

2014
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебно-методической работе

А.А. Панфилов

« 29 » 01

2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Направление подготовки: 02.03.01 – «Математика и компьютерные науки»

Профиль подготовки: «Математические методы в экономике и финансах»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения очная

Семестр	Трудоём- кость зач. ед., час.	Лекций, час.	Практич. занятий, час.	Лаборат. работ час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экзамен/зачет)
6	6/216	36	36	-	99	Экзамен (45)
Итого:	6/216	36	36	-	99	Экзамен (45)

Владимир 2015

Цели освоения дисциплины

Цель преподавания курса - дать студентам научное представление о случайных процессах, а также о методах их исследования.

Задачи курса. В соответствии с целью студенты должны познакомиться с основными классами случайных процессов, усвоить методы исследования случайных процессов, основанные на изучении конечномерных распределений процессов, а также познакомиться с возможностью потраекторного анализа случайных процессов.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Курс базируется на общих курсах теории вероятностей и математической статистики, использует методы теории функций. В свою очередь, является основой для ряда дисциплин, (например, стохастических дифференциальных уравнений) как развивающих методы СА, так и использующих эти методы для решения реальных прикладных задач (например, задач актуарной и финансовой математики).

2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины «Стохастический анализ» обучающийся должен:

Знать: теорию случайных процессов (ПК-2).

Уметь: применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности; строить математические модели объектов профессиональной деятельности; использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-6, ПК-2).

Владеть: методами стохастического анализа и, кроме того, научиться содержательно интерпретировать формальные результаты (ПК-6, ПК-2).

Расшифровка компетенций:

ПК-6 способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;

ПК-2- способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.

3. Структура и содержание дисциплины «Стохастический анализ»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра), форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Основные понятия теории меры и теории вероятностей. Определение случайного процесса, конечномерные распределения, построение процесса с заданным распределением, теорема Колмогорова.	6	1-2	4	4		6	4(50%)	
2	Примеры случайных процессов: винеровский процесс, пуассоновский процесс и т.д.. Обзор основных методов теории случайных процессов и важнейших классов случайных процессов.	6	3	2	2		5	2(50%)	
3	Определение стационарных в узком смысле и стационарных в широком смысле случайных процессов и случайных последовательностей. Примеры.	6	4	2	2		6	2(50%)	
4	Сохраняющие меру преобразования и их свойства. Теорема Пуанкаре о "возвратности". Эргодичность и перемешивание. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина	6	5-6	4	4		8	4(50%)	Рейтинг-контроль 1

5	Связь сохраняющего меру преобразования и стационарной последовательности. Понятие эргодической стационарной последовательности. Формулировки эргодических теорем для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов.	6	7	2	2	6	2(50%)	
6	Определения случайных процессов и последовательностей, образующих мартингал, субмартингал и супермартингал. Примеры. Напоминание свойств условных математических ожиданий.	6	8	2	2	6	2(50%)	
7	Свойства мартингалов и полумартингалов с дискретным временем. Пример из теории игр. Разложение Дуба для субмартингалов.	6	9	2	2	6	2(50%)	
8	Мартингалы с непрерывным временем на примере винеровского процесса. Построение стохастического интеграла по винеровскому процессу от случайных функций.	6	10	2	2	6	2(50%)	
9	Понятие стохастических дифференциальных уравнений. Диффузионные процессы, задаваемые стохастическими уравнениями. Их связь с уравнениями в частных производных	6	11	2	2	8	2(50%)	Рейтинг-контроль 2
10	Определения марковских процессов, марковских последовательностей и марковских цепей. Разные формы марковского свойства. Примеры	6	12	2	2	8	2(50%)	

11	Модель испытаний, связанных в цепь Маркова. Примеры из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов ("очередь", "бесперебойное обеспечение", задача "рождения и гибели" и т.д.)	6	13-14	4	4	8	4(50%)	
12	Однородные цепи Маркова, уравнение Колмогорова - Чэпмена. Эргодическая теорема.	6	15-16	4	4	8	4(50%)	
13	Классификация состояний марковской цепи по свойствам переходных вероятностей и по асимптотическим свойствам переходных вероятностей. Существование предельных и стационарных распределений. Примеры, иллюстрирующие введенные понятия и полученные результаты.	6	17-18	4	4	8	4(50%)	Рейтинг-контроль 3
Итого:216				36	36	99	36 (50%)	Экз.(45)

4. Образовательные технологии

4.1. Активные и интерактивные формы обучения

1. Лекционно-семинарская система обучения (традиционные лекционные и **практические занятия**);
2. обучение в малых группах (выполнение практических работ в группах из двух или трёх человек);
3. применение мультимедиа технологий (проведение лекционных и практических занятий с применением компьютерных презентаций и демонстрационных роликов с помощью проектора или ЭВМ);
4. технология развития критического мышления (прививание студентам навыков критической оценки предлагаемых решений);
5. информационно-коммуникационные технологии (применение информационных технологий для мониторинга текущей успеваемости студентов и контроля знаний). Объем учебной работы, с применением интерактивных методов 36 часов — 50%.

