и однозначная разрешимость задач Коши и Гурса.

*Тема 2. Метод Фурье для уравнения колебаний струны.*

Постановка задачи Штурма-Лиувилля, основные свойства её решений. Схема метода Фурье в применении к гиперболическим уравнениям. Первая краевая задача для уравнения колебаний струны. Общий случай неоднородности.

*Тема 3. Корректные задачи.*

Понятие корректности краевой задачи. Примеры. Корректность первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Пример Адамара.

*Тема 4. Волновое уравнение в пространстве.*

Постановка и корректность задачи Коши для волнового уравнения при  $n > 1$ . Формулы Кирхгофа и Пуассона. Задача Штурма-Лиувилля в пространстве. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом Фурье. Цилиндрические функции и их свойства. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом Фурье.

*Раздел 4. Эллиптические уравнения.*

*Тема 1. Основные краевые задачи.*

Задачи Дирихле и Неймана. Принцип максимума для эллиптических уравнений. Единственность решения основных краевых задач для эллиптических уравнений.

*Тема 2. Уравнение Лапласа.*

Уравнение Лапласа и его общее решение в полярных координатах на плоскости. Представимость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда и в виде интеграла Пуассона. Фундаментальные решения оператора Лапласа. Формулы Грина и их следствия. Гармонические функции и их свойства. Теоремы о среднем. Функция Грина оператора Лапласа и её свойства. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при известной функции Грина. Формула Пуассона (случай шара).

*Раздел 5. Уравнение теплопроводности.*

*Тема 1. Одномерное уравнение теплопроводности.*

Вывод одномерного уравнения теплопроводности. Принцип максимума. Постановка и однозначная разрешимость смешанной задачи и задачи Коши.

*Тема 2. Метод Фурье.*

Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой; вывод с помощью преобразования Фурье.

### **Содержание практических занятий по дисциплине**

Практические занятия состоят в решении задач по каждой из тем, указанных в содержании лекционных занятий, причём в том же порядке прохождения тем.

## **5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

В преподавании дисциплины «Уравнения с частными производными» используются разнообразные образовательные технологии как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- интерактивная лекция (по всем темам);
- групповая дискуссия (по всем темам).

## **6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

### **Текущий контроль успеваемости**

#### **Рейтинг-контроль 1**

1. Методом характеристик построить общее решение линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.
2. Методом характеристик построить интегральную поверхность линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка, проходящую через данное начальное многообразие.
3. Методом характеристик привести к каноническому виду линейное уравнение в частных производных второго порядка на плоскости.
4. Для данного линейного уравнения в частных производных второго порядка на плоскости (гиперболического или параболического типа) построить решение задачи Коши.

#### **Рейтинг-контроль 2**

1. Решить задачу Штурма-Лиувилля (задачу на собственные значения и собственные функции).
2. Методом разделения переменных построить решение смешанной задачи для одномерного уравнения колебаний струны при отсутствии «неоднородностей» в уравнении и граничных условиях либо при наличии таковых.
3. Методом разделения переменных решить задачу о колебаниях круглой мембраны.

#### **Рейтинг-контроль 3**

1. Методом разделения переменных построить решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности при отсутствии «неоднородностей» в уравнении и граничных условиях либо при наличии таковых.
2. Методом разделения переменных построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа либо уравнения Пуассона в круге (кольце, секторе, прямоугольнике и т.п.).

## Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)

### Контрольные вопросы к экзамену

1. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка (характеристики, построение общего решения, теорема существования и единственности решения задачи Коши).
2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка (характеристики, построение общего решения, теорема существования и единственности решения задачи Коши).
3. Канонический вид линейного уравнения 2-го порядка от  $n$  переменных в точке. Классификация уравнений.
4. Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Пример уравнения смешанного типа.
5. Теорема о канонической форме линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области.
6. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны (неограниченной и полуограниченной).
7. Задача Штурма-Лиувилля; свойства её решений.
8. Общая схема решения первой краевой задачи для однородных гиперболических уравнений методом разделения переменных.
9. Решение смешанной задачи для уравнения свободных колебаний струны методом разделения переменных (случаи закреплённых концов и свободных концов).
10. Понятие корректности постановки краевой задачи. Примеры корректно и некорректно поставленных задач (в т.ч. пример Адамара).
11. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны. Устойчивость решения.
12. Единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны.
13. Решение задачи Коши для волнового уравнения при  $n=2$  и  $3$  (формулы Пуассона и Кирхгофа).
14. Задача Штурма-Лиувилля в пространстве; свойства её решений.
15. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом разделения переменных.
16. Цилиндрические функции и их свойства.
17. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом разделения переменных.
18. Преобразование оператора Лапласа к полярным координатам на плоскости. Общее решение уравнения Лапласа на плоскости.
19. Принцип максимума для эллиптических уравнений.
20. Доказательство единственности решения первой и третьей краевых задач для эллиптических уравнений с помощью принципа максимума.
21. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге; условие разрешимости задачи.
22. Представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда и в виде интеграла Пуассона.
23. Формулы Грина и их следствия.
24. Фундаментальные решения оператора Лапласа.
25. Теоремы о среднем и другие свойства гармонических функций.
26. Функция Грина для оператора Лапласа и её свойства. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по известной функции Грина.
27. Вывод формулы Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
28. Решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности методом разделения переменных.
29. Принцип максимума для одномерного уравнения теплопроводности.
30. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
31. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

### Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная работа студента состоит в выполнении заданий типового расчета, оформляемого отдельным отчетом и защищаемого студентом. Методические указания и задания можно брать из книги [3] перечня основной литературы (см. п. 7.1).

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		Количество экземпляров изданий в библиотеке ВлГУ в соответствии с ФГОС ВО	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ
1	2	3	4
Основная литература			
1. Уравнения в частных производных [Электронный ресурс] / Треногин В.А., Недосекина И.С. - М. : ФИЗМАТЛИТ.	2013		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114486.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114486.html</a>
2. Сборник задач по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин и др.. - 4-е изд., стереотип. - М. : ФИЗМАТЛИТ	2004		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103091.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103091.html</a>
3. Высшая математика. Уравнения математической физики. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. - 2-е изд., испр. и дополн. - М.: Издательский дом МЭИ	2017		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383012123.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383012123.html</a>
Дополнительная литература			
1. Численные методы в уравнениях математической физики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Вагин Д.В., Домников П.А., Кошкина Ю.И. - Новосибирск : Изд-во НГТУ	2016		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778229716.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778229716.html</a>

### 7.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

### 7.3. Интернет-ресурсы

1. <http://window.edu.ru/>
2. <http://www.exponenta.ru/>
3. <http://allmath.com/>

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для проведения занятий по дисциплине имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3 либо 528-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения:

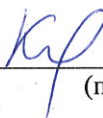
1. Maple

Рабочую программу составил Комаров М.А., доцент каф. ФАиП



(подпись)

Рецензент (представитель работодателя):  
зам. директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В.



(подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП  
Протокол № 1а от 26.08.2019 года  
Заведующий кафедрой Бурков В.Д.



(подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии  
направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»  
Протокол № 1а от 26.08.2019 года  
Председатель комиссии: заведующий кафедрой Бурков В.Д.



(подпись)



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

---

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

---

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

---

## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочей программе дисциплины  
«Уравнения с частными производными»

образовательной программы направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,  
направленность: «Математические методы в экономике и финансах» (бакалавриат)

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата протокола заседания кафедры)
1			
2			

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
(Подпись) (ФИО)