Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

М. С. Беспалов В. А. Скляренко

Функции Уолша и их приложения

Методическое пособие

Владимир 2012

УДК ?
ББК ?
Б ?

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики
Владимирского государственного университета
Ю. А. Алхутов

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
Н. И. Дубровин

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Беспалов М. С.
Б ? Функции Уолша и их приложения: методическое пособие / М. С. Беспалов, В. А. Скляренко; Владим. гос. ун-т. — Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2012. – ? с.
ISBN ?

Ил. 2. Библиогр.: 15 назв.

УДК ?
ББК ?

ISBN ?

1. Функции Радемахера[1]

Существует три подхода к определению *функций Радемахера*. В математической дисциплине «Теория функций» их принято [9, 14] определять

$$r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2^{n+1}\pi x))$$

и рассматривать на [0,1].

Предложим другое определение, согласно которому функции Радемахера рассматриваем на $[0, 1)$, где они принимают только два значения. Введем *начальную функцию Радемахера*

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{если } \ x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

и периодически с периодом T=1 продолжим на полуось $[0, \infty)$. Каждую следующую функцию Радемахера определим (см. рис. 1) как сжатие по горизонтальной оси в два раза предыдущей $r_n(x) = r_{n-1}(2x)$. По окончанию процесса построения функций Радемахера договоримся рассматривать их только на участке $[0, 1)$. Второй подход можно описать и по другому. Введем понятие и обозначение *интервала n-го ранга* с номером k (полуинтервала, если быть точным): $\Delta_n^k = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$. Тогда во втором подходе:

$$r_{n-1}(x) = (-1)^k \qquad \text{при} \quad x \in \Delta_n^k. \tag{1}$$

Третий подход соответствует построению функций Радемахера на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$. Модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ получается добавлением к отрезку [0,1] счетного множества точек $\mathbb{Q}_2 \bigcap (0, 1)$, состоящего из всех *двоично-рациональных* чисел (то есть чисел вида $\frac{k}{2^m}$, где $m \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \ldots, 2^m - 1$), попавших на интервал $(0, 1)$. В результате этого добавления каждую двоично-рациональную точку рассматриваем как две точки: $(\frac{k}{2^m})^-$ - левая и $(\frac{k}{2^m})^+$ - правая. Например, в двоичной системе счисления $(\frac{1}{2})^- = 0{,}011111\ldots$, $(\frac{1}{2})^+ = 0{,}100000\ldots$ с помощью представления в виде бесконечных дробей. В третьем подходе сохраним обозначение для *интервала n-го ранга* с номером k, но определять его

[1]Данная работа выполнена в рамках НИР по госзаданию «Наука» (Регистрационные номера: 8.3303.2011 и 8.3534.2011 от 23.11.2011).

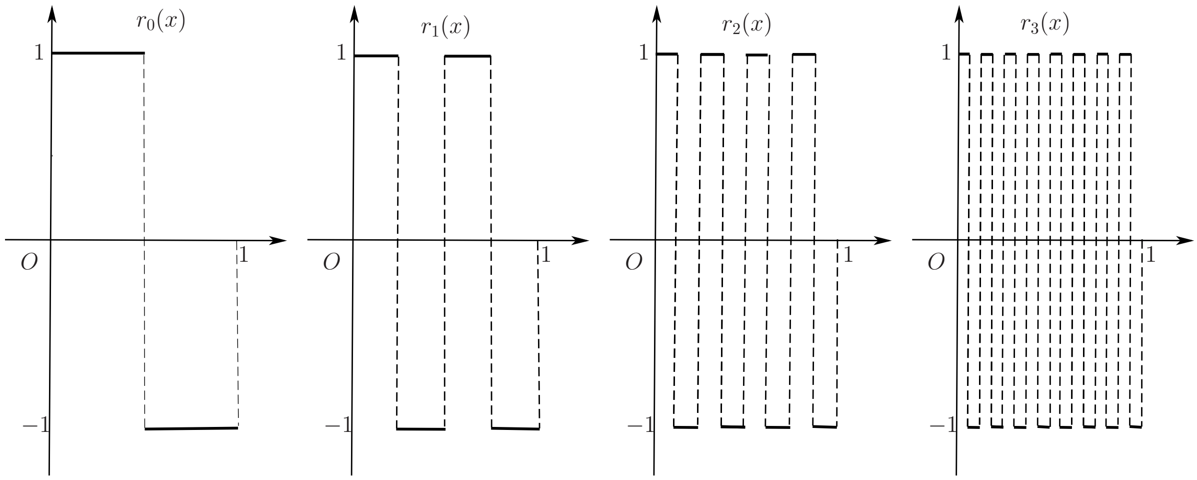

Рис. 1. Функции Радемахера

будем по другому $\Delta_n^k = [\frac{k}{2^n}^+, \frac{k+1}{2^n}^-]$. Любопытно, что в топологии модифицированного отрезка $[0,1]^*$ он является одновременно и отрезком (закрытым множеством) и интервалом (открытым множеством), о чем подробнее в [9, 14]. В третьем подходе функции Радемахера определяем также формулой (1) относительно нового определения Δ_n^k.

