Министерство общего и профессионального
образования Российской Федерации

Владимирский государственный университет

Кафедра высшей математики

ЗАДАНИЯ К ТИПОВЫМ РАСЧЕТАМ ПО МАТЕМАТИКЕ.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Составители

А.Г.СОРОКИНА
А.Г.БЕСПАЛОВА
М.С.БЕСПАЛОВ

Владимир 1997

УДК 517.31+517.91(076)

Задания к типовым расчетам по математике. Неопределенный интеграл, определенный интеграл, дифференциальные уравнения/ Владим. гос. ун-т; Сост.: А.Г.Сорокина, А.Г.Беспалова, М.С.Беспалов, Владимир, 1997. 72 с.

Приведены индивидуальные задания к типовым расчетам по следующим разделам: неопределенный интеграл, определенный интеграл и дифференциальные уравнения.

Предназначены для студентов первого курса технических и экономических специальностей дневной и вечерней форм обучения. Первый раздел составила Сорокина А.Г., второй - Беспалова А.Г., третий - Беспалов М.С.

Ил. 5. Библиогр.: 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Владимирского государственного университета.

Рецензент д-р физ.-мат. наук Н.М.Тимофеев (Владимирский государственный педагогический университет).

ЗАДАНИЯ К ТИПОВЫМ РАСЧЕТАМ ПО МАТЕМАТИКЕ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Составители

СОРОКИНА Александра Георгиевна

БЕСПАЛОВА Алла Григорьевна

БЕСПАЛОВ Михаил Сергеевич

Ответственный за выпуск - зав.кафедрой профессор К.В.Валиков

Редактор А.П.Володина

Лицензия № 020275 от 13.II.96 г.
Подписано в печать 06.02.97. Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Печать офсетная. Усл.печ.л. 4,18. Уч.изд.л. 4,21. Тираж 400 экз. Зак. 72-97.

Владимирский государственный университет.
Подразделение оперативной полиграфии Владимирского государственного университета. Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии: 600026 Владимир, ул. Горького, 87.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материалы настоящих заданий соответствуют второму семестру программы по высшей математике высшего технического учебного заведения.

Типовые расчеты состоят из трех разделов с самостоятельной нумерацией в каждом разделе, в каждом задании 30 вариантов. В начале задания приведены краткая теоретическая справка и решения наиболее сложных задач. Более подробно теоретические сведения изложены в книге [1] и методических указаниях [2].

В подборе заданий принимали участие преподаватели кафедры высшей математики: по разделам "Неопределенный и определенный интеграл" - В.Д.Бурков, по разделу "Дифференциальные уравнения" - Д.Я.Данченко, В.И.Данченко, М.Ю.Звягин, С.А.Голопуз. При составлении заданий использовались материалы сборников [3 и 4].

Составители выражают благодарность Л.И.Глазовой за помощь в технической подготовке заданий.

РАЗДЕЛ I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Теоретическая справка

Во всех формулах предполагается, что подынтегральная функция непрерывна (или первообразная ищется в той области, где подынтегральная функция непрерывна).

При вычислении неопределенных интегралов кроме отличного знания таблицы интегралов необходимо хорошее владение методами интегрирования (внесение под знак дифференциала, замена переменной, формула интегрирования по частям, применение рекуррентных формул).

Внесение под знак дифференциала (первое правило замены)

Если известно, что $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ и $u(x)$ - произвольная функция, то

$$\int f(u)\,du = F(u)+C. \qquad (I)$$

При использовании свойства (I) полезно помнить, что при любом постоянном α $d(x+a)=dx$, $\frac{1}{a}d(ax)=dx$ $(a\neq 0)$.

Например, так как $\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C$,

то $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,d(x+1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2}+C.$

Замена переменной. Если положить $x=\varphi(t)$, то $dx=\varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt. \qquad (2)$$

Формула (2) применяется в основном при интегрировании сложных тригонометрических функций и при вычислении интегралов от иррациональных (содержащих радикалы) функций.

Интегрирование по частям

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du. \qquad (3)$$

Формула (3) интегрирования по частям обычно применяется при вычислении интеграла от произведения многочлена либо на тригонометрическую, либо на обратную тригонометрическую, либо на показательную, либо на логарифмическую функции.

Задача I. Вычислить интеграл

$$J = \int \frac{1}{4^x+9\cdot 4^{-x}}\,dx.$$

Преобразуем подынтегральное выражение и воспользуемся тем, что

$$4^x dx = \frac{1}{\ln 4}\cdot\ln 4\cdot 4^x dx = \frac{1}{\ln 4}\cdot(4^x)'\,dx = \frac{1}{\ln 4}\,d(4^x);$$

$$J = \int \frac{4^x}{4^{2x}+9}\,dx = \frac{1}{\ln 4}\int \frac{1}{(4^x)^2+9}\,d(4^x).$$

Используя формулу (I) и табличный интеграл $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$, получим

$$J = \frac{1}{3\ln 4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4^x}{3}+C.$$

Задача 2. Вычислить $J=\int \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+2}}\,dx$. Сделаем замену переменной $\ln x = t$; $x=e^t$; $dx=(e^t)'\,dt = e^t dt$

Тогда

$$J = \int \frac{t\cdot e^t}{e^t\sqrt{t^2+2}}\,dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{\sqrt{t^2+2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(t^2)'\,dt}{\sqrt{t^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{\sqrt{t^2+2}}.$$

Воспользуемся табличным интегралом $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ (при $\alpha=-\frac{1}{2}$) и свойством (I), получим

$$J = \frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+2)^{1/2}}{1/2}+C = \sqrt{t^2+2}+C.$$

Вернемся к исходной переменной, $t=\ln x$, $J=\sqrt{\ln^2 x+2}+C$

Задача 3. Вычислить $J=\int \frac{x+5}{x^3(x^2-4x+5)}\,dx$. Подынтегральная функция - рациональная дробь, она правильная, так как степень числителя меньше степени знаменателя (в ином случае следует предварительно выделить целую часть дроби). Знаменатель дроби разложен на простейшие множители. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

$$\frac{x+5}{x^3(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+F}{x^2-4x+5}. \quad (4)$$

Отбрасывая знаменатели, придем к тождеству

$$Ax^2(x^2-4x+5) + Bx(x^2-4x+5) + C(x^2-4x+5) +$$
$$+Dx^4 + Fx^3 = x+5.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов в левой и правой частях тождества, составляем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A, B, C, D, F

$$\begin{array}{l} x^4: \\ x^3: \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \quad \begin{cases} A+D=0 \\ -4A+B+F=0 \\ 5A-4B+C=0 \\ 5B-4C=1 \\ 5C=5 \end{cases}$$

Решая систему, находим C =I, B = I, A = $\frac{3}{5}$, $F=\frac{7}{5}$, $D=-\frac{3}{5}$.
Подставляя разложение (4) под знак интеграла, имеем

$$J = \int\left(\frac{3}{5x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{-\frac{3}{5}x+\frac{7}{5}}{x^2-4x+5}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{10}\cdot\int\frac{6x-14}{x^2-4x+5}dx.$$

Вычислим отдельно последний интеграл

$$\int\frac{6x-14}{x^2-4x+5}dx = \int\frac{3(2x-4)-2}{x^2-4x+5}dx = 3\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx -$$

$$-2\int\frac{1}{x^2-4x+5}dx = 3\int\frac{1}{x^2-4x+5}\,d(x^2-4x+5) -$$

$$-2\int\frac{1}{(x-2)^2+1}\,d(x-2) = 3\ln|x^2-4x+5| - 2\,\mathrm{arctg}(x-2) + C.$$

Окончательно

$$J = \frac{3}{5}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{10}\ln|x^2-4x+5| - \frac{2}{10}\,\mathrm{arctg}(x-2) + C.$$

Задача 4. Вычислить $J = 2^{10}\int\sin^2 2x\cdot\cos^6 2x\,dx$. Интегралы такого вида проще всего вычислять использованием тригонометрических формул "понижения степени"

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$2^{10}\cdot\sin^2 2x\cdot\cos^6 2x = 2^8\sin^2 4x\cdot\cos^4 2x =$$

$$= 2^6\cdot\sin^2 4x\cdot(1+\cos 4x)^2 = 2^6\cdot(\sin^2 4x + 2\sin^2 4x\cos 4x +$$

$$+\sin^2 4x\cos^2 4x) = 2^4(2-2\cos 8x + 8\sin^2 4x\cos 4x +$$

$$+\sin^2 8x) = 2^3(4-4\cos 8x + 16\sin^2 4x\cos 4x + 1 - \cos 16x) =$$

$$= 2^3(5-4\cos 8x + 16\sin^2 4x\cos 4x - \cos 16x).$$

Тогда $\quad J = \int 2^3\cdot 5\cdot dx - 4\int\cos 8x\,d(8x) +$

$$+32\int\sin^2 4x\,d(\sin 4x) - \frac{1}{2}\int\cos 16x\,d(16x) =$$

$$= 40x - 4\sin 8x + \frac{32}{3}\sin^3 4x - \frac{1}{2}\sin 16x + C.$$

Задача 5. Вычислить $J = \int\cos 3x\cdot\cos^2 4x\,dx$. Воспользуемся формулой понижения степени и формулой преобразования произведения косинусов в сумму

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

$$J = \frac{1}{2}\int\cos 3x\,(1+\cos 8x)\,dx + \frac{1}{2}\int(\cos 3x + \cos 3x\cos 8x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 11x + \frac{1}{2}\cos 5x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\cos 3x\,d(3x) + \frac{1}{44}\int\cos 11x\,d(11x) + \frac{1}{20}\int\cos 5x\,d(5x) =$$

$$= \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{44}\sin 11x + \frac{1}{20}\sin 5x + C.$$

Задача 6. Вычислить $J=\int\frac{\cos x}{(1-\cos x)^3}\,dx$. Сделаем замену переменной (универсальная подстановка):

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\,,\quad x=2\operatorname{arctg}t\,,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt\,,$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

$$J=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=2\int\frac{(1-t^2)(1+t^2)^3\cdot dt}{(1+t^2-1+t^2)^3(1+t^2)^2}=$$

$$=2\int\frac{1-t^4}{8t^6}\,dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5t^5}+\frac{1}{t}\right)+C.$$

Вернемся к первоначальной переменной

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\qquad\left(\frac{1}{t}=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$$

$$J=-\frac{1}{20}\operatorname{ctg}^5\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$$

Задача 7. Вычислить $J=\int\frac{2\operatorname{ctg}x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx$. Сделаем замену

$$\operatorname{ctg}x=t\,;\quad x=\operatorname{arcctg}t\,,\quad dx=-\frac{1}{1+t^2}\,dt\,;$$

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\quad \cos x=\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

$$J=-\int\frac{2t+1}{\left(\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=-\int\frac{2t+1}{(t+2)^2}\,dt=$$

$$=\int-\frac{2(t+2)-3}{(t+2)^2}\,dt=-2\int\frac{1}{t+2}\,d(t+2)+3\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=$$

$$=-2\ln|t+2|-\frac{3}{t+2}+C.$$

После возвращения к исходной переменной $t=\operatorname{ctg}x$ получим

$$J=-2\ln|\operatorname{ctg}x+2|-\frac{3}{\operatorname{ctg}x+2}+C.$$

Задача 8. Вычислить $J=\int\sqrt{\frac{6-x}{x+10}}\,dx$. Сделаем замену переменной $\frac{6-x}{10+x}=t^2$, $6-x=xt^2+10t^2$,

$$x=\frac{6-10t^2}{t^2+1}\,,\qquad dx=\frac{-20t\cdot(t^2+1)-2t(6-10t^2)}{(t^2+1)^2}\,dt=$$

$$=-\frac{32t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Применяя формулу (2), получаем

$$J=\int\sqrt{t^2}\cdot\frac{-32t}{(t^2+1)^2}\,dt=-32\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt=$$

$$=-32\int\frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^2}\,dt=-32\int\frac{1}{t^2+1}\,dt+32\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Первый из полученных интегралов табличный; для вычисления второго воспользуемся рекуррентной формулой

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\cdot\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\right)$$

при $a^2=1$, $n=2$:

$$J=-32\operatorname{arctg}t+\frac{32}{2}\cdot\left(\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{1}{t^2+1}\,dt\right)=$$

$$=-16\operatorname{arctg}t+\frac{16t}{t^2+1}+C.$$

Делая обратную подстановку $t=\sqrt{\frac{6-x}{10+x}}$, находим

$$J=-16\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{6-x}{10+x}}+\frac{16\sqrt{\frac{6-x}{10+x}}}{\frac{6-x}{10+x}+1}+C=$$

$$=-16\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{6-x}{10+x}}+\sqrt{(6-x)(10+x)}+C.$$

Задача 9. Вычислить $J=\int\frac{1}{\sqrt{(25+x^2)^3}}dx$. Воспользуемся тригонометрической подстановкой

$$x=5\,\mathrm{tg}\,t,\quad dx=\frac{5}{\cos^2 t}dt,$$

$$25+x^2=25+25\,\mathrm{tg}^2 t=\frac{25}{\cos^2 t};$$

$$J=\int\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{25}{\cos^2 t}}\right)^3}\cdot\frac{5}{\cos^2 t}dt=\int\frac{5\cdot dt}{5^3\cdot\frac{\cos^2 t}{\cos^3 t}}=$$

$$=\frac{1}{25}\int\cos t\,dt=\frac{1}{25}\sin t\,dt+C=\frac{\mathrm{tg}\,t}{25\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}+C=$$
$$=[\mathrm{tg}\,x=t]=\frac{x}{25\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Задача 10. Вычислить $J=\int(2x+3)\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}dx$. Под знаком интеграла – произведение многочлена на обратную тригонометрическую функцию. Поэтому нужно воспользоваться формулой (3) интегрирования по частям. Положим

$$u=\mathrm{arcctg}\frac{x}{2},\quad du=-\frac{1}{1+x^2/4}\cdot\frac{1}{2}dx=-\frac{2}{4+x^2}dx;$$

$$dv=(2x+3)dx,\quad v=x^2+3x.$$

По формуле (3) получаем

$$J=(x^2+3x)\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}-\int(x^2+3x)\cdot\frac{-2}{4+x^2}dx=$$

$$=(x^2+3x)\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}+2\int\frac{(x^2+4)+3x-4}{x^2+4}dx=$$

$$=(x^2+3x)\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}+2\int dx+3\int\frac{2x}{x^2+4}dx-$$

$$-8\int\frac{1}{x^2+4}dx=(x^2+3x)\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}+2x+$$

$$+3\ln(x^2+4)+4\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}+C.$$

ЗАДАНИЯ

В задачах I – 15 вычислить неопределенный интеграл.

