

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор
по образовательной деятельности



А.А. Панфилов

« 26 » 08 20 19 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»**

Направление подготовки: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Профиль/программа подготовки: «Математические методы в экономике и финансах»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экзамен/зачет/зачет с оценкой)
6	3 / 108	18	18	18	54	Зачет
Итого	3 / 108	18	18	18	54	Зачет

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Теория оптимального управления» заключается в ознакомлении с основными методами исследования задач оптимального управления возникающими в инженерных задачах и экономике.

Задачи:

- получение основного представления о решении задач оптимального управления в конечно мерном пространстве в частности используя принцип максимума Понтрягина;
- используя пакеты прикладных программ (Maple, MatLab, MatCAD, и т.д.) и численные методы научиться приближённо решать задачи оптимального управления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Теория оптимального управления» относится к вариативной части учебного плана (дисциплина по выбору).

Пререквизиты дисциплины: математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, функциональный анализ.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	Частичное	Знать основные понятия теории оптимального управления, в том числе формулировки принципа максимума. Уметь применять принцип максимума для решения конкретных экономических задач Владеть навыками решения задач оптимального управления на уровне, позволяющем анализировать простейшие экономические проблемы.
ОПК-6. Способен использовать основы экономических знаний в различных сферах жизнедеятельности	Частичное	Знать основные понятия теории оптимального управления, в том числе формулировки принципа максимума. Уметь применять принцип максимума для решения конкретных экономических задач Владеть навыками решения задач оптимального управления на уровне, позволяющем анализировать простейшие экономические проблемы.
ПК-6. Способен принимать участие в управлении проектами создания информационных систем и программных комплексов на стадиях их жизненного цикла	Частичное	Знать основные понятия теории оптимального управления, в том числе формулировки принципа максимума. Уметь применять принцип максимума для решения конкретных экономических задач Владеть навыками решения задач оптимального управления на уровне, позволяющем анализировать простейшие экономические проблемы.

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 часов.

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Введение.	6	1-3	3	3	3	9	4,5 (50%)	
2	Управляемость. Релейный режим.	6	4-6	3	3	3	9	4,5 (50%)	Рейтинг-контроль 1
3	Линейная задача оптимального быстродействия.	6	7-9	3	3	3	9	4,5 (50%)	
4	Принцип Максимума Понтрягина.	6	10-12	3	3	3	9	4,5 (50%)	Рейтинг-контроль 2
5	Динамическое программирование.	6	13-15	3	3	3	9	4,5 (50%)	
6	Введение в стохастическую теорию управления.	6	16-18	3	3	3	9	4,5 (50%)	Рейтинг-контроль 3
Всего за 6 семестр:				18	18	18	54	27 (50%)	Зачет
Итого по дисциплине				18	18	18	54	27 (50%)	Зачет

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Тема 1. Введение.

Основные определения: динамика, управляемая динамика, управление, множество допустимых управлений, функционал выгоды. Основная задача оптимального управления. Примеры: управление производством и потреблением; управление маятником; задача о приземлении лунохода. Геометрическое решение задачи об оптимальном времени остановки вагонетки.

Тема 2. Управляемость. Релейный режим.

Задача управляемости. Управляемость линейными ОДУ. Множество достижимости. Структура множества достижимости. Матрица управляемости. Критерии управляемости. Примеры. Наблюдаемость. Задача наблюдаемости. Связь между наблюдаемостью и управляемостью. Релейный режим. Теорема существования релейного режима. Экстремальность и релейный режим.

Тема 3. Линейная задача оптимального быстродействия.

Постановка задачи. Существование оптимального решения в задаче быстродействия. Геометрия множества достижимости в линейной задаче оптимального быстродействия.

Принцип максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстродействия. Гамильтониан. Условие максимизации. Система сопряженных уравнений. Принцип Максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстродействия (гамильтонов формализм). Примеры.

Тема 4. Принцип Максимума Понтрягина.

Лагранжиан. Основные задачи вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан динамической системы. Гамильтонова динамика. Ограничения и множители Лагранжа. Безусловная оптимизация. Оптимизация при наличии ограничений.

Принцип Максимума Понтрягин (общий случай). Применение и примеры. Принцип максимума и условия трансверсальности. Принцип максимума с ограничениями на фазовые траектории.

Тема 5. Динамическое программирование.