Третий подход соответствует изложению гармонического анализа на группах [1], который служит основным примером абстрактного гармонического анализа [11]. Желающие углубить свои познания в данных направлениях могут обратиться к указанным книгам.

Первый подход удобен при решении задач математического анализа и ортогональных рядов, так как позволяет не выходить из класса регулярных функций, для которых значение в каждой точке разрыва равно полусумме односторонних пределов в этой точке.

При решении прикладных задач, в частности при цифровой обработке информации, удобней второй подход. Именно *вторым подходом* к определению функций Радемахера мы и будем пользоваться. Его преимущество еще и в том, что важные групповые свойства рассматриваемых функций здесь выполняются без дополнительных оговорок.

Лемма 1. *Интеграл от любой функции Радемахера по интервалу ранга, совпадающего с номером функции, равен нулю; то есть*

$$\int\limits_{\Delta_n^k} r_n(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Функция Радемахера $r_n(x)$ постоянна на интервале Δ_m^k, ранг которого больше ($n < m$) номера функции. В частности, по формуле (1)

$$r_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Delta_{n+1}^{2k}\ , \\ -1, & \text{если } x \in \Delta_{n+1}^{2k+1}\ . \end{cases}$$

Так как $\Delta_n^k = \Delta_{n+1}^{2k} \bigcup \Delta_{n+1}^{2k+1}$ и $|\Delta_{n+1}^{2k}| = |\Delta_{n+1}^{2k+1}| = 2^{-(n+1)}$, то

$$\int\limits_{\Delta_n^k} r_n(x)\ dx = 0. \qquad \square$$

Следствие 1. *Интеграл от любой функции Радемахера по всему интервалу* $\Delta_0 = [0,1)$ *равен нулю:* $\int\limits_0^1 r_n(x)\ dx = 0.$

Доказывается разбиением интервала $[0,1)$ на объединение интервалов ранга n.

Утверждение 1. Система функций Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормирована на [0,1).

Доказательство. Если $n < m$, то $r_n(x)$ постоянна на Δ_m^k и по лемме 1: $\int\limits_{\Delta_m^k} r_n(x) r_m(x)\ dx = 0$ для любого k. Поэтому

$$(r_n, r_m) = \int\limits_0^1 r_n(x) r_m(x)\ dx = 0.$$

Квадрат любой функции Радемахера равен тождественной единице, которую далее будем обозначать $w_0(x) \equiv 1$. Поэтому

$$(r_n, r_n) = \int\limits_0^1 (r_n(x))^2\ dx = 1. \qquad \square$$

Утверждение 2. Система функций Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ не полна на $[0,1)$.

Доказательство. Действительно, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{3}{4}, 1), \\ -1, & \text{если } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \end{cases}$$

ортогональна всем функциям Радемахера, но не является нулевой функцией в $L_2[0,1)$. □

2. Функции Уолша. Система Уолша-Пэли

Определение 1. *Функция Уолша* есть произведение функций Радемахера. *Множество функций Уолша* есть множество всевозможных произведений функций Радемахера.

В этом определении уместно говорить о различных функциях Радемахера, так как квадрат любой функции Радемахера равен начальной функции Уолша $w_0(x) \equiv 1$, которая и служит единственным исключением из этого замечания к определению 1.

Замечание 1. Если бы остановились на определении функций Радемахера формулой $r_n(x) = \text{sgn}(\sin(2^{n+1}\pi x))$, то это групповое свойство не выполнялось бы.

Система Уолша есть множество функций Уолша, занумерованных целыми неотрицательными числами, то есть элементами множества $\mathbb{N}_0$.

Основной нумерацией системы Уолша является нумерация, предложенная [13] Пэли в 1932 г. Если говорят система Уолша, то подразумевают нумерацию Пэли. *Систему Уолша-Пэли* будем обозначать $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Разложим номер n в двоичной системе счисления[2]:

$$n = n_1 2^0 + n_2 2^1 + ... + n_m 2^{m-1}, \tag{2}$$

где $n_i \in \{0,1\}$, $n_m = 1$. Число m, равное числу разрядов в двоичной записи числа n, находится из условия $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$. Для разложения (2) часто используется форма записи в виде $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot 2^{k-1}$, где полагаем $n_k = 0$ при $k > m$, что позволяет представить и число 0 в аналогичном виде.

[2]Часто [6, 9, 14] вместо данного разложения числа n, которое удобно при работе с преобразованием Уолша, предлагается $n = n_0 2^0 + n_1 2^1 + ... + n_m 2^m$, что приводит к сдвигу на единицу и в других формулах

Определение 2. Полагаем $w_0(x) \equiv 1$. Для $n \in \mathbb{N}_0$ вида (2) определим (несколько первых функций Уолша изображено на рис. 2.)

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{m-1} (r_k(x))^{n_{k+1}} = r_0^{n_1}(x) \cdot r_1^{n_2}(x) \cdot ... \cdot r_{m-1}^{n_m}(x). \tag{3}$$

Все натуральные числа в соответствии с двоичным представлением (2) группируются по пачкам, где m-й *пачкой* (которую обозначаем $]m[$) называем множество чисел от 2^m до $2^{m+1} - 1$ включительно.