Задача № I.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-4x}}$
2. $\int\frac{\mathrm{tg}\,2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
3. $\int\frac{2^{2x}}{2^x+3}dx$
4. $\int\sin x\cos x\cdot 4^{\cos^2 x}dx$
5. $\int\frac{1}{5^x+4\cdot 5^{-x}}dx$
6. $\int\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{1+(\sqrt{x})^3}\,dx$
7. $\int\frac{\sqrt{1+\mathrm{arcctg}\frac{x}{2}}}{4+x^2}dx$
8. $\int\frac{\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$
9. $\int(\sin x+\cos x)\cdot 3^{\sin x-\cos x}dx$
10. $\int\frac{dx}{x^2\cos^2\frac{x+2}{x}}$

11. $\int \frac{\ln x}{(x\ln x - x)^2}\,dx$

12. $\int \sqrt{\frac{\arccos^3 2x}{1-4x^2}}\,dx$

13. $\int \frac{\ln x + 2}{x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)\arccos\frac{x}{3}}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{2+\sqrt{x}}}$

16. $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}\,dx$

17. $\int \frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{x+1}{x}\,dx$

18. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^2 x - 4}}$

19. $\int \frac{\sqrt{2\,\mathrm{arctg}\,2x+5}}{1+4x^2}\,dx$

20. $\int \frac{1}{x(1+4\ln^2 x)}\,dx$

21. $\int \frac{\arccos 2x + 1}{\sqrt{(1-4x^2)\arccos 2x}}\,dx$

22. $\int \frac{dx}{2^x + 3\cdot 2^{-x}}$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+2\ln x}}$

24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$

26. $\int \frac{3^x}{4+9^x}\,dx$

27. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt[3]{\mathrm{ctg}\,x}}$

28. $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt[3]{2+\cos^2 x}}\,dx$

29. $\int \frac{1}{x^2}\cdot 2^{-\frac{1}{x}}\,dx$

30. $\int 2^x\cdot\sqrt[4]{2^x+3}\,dx$

Задача № 2.

1. $\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^3}\,dx$

2. $\int \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln^3 x+2}}\,dx$

3. $\int \sqrt{\frac{2+\arccos\frac{3x}{2}}{4-9x^2}}\,dx$

4. $\int \sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{x}}\,dx$

5. $\int \frac{1}{x^4}\cdot\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^3}}\,dx$

6. $\int \frac{\ln x + 2}{x(\ln^2 x + 1)}\,dx$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot 3^{2\,\mathrm{ctg}\,x}\,dx$

8. $\int \frac{dx}{3^x-2}$

9. $\int \frac{\sqrt[4]{2-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int \sqrt{\frac{1+\arcsin 2x}{1-4x^2}}\,dx$

11. $\int \sqrt{x}\cdot 2^{\sqrt{x^3}}\,dx$

12. $\int \frac{\sqrt[3]{2+3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{2^x+2}$

14. $\int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sqrt[3]{\sin 2x - \cos 2x}}\,dx$

15. $\int \sin x\cdot\cos^2 x\cdot 2^{\cos^3 x}\,dx$

16. $\int \frac{dx}{3^x + 4\cdot 3^{-x}}$

17. $\int \cos x\cdot\arcsin(1-\sin x)\,dx$

18. $\int \sin x\cdot\ln(2+3\cos x)\,dx$

19. $\int (x^2+1)\cdot e^{x^3+3x}\,dx$

20. $\int \frac{dx}{3^x - 4\cdot 3^{-x}}$

21. $\int \sin 2x \cdot 2^{\sin^2 x - \cos^2 x}\, dx$

22. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

23. $\int (\sin x + \cos x) \cdot 2^{\sin x - \cos x}\, dx$

24. $\int (2x+1) \cdot 3^{x^2 + x}\, dx$

25. $\int \frac{\cos x - 2\sin x}{(\sin x + 2\cos x)^3}\, dx$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$

27. $\int \frac{3^{2x}}{3^x - 2}\, dx$.

28. $\int \sqrt{\frac{\arccos \frac{x}{2}}{4 - x^2}}\, dx$

29. $\int (1 + \cos x) \cdot \sqrt[3]{x + \sin x}\, dx$

30. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - 2\sin^2 x}}\, dx$

Задача № 3.

1. $\int (4x-5) \sin \frac{x}{3}\, dx$

2. $\int (3+4x) \cos 5x\, dx$

3. $\int (4-5x) \cos \frac{x}{3}\, dx$

4. $\int (2-5x) \cdot e^{2-3x}\, dx$

5. $\int (4x-1) \sin \frac{x}{2}\, dx$

6. $\int (2-5x) \sin \frac{x}{3}\, dx$

7. $\int (3-4x) \cos 3x\, dx$

8. $\int (3x-5) \cos 4x\, dx$

9. $\int (2-3x) \cdot e^{3x-2}\, dx$

10. $\int (3x-4) \cos \frac{x}{3}\, dx$

11. $\int (5x-1) \sin 2x\, dx$

12. $\int (4-3x)\, e^{3x-1}\, dx$

13. $\int (2-5x) \cos 3x\, dx$

14. $\int (7-2x) \cos 4x\, dx$

15. $\int (4x-5) \sin 3x\, dx$

16. $\int (3x+7)\, e^{2x+3}\, dx$

17. $\int (3x+5) \sin 3x\, dx$

18. $\int (3-4x) \cos 2x\, dx$

19. $\int (2x-3)\, e^{2x+1}\, dx$

20. $\int (2-4x) \sin 3x\, dx$

21. $\int (4x-1)\, e^{3x}\, dx$

22. $\int (2x+3) \cos 2x\, dx$

23. $\int (1+2x)\, e^{2x}\, dx$

24. $\int (2-3x)\, e^{x/2}\, dx$

25. $\int (3x+5) \cos \frac{x}{4}\, dx$

26. $\int (3x-4) \cos \frac{x}{3}\, dx$

27. $\int (3x-2) \sin 4x\, dx$

28. $\int (3x-1) \cos \frac{x}{2}\, dx$

29. $\int (4x-1) \sin 3x\, dx$

30. $\int (4x-3)\, e^{-4x}\, dx$.

Задача № 4.

1. $\int (3x^2+5x-1)\, e^{-3x} dx$
2. $\int (x^2+5x-3)\, e^{2x-1} dx$
3. $\int (4x^2+2x-1)\, e^{2x+1} dx$
4. $\int (3x^2+4x+2) \cos 2x\, dx$
5. $\int (2x^2+5x-1)\, e^{-2x} dx$
6. $\int (2x^2+5x)\, e^{-2x} dx$
7. $\int (3x^2+2x)\, e^{1-\frac{x}{2}} dx$
8. $\int (2x^2-x-2)\, e^{2x+3} dx$
9. $\int (3+x-2x^2) \cos 2x\, dx$
10. $\int (x^2+4x+2)\, e^{1-4x} dx$
11. $\int (2x^2+x-1)\, e^{1-3x} dx$
12. $\int (2x^2-3) \cdot \cos \frac{x}{4}\, dx$
13. $\int (3-x+2x^2)\, e^{2x+3} dx$
14. $\int (3x^2+x-2)\, e^{1-\frac{x}{2}} dx$
15. $\int (3x^2+2)\, e^{-3x+2} dx$
16. $\int (2+x-x^2) \cos \frac{x}{4}\, dx$
17. $\int (2x-3x^2)\, e^{-\frac{x}{3}} dx$
18. $\int (x^2+4x-1)\, e^{1-2x} dx$
19. $\int (x^2-x+5) \sin \frac{x}{3}\, dx$
20. $\int (x^2+4)\, e^{-2x} dx$

21. $\int (2x^2+x) \cos \frac{x}{2}\, dx$
22. $\int (1-2x-x^2)\, e^{-\frac{x}{2}} dx$
23. $\int (x^2-x) \sin \frac{x}{3}\, dx$
24. $\int (2x^2+1) \cos 2x\, dx$
25. $\int (3-2x^2)\, e^{-3x} dx$
26. $\int (x^2+4x-1)\, e^{-2x} dx$
27. $\int (1-x-x^2)\, e^{-\frac{x}{2}} dx$
28. $\int (2x^2-x)\, e^{-3x} dx$
29. $\int (x^2+2x+2)\, e^{-2x} dx$
30. $\int (x^2+4x) \cos 2x\, dx$

Задача № 5.

1. $\int (3x+2)\, \mathrm{arctg}\, 2x\, dx$
2. $\int (x^2-2) \arcsin 3x\, dx$
3. $\int x^4 \cdot \log_2 (2x+1)\, dx$
4. $\int (1-2x^2) \arccos \frac{x}{2}\, dx$
5. $\int (2x-3)\, \mathrm{arcctg}\, \frac{x}{2}\, dx$
6. $\int (x^3+2x^2) \cdot \ln (2x-1)\, dx$
7. $\int (2-5x^2) \arccos 2x\, dx$
8. $\int (3x+4)\, \mathrm{arcctg}\, 3x\, dx$
9. $\int (x^5-2x) \ln (4x-1)\, dx$
10. $\int (x^2+x^3) \log_3 2x\, dx$

11. $\int (2x-5)\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}\,dx$

12. $\int (1-3x^2)\arcsin 3x\,dx$

13. $\int (x^2+4)\arccos 2x\,dx$

14. $\int x^4 \ln(3x-2)\,dx$

15. $\int (3x-4)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,dx$

16. $\int (2x+x^4)\log_2(x+3)\,dx$

17. $\int (3x^2-1)\arcsin\frac{x}{2}\,dx$

18. $\int (2-5x)\operatorname{arcctg} 3x\,dx$

19. $\int (x^5+1)\ln(1-3x)\,dx$

20. $\int (2+3x^2)\arcsin\frac{x}{2}\,dx$

21. $\int (4-3x)\operatorname{arcctg} 3x\,dx$

22. $\int (3-2x^2)\arcsin\frac{x}{4}\,dx$

23. $\int (1-2x^2)\arcsin 2x\,dx$

24. $\int (x+1)^2\cdot\log_2(x+2)\,dx$

25. $\int (2x-3)\operatorname{arctg} 3x\,dx$

26. $\int (3x^2+2)\arcsin 2x\,dx$

27. $\int (x^2+2x)\log_3(x+1)\,dx$

28. $\int (2x-1)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx$

29. $\int (x^2-3)\arccos 2x\,dx$

30. $\int (4x+3)\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}\,dx$

Задача № 6.

1. $\int \frac{x^2+1}{(x^2+x-2)^2}\,dx$

2. $\int \frac{x^2+4x+1}{x^2(x-1)(x+1)^3}\,dx$

3. $\int \frac{(2x^3-1)\,dx}{x(x+1)^2(x^2-2x+5)}$

4. $\int \frac{4x^2+1}{(x^2+2x-3)^3}\,dx$

5. $\int \frac{x^6+1}{x(x^2-4)^2}\,dx$

6. $\int \frac{2x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)^2}\,dx$

7. $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2(x+1)^3}\,dx$

8. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+x-2)(x^2+2x-3)}$

9. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+x-2)^3}$

10. $\int \frac{x^7+2x+1}{x^6-16x^2}\,dx$

11. $\int \frac{x^7+x^6+1}{x^3(x^2-1)^2}\,dx$

12. $\int \frac{1+x^2-x^7}{x^3(x^2-4)^2}\,dx$

13. $\int \frac{x^6+2}{(x^2-1)(x^4+x^2)}\,dx$

14. $\int \frac{x^5-x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx$

15. $\int \frac{x+3}{x^3(x^2-x-2)^2}\,dx$

16. $\int \frac{x^5+2}{(x^2+x)(x^2-2x)}\,dx$

17. $\int \frac{x^5-2}{x^2(x+1)(x^2+1)}\,dx$

18. $\int \frac{1+2x+x^6}{(x^2+x)^3}\,dx$

19. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x-1)(x+1)^2(x+2)^3}$

20. $\int \frac{(x^6+2)\,dx}{x(x^2+2x)^2}$

21. $\int \frac{x^6+2}{x^2(x^3+1)}\,dx$

22. $\int \frac{2x^5+1}{(x+1)(x^3-1)}\,dx$

23. $\int \frac{2x^7+x^2-3}{x^2(x^2-4)^2}\,dx$

24. $\int \frac{2x^6+3x-3}{x(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

25. $\int \frac{x^7-x+2}{x^4(x+1)(x^2+1)}\,dx$

26. $\int \frac{x^8+x+1}{(x^2-1)^3}\,dx$

27. $\int \frac{x^6+2}{x^4(x-2)^2}\,dx$

28. $\int \frac{x^7+2x+2}{x^2(x^4-1)}\,dx$

29. $\int \frac{x^6+2}{x(x^4+5x^2+4)}\,dx$

30. $\int \frac{2x^6+3}{x^2(x+1)^3}\,dx$

Задача № 7.

1. $\int \frac{x^6-2x+1}{x^5+4x^3}\,dx$

2. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}$

3. $\int \frac{x^6+2x}{(x^2+4)(x^4-1)}\,dx$

4. $\int \frac{2x^6-1}{x(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

5. $\int \frac{(2x^2+x)\,dx}{(x+1)(x+3)^3}$

6. $\int \frac{x^3\,dx}{(x+1)(x+2)(x^2+2)}$

7. $\int \frac{x^6+2}{x^3(x^2-4x+8)}\,dx$

8. $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+4)(x^2+2)}\,dx$

9. $\int \frac{2-x^6}{x^3(x^2+6x+10)}\,dx$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x-3)(x^2+2x+2)}$

11. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2(x^4+5x^2+4)}$

12. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{(x^2+2x+10)(x+1)^2}$

13. $\int \frac{dx}{x(x^2+5x+6)^2}$

14. $\int \frac{(x^2-2)\,dx}{x^3(x+1)(x+2)^2}$

15. $\int \frac{(x^2-x)\,dx}{(x+1)(x^2+1)(x^2+2)}$

16. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x(x+1)(x^4-16)}$

17. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)(x^2+2x+2)}$

18. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

19. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x(x^4+3x^2+2)}$

20. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2-1)(x^2+6x+10)}$

21. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x+2)(x-2)^3(x^2+1)}$

22. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x(x^2+2x)^3}$

23. $\int \frac{(x^2+4)\,dx}{(x^2+2x-3)(x-1)^2}$

24. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2+2x)(x^2+2x+2)}$

25. $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}$

26. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2(x+4)(x^2+4)}$

27. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x^2+1)(x^2+2)}$

28. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2+2x-3)^2}$

29. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x(x+1)^2(x-1)^3}$

30. $\int \frac{(x+4)\,dx}{(x^2+2x+2)(x^2-1)}$

Задача № 8.

