

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор  
по образовательной деятельности

А.А.Панфилов

« 26 » 08 2019 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ»**

Направление подготовки: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Профиль/программа подготовки: «Математические методы в экономике и финансах»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экзамен/зачет/зачет с оценкой)
3	4 / 144	36	36		45	Экзамен (27)
Итого	4 / 144	36	36		45	Экзамен (27)

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»:

- знакомство с фундаментальными понятиями и положениями дисциплины,
- формирование геометрического мышления,
- знакомство с аналитическими методами исследования геометрических объектов,
- демонстрация органичности сочетания методов различных математических дисциплин (математического анализа, дифференциальных уравнений, аналитической геометрии и алгебры) при исследовании геометрических объектов,
- формирование представлений о возможностях применения геометрических методов к исследованию объектов профессиональной деятельности.

Задачи:

- изучить основные положения теории дифференциальной геометрии и топологии;
- применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности;
- уметь строить математические модели объектов профессиональной деятельности.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» относится к базовой части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: линейная алгебра, математический анализ, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
<b>ОПК-1.</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	Частичное	В результате освоения дисциплины обучающийся должен: <b>знать</b> - свойства объектов данной области математики и иметь представление о сфере приложения методов дифференциальной геометрии и топологии; <b>уметь</b> - свободно оперировать основными понятиями дисциплины, формулировать геометрическую задачу на алгебраическом языке и дать геометрическую интерпретацию полученного алгебраического решения; <b>владеть</b> - аналитическим аппаратом дифференциальной геометрии.
<b>ПК-1.</b> Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	Частичное	В результате освоения дисциплины обучающийся должен: <b>знать</b> - свойства объектов данной области математики и иметь представление о сфере приложения методов дифференциальной геометрии и топологии; <b>уметь</b> - свободно оперировать основными понятиями дисциплины, формулировать геометрическую задачу на алгебраическом языке и дать геометрическую интерпретацию полученного алгебраического решения; <b>владеть</b> - аналитическим аппаратом дифференциальной геометрии.



#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 часов.

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Кривые на плоскости и в пространстве. Длина кривой. Натурально параметризованные кривые.	3	1	2	2		2	2 / 50%	
2	Сопровождающий трехгранник, формулы Френе, кривизна, кручение.	3	3	4	4		4	4 / 50%	
3	Параметрическое задание поверхности, первая квадратичная форма.	3	5	4	4		8	4 / 50%	Рейтинг-контроль 1
4	Главные направления и главные кривизны. Вторая квадратичная форма, средняя и гауссова кривизны. Классификация точек на поверхности.	3	7	6	6		9	6 / 50%	
5	Деривационные формулы, символы Кристоффеля. Уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци.	3	9	4	3		3	3,5 / 50%	
6	Тензорный анализ (алгебраическая теория)	3	11	6	6		9	6 / 50%	Рейтинг-контроль 2
7	Тензорный анализ (дифференциальная теория)	3	13	4	4		4	4 / 50%	
8	Ковариантная производная и параллельный перенос векторного поля вдоль кривой на поверхности. Геодезические	3	15	2	3		3	2,5 / 50%	
9	Топологическое пространство. Связность, компактность, отделимость. Непрерывные отображения, гомеоморфизм. Фактортопология. Склеивание. Топологическое многообразие. Гладкое многообразие. Примеры.	3	17-18	4	4		4	4 / 50%	Рейтинг-контроль 3
Всего за 3 семестр:				36	36		45	36 / 50%	Экзамен (27)
Итого по дисциплине				36	36		45	36 / 50%	Экзамен (27)

#### Содержание лекционных занятий по дисциплине

##### Тема 1-2. Кривая на плоскости и в пространстве

Параметрические уравнения кривой, касательная к кривой, длина кривой, натуральная параметризация. Уравнения Френе кривой на плоскости. Кривизна. Сопровождающий трехгранник кривой, формулы Френе. Кривизна, кручение. Неявное и параметрические задания уравнения поверхности. Поверхности вращения, линейчатые поверхности. Касательная плоскость.

##### Тема 3-4. Первая и вторая квадратичные формы

Первая квадратичная форма, длина кривой на поверхности, площадь области, изометрия, понятие о внутренней геометрии поверхности. Кривизна нормальных сечений, формула Эйлера, главные



направления и главные кривизны, линии кривизны. Вторая квадратичная форма, средняя и гауссова кривизны поверхности, их геометрический смысл. Нормальная и геодезическая кривизна линии на поверхности.