Если в разложении (2) числа $n \in]m-1[$ оставим только ненулевые слагаемые, то получим разложение

$$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + ... + 2^{\varepsilon_\nu}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < ... < \varepsilon_\nu = m - 1$. Тогда *функции Уолша-Пэли* при $n \neq 0$ определяют как произведение различных функций Радемахера

$$w_n(x) = r_{\varepsilon_1}(x) \cdot r_{\varepsilon_2}(x) \cdot ... \cdot r_{\varepsilon_\nu}(x).$$

Равносильно (3) следующее *индуктивное определение функций системы Уолша-Пэли.*

Определение 3. Полагаем $w_0(x) \equiv 1$. Образующие функции для системы Уолша-Пэли совпадают с функциями Радемахера:

$w_1(x) = r_0(x),\ w_2(x) = r_1(x), \ldots,\ w_{2^n}(x) = r_n(x), \ldots.$

Если $n = 2^m + k$, где $k < 2^m$, то положим

$$w_n(x) = w_{2^m}(x) \cdot w_k(x). \tag{5}$$

Приведем простейшие свойства функций Уолша.

Утверждение 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$\int_{\Delta_m^k} w_n(x)\, dx = 0, \qquad \text{где } n \in]m[\quad \text{и} \quad k = 0, 1, 2 \ldots, 2^m - 1,$$

и, следовательно, $\int_0^1 w_n(x)\, dx = 0.$

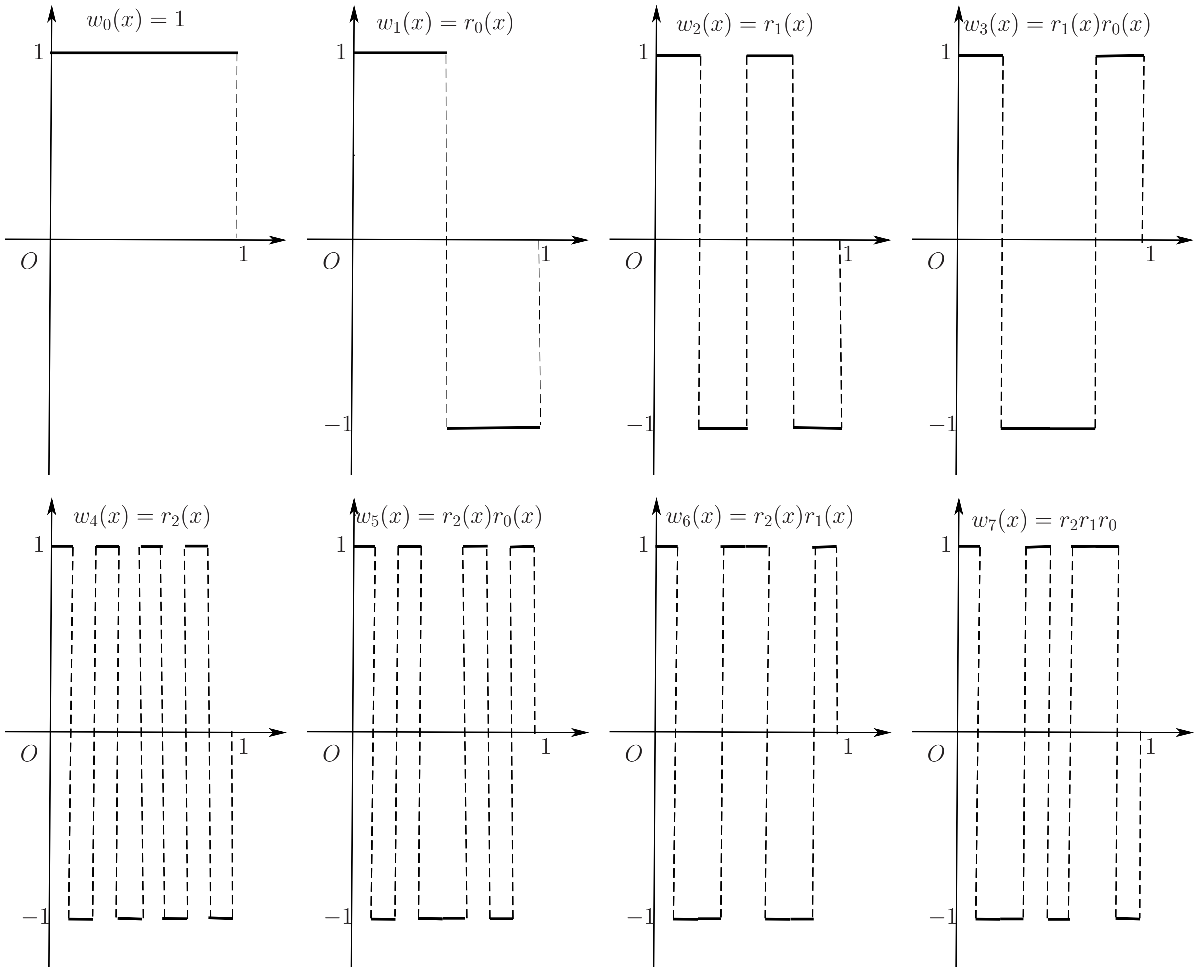

Рис. 2. Функции Уолша в нумерации Пэли

Доказательство. В формуле (3) множитель $r_{m-1}(x)$ соответствует функции Радемахера с наибольшим номером. Все предыдущии сомножители $r_s(x)$ в формуле (3) постоянны на Δ_m^k. По лемме 1 получили $\int_{\Delta_m^k} w_n(x)\, dx = 0$. □

Утверждение 4. Функции системы $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормированы на [0,1).