I. $\int \frac{2x^2+x+1}{x(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

2. $\int \frac{2x^2-1}{(x^2-4)^2(x+3)}\,dx$

3. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2(x+1)^2(x+2)}$

4. $\int \frac{(x^2+2x+1)\,dx}{(x+2)(x+3)^2(x-1)^2}$

5. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^3(x^2+4x+5)}$

6. $\int \frac{(2x^6+3)\,dx}{x^2(x^4-16)}$

7. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x^2-x-2)^2}$

8. $\int \frac{(2x^6+1)\,dx}{x^3(x+1)^2}$

9. $\int \frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2(x+2)^3}\,dx$

10. $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-1)(x^2-9)}\,dx$

II. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

I2. $\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{(x^2+3x-4)(x^2+4)}$

I3. $\int \frac{(x+4)\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$

I4. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x^2(x^4-1)}$

I5. $\int \frac{(x^5+2)\,dx}{x(x^2+2x)^2}$

I6. $\int \frac{dx}{(x^2+3x+2)^3}$

I7. $\int \frac{dx}{x(x^2+2x+1)^2}$

I8. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x(x+1)^2(x+2)^3}$

I9. $\int \frac{(x^6+2)\,dx}{x(x^2-x)^2}$

20. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x^2+2x+1)^2}$

2I. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x-1)(x^2+3x+2)^2}$

22. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+4x^2+3}$

23. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)(x^2+2x+2)}$

24. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x(x+1)(x+2)^2}$

25. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2(x-1)^3}$

26. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4x-5)^2}$

27. $\int \frac{(x^4+2)\,dx}{(x^2-1)^3}$

28. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)(x^2+4x+4)}$

29. $\int \frac{dx}{x^2(x^4-1)}$

30. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(2x+1)(2x+2)^2}$

Задача № 9.

I. $\int \sin^3 2x \cos^5 2x\,dx$

2. $\int \sin^4 \frac{x}{3} \cos^3 \frac{x}{3}\,dx$

3. $\int \sin^3 3x \cos^3 3x\,dx$

4. $\int \sin^5 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

5. $\int \sin^3 2x \cos^4 2x\,dx$

6. $\int \sin^7 2x \cos^2 2x\,dx$

7. $\int \sin^6 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}\,dx$

8. $\int \sin^5 3x \cos^3 3x\,dx$

9. $\int \sin^5 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$

I0. $\int \sin^4 3x \cos^5 3x\,dx$

11. $\int \sin^2\frac{x}{3}\cos^7\frac{x}{3}\,dx$

12. $\int \sin^2 3x\cos^7 3x\,dx$

13. $\int \sin^4\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}\,dx$

14. $\int \sin^5 3x\cos^4 3x\,dx$

15. $\int \sin^5\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}\,dx$

16. $\int \sin^6 3x\cos^3 3x\,dx$

17. $\int \sin^7\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$

18. $\int \sin^3\frac{x}{3}\cos^4\frac{x}{3}\,dx$

19. $\int \sin^5 3x\cos^2 3x\,dx$

20. $\int \sin^3\frac{x}{4}\cos^3\frac{x}{4}\,dx$

21. $\int \sin^4 2x\cos^3 2x\,dx$

22. $\int \sin^3\frac{x}{3}\cos^5\frac{x}{3}\,dx$

23. $\int \sin^7\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$

24. $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos^3\frac{x}{3}\,dx$

25. $\int \sin^3\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}\,dx$

26. $\int \sin^5\frac{x}{4}\cos^3\frac{x}{4}\,dx$

27. $\int \sin^7\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,dx$

28. $\int \sin^5\frac{x}{3}\cos^4\frac{x}{3}\,dx$

29. $\int \sin^7 3x\cos^4 3x\,dx$

30. $\int \sin^3 5x\cos^3 5x\,dx$

Задача № 10.

1. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos^6\frac{x}{2}\,dx$

2. $\int \sin^4 2x\cos^6 2x\,dx$

3. $\int \sin^4\frac{x}{4}\cos^4\frac{x}{4}\,dx$

4. $\int \sin^6\frac{x}{4}\cos^4\frac{x}{4}\,dx$

5. $\int \sin^6\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,dx$

6. $\int \cos^8\frac{x}{8}\,dx$

7. $\int \sin^8 2x\,dx$

8. $\int \sin^2 2x\cos^6 2x\,dx$

9. $\int \sin^4\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}\,dx$

10. $\int \sin^4\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}\,dx$

11. $\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}\,dx$

12. $\int \sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$

13. $\int \cos^8\frac{x}{4}\,dx$

14. $\int \sin^8\frac{x}{2}\,dx$

15. $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}\,dx$

16. $\int \sin^4\frac{x}{2}\cos^6\frac{x}{2}\,dx$

17. $\int \sin^4 2x\cos^4 2x\,dx$

18. $\int \sin^6 2x\cos^4 2x\,dx$

19. $\int \sin^6\frac{x}{8}\cos^2\frac{x}{8}\,dx$

20. $\int \cos^8\frac{x}{2}\,dx$

21. $\int \sin^8 \frac{x}{4}\, dx$.

22. $\int \sin^2 2x \cos^6 2x\, dx$

23. $\int \sin^8 2x\, dx$

24. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x\, dx$

25. $\int \sin^4 2x \cos^6 2x\, dx$

26. $\int \sin^4 3x \cos^6 3x\, dx$

27. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2}\, dx$

28. $\int \sin^4 2x \cos^4 2x\, dx$.

29. $\int \cos^8 \frac{x}{6}\, dx$.

30. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2}\, dx$

Задача № II.

I. $\int \cos^2 4x \sin 3x\, dx$.

2. $\int \sin^2 3x \sin^2 5x\, dx$

3. $\int \cos^2 3x \cos^2 5x\, dx$.

4. $\int \sin^2 3x \cos^2 5x\, dx$

5. $\int \cos^2 3x \sin 5x\, dx$

6. $\int \cos^2 3x \cos 5x\, dx$.

7. $\int \sin^2 3x \sin 5x\, dx$

8. $\int \sin^2 3x \cos 5x\, dx$.

9. $\int \sin^2 3x \sin^2 4x\, dx$

I0. $\int \cos^2 3x \cos^2 4x\, dx$

II. $\int \sin^2 3x \cos^2 4x\, dx$

I2. $\int \cos^2 3x \sin 4x\, dx$

I3. $\int \cos^2 3x \cos 4x\, dx$

I4. $\int \sin^2 3x \sin 4x\, dx$.

I5. $\int \sin^2 3x \cos 4x\, dx$.

I6. $\int \sin^2 2x \sin^2 3x\, dx$.

I7. $\int \cos^2 2x \cos^2 3x\, dx$

I8. $\int \sin^2 2x \cos^2 3x\, dx$

I9. $\int \cos^2 2x \sin 3x\, dx$

20. $\int \cos^2 2x \cos 3x\, dx$

2I. $\int \sin^2 2x \sin 3x\, dx$

22. $\int \sin^2 2x \cos 3x\, dx$

23. $\int \sin^2 3x \sin 5x\, dx$

24. $\int \sin^2 3x \cos 4x\, dx$

25. $\int \cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3}\, dx$

26. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{3}\, dx$.

27. $\int \cos^2 5x \sin 6x\, dx$.

28. $\int \cos^2 3x \sin^2 7x\, dx$.

29. $\int \sin^2 6x \cos 7x\, dx$

30. $\int \cos^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{5}\, dx$

Задача № 12.

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,(1-\cos x)}$,

2. $\int \frac{\cos x\,dx}{2+\cos x}$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$.

4. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^3}$.

5. $\int \frac{(\cos x-\sin x)\,dx}{(1+\sin x)^2}$,

6. $\int \frac{dx}{\cos x\,(1-\cos x)}$

7. $\int \frac{dx}{\sin x\,(1-\sin x)}$.

8. $\int \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$

9. $\int \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}$

10. $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{1+\cos x+\sin x}$.

11. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x-\cos x}$

12. $\int \frac{(1+\cos x)\,dx}{1+\cos x+\sin x}$,

13. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$

14. $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{(1-\sin x)^2}$.

15. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x+\sin x}$

16. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

17. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x-\sin x}$.

18. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

19. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$

20. $\int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos x\,(1+\cos x)}$

21. $\int \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$,

22. $\int \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$

23. $\int \frac{dx}{\cos x\,(1+\cos x)}$

24. $\int \frac{\cos x\,dx}{1-\cos x-\sin x}$

25. $\int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1+\sin x)^2}$

26. $\int \frac{(1+\cos x)\,dx}{2+\cos x}$

27. $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x+2\cos x}$

28. $\int \frac{(2+\sin x)\,dx}{1+\cos x}$

29. $\int \frac{dx}{\cos x\,(2+\cos x)}$

30. $\int \frac{dx}{\sin x\,(1+\sin x)}$

Задача № 13.

1. $\int \frac{dx}{(3\,\mathrm{tg}\,x+5)\sin 2x}$.

2. $\int \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx$

3. $\int \frac{(3+2\,\mathrm{tg}\,x)\,dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}$

4. $\int \frac{(4\,\mathrm{tg}\,x-5)\,dx}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}$

5. $\int \frac{(8+\mathrm{tg}\,x)\,dx}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}$

6. $\int \frac{(\mathrm{tg}\,x+2)\,dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}$

7. $\int \frac{6\,\mathrm{tg}\,x\,dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}$,

8. $\int \frac{2\,\mathrm{tg}^2 x-11\,\mathrm{tg}\,x-22}{4-\mathrm{tg}\,x}\,dx$

9. $\int \frac{(3\,\mathrm{tg}\,x+1)\,dx}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}$

10. $\int \frac{\mathrm{tg}\,x\,dx}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}$

11. $\int \frac{(1+\operatorname{ctg} x)\,dx}{(\sin x + 2\cos x)^2}$

12. $\int \frac{6\sin^2 x\,dx}{6\cos 2x - 8}$

13. $\int \frac{(4+\operatorname{tg} x)\,dx}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x}$

14. $\int \frac{(12+\operatorname{tg} x)\,dx}{(3\sin^2 x + 12\cos^2 x)}$

15. $\int \frac{(6+\operatorname{tg} x)\,dx}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

16. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x - 7}$

17. $\int \frac{(7+3\operatorname{tg} x)\,dx}{(\sin x + 2\cos x)^2}$

18. $\int \frac{(2\operatorname{tg} x + 5)\,dx}{(5-\operatorname{tg} x)\sin 2x}$

19. $\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 50}{2\operatorname{tg} x + 7}\,dx$

20. $\int \frac{(5\operatorname{tg} x + 2)\,dx}{2\sin 2x + 5}$

21. $\int \frac{(4\operatorname{tg} x - 5)\,dx}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1}$

22. $\int \frac{6\sin^2 x\,dx}{4+3\cos 2x}$

23. $\int \frac{(\operatorname{tg} x - 3)\,dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x - 4}$

24. $\int \frac{(2+3\operatorname{tg} x)\,dx}{25\sin^2 x + 9\cos^2 x}$

25. $\int \frac{(2+\operatorname{ctg} x)\,dx}{(2\sin x - \cos x)^2}$

26. $\int \frac{(\sin x + \cos x)\,dx}{2\sin x + \cos x}$

27. $\int \frac{(3-\operatorname{tg} x)\,dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x}$

28. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{3+2\cos 2x}$

29. $\int \frac{(1+3\operatorname{tg} x)\,dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x + 3}$

30. $\int \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$

Задача № 14.

1. $\int \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1})\,dx}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}$

2. $\int \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}\,dx$

3. $\int \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\,dx$

4. $\int \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\,dx$

5. $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}\,dx$

6. $\int \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})\,dx}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2}$

7. $\int \frac{5\sqrt{x+24}\,dx}{(x+24)^2\sqrt{x}}$

8. $\int \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7}\,dx$

9. $\int \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}\,dx$

10. $\int \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2})\,dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}$

11. $\int \frac{x\,dx}{2+\sqrt{2x+1}}$

12. $\int \frac{15\sqrt{x+3}\,dx}{(x+3)^2\sqrt{x}}$

13. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}}\,dx$

14. $\int \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}\,dx$

15. $\int \frac{\sqrt{x+25}\,dx}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}$

16. $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,dx$

17. $\int \frac{5\sqrt{x+1}\,dx}{(x+1)^2\sqrt{x}}$

18. $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,dx$

19. $\int \frac{4\sqrt{x}\,dx}{x^2\sqrt{x-1}}$

20. $\int \frac{(6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x})\,dx}{\sqrt{x^3} - 7x - 6\sqrt[4]{x^3}}$

21. $\int \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1})\,dx}{(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x})(x+1)^2}$

22. $\int \frac{(2 + \sqrt[3]{x})\,dx}{(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})\sqrt{x}}$

23. $\int \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\,dx$

24. $\int \frac{\sqrt{x-2}\,dx}{(x-2)^2\sqrt{x+3}}$

25. $\int \frac{x+2}{1+\sqrt{2x-1}}\,dx$

26. $\int \frac{2x+\sqrt{2x-1}}{1+\sqrt{2x-1}}\,dx$

27. $\int \frac{\sqrt{2x-1}+x}{\sqrt{2x-1}+2}\,dx$

28. $\int \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\,dx$

29. $\int \sqrt{\frac{1-x}{2x+1}}\,dx$

30. $\int \frac{2x+3}{x+\sqrt{x-2}}\,dx$

Задача № 15.

