

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор  
по образовательной деятельности

А.А.Панфилов

« 04 » 2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**«КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

**Направление подготовки: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»**

**Профиль/программа подготовки: «Математические методы в экономике и финансах»**

**Уровень высшего образования: бакалавриат**

**Форма обучения: очная**

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
5	6 / 216	36	18	18	108	КР, экзамен (36)
<b>Итого</b>	<b>6 / 216</b>	<b>36</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>108</b>	<b>КР, экзамен (36)</b>

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение дисциплины «Качественная теория динамических систем» имеет своей целью:

- знакомство с фундаментальными понятиями и положениями дисциплины,
- формирование математического мышления при исследовании процессов различной природы и анализе их моделей;
- знакомство с методами исследования инвариантных характеристик динамических систем аналитическими методами исследования геометрических объектов,
- формирование представлений о возможностях применения качественных методов теории динамических систем к исследованию объектов профессиональной деятельности

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Качественная теория динамических систем» относится к базовой вариативной части подготовки бакалавра по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Ее изучение позволит обучающимся

— применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности;

— уметь строить математические модели объектов профессиональной деятельности, проводить их анализ, выделять и вычислять их ключевые характеристики.

Для освоения данной дисциплины обучающимся необходимо иметь теоретические знания и практические навыки по дисциплинам «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Дифференциальная геометрия и топология», «Физика», «Алгоритмы и алгоритмические языки», иметь навыки работы с компьютером как средством управления информацией и её обработки.

Основные понятия дисциплины используются при изучении дисциплин, связанных с математическим моделированием и качественным анализом динамических процессов, таких как математическое моделирование, математические методы и модели исследования операций, уравнения с частными производными, теория оптимального управления, теоретическая механика.

## 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать:

- Способностью находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем (ОПК-4).
- Способностью использовать методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач (ПК-5).
- Способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления (ПК-6).

**Знать** основные понятия и методы данной области математики и иметь представление о сфере применения их при анализе объектов профессиональной деятельности;

**Уметь** свободно оперировать основными понятиями дисциплины, формулировать задачи анализа динамических процессов различной природы, давать интерпретацию полученных при анализе характеристик объектов профессиональной деятельности;

**Владеть** основными методами локального и глобального анализа динамических процессов и уметь применять его на практике.



#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) форма промежуточной аттестации (по семестру)	
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Контр. работы	СРС			КП / КР
1	Индекс кривой и особой точки	5	1-2	4	2			8		3 (50%)	
2	Нормальные формы	5	2-4	4	2	6		16		6 (50%)	
3	Многообразия	5	5-6	4	2			8		3 (50%)	Рейтинг-контроль 1
4	Тонкие топологии	5	7	2				4		1 (50%)	
5	Теоремы трансверсальности	5	8-9	4				6		2 (50%)	
6	Особенности. Понятие классификации.	5	10-11	4	2	6		16		6 (50%)	
7	Структурная устойчивость векторных полей и отображений	5	12-14	6	2			16	КР	4 (50%)	Рейтинг-контроль 2
8	Семейства функций (векторных полей). Версальные деформации.	5	15	2	4			10		3 (50%)	
9	Простейшие бифуркации. Мягкая и жесткая потеря устойчивости.	5	16	2	4	4		16		5 (50%)	
10	Хаотическая динамика. Теорема Такенса	5	17-18	4		2		8		3 (50%)	Рейтинг-контроль 3
<b>ИТОГО</b>				<b>36</b>	<b>18</b>	<b>18</b>		<b>108</b>	<b>КР</b>	<b>36 (50%)</b>	<b>Экзамен (36)</b>

#### СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

**Раздел 1. Понятие индекса.** Индекс замкнутой кривой в векторном поле, его непрерывность. Индекс изолированной особой точки, теорема об индексе и следствия из неё: теорема о причисывании «ежа», основная теорема алгебры и другие. Примеры.

**Раздел 2. Нормальные формы.** Понятие ростка объекта, эквивалентности ростков, нормальной формы. Нормальные формы ростков векторных полей и отображений. Теорема сведения Шюпитайшвилли. Примеры.