Доказательство. Согласно (3) произведение различных функций Уолша есть снова функция Уолша, отличная от начальной $w_0(x)$, и интеграл от нее по утверждению 3 равен нулю: $(w_n, w_m) = \int_0^1 w_s(x)\, dx = 0$. Так как квадрат любой функции Уолша есть тождественная единица, то и скалярный квадрат ее равен 1: $(w_n, w_n) = \int_0^1 w_0(x)\,dx = 1$. □

Утверждение 5. Число перемен знака на интервале $[0,1)$ у различных функций Уолша разное.

Доказательство. Метод индукуции по пачкам функций. Для начальных пачек это свойство легко проверяется непосредственно. Введем функцию z равную числу перемен знака на интервале $[0,1)$; через эту функцию запишем (см. рис 2): $z(w_0)=0$, $z(w_1)=1$, $z(w_2)=3$, $z(w_3)=2$.

Предположим, что это свойство выполняется для всех функций с номерами от 0 до $2^{m-1}-1$ включительно. Функцией с наибольшим числом перемен знака из следующей пачки $]m[$ служит функция $w_{2^m}(x)$, для которой $z(w_{2^m}) = 2^m - 1$. Для нее смена знака происходит в каждой точке дробления интервала, то есть в точках вида $\frac{s}{2^m}$. Все функции m-й пачки задаются формулой (5). Двойная смена знака есть отсутствие смены знака. Поэтому $z(w_{2^m+k}) = z(w_{2^m}) - z(w_k)$. Причем минимальное значения числа перемен знака функции в m-й пачке равно $z(w_{2^m+2^{m-1}}) = z(w_{2^m}) - z(w_{2^{m-1}}) = 2^m-1-(2^{m-1}-1) = 2^{m-1} > z(w_{2^{m-1}})$. Так как при $k\neq l$ имели $z(w_k)\neq z(w_l)$, то и $z(w_{2^m+k})\neq z(w_{2^m+l})$. □

3. Система Уолша в нумерации Уолша

Изначально система Уолша была введена [15] в другой нумерации.

Повторим [3, 14] *определение системы Уолша в нумерации Уолша* (в [14] названа оригинальной системой Уолша) $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Произвольное целое $n>1$ представим в виде $n = 2^{m-1}+k-1$, где $1\leqslant k\leqslant 2^{m-1}$ и обозначим $\varphi_n(x) := \varphi_m^{(k)}(x)$. Полагаем $\varphi_o(x)\equiv 1$, $\varphi_1(x) = \varphi_1^{(1)}(x) = r_0(x)$. Определим (при $k=1,2$)

$$\varphi_2^{(k)}(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(2x) & \text{если } x\in[0,\frac{1}{2}), \\ (-1)^k\varphi_1^{(1)}(2x-1), & \text{если } x\in[\frac{1}{2},1). \end{cases}$$

Если $m\geqslant 2$ и $1\leqslant k\leqslant 2^{m-1}$, то

$$\varphi_{m+1}^{(2k-1)}(x) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2x) & \text{если } x\in[0,\frac{1}{2}), \\ (-1)^{k+1}\varphi_m^{(k)}(2x-1), & \text{если } x\in[\frac{1}{2},1), \end{cases}$$

$$\varphi_{m+1}^{(2k)}(x) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2x) & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ (-1)^k \varphi_m^{(k)}(2x-1), & \text{если } x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

В публикациях первой половины XX века систему Уолша-Уолша часто определяли не на $[0,1)$, а на $[-1/2, 1/2]$, стараясь найти близость ее к тригонометрической системе. Даже вводили [2] специальные названия sal и cal для функций с нечетным и четным числом перемен знака.

Из утверждения 5 вытекает свойство, которое примем за определение *системы Уолша в нумерации Уолша.*

Определение 4. Функции Уолша упорядоченные по числу перемен знака на интервале $[0,1)$ составляют систему *Уолша-Уолша* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Это характерное свойство, которое мы приняли за определение системы Уолша-Уолша, можно вывести из приведенного выше классического определения.

Аналогичное свойство присуще сквозным образом занумерованной тригонометрической системе. Возможно, система Уолша вводилась [15] как упрощенный аналог тригонометрической системы.