1. $\int \sqrt{256-x^2}\,dx$

2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

3. $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

6. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$

7. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

9. $\int \frac{x^4\,dx}{(2-x^2)^{3/2}}$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$

12. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

13. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$

14. $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\,dx$

17. $\int \frac{x^4\,dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$

18. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

20. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$

21. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$

22. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$

23. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}\,dx$

24. $\int \sqrt{(25-x^2)^3}\,dx$

25. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{(36-x^2)^3}}$

27. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{36-x^2}}$

28. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

29. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$

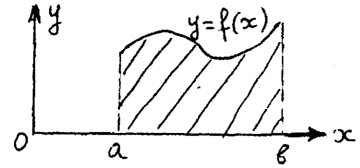
30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$

РАЗДЕЛ II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

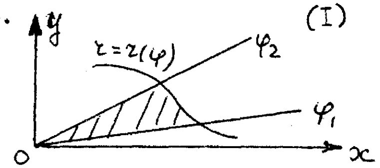
Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница
$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, где $F(x)$ первообразная для $f(x)$.

Вычисление площади плоской области

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$, где $f(x)\geq 0$ на $[a,b]$, вычисляется по формуле



$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$



Площадь сектора, ограниченного лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$ и линией $r=r(\varphi)$, равна

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (2)$$

Вычисление длины дуги кривой

Длина дуги AB кривой, заданной уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, выражается формулой

$$\ell=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt, \qquad (3)$$

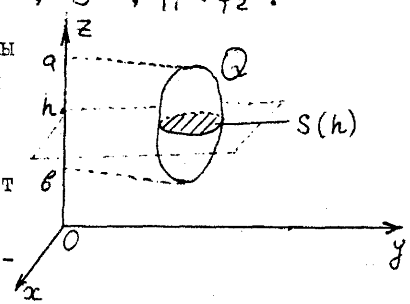
где t_1, t_2 - значения параметра t в граничных точках A, B; $t_1<t_2$.
Если уравнение линии задано в полярных координатах $r=r(\varphi)$, то

$$\ell=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (4)$$

где φ_1, φ_2 - полярные углы точек A, B; $\varphi_1<\varphi_2$.

Вычисление объема тела

Пусть Q - тело произвольной формы в пространстве $Oxyz$. Если при всех $h\in[a,b]$ известна площадь $S(h)$ сечения тела Q плоскостью $z=h$ ($|h|$- расстояние секущей плоскости от координатной плоскости xOy), то объем тела по площадям поперечных сечений равен



$$V=V(Q)=\int_a^b S(h)\,dh. \qquad (5)$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$, $f(x)\geq 0$ на $[a,b]$, вращается вокруг оси Ox, то объем полученного тела вращения

$$V_x=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (6)$$

Задача 1. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными кривыми $D:\ y=x\sqrt{4-x^2}$, $y=0$; $0\leq x\leq 2$.

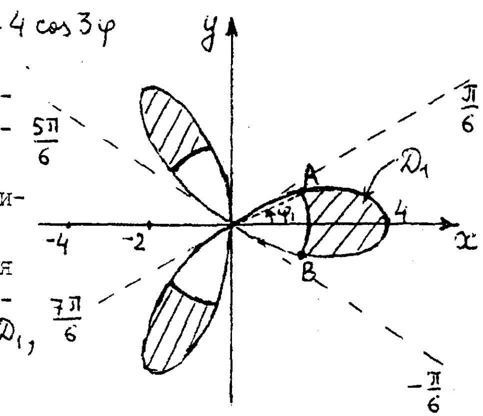
По формуле (1) имеем $S=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{4-x^2}\cdot(-2x)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^2(4-x^2)^{1/2}\,d(4-x^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\Big|_0^2=-\frac{1}{3}\cdot(0-8)=\frac{8}{3}\ (\text{кв.ед.})$$

Задача 2. Вычислить площадь области D, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в полярных координатах
$D:\ r=4\cos 3\varphi$, $r=2$ $(r\geq 2)$.

Уравнение $r=2$ соответствует окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Найдем область допустимых значений функции $r=4\cos 3\varphi$. Так как полярный радиус $r\geq 0$, то $4\cos 3\varphi\geq 0$,
$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq 3\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$.
При $n=0,1,2$ найдем три возможных интервала изменения полярного угла φ: $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$, (при $n>2$ эти сектора будут повторяться). Рассмотрим сектор $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$, функция $r=4\cos 3\varphi$ всюду непрерывна, $r\left(-\frac{\pi}{6}\right)=r\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{\pi}{2}=0$. Следовательно, графиком функции $r=4\cos 3\varphi$ на $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ является замкнутая линия. Так как $\cos 3\varphi$ - периодическая с периодом $2\pi/3$ функция, то полный график функции $r=4\cos 3\varphi$ состоит из трех одинаковых замкнутых линий в трех допустимых секторах. Потому для вычисления искомой площади достаточно найти площадь области D_1, лежащей в секторе $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$, и



умножить ее на 3. Найдем значения угла в точках A, B пересечения линий $r = 4\cos 3\varphi$ и $r = 2$, решив уравнение этих линий совместно. Исключая r, получим $4\cos 3\varphi = 2$; $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$; $3\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$; $\varphi = \pm\frac{\pi}{9}$ (берем только те решения, которые попадают в интервал $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$). Представляя площадь области D как разность двух площадей и пользуясь формулой (2), получаем

$$S(D_1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (4\cos 3\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 2^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (16\cos^2 3\varphi - 4)\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/9} (16\cos^2 3\varphi - 4)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/9} (8 + 8\cos 6\varphi - 4)\, d\varphi = \left(4\varphi + \frac{8}{6}\sin 6\varphi\right)\Big|_0^{\pi/9} =$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{9} + \frac{4}{3}\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{9} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi + 6\sqrt{3}}{9};$$

$$S(D) = 3\cdot S(D_1) = 3\cdot\frac{4\pi + 6\sqrt{3}}{9} = \frac{4\pi + 6\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 3. Вычислить длину дуги кривой

$y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$; $\frac{1}{4} \le x \le 1$.

Воспользуемся формулой (3), выбрав в качестве параметра t аргумент x функции $y(x)$. Тогда формула (3) примет вид

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx,$$

где x_1, x_2 - абсциссы граничных точек дуги, $x_1 < x_2$. Найдем $y'(x)$

$$y' = \left(2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}\right)' = 0 + \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}} + \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Подставляя в формулу, получим,

$$\ell = \int_{1/4}^{1} \sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2}\, dx = \int_{1/4}^{1} \sqrt{1 + \frac{1-x}{x}}\, dx = \int_{1/4}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\,\Big|_{1/4}^{1} = 2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{4}}\right) = 1.$$

Задача 4. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Найдем производные $x'(t)$ и $y'(t)$,

$x'(t) = 3(-2\sin t + \sin 2t\cdot 2) = 6(\sin 2t - \sin t)$,

$y'(t) = 3(2\cos t - \cos 2t\cdot 2) = 6(\cos t - \cos 2t)$

и вычислим сумму их квадратов

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 36(\sin^2 2t - 2\sin 2t\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t -$$

$$- 2\cos t\cos 2t + \cos^2 2t) = 36(2 - 2(\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t)) =$$

$$= 72(1 - \cos(2t - t)) = 72(1 - \cos t) = 144\sin^2\frac{t}{2}.$$

Подставляя в формулу (3), получим

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{144\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 12\sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 12\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -24(\cos\pi - \cos 0) = -24\cdot(-2) = 48.$$

Примечание. При извлечении квадратного корня следует позаботиться о том, чтобы взять арифметическое значение этого корня, поэтому здесь возникает $\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. Однако, т.к. на промежутке $[0, 2\pi]$ $\sin\frac{t}{2} \geq 0$, то $\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$.

Задача 5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах:

$$r = 1 - \sin\varphi \;, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi .$$

Найдем $r'(\varphi) = (1-\sin\varphi)' = -\cos\varphi$ и воспользуемся формулой (4)

$$\ell = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(1-\sin\varphi)^2 + (-\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{2(1-\sin\varphi)}\, d\varphi .$$

Чтобы избавиться здесь от корня, воспользуемся формулой приведения $\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ и формулой $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, тогда

$$\ell = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)}\, d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = -2\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = 4\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -4\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = -4\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Задача 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:
$z = 2x^2 + 8y^2$, $z = 4$.

Так как $z = 2x^2 + 8y^2 \geq 0$, то тело Q, объем которого следует вычислить, находится между плоскостями $z = 0$ и $z = 4$. Возьмем произвольное $h \in (0, 4)$, построим плоскость $z = h$ и рассмотрим сечение поверхности $z = 2x^2 + 8y^2$ этой плоскостью. В сечении получится область, ограниченная линией $2x^2 + y^2 = h$ или

$$\frac{2x^2}{h} + \frac{8y^2}{h} = 1; \qquad \frac{x^2}{h/2} + \frac{y^2}{h/8} = 1 \;-$$

– это эллипс с полуосями $a = \sqrt{\frac{h}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{h}{8}}$.

Площадь эллипса равна $\pi a b$, поэтому в нашем случае площадь сечения

$$S(h) = \pi \cdot \sqrt{\frac{h}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h}{8}} = \frac{\pi h}{4}.$$

Для вычисления объема тела применяем формулу (5) при $a = 0$, $b = 4$

$$V = \int_0^4 \frac{\pi h}{4}\, dh = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{h^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{2} = 2\pi .$$

cos x = u   du = -sin x dx
[illegible]   u = 2x

Задача 7. Вычислить объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$, вокруг оси Ox.

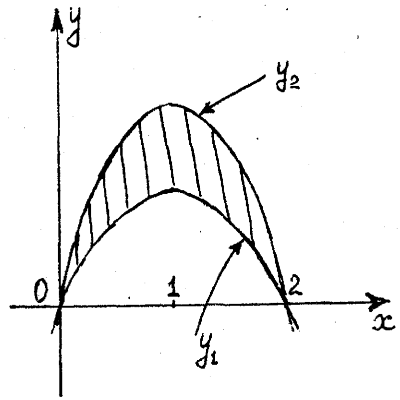
Уравнения линий перепишем в виде $y = 2x - x^2$, $y = 4x - 2x^2$. Решив эти уравнения совместно, найдем абсциссы точек пересечения

$$2x - x^2 = 4x - 2x^2; \quad x^2 - 2x = 0; \quad x_1 = 0, \; x_2 = 2 .$$

Построив графики заданных линий (параболы), видим, что искомый объем есть разность двух объемов V_2 и V_1, где V_2 – объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 4x - 2x^2$ $(= y_2)$; V_1 – объем, полученный при вращении трапеции, ограниченной графиком $y = 2x - x^2$ $(= y_1)$.

Применяя формулу (6) , находим

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_0^2 y_2^2\, dx - \pi \int_0^2 y_1^2\, dx = \pi \int_0^2 (y_2^2 - y_1^2)\, dx =$$



$$= \pi \int_0^2 \left((4x-2x^2)^2 - (2x-x^2)^2\right) dx =$$

$$= \pi \int_0^2 (16x^2 - 16x^3 + 4x^4 - 4x^2 +$$

$$+ 4x^3 - x^4)\, dx = \pi \int_0^2 (3x^4 - 12x^3 + 12x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left(\frac{3x^5}{5} - 3x^4 + 4x^3 \right)\Big|_0^2 = \pi x^3 \left(\frac{3}{5}x^2 - 3x + 4 \right)\Big|_0^2 =$$

$$= \pi \cdot 8 \left(\frac{12}{5} - 6 + 4 \right) = \frac{16\pi}{5}.$$

З А Д А Н И Я

Задача № I. Вычислить площадь области, ограниченной заданными кривыми

I. $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$

2. $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$ $(0 \le x \le 3)$

3. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$

4. $y=\sin x \cdot \cos^2 x$, $y=0$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

5. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

6. $y=x^2\sqrt{4-x^2}$, $y=0$ $(0 \le x \le 2)$.

7. $y=\cos x \sin^2 x$, $y=0$ $(0 \le x \le \pi/2)$

8. $y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 2$

9. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=e^3$

I0. $y=\arccos x$, $y=0$, $x=0$

II. $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$

I2. $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$

I3. $y=x\sqrt{36-x^2}$, $y=0$ $(0 \le x \le 6)$

I4. $x=\arccos y$, $x=0$, $y=0$

I5. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$, $y=0$, $x=\sqrt{3}$

I6. $y=x^2\sqrt{8-x^2}$, $y=0$ $(0 \le x \le 2\sqrt{2})$

I7. $x=\sqrt{e^y-1}$, $x=0$, $y=\ln 2$

I8. $y=x^3\sqrt{4-x^2}$, $y=0$ $(0 \le x \le 2)$

I9. $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=1$

20. $y=\frac{1}{1+\cos x}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$

2I. $y=(x-2)^3$, $x=4y-8$

22. $y=\cos^5 x \sin 2x$, $y=0$ $(0 \le x \le \pi/2)$

23. $y=x^2\sqrt{9-x^2}$, $y=0$ $(0 \le x \le 3)$

24. $y=x^2\,\mathrm{arctg}\,2x$, $y=0$, $x=\frac{1}{2}$

25. $y=\sin^3 x \cos^2 x$, $y=0$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

26. $y=\cos^2 x$, $y=\frac{1}{2}$, $(|x| \le \frac{\pi}{2})$

27. $y=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$

28. $y=\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$

29. $y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 3$

30. $y=x\sqrt{x^2+9}$, $y=0$ $(0 \le x \le 3)$

Задача № 2. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в полярных координатах

I. $r=4\cos 3\varphi$, $r=2$ $(r \ge 2)$

2. $r=\cos 2\varphi$

3. $r=\sqrt{3}\cos\varphi$, $r=\sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

4. $r=4\sin 3\varphi$, $r=2$ $(r \ge 2)$

5. $r=2\cos\varphi$, $r=2\sqrt{3}\sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

6. $r=\sin 3\varphi$

7. $r = 6\sin 3\varphi$, $r = 3$ $(r \geq 3)$

8. $r = \cos 3\varphi$

9. $r = \cos\varphi - \sin\varphi$

10. $r = \sin\varphi$, $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right)$

11. $r = 6\cos 3\varphi$, $r = 3$ $(r \geq 3)$

12. $r = \frac{1}{2} + \sin\varphi$

13. $r = \cos\varphi$, $r = \sin\varphi$ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$