4.2 Самостоятельная работа студентов

Целью самостоятельной работы являются формирование личности студента, развитие его способности к самообучению и повышению профессионального уровня.

Насыщенность курса новыми для студента материалами предполагает интенсивную самостоятельную работу, эффективному характеру которой способствуют еженедельные консультации. Самостоятельная работа включает домашнюю работу с лекционными материалами с целью расширения и углубления теоретических знаний, выполнение заданий

и самостоятельных изысканий, предусмотренных контрольными работами. В основе самостоятельной работы лежит изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы, а также выполнение самостоятельных изысканий, включенных в учебно-методический макет по дисциплине.

Самостоятельная работа заключается в изучении содержания тем курса по конспектам, учебникам и дополнительной литературе, подготовке к практическим занятиям, к экзамену.

При освоении дисциплины используются следующие сочетания видов учебной работы с методами и формами активизации познавательной деятельности студентов для достижения запланированных результатов обучения и формирования компетенций:

- самостоятельное изучение теоретического материала дисциплины с использованием Internet-ресурсов, информационных баз, методических разработок, специальной учебной и научной литературы;

- самостоятельная работа, направленная на углубление и закрепление знаний, а также развитие практических умений, поиск и анализ литературы и электронных источников информации по заданной проблеме, выполнении домашних заданий, изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, изучении теоретического материала к практическим занятиям, подготовке к контрольным мероприятиям и экзамену.

5.Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

5.1. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Текущий контроль знаний, согласно «Положению о рейтинговой системе комплексной оценки знаний студентов в ВлГУ» (далее Положение) в рамках изучения дисциплины «Стохастический анализ» предполагает выполнение контрольных работ.

Контрольная работа к рейтинг-контролю №1

Контрольная работа №1 «Теория случайных процессов»

Вариант 1

1. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{-1\}, \{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.

2. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.

3. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{1}{3}, 1]$. И функции, измеримые относительно нее.

Контрольная работа к рейтинг-контролю №2

Контрольная работа №2 «Теория случайных процессов»

Вариант 1

1. Пусть w_t^0 , $0 \leq t \leq 1$, - условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.

2. Проверить, что если процесс $\xi_t, t \in T \subseteq R$ - процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.

3. Доказать, что $Dw_t, t \geq 0$ является функцией, не убывающей по t . w_t - винеровский процесс.

Контрольная работа к рейтинг-контролю №3

Контрольная работа №3 «Теория случайных процессов»

Вариант 1

1. Нарисовать граф и указать существенные и несущественные состояния цепи

Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотреть вопрос о стационарных, предельных, эргодических распределениях для марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Проверить, что винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом.

Задание на СРС

Примеры заданий.

1. Корреляционной функцией винеровского процесса является

$$K_1(t, s) = \min[t, s], \quad t, s \geq 0;$$

$$K_2(t, s) = \min[t, s] - ts, \quad t, s \in [0, 1];$$

$$K_3(t, s) = e^{-|t-s|}, \quad t, s \in R?$$

2. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, F - σ -алгебра всех подмножеств Ω , P - мера, приписывающая множествам $\{-1\}, \{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.

3. Винеровский процесс является ли гауссовским процессом, т.е. процессом, конечномерные распределения которого нормальны?

4. Пусть $w_t^0, 0 \leq t \leq 1$, - условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.

5. Дать определение винеровского процесса.

6. Пусть $\eta \sim N(0, 1), t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.

7. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{2\}, \{1\}, \{3\}$ одинаковые вероятности $1/3$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все трехмерные распределения процесса.

8. Пусть $\eta \sim U[0, 1]$, $t \in R$. Найти все одномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$ и $D\xi_1$.

9. Доказать: $\xi^{-1}(D_1 \cup D_2) = \xi^{-1}(D_1) \cup \xi^{-1}(D_2)$; (Взятие полного прообраза сохраняет теоретико-множественные операции.)