Утверждение 6. Систему Уолша-Уолша можно определить по формуле, аналогичной формуле (5), с другими образующими. А именно: $\varphi_o(x) \equiv 1$; $\varphi_1(x) = r_0(x)$, $\varphi_{2^n}(x) = r_n(x) \cdot r_{n-1}(x)$ при $n \in \mathbb{N}$; $\varphi_{2^n+k}(x) = \varphi_{2^n}(x) \cdot \varphi_k(x)$ при $k < 2^n$.

Доказательство. Ранее вычислили, что $z(\varphi_{2^n}) = 2^n$ при всех n. Для первой пачки проверяем дополнительно, что $z(\varphi_3) = 3$. Доказательство по индукции. Предположим, что $z(\varphi_k) = k$ при всех $k < 2^n$ (для $n = 2$ это уже доказано).

Так как функции Радемахера имеют наибольшее число перемен знака среди функций Уолша рассматриваемой пачки, накрывающее все возможные места перемен знака данной пачки, то у функции $\varphi_{2^n}(x)$ места перемен знака не повторяют места перемен знака ни одной из функций Уолша с меньшим номером. Поэтому $z(\varphi_{2^n+k}) = z(\varphi_{2^n}) + z(\varphi_k) = 2^n + k$.

4. Групповое свойство функций Уолша

Двоичное представление (2) целых неотрицательных чисел $n \in \mathbb{N}_0$ изоморфно представлению в виде бесконечных финитных последовательностей из нулей и единиц

$$\tilde{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m, 0, 0, \ldots) \in X_\infty. \tag{6}$$

Множество финитных последовательностей X_∞ относительно операции $\oplus$ покоординатного сложения по модулю 2 является абелевой группой, все элементы которой (кроме нейтрального) имеют порядок 2. Аналогично введем операцию $\dot{+}$ на $\mathbb{N}_0$: если $n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} n_{i+1} \cdot 2^i,\ k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} k_{i+1} \cdot 2^i\ \in \mathbb{N}_0$, то

$$n \dot{+} k = \sum_{i=0}^{\infty} (n_{i+1} \oplus k_{i+1})\ \cdot 2^i.$$

Обозначим символом W множество функций Уолша.

Теорема 1. *Группа функций Уолша $(W, \cdot)$ есть мультипликативное представление изоморфных групп: группы целых неотрицательных чисел относительно операции $\dot{+}$ и группы бесконечных финитных последовательностей (6) из нулей и единиц с операцией покоординатного сложения по модулю 2*

$$(W, \cdot) \simeq (\mathbb{N}_0, \dot{+}) \simeq (X_\infty, \oplus).$$

Основную часть доказательства этой теоремы составляет следующая

Лемма 2. *Функции Уолша мультипликативны по номеру*

$$w_n(x) \cdot w_m(x) = w_{n \dot{+} m}(x).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (3), которую формально запишем как бесконечное произведение (чтоб не уточнять максимальный разряд):

$$w_n(x) \cdot w_m(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(x))^{n_{k+1}+m_{k+1}}.$$

Так как квадрат функции Радемахера есть тождественная единица, то сложение в показателе можно заменить на сложение по модулю 2, что приводит к доказываемой формуле. □

Функции Уолша можно рассматривать как функции, определенные на группе. В этом случае упрощенная форма записи функций Уолша на $[0,1)$, предложенная в первом параграфе, не применима. Областью определения функций Уолша считаем модифицированный отрезок $[0,1]^*$. Тогда для любых $x, y \in [0,1]^*$ существуют единственные двоичные представления

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k}, \tag{7}$$

которым соответствуют последовательности из нулей и единиц

$$\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, ...), \quad \widetilde{y} = (y_1, y_2, ..., y_k, ...) \in Z_2^{\infty}.$$

Перенесем операцию $\oplus$ покоординатного сложения по модулю 2 с множества X_∞ финитных последовательностей на множество последовательностей Z_2^∞: определим $\widetilde{z} = \widetilde{x} \oplus \widetilde{y} \in Z_2^\infty$, если $z_k = x_k \oplus y_k$.

Аналогично вводится операция $\dot{+}$ для $x, y \in [0,1]^*$ вида (7) через операцию $\oplus$ в группе $\mathbb{Z}_2$ по правилу:

$x \dot{+} y = z \in [0,1]^*$, где $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2^k}$, $z_k = x_k \oplus y_k$.

Изоморфные топологические группы: *двоичная группа Кантора* $(Z_2^\infty, \oplus)$ и ее геометрическая модель $([0,1]^*, \dot{+})$ в виде модифицированного отрезка (они же компактные топологические пространства) являются областью определения функций Уолша.

Для $n \in \mathbb{N}_0$ вида (2) и $x \in [0,1]^*$ вида (7) введем бинарную операцию *скалярного произведения* по формуле

$$(n, x) = (\widetilde{n}, \widetilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k \pmod 2 .$$

Так как последовательность $\widetilde{n}$ финитна, то в данной сумме конечное число ненулевых слагаемых.