14. $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, $r = \sqrt{2}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right)$

15. $r = \cos\varphi$, $r = 2\cos\varphi$

16. $r = \sin\varphi$, $r = 2\sin\varphi$

17. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$

18. $r = \frac{1}{2} + \cos\varphi$

19. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$

20. $r = \frac{5}{2}\sin\varphi$, $r = \frac{3}{2}\sin\varphi$

21. $r = \cos\varphi + \sin\varphi$

22. $r = 4\cos 4\varphi$

23. $r = \cos 3\varphi$

24. $r = 2\cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$

25. $r = 4\cos 2\varphi$, $r = 2$ $(r \geq 2)$

26. $r = \cos 4\varphi$

27. $r = 2 + \cos\varphi$

28. $r = \sin\varphi + 2\cos\varphi$ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$

29. $r = 2\cos 3\varphi$

30. $r = \cos\varphi$, $r = \sin\varphi$

Задача № 3. Вычислить длину дуги кривой

1. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$

2. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$

3. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$

4. $y = \ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

5. $y = -\ln\cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

6. $y = e^x + 6$, $\ln\sqrt{8} \leq x \leq \ln\sqrt{15}$

7. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$

8. $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$

9. $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$, $0 \leq x \leq 8/9$

10. $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1/4$

11. $y = 2 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leq x \leq 1$

12. $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

13. $y = e^x + 13$, $\ln\sqrt{15} \leq x \leq \ln\sqrt{24}$

14. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $0 \leq x \leq 1/4$

15. $y = 2 - e^x$, $\ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}$

16. $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 15/16$

17. $y = 1 - \ln\sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

18. $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \leq x \leq 4$

19. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5$, $1/9 \leq x \leq 1$

20. $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1$, $0 \leq x \leq 9/16$

21. $y = \ln\sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

22. $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

23. $y = e^x + 5$, $\ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}$

24. $y = \ln\sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

25. $y = 3 + 2e^x$, $\ln 2 \leq x \leq \ln 3$

26. $y = \ln\sin x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

27. $y = \ln x$, $2\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{15}$

28. $y = 2 - \ln\cos x$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

29. $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$

30. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $-1 \leq x \leq 1$

Задача № 4. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

2. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi$

3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

4. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $0 \leq t \leq$

5. $\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi$

7. $\begin{cases} x = 3(t-\sin t) \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi$

8. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$

9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

10. $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

11. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

12. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

13. $\begin{cases} x = \frac{5}{2}(t - \sin t) \\ y = \frac{5}{2}(1-\cos t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

14. $\begin{cases} x = \frac{7}{2}(2\cos t - \cos 2t) \\ y = \frac{7}{2}(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$

16. $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

17. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$

18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

19. $\begin{cases} x = 4(t-\sin t) \\ y = 4(1-\cos t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$

20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

22. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$

23. $\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t) \\ y = e^t(\cos t + \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$

24. $\begin{cases} x = 3(t-\sin t) \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

25. $\begin{cases} x = 3\sin^3 t \\ y = 3\cos^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

26. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t \\ y = 5\cos^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

27. $\begin{cases} x = 3(1-\cos t) \\ y = 3(t-\sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

28. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

29. $\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t) \\ y = e^t(\cos t + \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$

30. $\begin{cases} x = 3\sin^3 t \\ y = 3\cos^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$

Задача № 5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах

1. $r = 3e^{3\varphi/4}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
2. $r = 2e^{4\varphi/3}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
3. $r = \sqrt{2}\,e^{\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
4. $r = 5e^{5\varphi/12}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
5. $r = 6e^{12\varphi/5}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
6. $r = 3e^{3\varphi/4}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$

7. $r = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
8. $r = \sqrt{2}\,e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
9. $r = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
10. $r = 12e^{12\varphi/5}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
11. $r = 1 - \sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$
12. $r = 2(1-\cos\varphi)$, $-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$
13. $r = 3(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$
14. $r = 4(1-\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$
15. $r = 5(1-\cos\varphi)$, $-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$
16. $r = 6(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$
17. $r = 7(1-\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$
18. $r = 8(1-\cos\varphi)$, $-\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le 0$
19. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$
20. $r = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{4}{3}$
21. $r = 4\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$
22. $r = 5\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{12}{5}$
23. $r = e^{5\varphi/4}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{5}$
24. $r = 4(1-\cos 2\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
25. $r = 1 - \cos 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
26. $r = 4(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
27. $r = 2(1+\cos\varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
28. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{5}{2}$
29. $r = 4(1+\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
30. $r = 3(1+\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$

Задача № 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

1. $z = x^2 + 4y^2$, $z = 2$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$
3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1$, $z = 12$
4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, $z = 1$, $z = 0$
5. $z = x^2 + 9y^2$, $z = 3$
6. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$

7. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=-1,\ z=16$

8. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1,\ z=2$

9. $z=2x^2+8y^2,\ z=4$

10. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}-z^2=1,\ z=0,\ z=2$

11. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1,\ z=12$

12. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1,\ z=3,\ z=0$

13. $z=x^2+5y^2,\ z=5$

14. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1,\ z=0,\ z=4$

15. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1,\ z=20$

16. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1,\ z=4,\ z=0$

17. $z=4x^2+9y^2,\ z=6$

18. $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1,\ z=0,\ z=3$

19. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1,\ z=20$

20. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{100}=1,\ z=5,\ z=0$

21. $z=2x^2+18y^2,\ z=6$

22. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1,\ z=0,\ z=2$

23. $\frac{x^2}{4}+4y^2-z^2=1,\ z=0,\ z=3$

24. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1,\ z=0,\ z=2$

25. $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=1,\ z=0,\ z=2$

26. $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=1,\ z=0,\ z=3$

27. $z=x^2+4y^2,\ z=9$

28. $z=4x^2+9y^2,\ z=0,\ z=4$

29. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1,\ z=0,\ z=3$

30. $z=x^2+4y^2,\ z=4$

Задача № 7. Криволинейная трапеция, ограниченная заданными линиями, вращается вокруг оси Ox. Вычислить объем полученного тела вращения.

1. $y=-x^2+5x-6,\ y=0$

2. $2x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x-y=0$

3. $y=3\sin x,\ y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$

4. $y=5\cos x,\ y=\cos x,\ x=0\ (x\ge 0)$

5. $y=\sin^2 x,\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0$

6. $x=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1$

7. $y=xe^x,\ y=0,\ x=1$

8. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0$

9. $y=2x-x^2,\ y=2-x$

10. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1$

11. $y=x^2,\ y^2-x=0$

12. $x^2+(y-2)^2=1$

13. $y=1-x^2,\ x=0,\ x=\sqrt{y-2},\ x=1$

14. $y=x^2,\ y=1,\ x=2$

15. $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$

16. $y=\sin\frac{\pi x}{2},\ y=x^2$

17. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=0\ (0\le x\le\pi/2)$

18. $y=x,\ y=2x,\ y=6-x$

19. $y=\cos^2 x,\ y=0\ \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

20. $y=x^2,\ y=3x$

21. $y=x^2+2x+2,\ y=5$

22. $y=\operatorname{tg} x,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{4}$

23. $x=\sqrt[3]{y-3},\ x=1,\ y=2$

24. $y=\cos x,\ y=3\cos x\ (0\le x\le\pi/2)$

25. $y=x^3,\ x=y^3$

26. $y=x^2+x+2,\ y=4$

27. $y=x^2,\ x=y^3$

28. $y=\cos x,\ y=2\cos x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

29. $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$

30. $y=2\cos x,\ y=3\cos x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

РАЗДЕЛ III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В задания включены следующие уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородное, линейное, Бернулли и в полных дифференциалах, а также уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка, уравнения с постоянными коэффициентами и системы линейных дифференциальных уравнений. Здесь приведены методы решения только тех типов задач, решение которых не приведено или недостаточно полно показано в методической разработке [2].

Задача I. Решить уравнение $(x+y)\,dx + x\,dy = 0$.

Решение. Это однородное уравнение, так как оно имеет вид $M\,dx + N\,dy = 0$, где M, N – однородные функции относительно x, y одинакового порядка (первого порядка). Используем замену

$$\begin{cases} y = t\cdot x \\ dy = x\,dt + t\,dx \end{cases}$$, где t – новая функция от x.

Тогда уравнение примет вид

$$(x+tx)\,dx + x\,(x\,dt + t\,dx) = 0.$$

Сократим на x, раскроем скобки и сгруппируем

$$(1+2t)\,dx + x\,dt = 0.$$

Разделим переменные $\frac{dt}{1+2t} = -\frac{dx}{x}$ или $\int\frac{dt}{1+2t} = -\int\frac{dx}{x}$.

Тогда $\frac{1}{2}\ln|1+2t| = -\ln|x| + \ln C$.

Отсюда $1+2t = \left(\frac{C}{x}\right)^2$ или $t = \frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{x^2} - 1\right)$. Так как согласно замене $t = \frac{y}{x}$, то $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{x^2} - 1\right)$.

Ответ. $y = \frac{x}{2}\left(\frac{C^2}{x^2} - 1\right)$

Задача 2. Решить уравнение $(x+y)\,dx + x\,dy = 0$.

Решение. Это уравнение в полных дифференциалах, так как оно имеет вид $M\,dx + N\,dy = 0$, где функции $M = M(x,y)$ и $N = N(x,y)$ удовлетворяют условию $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. В нашей задаче $M = x+y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ и $N = x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$.

Найдем функцию $U(x,y)$, называемую потенциалом, двумя способами, интегрируя отдельно каждое слагаемое:

$$U(x,y) = \int (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi(y),$$

$$U(x,y) = \int x\,dy = xy + \psi(x).$$

Так как это одна и та же функция, то приравняем полученные результаты

$$\frac{x^2}{2} + yx + \varphi(y) = xy + \psi(x).$$

Отсюда, $\varphi(y) = 0$, $\psi(x) = \frac{x^2}{2}$. Значит, $U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy$.

Ответ. $\frac{x^2}{2} + xy = C$.

Отметим, что рассмотренное уравнение может быть решено и как линейное уравнение. При решении линейного уравнения можно использовать метод решения следующей задачи.

Задача 3. Решить уравнение $y' - \frac{2y}{x} = \sqrt{y}$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Решение уравнения будем искать в виде $y = u\cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = \sqrt{uv}.$$

Функцию $v = v(x)$ найдем из условия $v' - \frac{2v}{x} = 0$.

Тогда $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$, $\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x}$, $\ln|v| = 2\ln|x|$, $\ln|v| = \ln x^2$, $v = x^2$.

В оставшееся выражение $u'v = \sqrt{uv}$ подставим найденную функцию v: $u'x^2 = \sqrt{u}\,x$, $\frac{du}{dx}\cdot x^2 = \sqrt{u}\,x$, $\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int\frac{dx}{x}$, $2\sqrt{u} = \ln|x| + C$, $u = \left(\frac{C+\ln|x|}{2}\right)^2$.

Ответ. $y=\left(\frac{C+\ln|x|}{2}\right)^2\cdot x^2$.

<u>Задача 4</u>. Решить задачу Коши $y''\cdot y'=e^{3y}$, где $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Сделать проверку.

Решение. Уравнение явно не содержит независимой переменной x. Поэтому сделаем замену $\begin{cases} y'=p \\ y''=p'p \end{cases}$, где $p=p(y)$. Получим $p'p^2=e^{3y}$ или $p^2\frac{dp}{dy}=e^{3y}$. Отсюда $\int p^2dp=\int e^{3y}dy$ или $\frac{1}{3}p^3=\frac{1}{3}e^{3y}+C_1$. Согласно условию $y(0)=0$, $y'(0)=1$ в точке $x=0$ имеем $y=0$, $p=1$. Подставим в полученное выражение $\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}e^0+C_1$ и вычислим $C_1=0$. Если $C_1=0$, то $\frac{1}{3}p^3=\frac{1}{3}e^{3y}$ или $p=e^y$. Согласно сделанной замене данное уравнение имеет вид $y'=e^y$. Отсюда $\frac{dy}{dx}=e^y$ или $\int e^{-y}dy=\int dx$, $-e^{-y}=x+C_2$. Согласно условию $y(0)=0$ получим $-e^0=0+C_2$, $C_2=-1$. Подставим вычисленную константу: $-e^{-y}=x-1$, откуда $y=-\ln(1-x)$.

Проверка. $y'=-\frac{1}{1-x}\cdot(-1)=\frac{1}{1-x}$, $y''=\frac{1}{(1-x)^2}$. Подставим в уравнение $\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{1-x}=e^{-3\ln(1-x)}$, что эквивалентно тождеству $\frac{1}{(1-x)^3}=e^{\ln(1-x)^{-3}}$ или $(1-x)^{-3}=(1-x)^{-3}$.

Подставим $x=0$ в функцию и производную:

$$y(0)=-\ln(1-0)=0,\quad y'(0)=\frac{1}{1-0}=1.$$

Итак, функция $y=-\ln(1-x)$ удовлетворяет уравнению и начальному условию.

Ответ. $y=-\ln(1-x)$.

<u>Задача 5</u>. Решить задачу Коши для уравнения с постоянными коэффициентами и сделать проверку

$$y''-2y'+2y=(x-1)^2-\frac{(\sin x+\cos x)}{e^x};$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0{,}5.$$

Решение.

1) Для соответствующего однородного уравнения $y''-2y'+2y=0$ запишем характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+2=0$. Его корни $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2}$ или $\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=1-i$. Для случая данных комплексных корней общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{oo}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. Правая часть исходного уравнения есть сумма двух функций специального вида

$f_1(x)=x^2-2x+1$ и $f_2(x)=e^{-x}(-\sin x-\cos x)$.

2) Частное решение уравнения

$$y''-2y'+2y=x^2-2x+1$$

имеет вид $y_{част_1}=Ax^2+Bx+C$. Отсюда $y'_{ч_1}=2Ax+B$, $y''_{ч_1}=2A$. Подставим в уравнение:

$$2A-2(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=x^2-2x+1$$

или $2Ax^2+(2B-4A)x+(2A-2B+2C)=x^2-2x+1$.