#### Тема 5. Связь первой и второй квадратичных форм

Сопровождающий трехгранник, деривационные формулы, символы Кристоффеля. Связь первой и второй квадратичных форм: уравнения Гаусса – Петерсона – Кодацци. Теорема Бонне.

#### Тема 6. Алгебраическая теория тензоров

Замена переменных. Базис и кобазис. Тензоры высших порядков. Операции над тензорами. Формы, внутренний дифференциал. Ассоциированная система.

#### Тема 7. Дифференциальная теория тензоров

Дифференциальные формы, внутренний и внешний дифференциал. Характеристическая система формы. Производная Ли. Поведение тензоров при отображениях. Общий символ Кристоффеля. Тензоры кручения и кривизны. Характеристическая система формы. Поведение тензоров при отображении. Производна Ли.

#### Тема 8. Ковариантная производная

Ковариантная производная произвольного тензора. Параллельный перенос тензора; уравнение параллельного переноса. Геодезические линии. Геодезические линии на поверхности, их уравнения и основные свойства.

#### Тема 9. Специальные связности

Связности сопряженные с другими геометрическими объектами. Связность Леви-Чивита. Топология на множестве, топологическое пространство, база топологии. Сравнение топологий. Открытые и замкнутые множества. Индуцированная топология, подпространства. Связность, компактность, аксиомы отделимости. Метрические пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфизм. Фактор-топология; склеивание. Топологические многообразия, атлас карт, функции замены координат. Гладкие многообразия, примеры (кривые и поверхности, задание многообразия системой уравнений, проективное пространство, матричные группы преобразований).

### **Содержание практических занятий по дисциплине**

#### Тема 1-2. Кривая на плоскости и в пространстве

Параметрические уравнения кривой, касательная к кривой, длина кривой, натуральная параметризация. Разбор примеров. Уравнения Френе кривой на плоскости. Кривизна. Примеры. Сопровождающий трехгранник кривой, формулы Френе. Кривизна, кручение. Исследование некоторых конкретных примеров.

#### Тема 3-4. Первая квадратичная форма.

Неявное и параметрические задания уравнения поверхности. Поверхности вращения, линейчатые поверхности. Касательная плоскость. Примеры. Первая квадратичная форма, длина кривой на поверхности, площадь области, изометрия, понятие о внутренней геометрии поверхности. Кривизна нормальных сечений, формула Эйлера, главные направления и главные кривизны, линии кривизны. Разбор примеров. Вторая квадратичная форма, средняя и гауссова кривизны поверхности, их геометрический смысл. Нормальная и геодезическая кривизна линии на поверхности. Примеры.

#### Тема 5. Связь первой и второй квадратичных форм.

Сопровождающий трехгранник, деривационные формулы, символы Кристоффеля. Связь первой и второй квадратичных форм: уравнения Гаусса-Петерсона-Кодацци. Теорема Бонне. Примеры.

Ниже приводится специально сформированный практикум для направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки, который положен в основу проведения практических занятий по указанной теме.

[\*] Звягин М.Ю., Васильченкова Д.Г. Тензорный анализ. Алгебраическая теория: задания к типовым расчетам [Электронный ресурс] // Владимир: ВлГУ. - 2017. – 22 с. – Режим доступа: <http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/6145>

[\*\*] Звягин М.Ю., Васильченкова Д.Г. Тензорный анализ. Дифференциальное исчисление тензоров: задания к типовым расчетам [Электронный ресурс] // Владимир: ВлГУ. - 2017. – 32 с. – Режим доступа: <http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/6166>

#### Тема 6. Алгебраическая теория тензоров.

Решение задач из практикума [\*] (8 задач)



### Тема 7. Дифференциальная теория тензоров.

Решение задач из практикума [\*\*] (15 задач). Общий символ Кристоффеля. Тензоры кручения и кривизны. Построение тензоров по заданному объекту связности; разбор примеров.

### Тема 8. Ковариантная производная.

Ковариантная производная произвольного тензора. Примеры. Построение примеров параллельного переноса. Построение геодезической линии.