Лемма 3. *Определение функций Уолша в нумерации Пэли, данное формулой (3), можно представить в виде*

$$w_n(x) = (-1)^{(n,\,x)}. \tag{8}$$

Доказательство. Представление (7) разобьем на два слагаемых

$$x = \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},$$

первое из которых обозначим $\frac{k}{2^m}$, где $k = \sum_{n=1}^{m} x_n \cdot 2^{m-n}$. В этих обозначениях $x \in \Delta_m^k$. Число $x_m \in \{0,1\}$ определяет четность числа k. Из (1) вытекает

$$r_{m-1}(x) = (-1)^k = (-1)^{x_m}.$$

Подставим в формулу (3):

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{m-1} ((-1)^{x_{k+1}})^{n_{k+1}} = \prod_{k=1}^{m} (-1)^{x_k n_k} = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{m} n_k x_k}.$$

Значение выражения не изменится, если последнюю сумму понимать как сумму по модулю 2 и бесконечно продолжить нулевыми слагаемыми. □

Лемма 2 о мультипликативности функций Уолша по номеру вытекает из леммы 3 и следующего свойства $(n \dotplus m, x) = (n, x) \dotplus (m, x)$ скалярного произведения. Из свойства $(n, x \dotplus y) = (n, x) \dotplus (n, y)$ скалярного произведения вытекает

Лемма 4. *Любая функция Уолша мультипликативна по аргументу*

$$w_n(x) \cdot w_n(y) = w_n(x \dotplus y).$$

Лемма 5. *Если $x \in \Delta_1^0 = [0, 1/2)$, то $w_{2k}(x) = w_{2k+1}(x) = w_k(2x)$, а также $w_{2k}(x + 1/2) = w_{2k}(x)$, $w_{2k+1}(x + 1/2) = -w_{2k+1}(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим на модифицированном отрезке, предполагая $x \in \Delta_1^0 \subset [0,1]^*$. По (2), (6), (7), (8) имеем $w_{2k}(x) = w_{2k}(x)$. По лемме 4: $w_{2k}(x \dot{+} \frac{1}{2}^+) = w_{2k}(x)$, так как $w_{2k}(\frac{1}{2}^+) = 1$. По лемме 2: $w_{2k+1}(y) = w_{2k}(y)w_1(y)$ при $y \in [0,1]^*$, что влечет $w_{2k+1}(x) = w_{2k}(x)$, $w_{2k+1}(x \dot{+} \frac{1}{2}^+) = -w_{2k+1}(x)$. Перейдем от модифицированного отрезка к полуинтервалу $[0,1)$, удалив все особые (те, у которых единица в периоде в двоичном коде) представления двоично-рациональных чисел. □

Введенное скалярное произведение есть отображение $\mathbb{N}_0 \times [0,1]^* \to Z_2$ (или отображение $X_\infty \times \mathbb{Z}_2^\infty \to \{0,1\}$ для представлений в виде последовательностей), которое при фиксированном одном сомножителе можно также рассматривать как *линейный функционал* над полем $\mathbf{F_2}$. Следовательно, линейные пространства X_∞ и $\mathbb{Z}_2^\infty$ над полем $\mathbf{F_2}$ являются *сопряженными.*

Во множестве последовательностей Z_2^∞ выделим цепочку вложенных подмножеств

$$Z_2^\infty = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \ldots \supset X^{(m)} \supset X^{(m+1)} \supset \ldots,$$

где $X^{(m)} = \{x \mid x = (0,0,\ldots,0,x_{m+1},x_{m+2},\ldots)\}$, составляющую систему окрестностей нуля в топологическом пространстве последовательностей Z_2^∞. Последовательность вложенных множеств $\{\Delta_m^0\}$ есть система окрестностей нуля в изоморфной топологической группе $([0,1]^*\ ,\ \dot{+})$. Система окрестностей нуля задает топологию на группе.

Согласно отмеченным свойствам мультипликативности система Уолша является [1, 11] *системой характеров* сопряженных топологических групп X_∞ и $\mathbb{Z}_2^\infty$ последовательностей из нулей и единиц. Каждая функция Уолша есть характер на группе $\mathbb{Z}_2^\infty$, а все функции Уолша при фиксированном аргументе есть характер на группе X_∞ финитных последовательностей.

Система характеров определяется [11] следующими условиями, которые для функций Уолша проверили. Во-первых, значение каждого характера по модулю равно единице. Во-вторых, произведение характеров является снова характером. В-третьих, обратная величина характера (характер в минус первой степени) есть снова характер.

5. Ядро Дирихле

Полагаем $f \in L[0,1)$. Применяем обозначения

$$\sigma[f] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(x)$$

для ряда Фурье, а $S_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k w_k(x)$ для частной суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по системе Уолша-Пэли, где

$$c_k = c_k[f] = \int\limits_0^1 f(x) w_k(x)\, dx$$

коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе Уолша-Пэли. Свойство мультипликативности функций Уолша позволяет получить интегральное представление частной суммы

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^1 f(t) w_k(t)\, dt \cdot w_k(x) = \int\limits_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{n-1} w_k(t \dot{+} x)\, dt.$$

Определение 5. *Ядром Дирихле* для системы Уолша-Пэли назовем

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(t)$$

сумму первых слагаемых системы.