Отсюда получим систему $\begin{cases} 2A=1 \\ 2B-4A=-2 \\ 2A-2B+2C=1. \end{cases}$

Ее решение $A=\frac{1}{2}$, $B=0$, $C=0$. Значит, $y_{част_1}=\frac{x^2}{2}$.

3) Частное решение уравнения

$$y''-2y'+2y=e^{-x}(-\cos x-\sin x)$$

имеет вид $y_{част_2}=e^{-x}(A\sin x+B\cos x)$. Отсюда

$y'_{ч_2}=-e^{-x}(A\sin x+B\cos x)+e^{-x}(A\cos x-B\sin x)$,

$y''_{ч_2}=-2e^{-x}(A\cos x-B\sin x)$. Подставим в уравнение:

$$-2e^{-x}(A\cos x-B\sin x)+2e^{-x}(A\sin x+B\cos x)-$$
$$-2e^{-x}(A\cos x-B\sin x)+2e^{-x}(A\sin x+B\cos x)=e^{-x}(-\sin x-\cos x)$$

Вынесем e^{-x} за скобки и сократим на e^{-x}:

$$-4(A\cos x-B\sin x)+4(A\sin x+B\cos x)=-\sin x-\cos x$$

или $(4A+4B)\sin x+(-4A+4B)\cos x=-\sin x-\cos x$.

Отсюда получим систему $\begin{cases} 4(A+B)=-1 \\ 4(-A+B)=-1 \end{cases}$.

Ее решение $A=0$, $B=-\frac{1}{4}$. Итак, $y_{част_2}=-\frac{1}{4}e^{-x}\cos x$.

4) Общее решение исходного уравнения $y''-2y'+2y=f_1(x)+f_2(x)$ записывается в виде $y=y_{оо}+y_{част_1}+y_{част_2}$, то есть равно $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}e^{-x}\cos x$.

Вычислим производную

$$y'=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)+$$

$$+x+\frac{1}{4}e^{-x}\cos x+\frac{1}{4}e^{-x}\sin x$$

и подставим начальные условия $y(0)=0$, $y'(0)=0{,}5$:

$$\begin{cases} 0=e^{0}(C_1\cdot 1+C_2\cdot 0)+0-\frac{1}{4}\cdot e^{0}\cdot 1 \\ 0{,}5=(C_1+0)+(0+C_2)+0+\frac{1}{4}+0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $C_1=\frac{1}{4}$ и $C_2=0$.

Подставив найденные значения констант, получим решение задачи Коши

$$y=e^{x}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cos x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}e^{-x}\cdot\cos x.$$

Это решение можно переписать в виде

$$y=\frac{1}{2}\cdot sh\,x\cdot\cos x+\frac{x^2}{2},$$

так как по определению $sh\,x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

Проверка. Так как $(sh\,x)'=ch\,x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, то

$$y'=\frac{1}{2}ch\,x\cdot\cos x-\frac{1}{2}sh\,x\cdot\sin x+x,$$

$y''=-ch\,x\cdot\sin x+1$. Подставив в левую часть уравнения, получим

$$-ch\,x\sin x+1-2\left(\frac{1}{2}ch\,x\cos x-\frac{1}{2}sh\,x\sin x+x\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{2}sh\,x\cos x+\frac{x^2}{2}\right)=(sh\,x-ch\,x)\sin x+(sh\,x-$$

$$-ch\,x)\cos x+x^2-2x+1=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x+(x-1)^2,$$

что совпадает с правой частью.

Подставим начальное значение $x=0$

$$y(0)=\frac{1}{2}\cdot sh\,0\cdot\cos 0+0=0,$$

$$y'(0)=\frac{1}{2}ch\,0\cdot\cos 0-\frac{1}{2}sh\,0\cdot\sin 0+0=0{,}5,$$

что совпадает с начальным условием.

Ответ. $y=\frac{1}{2}sh\,x\cdot\cos x+\frac{x^2}{2}$.

<u>Задача 6</u>. Решить уравнение $y''+y=tg\,x$.

Решение. Для уравнения $y''+y=0$ составим характеристическое $\lambda^2+1=0$ и найдем его корни $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. Тогда $y_{оо}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Так как правая часть уравнения не специального вида, то решение будем искать методом вариации постоянных в виде

$$y=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x),$$

где в нашей задаче $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$.

Производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1+C_2'(x)\cdot y_2=0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'+C_2'(x)\cdot y_2'=f(x), \end{cases}$$

которая для нашей задачи примет вид

$$\begin{cases} C_1'\cdot\cos x+C_2'\sin x=0 \\ -C_1'\cdot\sin x+C_2'\cos x=tg\,x. \end{cases}$$

Сначала первое уравнение умножим на $\sin x$, а второе – на $\cos x$ и сложим. Получим $C_2'(x)=\sin x$.

Тогда из первого уравнения $C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдем интегрированием

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = \sin x + \ln\left| tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C_3,$$

$$C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_4 .$$

Отсюда, $y = \left(\sin x + \ln\left| tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C_3\right)\cos x +$

$+ (C_4 - \cos x)\sin x.$

Ответ. $y = C_3 \cos x + C_4 \sin x + \cos x \cdot \ln\left| tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$.

Задача 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y - 2\cos t \\ \dot{y} = x - y \end{cases},$$

удовлетворяющую начальному условию: $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

Решение.

I) Соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $(3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. По корням для одной из искомых функций запишем общее решение

$$y_{oo} = (C_1 t + C_2)\cdot e^t.$$

Из второго уравнения $x = \dot{y} + y =$

$$= C_1 e^t + (C_1 t + C_2)e^t + (C_1 t + C_2)e^t.$$

Итак, общее решение однородной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{oo} = \begin{pmatrix} 2C_1 t + 2C_2 + C_1 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix} \cdot e^t .$$

2) Для правой части $f(t) = -2\cos t$ частное решение ищем в виде

$$\begin{cases} x = A\sin t + B\cos t \\ y = C\sin t + D\cos t. \end{cases}$$

Вычислим $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и подставим в систему

$$\begin{cases} A\cos t - B\sin t = 3A\sin t + 3B\cos t - 4C\sin t - 4D\cos t - 2\cos t \\ C\cos t - D\sin t = A\sin t + B\cos t - C\sin t - D\cos t. \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при функциях $\cos t$ и $\sin t$;

$$\begin{cases} A = 3B - 4D - 2 \\ -B = 3A - 4C \\ C = B - D \\ -D = A - C. \end{cases}$$

Решение этой системы $A = I$, $B = I$, $C = I$, $D = 0$. Итак,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{част} = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$ Значит

$$\begin{cases} x = (2C_1 t + 2C_2 + C_1)e^t + \sin t + \cos t \\ y = (C_1 t + C_2)e^t + \sin t \end{cases}$$

3) Подставим начальные условия $x(0) = 3$, $y(0) = 1$;

$$\begin{cases} 3 = 2C_2 + C_1 + 1 \\ 1 = C_2 \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Ответ. $\begin{cases} x = 2e^t + \sin t + \cos t \\ y = e^t + \sin t. \end{cases}$

З А Д А Н И Я

Задача I. Решить дифференциальное уравнение (в некоторых вариантах найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию)

I.I. $\varphi^2 dr + (r-a)\,d\varphi = 0.$

I.2. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0)=1.$

I.3. $y'\sqrt{a^2+x^2} = y.$

I.4. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

I.5. $xydy + (x+1)dy = 0.$

I.6. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy.$

I.7. $e^{-s} s' = 1 - e^{-s}.$

I.8. $x \cdot \frac{dx}{dt} + t = 1.$

I.9. $y - y' = y^2 + xy'.$

I.IO. $(1-x^2)dy + xydx = 0.$

I.II. $xy' = e^y + 2y'.$

I.I2. $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy.$

I.I3. $x^2y' - 2xy = 3y.$

I.I4. $2x^2yy' = 2 - y^2.$

I.I5. $2xy' = 1 - y^2.$

I.I6. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

I.I7. $(2x+3)^2\sqrt{1-y^2} + yy' = 0,\quad y(0)=0.$

I.I8. $x(x-1)y' + y = y^2,\ y(2)=2.$

I.I9. $5^{2y}\cdot y' = 5^{x+1},\quad y(0)=0.$

I.20. $y' + \cos\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{y}{2} = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi.$

I.2I. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy,\ y(1)=0.$

I.22. $(2y+8)^2y' = (10-3x)^2,\ y(3)=-4.$

~~I.23.~~ $\cancel{y(x^2}+1) + x(y^2-1)\cdot y' = 0,\ y(1)=1.$

I.24. $(2x-3)^{5/2} = (3-y)^{5/2}\cdot y',\quad y(2)=3.$

I.25. $(2x+5)\cdot y' = 3y+7,\ y(2)=-2.$

I.26. $xy + 9y = (3x+xy)y',\ y(-2)=-8.$

I.27. $y'\cos x = y\sin x + \sin x,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1.$

I.28. $xy^2 - y^2 + (x^2 - x^2y)\cdot y' = 0,\ y(1)=1.$

I.29. $y'\cdot \operatorname{tg} x = y+5,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

I.30. $10x^5y' = -y^5,\ y(1)=1.$

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение

2.I. $(y+\sqrt{xy})dx = xdy$

2.2. $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$

2.3. $x^2dy = (xy+y^2)dx$

2.4. $xy'(\ln y - \ln x) = y$

2.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$

2.6. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$

2.7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$

2.8. $xy' = y\left(\ln\frac{x}{y} + 1\right)$

2.9. $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$

2.IO. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$

2.II. $x^2dy = (xy+x^2+y^2)dx$

2.I2. $(x^2+y^2)y' = 2xy$

2.I3. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x}$

2.I4. $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$

2.I5. $\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} - y' = 0,$ $y(1)=0.$

2.I6. $yy' = 2y - x$

2.I7. $2xyy' = y^2 - x^2$

2.I8. $x^2+y^2 - xyy' = 0$

2.I9. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

2.20. $(x^2+y^2)dx = 2xydy$

2.2I. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$

2.22. $xy' - y + x\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{x} = 0$

~~2.23.~~ $\cancel{(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0}$

2.24. $(x-y)dy - ydx = 0$

2.25. $xdy - ydx = ydy$

2.26. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$

2.27. $xyy' = y^2 + 2x^2$

2.28. $y'x^2 = 4x^2 + xy + y^2$

2.29. $x^2+y^2 = 2xyy'$

2.30. $x^3y' = y(x^2+y^2)$

Задача 3. Решить задачу Коши

3.1. $xy' = xy + e^x, \quad y(1) = 0.$

3.2. $x^2y' + xy + 1 = 0, \quad y(1) = 0.$

3.3. $xy' - y = x^2\cos x, \quad y(\pi) = 0.$

3.4. $x^2y' = 2xy + 2x^3 - 1, \quad y(1) = 1.$

3.5. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

3.6. $2xy' + y = 2x^3, \quad y(1) = 1.$

3.7. $x^2y' - (2x-1)y = x^2 \cdot e^{1/x}, \quad y(1) = e.$

3.8. $xy' + 2y = x^4, \quad y(1) = -\frac{5}{6}.$

3.9. $y' = \frac{2xy}{1+x^2} + x^2 + 1, \quad y(1) = 3.$

3.10. $x^3y' + 3yx^2 = 2, \quad y(1) = 1.$

3.11. $x^3y' - x^2y + 12 = 0, \quad y(1) = 4.$

3.12. $xy' + y = 3x^2, \quad y(1) = 1.$

3.13. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$

3.14. $x^2y' + xy = x^3 - 1, \quad y(1) = 0.$

3.15. $xy' = \frac{2y}{\ln x} + 1, \quad y(e) = 0.$

3.16. $y' - 2y = e^x(1 + xe^x), \quad y(0) = 0.$

3.17. $y' - \cos x + \frac{y}{x} = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

3.18. $y' - \frac{y}{x} - x = 0, \quad y(1) = 1.$

3.19. $y'\sin x - y\cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

3.20. $2xy' - y = 3x^2, \quad y(1) = 1.$

3.21. $(y + x^2)\,dx = x\,dy, \quad y(1) = 2.$

3.22. $xy' - y - x^3 = 0, \quad y(2) = 4.$

3.23. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3, \quad y(0) = 1.$

3.24. $y' + y = x + 2, \quad y(0) = 1.$

3.25. $y' = \sin x\cos x - y\cos x, \quad y(0) = -1.$

3.26. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y(e) = \frac{e^2}{2}.$

3.27. $y' - \frac{2x-1}{x^2}\cdot y = 1, \quad y(1) = 1.$

3.28. $x^2y' = 2xy + 3, \quad y(1) = 0.$

3.29. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 2.$

3.30. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

Задача 4. Решить уравнение Бернулли

4.1. $y' - y = e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1.$

4.2. $y' - 3y = \sqrt[3]{y}\cdot e^{2x}.$

4.3. $y' + \frac{2y}{x} = x^2y^3, \quad y(1) = 1.$

4.4. $2y' + \frac{3y}{x} = -\frac{1}{x^3y}.$

4.5. $y' + 2y = y^2e^x.$

4.6. $xy' + 2y = x^5y^2.$

4.7. $y' = y\,\mathrm{ctg}\,x + \frac{y^3}{\sin x}.$

4.8. $y' + y = e^{2x}y^3.$

4.9. $3y' = y\sin x - 3y^4\sin x.$

4.10. $y' + 4xy = 2x\sqrt{y}\,e^{-x^2}.$

4.11. $y'x + 2y = 2x\sqrt{y}.$

4.12. $xy^2 + y = xy'.$

4.13. $y' + \frac{y}{x} + \frac{1+x^2}{xy} = 0.$

4.14. $xy' + y = xy^2\ln x.$

4.15. $xyy' = y^2 + x.$

4.16. $y' = y\,\mathrm{tg}\,x - y^2\cdot\cos x.$

4.17. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$

4.18. $xy' - 2\sqrt{y}\,x^2 = 4y.$

4.19. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2.$

4.20. $xy' - 4y = \sqrt{y}\cdot x^2.$

4.21. $y' - 2y\cdot\mathrm{tg}\,x + y^2\sin^2 x = 0.$

4.22. $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3+1).$

4.23. $y' + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{4/3}.$

4.24. $xy' + y = 2y^2\ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$

4.25. $3(xy' + y) = y^2\ln x, \quad y(1) = 3.$

4.26. $(x^3+1)y' + 3x^2y = (yx^3 + y)^2\cdot\sin x.$

4.27. $x^2y^2y'+xy^3=1.$ 4.28. $y'-y=xy^2,\ y(0)=1,$

4.29. $y'+2xy=2x^3y^3.$ 4.30. $2xy^2-y+xy'=0.$

Задача 5. Найти общий интеграл уравнения

5.1. $e^y dx+(\cos y+xe^y)\,dy=0.$

5.2. $(y^3+\cos x)\,dx+(3xy^2+e^y)\,dy=0,$

5.3. $(5xy^2-x^3)\,dx+(5xy^2-y)\,dy=0.$

5.4. $\frac{y}{x^2}dx-\left(y+\frac{1}{x}\right)dy=0.$

5.5. $(x^2-4xy-2y^2)\,dx+(y^2-4xy-2x^2)\,dy=0.$

5.6. $\frac{dx}{y}-\left(\frac{x}{y^2}+1\right)dy=0.$

5.7. $(2x-9x^2y^2)\,dx+(4y^3-6x^3y)\,dy=0,$

5.8. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})\,dy=0,$

5.9. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)\,dy=0.$

5.10. $(1+y^2\sin 2x)\,dx-2y\cos^2 x\,dy=0.$

5.11. $\left(x-\frac{1}{y}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy=0.$