Вывод уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. Метод динамического программирования. Проверка оптимальности. Примеры. Метод характеристик и связь динамического программирования и Принципа Максимума Понтрягина.

Тема 6. Введение в стохастическую теорию управления.

Стохастические дифференциальные уравнения. Цепное правило Ито. Стохастическое уравнение Гамильтона-Якоби- Беллмана. Задача оптимального выбора портфелей.

Содержание практических занятий по дисциплине

Тема 1. Задача синтеза оптимальных управлений (случай линейных систем). Геометрическое решение. Решение задач.

Тема 2. Множество достижимости. Структура множества достижимости. Матрица управляемости. Решение задач.

Тема 3. Задачи с подвижными концами и условия трансверсальности. Решение задач.

Тема 4. Принцип максимума для неавтономных систем. Решение задач.

Тема 5. Динамическое программирование. Решение задач.

Содержание лабораторных занятий по дисциплине

Тема 1. Необходимые условия экстремума функционала. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 2. Вариационные задачи с подвижными концами. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 3. Ломаные экстремали. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 4. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 5. Задачи с функционалом, содержащим производные высших порядков. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 6. Условный экстремум. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 7. Каноническая форма уравнений Эйлера. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 8. Оптимальное управление. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 9. Методы решения. Прямые методы. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 10. Метод множителей Лагранжа. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 11. Принцип Максимума. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

Тема 12. Динамическое программирование. Численное решение задач. Написание программ в Matlab.

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В преподавании дисциплины «Теория оптимального управления» используются разнообразные образовательные технологии как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- интерактивные лекции (по всем темам).

6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль 1.

Контрольная работа к рейтинг-контролю № 1

1. Решение задач оптимального управления с фиксированным состоянием на правом конце временного отрезка.
2. Поиск оптимального перераспределения инвестиций по регионам.
3. Исследование задачи оптимального управления запасами и производством.

Рейтинг-контроль 2.

Контрольная работа к рейтинг-контролю № 2

1. Задачи оптимального управления в которых присутствуют сингулярные управления.
2. Задачи оптимизации в которых присутствуют только релейные управления.
3. Модель оптимального потребления с ограничениями на траектории системы в виде неравенств.

Рейтинг-контроль 3.

Контрольная работа к рейтинг-контролю № 3

1. Простейшие задачи оптимального управления денежным балансом.
2. Задача оптимального управления финансированием фирмы.
3. Оптимальное управление производством и хранения товара в задачах с бесконечным горизонтом времени.
4. Задача оптимального вылова рыбы.
5. Поиск оптимального решения в задаче накопления капитала.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (зачет)

Вопросы к зачету

1. Основные определения: динамика, управляемая динамика, управление, множество допустимых управлений, функционал выгоды.
2. Основная задача оптимального управления.
3. Геометрическое решение задачи об оптимальном времени остановки вагонетки.
4. Задача управляемости. Управляемость линейными ОДУ.
5. Множество достижимости. Структура множества достижимости.
6. Матрица управляемости. Критерии управляемости. Примеры.
7. Наблюдаемость. Задача наблюдаемости.
8. Связь между наблюдаемостью и управляемостью.
9. Релейный режим. Теорема существования релейного режима.
10. Экстремальность и релейный режим.
11. Существование оптимального решения в задаче быстрогодействия.
12. Геометрия множества достижимости в линейной задаче оптимального быстрогодействия.
13. Принцип максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстрогодействия.
14. Гамильтониан. Условие максимизации. Система сопряжённых уравнений.
15. Принцип Максимума Понтрягина в линейной задаче оптимального быстрогодействия (гамильтонов формализм).
16. Лагранжиан. Основные задачи вариационного исчисления.
17. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан динамической системы.
18. Гамильтонова динамика. Ограничения и множители Лагранжа.
19. Безусловная оптимизация. Оптимизация при наличии ограничений.
20. Принцип Максимума Понтрягин (общий случай).
21. Принцип максимума и условия трансверсальности.
22. Принцип максимума с ограничениями на фазовые траектории.
23. Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.
24. Метод динамического программирования. Проверка оптимальности.
25. Метод характеристик и связь динамического программирования с Принципом Максимума Понтрягина.
26. Стохастические дифференциальные уравнения.
27. Цепное правило Ито.
28. Стохастическое уравнение Гамильтона-Якоби- Беллмана.
29. Задача оптимального выбора портфелей.