### Тема 9. Специальные связности.

Связность Леви – Чивита. Построение объекта связности по заданной метрике. Топология на множестве, топологическое пространство, база топологии. Сравнение топологий. Открытые и замкнутые множества. Индуцированная топология, подпространства. Связность, компактность, аксиомы отделимости. Метрические пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфизм. Фактор-топология; склеивание. Разбор примеров. Топологические многообразия, атлас карт, функции замены координат. Гладкие многообразия, примеры (кривые и поверхности, задание многообразия системой уравнений, проективное пространство, матричные группы преобразований). Разбор примеров.

## **5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

В преподавании дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» используются разнообразные образовательные технологии как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- интерактивные лекции (по всем темам);
- групповая дискуссия (по всем темам).

## **6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

### **Текущий контроль успеваемости Рейтинг-контроль 1 «Кривые»**

Типы задач

1. Найти касательную к кривой, нормальную плоскость.
2. Вычислить натуральный параметр.
3. Найти кривизну кривой.
4. Найти кручение кривой.
5. Построить сопровождающий трехгранник Френе.

### **Рейтинг-контроль 2 «Поверхности»**

Типы задач

1. Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности.
2. Найти 1-квадратичную форму поверхности.
3. Вычислить угол между кривыми на поверхности двумя способами. Сравнить результат.
4. Найти 2-ю квадратичную форму поверхности.
5. Найти главные кривизны, гауссову и среднюю кривизны.

### **Рейтинг-контроль 3 «Тензорный анализ. Аффинные связности»**

Типы задач

1. Тензоры. Операции с тензорами.
2. Внешний и внутренний дифференциалы.
3. Производная Ли.
4. Связности, параллельный перенос.
5. Связность, согласованная с метрикой.

## Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)

### Вопросы к экзамену

1. Понятие кривой. Способы задания кривой. Гладкие и регулярные кривые.
2. Касательная к кривой. Длина дуги кривой. Натуральная параметризация.
3. Кривизна гладкой кривой. Вычисление, геометрический смысл.
4. Бирегулярная кривая. Репер Френе и сопровождающий трехгранник Френе
5. Кручение кривой. Вычисление, геометрический смысл.
6. Формулы Френе для плоской и пространственной кривой.
7. Определение регулярной кривой её кривизной и кручением (формулировка теоремы и идея доказательства). Натуральные уравнения кривой.
8. Простая поверхность. Координатная сеть. Замена координат на простой поверхности.
9. Примеры поверхностей (общая поверхность вращения, сфера, тор, прямой геликоид, линейчатая поверхность, цилиндрическая и коническая поверхности)
10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
11. Первая квадратичная форма поверхности. Первая квадратичная форма графика функции  $z = f(x, y)$  и поверхности вращения.
12. Вычисление длин, углов и площадей на поверхности.
13. Нормальная кривизна поверхности. Вторая квадратичная форма. Вторая квадратичная форма графика функции  $z = f(x, y)$  и поверхности вращения.
14. Главные направления и главные кривизны поверхности. Формула Эйлера.
15. Гауссова и средняя кривизны. Формулы для гауссовой и средней кривизны графика функции  $z = f(x, y)$  и поверхности вращения.
16. Классификация точек поверхности.
17. Линии кривизны. Дифференциальное уравнение линий кривизны.
18. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности.
19. Асимптотические направления. Асимптотические линии. Дифференциальное уравнение асимптотических линий.
20. Деривационные формулы.
21. Коэффициенты связности. Закон их преобразования.
22. Формулы Гаусса и Петерсона-Кодацци.
23. Теорема Бонне.
24. Понятие о внутренней геометрии, изометрия. Примеры локальной изометрии.
25. Абсолютный дифференциал векторного поля. Ковариантная производная в направлении векторного поля. Ковариантная производная вдоль пути.
26. Параллельный перенос вектора по поверхности. Уравнение параллельного переноса.
27. Геодезические линии на поверхности: уравнения геодезических. Экстремальность геодезических.
28. Топология на множестве. Топологическое пространство. База топологии. Замкнутые подмножества.
29. Метрическое пространство. Топология, индуцированная метрикой.
30. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфизм.
31. Связность. Линейная связанность.
32. Аксиомы отделимости.
33. Компактные топологические пространства. Их свойства.
34. Индуцированная топология. Подпространства.
35. Фактор-топология. Фактор-пространство.
36. Понятие  $n$ - мерного топологического многообразия. Карта. Атлас.
37. Гладкий атлас. Гладкое многообразие. Задание многообразия системой уравнений.
38. Группы преобразований как многообразия.