**Раздел 3. Введение в теорию особенностей.** Понятие карты, атласа, дифференциальной структуры, многообразия. Тонкие топологии. Понятие типичности как инструмента исследования, особенности, классификации. Понятие структурной устойчивости динамических систем и отображений. Примеры.

**Раздел 4. Семейства и бифуркации.** Понятие семейства, эквивалентности семейств и бифуркации. Бифуркация Андронова-Хопфа, мягкая и жесткая потери устойчивости. Примеры.

**Раздел 5. Хаотическая динамика.** Понятие хаотической динамики. Аттрактор и размерность его вложения. Теорема Такенса и реконструкция динамической системы. Примеры применения динамического хаоса.

## **5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

1. Лекционно-семинарская система обучения (традиционные лекционные и практические занятия);
2. Обучение в малых группах (выполнение лабораторных работ, в том числе в рамках самостоятельной работы);
3. Применение мультимедиа технологий (проведение лекционных и практических занятий с применением компьютерных презентаций);
4. Технология развития критического мышления (критическая оценка изучаемых моделей, понятий, получаемых решений и их интерпретации);
5. Информационно-коммуникационные технологии. Объем учебной работы, с применением интерактивных методов 36 часов — 50%.

## **6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

В рамках документа «Положение о рейтинговой системе комплексной оценки знаний студентов» разработан регламент проведения и оценивания контрольных действий. Процедура оценивания знаний, умений, навыков по дисциплине включает учёт успешности выполнения ряда мероприятий: текущей аттестации (контрольных работ, рейтинг – контролей, лабораторных работ); самостоятельной работы (типовых расчетов, курсовых работ и др.) и промежуточной аттестации (зачёта, зачета с оценкой или экзамена).

Публикуемые компоненты ФОС:

1. Полный список теоретических вопросов промежуточной аттестации (несменяемая часть).
2. Типовые формы текущей аттестации (КР).
3. Типовые формы самостоятельной работы (ТР).

Для генерирования сменяемой части оценочных средств (задач), используются материалы библиотеки ВлГУ и указанных там же специальных сайтов.

### **Лабораторные работы** Темы лабораторных работ Работа 1

В модели Штоммеля океанической циркуляции при заданных параметрах и функции переноса найти особую точку векторного поля, собственные числа и собственные векторы линеаризации поля в этой точке, определить тип особой точки.

### Работа 2

В модели Штоммеля океанической циркуляции при заданных параметрах и функции переноса предложить асимптотику изменения величин из лабораторной работы 1 при стремлении к нулю ширины полосы роста функции перехода и найти параметры предложенных асимптотик.



### Работа 3

В модели Штоммеля океанической циркуляции при заданных параметрах и функции переноса найти цикл векторного поля, аппроксимировать отображение последования для этого цикла и вычислить производную этого отображения в точке цикла. Предложить асимптотику изменения этих параметров при стремлении к нулю ширины полосы роста функции перехода.

### Работа 4

Для заданного временного ряда посчитать его численные характеристики.

#### Текущий контроль в форме рейтинг – контроля Рейтинг-контроль 1. «Инварианты векторных полей» Типовая контрольная работа к рейтинг-контролю №1

1. Индекс кривой в векторном поле. Примеры.
2. Найти особые точки векторного поля  $(x^2 + 2y^2 - 9, y - 2x^2)$  на плоскости и определить их тип.
3. Вблизи своей неподвижной точки - начала координат - гладкое отображение имеет вид  $(x, y) \mapsto (2x + 2003xy + o(x^2 + y^2), x + 16y + y^2 + x^2 + o(x^2 + y^2))$ . Какова формальная нормальная форма отображения вблизи этой точки?
4. Вблизи нуля гладкое векторное поле имеет вид  $(2x + 2009xy + o(x^2 + y^2), x - 2008y + y^2 + x^2 + o(x^2 + y^2))$ . Какова формальная нормальная форма этого поля вблизи этой точки?