5.12. $\frac{y^2}{x^3}dx-\left(\frac{y}{x^2}+1\right)dy=0.$

5.13. $(y-3x^2)\,dx-(4y-x)\,dy=0.$

5.14. $(ye^x-1)\,dx+(e^x-y^2)\,dy=0.$

5.15. $(y^3-x)\,dy-y\,dx=0.$

5.16. $x\ln y\,dx+\left(\frac{x^2}{2y}-y\right)dy=0,\ y(0)=1.$

5.17. $(15x^2y^2-5)\,dx+(10x^3y+12y^3+6)\,dy=0.$

5.18. $(6xy+x^2+3)\,dy+(3y^2+2xy+2x)\,dx=0.$

5.19. $2x^3y\,dy+(3x^2y^2+7)\,dx=0.$

5.20. $(10xy^3+12x^3+6)\,dx+(15x^2y-5)y\,dy=0.$

5.21. $\cos y\,dx-(x+2\cos y)\sin y\,dy=0.$

5.22. $(\cos x\cdot\cos y+6x+3)\,dx+(18y^2-\sin x\sin y)\,dy=0.$

5.23. $4x^3\cos y\,dx-(x^4\sin y+2)\,dy=0.$

5.24. $(2x-9x^2y^2)\,dx+(4y^3-6x^3y)\,dy=0.$

5.25. $(x^2+2xy^3)\,dx+(y^2+3x^2y^2)\,dy=0.$

5.26. $(3x^2y-y^3+x)\,dx+(x^3+5y-3xy^2)\,dy=0.$

5.27. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)\,dy=0.$

5.28. $(2x-y+4)\,dy+(x+2y+5)\,dx=0.$

5.29. $(1+y^2\sin 2x)\,dx-2y\cos^2 x\,dy=0.$

5.30. $(x^4+6x^2y^2+y^4)\,dx+(4x^3y+4xy^3)\,dy=0.$

Задача 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

6.1. $\operatorname{tg}x\cdot y^{IV}=y'''.$ 6.2. $xy'''+y''=\sqrt{x}.$

6.3. $y'''\operatorname{tg}x=y''+1.$ 6.4. $y'''\operatorname{tg}5x=5y''.$

6.5. $y'''\cdot\operatorname{tg}3x=3y''.$ 6.6. $x^3y'''+x^2y''=\sqrt{x}.$

6.7. $(1+\sin x)\,y'''=\cos x\cdot y''.$ 6.8. $(x+1)\,y'''+y''=x+1.$

6.9. $\operatorname{ctg}x\cdot y''+y'=\sec x.$ 6.10. $xy'''+y''=\frac{1}{\sqrt{x}}.$

6.11. $2x^2y''-x^3\cdot y'''=2.$ 6.12. $x^4y''+x^3y'=4.$

6.13. $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3.$ 6.14. $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x.$

6.15. $xy'''\cdot\ln x=y'.$ 6.16. $xy'''+y''=1.$

6.17. $2xy'''=y''.$ 6.18. $xy'''+y''=x+1.$

6.19. $\operatorname{tg}x\cdot y''-y'+\frac{1}{\sin x}=0.$ 6.20. $x^2y''+xy'=1.$

6.21. $y'''\cdot\operatorname{ctg}2x+2y''=0.$ 6.22. $x^3y'''+x^2y''=1.$

6.23. $\operatorname{tg}x\cdot y'''=2y''.$ 6.24. $(1+x^2)\,y'''=2xy''.$

6.25. $x^4y''+x^3y'=1.$ 6.26. $xy'''+2y''=0.$

6.27. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3.$ 6.28. $x^3y'''+x^4y''=1.$

6.29. $xy'''-y''+\frac{1}{x}=0.$ 6.30. $xy'''+y''+x=0.$

Задача 7. Найти решение задачи Коши и сделать проверку

7.I. $y''=2y^3+8y$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$.

7.2. $y''y^3+1=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

7.3. $y''=2y^3+2y$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$.

7.4. $y''\cdot y'=18y$, $y(1)=1$, $y'(1)=3$.

7.5. $y''\cdot tg\,y = 2(y')^2$, $y(0)=\frac{\pi}{2}$, $y'(0)=-1$.

7.6. $y''\cdot(y')^2=y^3-4y$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

7.7. $y''=2y^3+y$, $y(0)=0$, $y'(0)=0{,}5$.

7.8. $y''=128y^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=8$.

7.9. $y''y^3+4=0$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$.

7.I0. $y''=2y^3+2y$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

7.II. $y''\cdot(y')^2=y^3-y$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

7.I2. $y''=\frac{1}{2}y^3+2y$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

7.I3. $2yy''=(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

7.I4. $y''+2\,tg\,y\cdot(y')^2=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

7.I5. $y''=2y^3-2y$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

7.I6. $y''\cdot(y')^2=y^3-4y$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

7.I7. $y''=2y^3+8y$, $y(0)=0$, $y'(0)=-4$.

7.I8. $y''=8y^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

7.I9. $4y''y=(y')^2$, $y(1)=1$, $y'(1)=\frac{4}{3}$.

7.20. $y''\cdot(y')^2=y^3-y$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

7.2I. $y''=2y^3-8y$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$.

7.22. $3y''y=(y')^2$, $y(4)=8$, $y'(4)=3$.

7.23. $3y\cdot y''=2(y')^2$, $y(-1)=1$, $y'(-1)=3$.

7.24. $y''=2y^3+2y$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

7.25. $y''\cdot(y')^2=y^3-y$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

7.26. $y''=72y^3$, $y(2)=1$, $y'(2)=6$.

7.27. $y''\cdot y^3+64=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=2$.

7.28. $y''=2y^3+8y$, $y(0)=2$, $y'(0)=8$.

7.29. $y''=98y^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=7$.

7.30. $y''=2y^3+2y$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

Задача 8. Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

8.I. $y''-y'-2y=3e^{2x}-2x-13$.

8.2. $y''-6y'+8y=2e^{4x}+40x-30$.

8.3. $y''-2y'+15y=-8e^{-3x}-30x-19$.

8.4. $y''-11y'+28y=6e^{4x}+84x+23$.

8.5. $y''-5y'+6y=6x-29-5e^{2x}$.

8.6. $y''-7y'+12y=3e^{4x}-24x-46$.

8.7. $y''-9y'+20y=67-60x-e^{4x}$.

8.8. $y''-5y'-14y=28x+80-36e^{-2x}$.

8.9. $y''+6y'+5y=12e^{-x}+35x+27$.

8.I0. $y''-y'-6y=-20e^{3x}-12x-32$.

8.II. $y''+8y'+15y=4e^{-3x}-15x+112$.

8.I2. $y''+10y'+24y=6e^{-6x}+168x+118$.

8.I3. $y''-y'-12y=14e^{4x}+60x-43$.

8.I4. $y''+7y'+10y=30x+41-12e^{-2x}$.

8.I5. $y''+2y'-15y=-16e^{-5x}-105x-1$.

8.I6. $y''-3y'-10y=-21e^{5x}-30x-49$.

8.I7. $y''-10y'+16y=-18e^{2x}-80x+162$.

8.I8. $y''-4y'-21y=-20e^{-3x}+63x+54$.

8.I9. $y''-11y'+24y=25e^{8x}-24x+107$.

8.20. $y''+3y'-18y=-9e^{3x}-72x+174$.

8.2I. $y''+6y'+8y=40x+54-16e^{-2x}$

8.22. $y''-10y'+24y=-4e^{4x}-216x+90$.

8.23. $y''+7y'+10y=18e^{-2x}+40x-2$.

8.24. $y''-6y'-7y=-16e^{7x}-35x-93.$

8.25. $y''+4y'-12y=32e^{2x}-24x-40.$

8.26. $y''+12y'+35y=2e^{-7x}+140x+258.$

8.27. $y''+4y'-32y=24e^{4x}+96x+212.$

8.28. $y''-3y'-18y=36e^{-3x}-36x+84.$

8.29. $y''+7y'-8y=-18e^{-8x}-56x+81.$

8.30. $y''-2y'+15y=24e^{5x}+75x-20.$

Задача 9. Найти решение задачи Коши.

9.1. $y''-2y'+2y=e^{x}+(x-2)\cos x+2(x-1)\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1.$

9.2. $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}+24e^{3x}(\sin x-3\cos x),\ y(0)=2,\ y'(0)=-2.$

9.3. $y''-8y'+20y=20e^{4x}\cos 2x,\ y(0)=2,\ y'(0)=8.$

9.4. $y''+7y'+10y=e^{-2x}\cdot[(3-25x)\cos 5x-(15x+10)\sin 5x],$
$y(0)=-3,\ y'(0)=7.$

9.5. $y''-2y'+5y=e^{x}(8x+3\cos x),\ y(0)=1,\ y'(0)=5.$

9.6. $y''-2y'+y=2e^{x}(1-2\sin 2x),\ y(0)=0,\ y'(0)=4.$

9.7. $y''-8y'+17y=e^{4x}(x^2+2-6\cos x),\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

9.8. $y'''+y'=-2\cos x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0.$

9.9. $y'''-2y''+4y'-8y=8e^{2x}(\cos 2x-2\sin 2x)-16x^2+16x-8,$
$y(0)=0,\ y'(0)=2,\ y''(0)=12.$

9.10. $y''-6y'+8y=2e^{4x}(2\cos x-\sin x)-10e^{2x},$
$y(0)=-3,\ y'(0)=-5.$

9.11. $y''+2y'+y=2(x+1)\sin x-2\cos x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

9.12. $y''-6y'+13y=(4x^2+2)e^{3x}-9(3\cos 2x+4\sin 2x),$
$y(0)=-3,\ y'(0)=4.$

9.13. $y'''-y''-y'+y=10(x-2)\sin x-10(x+1)\cos x,$
$y(0)=3,\ y'(0)=3,\ y''(0)=13.$

9.14. $y''-9y=e^{-3x}(2-12x-18\cos 3x-9\sin 3x),$
$y(0)=-2,\ y'(0)=-3.$

9.15. $y^{IV}+y''=2(x-3)e^{-x},\ y(0)=-3,\ y'(0)=8,\ y''(0)=1,\ y'''(0)=3.$

9.16. $y''+4y=e^{x}(4\cos 2x+\sin 2x)-6\cos 4x,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$

9.17. $y'''-4y''+3y'=2-8x-(2x+1)e^{2x}+6(\cos x+2\sin x),$
$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=6.$

9.18. $y''-4y'+5y=\frac{1}{2}e^{2x}(1+3\cos 2x),\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

9.19. $y''+3y'+2y=-e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x),\ y(0)=0,\ y'(0)=4.$

9.20. $y''-2y'+2y=(x-2)\sin x-2(x-1)\cos x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

9.21. $y^{IV}+5y''+4y=20\sin 3x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,$
$y''(0)=0,\ y'''(0)=-13.$

9.22. $y''-3y'+2y=6\cos 2x+2\sin 2x-e^{x},$
$y(0)=4,\ y'(0)=6.$

9.23. $y''-y=-e^{x}(9\cos 3x+6\sin 3x),\ y(0)=1,\ y'(0)=5.$

9.24. $y''+4y'+3y=4e^{x}-e^{-x}(\cos x+2\sin x),$
$y(0)=2,\ y'(0)=-1.$

9.25. $y''+4y=e^{x}\left(2\cos 2x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+e^{-x}\left(2\cos 2x-\frac{\sin 2x}{2}\right),$
$y(0)=2,\ y'(0)=0.$

9.26. $y''+2y'+2y=2e^{x}(\cos x+\sin x),\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

9.27. $y''-5y'=6(1-5x)-25(\cos 5x+\sin 5x),\ y(0)=0,\ y'(0)=5.$

9.28. $y''+y=4x\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2.$

9.29. $y''-2y'+y=2e^{x}(3x-\cos x+\sin x),$
$y(0)=3,\ y'(0)=3$

9.30. $y''-4y'+8y=4(e^{2x}+5\sin 2x),$
$y(0)=3,\ y'(0)=2$

Задача I0. Составить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, если предложенные функции составляют фундаментальную систему решений этого уравнения.