Задачи к зачету

1. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^1 -x dt \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad u \in \Omega = [-1, 1]$$

2. Показать, что решение задачи оптимального управления

$$\int_0^2 (2x - 3u - u^2) dt \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 5$$

$$u \in \Omega = [0, 2]$$

не является релейным.

3. Решить задачу оптимального управления

$$8x_1(18) + 4x_2(18) \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \quad x_1(0) = 15$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - u, \quad x_2(0) = 20$$

$$u \in \Omega = [0, 1]$$

4. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^1 u dt \rightarrow \max$$

при условиях:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1$$

$$u \geq 0, \quad x - u \geq 0.$$

5. Используя принцип максимума, решить задачу оптимального управления

$$\int_0^T e^{-\rho t} \ln C(t) dt \rightarrow \max$$

при условиях: $\dot{W} = rW - C, W(0) = W_0, W_0 > 0, W(T) = 0, W(t) \geq 0.$

6. Используя принцип максимума, решить задачу оптимального управления

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \ln C(t) dt \rightarrow \max$$

при условиях: $\dot{W} = rW - C, W(0) = W_0, W_0 > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0, W(t) \geq 0.$

7. Используя ПМП построить стратегию для фирмы торгующей зерном. Динамика которой имеет вид

$$\dot{x} = rx - h(y) - pv, \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0,$$

$$V_2 \leq v \leq V_1$$

Цель фирмы максимизировать выгоду к моменту T

$$x(T) + p(T)y(T) \rightarrow \max.$$

Самостоятельная работа студентов

Темы самостоятельных работ

1. Достаточные условия оптимальности.
2. Принцип максимума со смешанными ограничениями. Достаточные условия оптимальности.
3. Задачи управления с бесконечным горизонтом и стационарность.
4. Модель оптимального финансирования фирмы. Синтез оптимального управления.
5. Модель рекламы (Vidale-Wolfe).
6. Модель управления природными ресурсами.
7. Модель оптимального экономического роста.
8. Модель оптимального управления в эпидемиологии.
9. Модель управления загрязнением окружающей среды.
10. Дифференциальная игра двух игроков с нулевой суммой.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		Количество экземпляров изданий в библиотеке ВлГУ в соответствии с ФГОС ВО	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ
1	2	3	4
Основная литература			
1. Егоров, А.И. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 292 с.	2017		https://e.lanbook.com/book/935 95
2. Бушуев, А.Ю. Примеры решения задач оптимального управления [Электронный ресурс] : методические указания / А.Ю. Бушуев, В.А. Кутыркин. — Электрон. дан. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. — 40 с.	2016		https://e.lanbook.com/book/103 595
3. Задорожная, Н.М. Основы теории и проектирования систем управления. Методология. Математические модели [Электронный ресурс] : методические указания / Н.М. Задорожная. — Электрон. дан. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. — 36 с.	2016		https://e.lanbook.com/book/103 603
Дополнительная литература			
1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В., — Оптимальное управление: учебное пособие М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.— 408 с. ISBN 978-5-9221-0589-7	2007		
2. Егоров А.И., Основы теории управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.— 504 с.	2007		

7.2. Интернет-ресурсы

1. Образовательный математический сайт <http://www.exponenta.ru/>
2. Математическая энциклопедия <http://allmath.com/>
3. Образовательные ресурсы – <http://window.edu.ru/>
4. Основы оптимального управления: <http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-323-principles-of-optimal-control-spring-2008/>

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

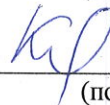
Перечень используемого лицензионного программного обеспечения: MATLAB.

Рабочую программу составил доцент Платов А.С.



(подпись)

Рецензент (представитель работодателя):
зам. директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А. В.



(подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП
Протокол № 1а от 26.08.2019 года
Заведующий кафедрой Бурков В. Д.



(подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии
направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
Протокол № 1а от 26.08.2019 года
Председатель комиссии: заведующий кафедрой Бурков В. Д.



(подпись)

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год

Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочую программу дисциплины

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

образовательной программы направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,
направленность: «Математические методы в экономике и финансах» (бакалавриат)

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата протокола заседания кафедры)
1			
2			

Зав. кафедрой _____ / _____
(Подпись) (ФИО)