#### Рейтинг-контроль 2. «Типичность и трансверсальность» Типовая контрольная работа к рейтинг-контролю №2

1. Понятие  $k$ -струи. Пространство  $k$ -струй.
2. Вычислить 2-струю отображения  $(x, y) \mapsto (\arctg(2x - y), e^{x+2y} - 1)$  в нуле.
3. Трансверсальны ли отображения вещественной прямой на плоскость  $t \mapsto (x = t^3, y = t^2)$  и  $t \mapsto (x = t^2, y = t)$ ?
4. Может ли пересечение образов двух трансверсальных отображений быть отрезком?

#### Рейтинг-контроль 3. «Версальность и бифуркации» Типовая контрольная работа к рейтинг-контролю №3

1. Понятие бифуркации. Примеры бифуркаций.
2. Для семейства векторных полей на плоскости  $(x^2 + \varepsilon x + \varepsilon, y)$  укажите возможные бифуркационные значения параметра  $\varepsilon$ .
3. Для отображения вещественных прямых  $x \mapsto x^3$  предложите миниверсальную деформацию и обоснуйте её.
4. Автономное гладкое векторное поле на плоскости имеет лишь гиперболические особые точки. Может ли его цикл или цикл достаточно  $C^1$ -близкого векторного поля охватывать ровно две особые точки?

## Промежуточная аттестация в форме экзамена

### Вопросы к экзамену

1. Действие диффеоморфизма на векторное поле. Теорема о выпрямлении поля вблизи особой точки.
2. Резонансы и резонансные мономы. Формальные нормальные формы векторных полей.
3. Резонансы и резонансные мономы. Формальные нормальные формы диффеоморфизмов.
4. Индекс кривой в векторном поле. Индекс изолированной особой точки. Сохранение индекса при непрерывных деформациях.
5. Теорема об индексе. Следствия из теоремы об индексе.
6. Уравнения с периодической правой частью. Отображение за период. Периодические решения и их устойчивость.
7. Отображение Пуанкаре и устойчивость циклов автономных векторных полей.
8. Многообразия. Понятие карты, атласа, согласованности карт и атласов. Дифференциальной структуры. Примеры многообразий.
9. Расслоения. Касательное расслоение. Риманова метрика.
10. Обыкновенное дифференциальное уравнение на многообразии.
11. Ростки и струи. Расслоения струй. Теорема об эквивалентности струй отрезкам рядов Тейлора.
12. Слабые и сильные (тонкие) топологии. Типичность.
13. Понятие трансверсальности. Теоремы трансверсальности. и следствия из них.
14. Следствия из теорем трансверсальности. Типичность невырожденных и гиперболических особых точек векторных полей.
15. Локальная алгебра отображения. Подготовительная теорема и следствия из нее.
16. Понятие особенности. Классификация простых особенностей функций.
17. Структурная устойчивость векторных полей. Структурно устойчивые поля на двумерной сфере.
18. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.
19. Структурная устойчивость отображений. Примеры.
20. Семейства векторных полей (отображений). Эквивалентность семейств. Версальные деформации.
22. Простейшие бифуркации. Мягкая и жесткая потеря устойчивости.
23. Понятие странного аттрактора и его размерности. Теорема Такенса. Пространство вложения динамической системы.

### Самостоятельная работа студента

#### Вопросы к самостоятельной работе студента

1. Разобрать действие диффеоморфизма на векторное поле. Построить примеры такого действия и примеры выпрямления поля.
2. Изучить понятие резонанса для особой точки векторного поля. Построить примеры резонансного и нерезонансного случаев. Предложить соответствующие формальные нормальные формы полей вблизи особых точек.
3. Изучить понятие резонанса для неподвижной точки отображения. Построить примеры резонансного и нерезонансного случаев. Предложить соответствующие формальные нормальные формы отображения вблизи особых точек.
4. Разобрать понятие индекс кривой в векторном поле. Построить примеры.
5. Разобрать теорему об индексе и следствия из неё. Предложить примеры использования.