### Самостоятельная работа студентов

#### Типовой расчет №1

#### «Кривые и поверхности»

1. Найти касательную к кривой, нормальную плоскость.
2. Вычислить натуральный параметр.



3. Найти кривизну кривой.
4. Найти кручение кривой.
5. Построить сопровождающий трехгранник Френе.
6. Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности.
7. Найти 1-квадратичную форму поверхности.
8. Вычислить угол между кривыми на поверхности двумя способами. Сравнить результат.
9. Найти 2-ю квадратичную форму поверхности.
10. Найти главные кривизны, гауссову и среднюю кривизны.

### Типовой расчет №2

#### «Тензоры, связности. Элементы топологии»

1. Тензоры, закон преобразования тензора при замене координат.
2. Операции с тензорами; тензорное произведение, внешнее произведение форм, свертка.
3. Внешний и внутренний дифференциалы.
4. Производная Ли, свойства.
5. Связности, тензор кривизны и кручения.
6. Параллельный перенос тензоров.
7. Геодезические.
8. Связность, согласованная с метрикой.
9. Многообразия. Особенности топологии многообразий.
10. Дифференциальная структура: карты, атласы.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		Количество экземпляров изданий в библиотеке ВлГУ в соответствии с ФГОС ВО	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ
1	2	3	4
Основная литература			
1. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии. [Электронный ресурс] Кузовлев В.П., Подаева Н.Г. - М. : - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 208 с. - ISBN 978-5-9221-1360-1.	2012		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113601.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113601.html</a>
2. Методы решения некоторых задач избранных разделов высшей математики [Электронный ресурс] : практикум / К.Г. Клименко, Е.А. Козловский, Г.В. Левицкая. - М. : Прометей, 2014 - 107(1) с. - ISBN 978-5-7042-2529-4.	2014		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785704225294.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785704225294.html</a>
Дополнительная литература			
1. Лекции по дифференциальной геометрии. [Электронный ресурс] / Сизый С. В. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007 - 376 с.- ISBN 978-5-9221-0742-6.	2007		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107426.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107426.html</a>
2. Задачи по топологии [Электронный ресурс] / Прасолов В.В. - М.: МЦНМО, 2008.- 40-с. - ISBN 978-5-94057-349-4.	2008		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940573494.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940573494.html</a>

3. Основы дифференциальной геометрии и в интересных задачах [Электронный ресурс] / Скопенков А.Б. - 2-е изд., испр. - М.: МЦНМО, 2010. -- 72 с. - ISBN 978-5-94057-630-3	2010		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940576303.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940576303.html</a>
4. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. [Электронный ресурс] / Матвеев С.В. - М.: МЦНМО, 2007. -456 с. - ISBN 978-5-94057-209-1	2007		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940572091.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940572091.html</a>

### 7.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, Журнал РАН (корпус 3, ауд. 414) (1 шт)
2. Автоматика и телемеханика, Журнал РАН (корпус 3, ауд. 414) (1 шт)

### 7.3. Интернет-ресурсы

1. Пакет Microsoft Excel
2. MathCad
3. VisualC++
4. Образовательный математический сайт <http://www.exponenta.ru/>
5. Математическая энциклопедия <http://allmath.com/>
6. Образовательные ресурсы – <http://window.edu.ru/>

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного, практического и лабораторного типа.

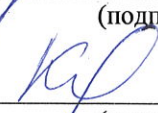
1. Лекционная аудитория (318-3): 75 посадочных мест, мультимедийный проектор с автоматическим экраном.
2. Лаборатория численных методов (405-3): 25 посадочных мест, 13 персональных компьютеров со специализированным программным обеспечением, мультимедийный проектор с экраном.
3. Электронные учебные материалы на компакт -дисках.



Рабочую программу составил к.ф.-м.н., доцент Звягин М.Ю.

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

Рецензент (представитель работодателя):  
зам. директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А. В.

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП

Протокол № 1а от 26.08.2019 года

Заведующий кафедрой Бурков В. Д.

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления  
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Протокол № 1а от 26.08.2019 года

Председатель комиссии: заведующий кафедрой Бурков В. Д.

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_



## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочую программу дисциплины

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

образовательной программы направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,  
направленность: «Математические методы в экономике и финансах» (бакалавриат)

Номер изменения	Внесены изменения в части/разделы рабочей программы	Исполнитель ФИО	Основание (номер и дата протокола заседания кафедры)
1			
2			

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
(Подпись) (ФИО)