Получили интегральное представление частной суммы

$$S_n(f,x) = \int\limits_0^1 f(t) D_n(t \dot{+} x)\, dt,$$

которое согласно соотношению $t \dot{+} x \dot{+} x = t$ и инвариантности интеграла относительно сдвига на $\dot{+} x$ приводится к виду

$$S_n(f,x) = \int\limits_0^1 f(t \dotplus x) D_n(t)\, dt. \tag{9}$$

Из утверждения 3 вытекает, что $\int\limits_0^1 D_n(t)\, dt = 1$. Если значение функции в точке представим в виде $f(x) = \int\limits_0^1 f(x) D_n(t)\, dt$ и вычтем его из (9), то получим отклонение частной суммы от функции

$$S_n(f,x) - f(x) = \int\limits_0^1 [f(x \dotplus t) - f(x)] D_n(t)\, dt. \tag{10}$$

Двоичной сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ называется

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(t \dotplus x) g(t)\, dt = \int_0^1 f(t) g(t \dotplus x)\, dt. \tag{11}$$

Формулу (9) можно записать в виде $S_n(f) = f * D_n$.

Отметим основные свойства ядра Дирихле системы Уолша-Пэли.

Лемма 6. *Если $n = 2^{m-1} + k$, где $k < 2^{m-1}$, то*

$$D_n(x) = D_{2^{m-1}}(x) + w_{2^{m-1}}(x) D_k(x). \tag{12}$$

Доказательство. В следующем представлении применим (5)

$$D_n(x) = \sum_{s=0}^{2^{m-1}-1} w_s(x) + \sum_{s=2^{m-1}}^{n} w_s(x) = D_{2^{m-1}}(x) + \sum_{l=0}^{k-1} w_{2^{m-1}}(x) \cdot w_l(x). \ \square$$

Лемма 7. *Ядро Дирихле с номером 2^m выражается через функции Радемахера*

$$D_{2^m}(x) = (1 + r_0(x)) \cdot (1 + r_1(x)) \cdot \ldots \cdot (1 + r_{m-1}(x)).$$

Доказательство. Лемма 6 верна и при $k = 2^{m-1}$:

$$D_{2^m}(x) = D_{2^{m-1}}(x) + w_{2^{m-1}}(x) D_{2^{m-1}}(x) = (1 + r_{m-1}(x)) \cdot D_{2^{m-1}}(x).$$

Повторяем это преобразование m раз. $\square$

Из леммы 7 подстановкой значений функций Радемахера вытекает

Лемма Пэли. *Для ядра Дирихле имеем*

$$D_{2^m}(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{если } x \in \Delta_m^0 = [0, 2^{-m}) \ , \\ 0, & \text{если } x \in [2^{-m}, 1) \ . \end{cases}$$

Как продолжение и обобщение лемм 6, 7 и Пэли получается

Лемма 8. *Для любых $s, m \in \mathbb{N}$, $0 < k < 2^m$ и $x \in [2^{-m}, 1)$ имеем: $D_{s2^m}(x) = 0$ и $D_{s2^m+k}(x) = w_{s2^m}(x) \cdot D_k(x)$.*

Есть другой способ [8] доказательства леммы Пэли.

Лемма 9 (ядро Дирихле с четным номером). *Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно*

$$D_{2n}(x) = \begin{cases} 2D_n(2x) \ , & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ 0 \qquad , & \text{если } \ x \in [1/2 \ , 1). \end{cases}$$

Доказательство. Сгруппируем и по лемме 5 получаем

$$D_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (w_{2k}(x) + w_{2k+1}(x)) = \begin{cases} 2 \sum_{k=0}^{n-1} w_k(2x), & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{если } x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

□

Следствие 2. *Верно* $\quad D_{2^k n}(x) = \begin{cases} 2^k D_n(2^k x), & \text{если } x \in \Delta_k^0, \\ 0, & \text{если } \ x \in [1/2^k, 1), \end{cases}$ *что при $n = 1$ дает лемму Пэли.*

Лемма 10 (ядро Дирихле с нечетным номером). *Для любого $n \in \mathbb{N}_0$ верно*

$$D_{2n+1}(x) = \begin{cases} D_n(2x) + D_{n+1}(2x), & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ w_{2n}(x), & \text{если } x \in [1/2 \ , 1). \end{cases}$$

Доказательство. Значения ядер $D_n(x)$ и $D_{n+1}(x)$ в каждой точке x различаются на 1. Значит по лемме 9 при $x \in [0, 1/2)$ значения $D_{2n}(x)$ и $D_{2n+2}(x)$ различаются на 2 и следовательно

$$D_{2n+1}(x) = \frac{1}{2}(D_{2n}(x) + D_{2n+2}(x)) = D_n(2x) + D_{n+1}(2x).$$

Если $x \in [1/2\ , 1)$, то по лемме 9 получим

$$D_{2n+1}(x) = D_{2n}(x) + w_{2n}(x) = w_{2n}(x). \qquad \square$$

Введем понятие *срезки числа* $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot 2^{k-1}$ (см. (2), где добавлены нулевые слагаемые):

$$[n]_i = n_1 \cdot 2^0 + n_2 \cdot 2^1 + ... + n_i \cdot 2^{i-1}, \tag{13}$$

двоичный код которой можно записать $n_i n_{i-1} \dots n_2 n_1$ как i младших разрядов числа n. Следующие свойства срезки очевидны:
1) $[n]_i = n$ при $i \geqslant m$, где $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$;
2) $0 \leqslant [n]_i \leqslant 2^i - 1$;
3) $2[n]_{i-1} = [2n]_i$;
4) если n четное, то $[n]_{i-1} + [n+1]_{i-1} = [2n+1]_i$.