6. Построить примеры уравнений с периодической правой частью, отображения за период для него. Разобрать понятие периодического решения и его устойчивости.
7. Построить примеры отображение Пуанкаре для циклов автономных векторных полей. Разобрать понятие устойчивости цикла.
8. Изучить понятия карты, атласа, согласованности карт и атласов, дифференциальной структуры, многообразия. Привести примеры многообразий с атласом из одной карты, двух,  $n \in \mathbb{N}$  карт.
9. Разобрать понятие расслоения, касательного расслоение, римановой метрики. Построить примеры.
10. Разобрать понятие обыкновенного дифференциального уравнение на многообразии, его решении, задачи Коши.
11. Изучить понятие ростков и струй. Расслоения струй. Теорема об эквивалентности струй отрезкам рядов Тейлора.
12. Разобрать понятие топологии и типичности. Построить примеры.
13. Изучить понятие трансверсальности, разобрать теорему трансверсальности и следствия из них. Построить примеры.
14. Изучить понятие локальной алгебры отображения, разобрать подготовительную теорему и следствия из нее. Построить примеры.
16. Изучить понятие особенности. Привести примеры.
17. Разобрать понятие структурной устойчивости векторных полей. Привести примеры структурно устойчивых полей и не являющихся таковыми.
20. Изучить понятие семейства объектов, эквивалентности семейств, версальных и миниверсальных деформаций. Построить примеры.
22. Разобрать понятие бифуркации. Построить примеры.
23. Изучить понятие странного аттрактора и его размерности. Привести примеры эффективного применения понятия размерности. Разобрать теорему Такенса.

### **Самостоятельная работа в форме курсовой работы**

#### **Типичная задача по курсовой работе**

Изучить модель Холлинга-Теннера (см., например, Д.Эрроусмит, К.Плейс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Качественная теория с приложениями, стр. 146-150), выбрать четыре численных параметра модели, при которых наблюдается устойчивый предельный цикл. Затем зафиксировать два из них, а двум другим придать не менее трёх значений вблизи выбранных. При всех наборах параметров вычислить тип ненулевой особой точки векторного поля системы и найти её собственные числа, найти предельный цикл, его диаметр, период и отображение Пуанкаре. Предложить модели для аппроксимации функций диаметра, периода и отображения Пуанкаре как функций свободных параметров. Дать интерпретацию вычисленных показателей.

## **7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основная литература**

1. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии [Электронный ресурс] / Кузовлев В.П., Подаева Н.Г. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113601.html>

2. Геометрическое моделирование окружающего мира [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Уткин. - 2-е изд., стер. - М. : ФЛИНТА, 2014. - 219с. - ISBN 978-5-9765-1956-5. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976519565.html>
3. Основы геометрической теории нелинейных управляемых систем [Электронный ресурс] / Елкин В.И. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115452.html>

#### Дополнительная литература

1. Особенности дифференцируемых отображений. [Электронный ресурс] / Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. - 3-е изд., стереотип. - М.: МЦНМО, 2009. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940574569.html>
2. Основы алгебраической геометрии [Электронный ресурс] / Шафаревич И.Р. - 3-е изд., доп. - М.: МЦНМО, 2007. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940570851.html>
3. Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах [Электронный ресурс] / Скопенков А.Б. - 2-е изд., испр. - М.: МЦНМО, 2010. -- 72 с. - ISBN 978-5-94057-630-3. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940576303.html>
4. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. [Электронный ресурс] / Матвеев С.В. - М.: МЦНМО, 2007.-456 с. ISBN 978-5-94057-209-1. <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940572091.html>
5. Динамические системы и модели в биологии [Электронный ресурс] / Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 400 с. - ISBN 978-5-9221-1192-8 <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111928.html>

#### 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Лекционная аудитория (318-3): 75 посадочных мест, мультимедийный проектор с автоматическим экраном.
2. Электронные учебные материалы на компакт-дисках.
3. Лаборатории вычислительных методов 405-3, 528-3.

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Рабочую программу составил:

д.ф.-м.н., профессор, профессор каф. ФАиП А.А. Давыдов 

Рецензент (представитель работодателя):

заместитель директора по развитию ООО «Баланс»  / Кожин А.В. /

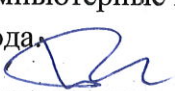
Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП

Протокол № 1 от 04.09.2018 года.

Заведующий кафедрой ФАиП: к.ф.-м.н., доцент В.Д. Бурков 

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Протокол № 1 от 04.09.2018 года.

Председатель комиссии  зав. кафедрой ФАиП В.Д. Бурков



**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_