10. Как называются процессы $\xi_t(\omega)$ и $\xi'_t(\omega)$, если они определены на одном вероятностном пространстве (Ω, F, P) и при любом $t \in T$ верно, что $P\{\xi_t(\omega) \neq \xi'_t(\omega)\} = 0$.

11. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{1}{3}, 1]$. И функции, измеримые относительно нее.

12. Что называют *конечномерными распределениями случайного процесса*.

13. Сформулировать условия симметрии и согласованности для конечномерных распределений случайного процесса.

14. Проверить, что если процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R$ – процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.

15. Как называется процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R$, если его конечномерные распределения не меняются при сдвиге, т.е., если $t_1, \dots, t_n \in T$, $(t_i \neq t_j)$, и для любого действительного h такого, что $t_1+h, \dots, t_n+h \in T$, верно $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n)$.

16. Пусть F_1 и F_2 – две σ -алгебры подмножеств пространства Ω . Проверить является ли σ -алгеброй класс множеств $F_1 \cap F_2$?

17. Будет ли Dw_t , $t \geq 0$ функцией, не убывающей по t . w_t – винеровский процесс.

18. Нарисовать граф и указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова

с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Могут ли все состояния цепи Маркова с конечным числом состояний быть несущественными?

20. Винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом, субмартингалом или супермартингалом?

5.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации студентов по итогам освоения дисциплины

Вопросы к экзамену по дисциплине «Стохастический анализ».

1. Два определения случайных процессов, эквивалентность определений.

2. Примеры (случайное блуждание, процесс восстановления, модель Крамера-Лундберга, винеровский и пуассоновский процессы).
3. Винеровский процесс (определение, конечномерные распределения, корреляционная функция).
4. Основные классы случайных процессов.
5. Стационарные в узком смысле случайные последовательности (определение, примеры).
6. Сохраняющее меру отображение. Теорема о возвратности.
7. Сохраняющее меру отображение. Эргодичность и перемешивание.
8. Эргодические теоремы для сохраняющих меру отображений и случайных процессов, стационарных в узком смысле.
9. Условное математическое ожидание (определение, корректность определения, примеры).
10. Свойства условного математического ожидания.
11. Теоремы о предельном переходе под знаком условного математического ожидания.
12. Мартингалы и полумартингалы с дискретным временем (определения, примеры).
13. Разложение Дуба для субмартингалов.
14. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от простой функции, его свойства.
15. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от функций, интегрируемых с квадратом и непрерывных по t .
16. Понятие стохастического дифференциального уравнения.
17. Определение марковского процесса. Разные формы марковского свойства.
18. Марковская цепь с конечным числом состояний. Модель испытаний, связанных в цепь Маркова и пример из теории игр.
19. Задачи из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов.
20. Однородная цепь Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
21. Пример эргодической марковской цепи. Формулировка теоремы об эргодичности и существовании стационарного распределения.
22. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний по арифметическим свойствам переходных вероятностей.
23. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний, по асимптотическим свойствам переходных вероятностей.
24. Пример простого случайного блуждания, иллюстрирующий введенные понятия классификации состояний и предельного поведения переходных вероятностей.

В конце семестра студенты сдают экзамен по дисциплине «Стохастический анализ». Экзамен сдается устно, по билетам, в которых представлены вопросы из перечня «Вопросы для экзамена» и задача.

Эти средства в целом позволяют оценить степень усвоения теоретических знаний; приобретенные студентами практические умения, а также профессиональные компетенции студентов.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. Основная литература (из фонда библиотеки ВлГУ)

1. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. - М.: Издательский дом МЭИ, 2013. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383008553.html>
2. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика [Электронный ресурс] / К.Л. Чжун, Ф. АитСахлиа. - М.: БИНОМ, 2014. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996313174.html>
3. Модели в теории вероятностей [Электронный ресурс] / Федоткин М.А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012

6.2. Дополнительная литература (из фонда библиотеки ВлГУ)

1. Вероятность: В 2-х кн. Кн. 2. [Электронный ресурс] / Ширяев А.Н. - 4-е изд., переработ. и доп. - М.: МЦНМО, 2007. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940571063.html>
2. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] / Миллер Б.М., Панков А.Р.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102063.html>
3. Теория случайных процессов для экономистов [Электронный ресурс] / Соколов Г.А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111003.html>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Лекционная аудитория (318-3): 75 посадочных мест, мультимедийный проектор с автоматическим экраном.
- Электронные учебные материалы на компакт-дисках.