I0.I. $1,\ x,\ e^{2x}$.
I0.2. $e^{x}\sin 2x,\ e^{x}\cdot\cos 2x$.
I0.3. $e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x}$.
I0.4. $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x$.
I0.5. $e^{x},\ \sin x,\ \cos x$.
I0.6. $1,\ x,\ e^{x},\ xe^{x}$.
I0.7. $e^{2x},\ e^{3x},\ e^{4x}$.
I0.8. $2,\ x+1,\ x^2$.
I0.9. $1,\ \sin x,\ \cos x$.
I0.I0. $e^{2x},\ e^{-2x},\ 1$.
I0.II. $1,\ x,\ \sin 2x,\ \cos 2x$.
I0.I2. $e^{x},\ \sin 2x,\ \cos 2x$.
I0.I3. $e^{2x}\sin 4x,\ e^{2x}\cdot\cos 4x$.
I0.I4. $\operatorname{sh} 2x,\ \operatorname{ch} 2x$.
I0.I5. $e^{x},\ xe^{x},\ e^{2x}$.
I0.I6. $e^{x},\ xe^{x},\ x^2e^{x}$.
I0.I7. $3,\ x-1,\ e^{x}$.
I0.I8. $1,\ e^{2x},\ e^{4x}$.
I0.I9. $\sin x,\ e^{2x},\ \cos x$.
I0.20. $e^{-3x},\ xe^{-3x}$.
I0.2I. $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x$.
I0.22. $e^{x},\ \sin 3x,\ \cos 3x$.
I0.23. $1,\ x,\ x^2,\ e^{2x}$.
I0.24. $1,\ x,\ \sin x,\ \cos x$.
I0.25. $e^{x}\cdot\sin 4x,\ e^{x}\cdot\cos 4x$.
I0.26. $e^{-x},\ xe^{-x},\ x^2e^{-x}$.
I0.27. $\sin 2x,\ \cos 2x,\ x\sin 2x,\ x\cos 2x$.
I0.28. $\sin x,\ x\sin x,\ \cos x,\ x\cos x$.
I0.29. $e^{-x}\cdot\sin x,\ e^{-x}\cdot\cos x$.
I0.30. $e^{2x}\sin 5x,\ e^{2x}\cdot\cos 5x$.

Задача II. Решить уравнение методом вариации постоянных.

II.I. $4y''+y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.
II.2. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
II.3. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^{x}(2+e^{x})}$.
II.4. $y''+4y=\dfrac{4}{\sin 2x}$.
II.5. $y''+4y=\dfrac{4}{\cos 2x}$.
II.6. $y''+y'=\dfrac{e^{x}}{2+e^{x}}$.

II.7. $y''+y=2\operatorname{ctg} x$.
II.8. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
II.9. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}$.
II.I0. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.
II.II. $y''+\pi^2y=\pi^2\sec \pi x$.
II.I2. $y''+4y=8\operatorname{ctg} 2x$.
II.I3. $y''+y=\sec x$.
II.I4. $y''+3y'=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$.
II.I5. $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{1+e^{-2x}}$.
II.I6. $y''-9y'+18y=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$.
II.I7. $\pi^2y''+y=\sec\frac{x}{\pi}$.
II.I8. $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$.
II.I9. $y''+y=4\operatorname{ctg} x$.
II.20. $y''-6y'-8y=4\cdot(2+e^{-2x})^{-1}$.
II.2I. $y''+6y'+8y=\dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$.
II.22. $y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}$.
II.23. $y''+9y=\dfrac{9}{\cos 3x}$.
II.24. $y''-y'=\dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$.
II.25. $y''+4y=4\operatorname{ctg} 2x$.
II.26. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{3+e^{-x}}$.
II.27. $y''-6y'+8y=\dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$.
II.28. $y''+16y=\dfrac{16}{\sin 4x}$.
II.29. $y''+16y=\dfrac{16}{\cos 4x}$.
II.30. $y''-2y'=\dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

Задача I2. Найти частное решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений с начальным условием

I2.I. $\begin{cases}\dot x = x+3y\\ \dot y = x-y\end{cases}$ $\quad x(0)=3,\ y(0)=1$

I2.2. $\begin{cases}\dot x = x+4y\\ \dot y = 2x-y\end{cases}$ $\quad x(0)=2,\ y(0)=1$

I2.3. $\begin{cases}\dot x = 2x+5y\\ \dot y = x-2y\end{cases}$ $\quad x(0)=5,\ y(0)=1$

I2.4. $\begin{cases}\dot x = 3x+y\\ \dot y = -5x-3y\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-1$

I2.5. $\begin{cases}\dot x = -2x+6y\\ \dot y = 2x+2y\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=1$

I2.6. $\begin{cases}\dot x = x+2y\\ \dot y = 2x+y\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=1$

I2.7. $\begin{cases}\dot x = 2x+8y\\ \dot y = 3x+4y\end{cases}$ $\quad x(0)=4,\ y(0)=3$

I2.8. $\begin{cases}\dot x = x+y\\ \dot y = 4x+y\end{cases}$ $\quad x(0)=1,\ y(0)=-2$

12.9. $\begin{cases}\dot{x} = 3x+5y\\ \dot{y} = 3x+y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-1$

12.10. $\begin{cases}\dot{x} = -x+3y\\ \dot{y} = x+y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=1$

12.11. $\begin{cases}\dot{x} = x+4y\\ \dot{y} = 2x+3y\end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=-1$

12.12. $\begin{cases}\dot{x} = 4x+y\\ \dot{y} = 3x+2y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-3$

12.13. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+3y\\ \dot{y} = 4x+3y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-1$

12.14. $\begin{cases}\dot{x} = 4x-2y\\ \dot{y} = 3x-y\end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=3$

12.15. $\begin{cases}\dot{x} = 5x-3y\\ \dot{y} = -4x+6y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=1$

12.16. $\begin{cases}\dot{x} = 3x-y\\ \dot{y} = 6x-4y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=6$

12.17. $\begin{cases}\dot{x} = x+3y\\ \dot{y} = x-y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-1$

12.18. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+5y\\ \dot{y} = x-2y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-1$

12.19. $\begin{cases}\dot{x} = -2x+6y\\ \dot{y} = 2x+2y\end{cases}$ $x(0)=3$, $y(0)=-1$

12.20. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+8y\\ \dot{y} = 3x+4y\end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=-1$

12.21. $\begin{cases}\dot{x} = x+4y\\ \dot{y} = 2x-y\end{cases}$ $x(0)=-1$, $y(0)=1$

12.22. $\begin{cases}\dot{x} = 3x+y\\ \dot{y} = -5x-3y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-5$

12.23. $\begin{cases}\dot{x} = x+2y\\ \dot{y} = 2x+y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=-1$

12.24. $\begin{cases}\dot{x} = x+y\\ \dot{y} = 4x+y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=2$

12.25. $\begin{cases}\dot{x} = 3x+5y\\ \dot{y} = 3x+y\end{cases}$ $x(0)=5$, $y(0)=3$

12.26. $\begin{cases}\dot{x} = -x+3y\\ \dot{y} = x+y\end{cases}$ $x(0)=3$, $y(0)=-1$

12.27. $\begin{cases}\dot{x} = 4x+y\\ \dot{y} = 3x+2y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=1$

12.28. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+3y\\ \dot{y} = 4x+3y\end{cases}$ $x(0)=3$, $y(0)=4$

12.29. $\begin{cases}\dot{x} = 4x-2y\\ \dot{y} = 3x-y\end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=1$

12.30. $\begin{cases}\dot{x} = x+4y\\ \dot{y} = 2x+3y\end{cases}$ $x(0)=3$, $y(0)=0$

Задача I3. Записать систему дифференциальных уравнений в матричном виде. Найти общее решение системы уравнений методом Эйлера.

I3.1. $\begin{cases}\dot{x} = -y-z\\ \dot{y} = -x-z\\ \dot{z} = -x-y\end{cases}$

I3.2. $\begin{cases}\dot{x} = y+z\\ \dot{y} = 3x+z\\ \dot{z} = 3x+y\end{cases}$

I3.3. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+y\\ \dot{y} = x+z\\ \dot{z} = -3x+y-z\end{cases}$

I3.4. $\begin{cases}\dot{x} = -2x-2y-4z\\ \dot{y} = -2x+y-2z\\ \dot{z} = 5x+2y+7z\end{cases}$

I3.5. $\begin{cases}\dot{x} = 4x-2y-z\\ \dot{y} = -x+3y-z\\ \dot{z} = x-2y+2z\end{cases}$

I3.6. $\begin{cases}\dot{x} = 2x-y\\ \dot{y} = -x+2y\\ \dot{z} = x-y+2z\end{cases}$

I3.7. $\begin{cases}\dot{x} = 2x-y+z\\ \dot{y} = 2y-z\\ \dot{z} = -y+2z\end{cases}$

I3.8. $\begin{cases}\dot{x} = 4x-y-z\\ \dot{y} = 4y-z\\ \dot{z} = -y+4z\end{cases}$

I3.9. $\begin{cases}\dot{x} = 2x-z\\ \dot{y} = x+2y-z\\ \dot{z} = -x+2z\end{cases}$

I3.10. $\begin{cases}\dot{x} = 4x+y\\ \dot{y} = x+4y\\ \dot{z} = -x+y+4z\end{cases}$

I3.11. $\begin{cases}\dot{x} = 5x-4y+4z\\ \dot{y} = 2x+y+2z\\ \dot{z} = 2x+3z\end{cases}$

I3.12. $\begin{cases}\dot{x} = 2x-2y+2z\\ \dot{y} = 3y\\ \dot{z} = 2y+z\end{cases}$

I3.13. $\begin{cases}\dot{x} = 7x+6z\\ \dot{y} = 2x+5y+2z\\ \dot{z} = z\end{cases}$

I3.14. $\begin{cases}\dot{x} = 7x+6z\\ \dot{y} = 4x+3y+4z\\ \dot{z} = z\end{cases}$

I3.15. $\begin{cases}\dot{x} = 6x-y-z\\ \dot{y} = -x+6y-z\\ \dot{z} = 3z\end{cases}$

I3.16. $\begin{cases}\dot{x} = 4x-y-z\\ \dot{y} = -x+4y-z\\ \dot{z} = z\end{cases}$

13.17. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 6z \\ \dot{y} = 2x + 5y + 2z \\ \dot{z} = 4z \end{cases}$ 13.18. $\begin{cases} \dot{x} = 15x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 7y - 4z \\ \dot{z} = -2y + 5z \end{cases}$

13.19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + 2y \\ \dot{z} = x - y + 5z \end{cases}$ 13.20. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = 3y - z \\ \dot{z} = -y + 3z \end{cases}$

13.21. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y - z \\ \dot{y} = -x + 6y - z \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$ 13.22. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y - z \\ \dot{y} = -x + 6y - z \\ \dot{z} = 6z \end{cases}$

13.23. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 7y - 4z \\ \dot{z} = -2y + 5z \end{cases}$ 13.24. $\begin{cases} \dot{x} = 9x + y - z \\ \dot{y} = 4y - z \\ \dot{z} = -y + 4z \end{cases}$

13.25. $\begin{cases} \dot{x} = 11x + y - z \\ \dot{y} = 4y - z \\ \dot{z} = -y + 4z \end{cases}$ 13.26. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z \\ \dot{y} = 5y - z \\ \dot{z} = -y + 5z \end{cases}$

13.27. $\begin{cases} \dot{x} = 13x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 9y - 2z \\ \dot{z} = -2y + 9z \end{cases}$ 13.28. $\begin{cases} \dot{x} = 15x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 7y - 4z \\ \dot{z} = -2y + 5z \end{cases}$

13.29. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 6y + 6z \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2z \\ \dot{z} = 2x + 2y + 3z \end{cases}$ 13.30. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y + 2z \\ \dot{y} = -6x + 3y + 2z \\ \dot{z} = 6x + 2y + 3z \end{cases}$

Задача 14. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений. Указать частное решение системы, удовлетворяющее начальному условию: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

14.1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 8e^t \\ \dot{y} = -4x + 10y + 9e^t \end{cases}$ 14.2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + 6 \\ \dot{y} = 2x + 6y - 18 \end{cases}$

14.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y - 10 \\ \dot{y} = 2x + 6y + 20 \end{cases}$ 14.4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 12 \\ \dot{y} = 5x + 6y - 18 \end{cases}$

14.5. $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 2y - 2e^t \\ \dot{y} = -2x + 6y - 5e^t \end{cases}$ 14.6. $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 2y - 9e^t \\ \dot{y} = -4x + 6y + 4e^t \end{cases}$

14.7. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 5y + 4 \\ \dot{y} = 4x + 10y \end{cases}$ 14.8. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 4y \\ \dot{y} = 5x + 4y - 13 \end{cases}$

14.9. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4y - 3e^t \\ \dot{y} = -2x + 8y + 2e^t \end{cases}$ 14.10. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y - 3 \\ \dot{y} = -2x + 6y + 10 \end{cases}$

14.11. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y - 10 \\ \dot{y} = 17x + 4y - 1 \end{cases}$ 14.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y + e^t \\ \dot{y} = -2x + 4y - 2e^t \end{cases}$

14.13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y + 1 \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{cases}$ 14.14. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y + 2e^t \\ \dot{y} = 17x - 4y + 5e^t \end{cases}$

14.15. $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 8y - 9e^t \\ \dot{y} = -5x - 2y + 5e^t \end{cases}$ 14.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y - e^t \\ \dot{y} = 8x + 10y - 8e^t \end{cases}$

14.17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -2x + 6y + 8 \end{cases}$ 14.18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -4x + 6y + 10 \end{cases}$

14.19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y - e^t \\ \dot{y} = -4x + 6y + 4e^t \end{cases}$ 14.20. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 2y - 8 \\ \dot{y} = 2x + 6y - 8 \end{cases}$

14.21. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 4y - 9e^t \\ \dot{y} = 2x + 6y - 2e^t \end{cases}$ 14.22. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y - 5e^t \\ \dot{y} = -5x + 10y + 5e^t \end{cases}$

14.23. $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 5y - 13 \\ \dot{y} = -4x + 4y \end{cases}$ 14.24. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y + 3e^t \\ \dot{y} = 4x + 8y + 4e^t \end{cases}$

14.25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y + 3e^t \\ \dot{y} = 5x + 6y + 5e^t \end{cases}$ 14.26. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - 6 \\ \dot{y} = 2x - y - 4 \end{cases}$

14.27. $\begin{cases} \dot{x} = y + t \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

14.28. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$

14.29. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + 1 - 3t \end{cases}$

14.30. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 1 - 3t \\ \dot{y} = -x + y - t \end{cases}$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2 т., М.: Наука, 1985.
2. Дифференциальные уравнения: Метод. указания к контрольной работе/ Владим. политехн. ин-т; Сост. М.С.Беспалов, 1986, 20с.
3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. М.: Высш. шк., 1983. 172 с.
4. Задания к типовым расчетам по математике. Разделы: теория функций комплексного переменного, операционное исчисление/ Владим. гос. техн. ун-т; Сост. Т.А.Еропкина, 1994, 56 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е