При доказательстве последних двух свойств используется следующее наблюдение. Переход от числа n, представленного в двоичной системе счисления, к числам $2n$ и $2n+1$ есть сдвиг на одну позицию всех разрядов и добавление в младшем разряде знака 0 в случае $2n$, или добавление в младшем разряде знака 1 в случае числа $2n+1$.

Введем *отклонения числа* (см. (2)) n как минимум из двух чисел

$$< n >_i = \min\ (\ [n]_i\ \ ,\ 2^i - [n]_i\ \ ), \tag{14}$$

которое назовем *отклонением i-го ранга.*

Замечание 2. Представление отклонения i-го ранга в виде i-значного двоичного числа содержит 0 в i-м (старшем) разряде (первый пункт следующей леммы). Отклонение равно срезке, если в старшем разряде срезки стоит число 0 ($n_i = 0$). Если же в старшем разряде срезки стоит число 1 ($n_i = 1$), то двоичное представление отклонения получается из двоичного числа $n_i n_{i-1} \dots n_2 n_1$ по известному в информатике правилу построения дополнительного кода: все разряды инвертируются и добавляется 1.

Лемма 11 (свойства отклонения).

1. *Величина* $< n >_i$ *не превосходит* 2^{i-1}.
2. *Отклонение выражается через отклонение чисел предыдущей /linebreak пачки предыдущего ранга, а именно:*
   для четных чисел $< 2n >_i = 2\cdot < n >_{i-1}$,
   для нечетных чисел $< 2n+1 >_i = < n >_{i-1} + < n+1 >_{i-1}$.
3. *Если* $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$, *то* $< n >_m = 2^m - n$ *и* $< n >_i = n$ *при* $i > m$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из (14).
Второе утверждение для четных чисел очевидно по свойствам срезки:

$$< 2n >_i = \min([2n]_i, 2^i - [2n]_i) = \\ = \min(2[n]_{i-1}, 2(2^{i-1} - [n]_{i-1})) = 2\cdot < n >_{i-1}.$$

Докажем утверждение: $[n]_{i-1} + [n+1]_{i-1} = [2n+1]_i$, если $[n]_{i-1} \neq 2^i - 1$, которое установлено в случае четного n.

Если n нечетное и $[n]_{i-1} \neq 2^{i-1} - 1$, то обозначим k номер младшего нулевого разряда; то есть $n_1 = n_2 = \ldots = n_{k-1} = 1, n_k = 0$ в (2) и $k < i - 1$. Итак, в двоичной системе счисления числа $[n]_{i-1}$ и $[n+1]_{i-1}$ имеют вид $n_{i-1} \ldots n_{k+1} 011 \ldots 1$ и $n_{i-1} \ldots n_{k+1} 100 \ldots 0$ соответственно.

Старшие разряды чисел одинаковые. Поэтому их сложение соответствует умножению на два, которое осуществляется сдвигом вправо на разряд и добавлением в конце знака 0. Младшие разряды все различны и при простом сложении дадут 1 в кажлом разряде. То есть переход от числа $[n]_{i-1}$ к сумме осуществили по правилу: сдвинули все разряды на одну позицию влево и поместили 1 в образовавшемся младшем разряде. Так же осуществляется переход от числа $[n]_{i-1}$ к числу $[2n+1]_i$.

Отсюда получаем второе утверждение для отклонений:
если $[n]_{i-1} < 2^{i-2}$, то

$$< n >_{i-1} + < n+1 >_{i-1} = [n]_{i-1} + [n+1]_{i-1} = < 2n+1 >_i;$$

если $2^{i-2} \leqslant [n]_{i-1} < 2^{i-1} - 1$, то

$$< n >_{i-1} + < n+1 >_{i-1} = (2^{i-1} - [n]_{i-1}) + (2^{i-1} - [n+1]_{i-1}) =$$
$$= 2^i - [2n+1]_i = < 2n+1 >_i;$$

если $[n]_{i-1} = 2^{i-1} - 1$, то непосредственным вычислением получаем $< n >_{i-1} = 1$, $< n+1 >_{i-1} = 0$, $< 2n+1 >_i = 1$.

При $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$ представим $n = [n]_m = 2^{m-1} + n'$ и получим $< n >_m = 2^m - [n]_m = 2^m - n$. При $i > m$ пункт 3 очевиден. □

Теорема 2 (явный вид модуля ядра Дирихле) [6]. *Для любого* $x \in (0,1)$ *верно*

$$|D_n(x)| = < n >_k,$$

где натуральное k *определяется из условия* $x \in \Delta_k^1 = [\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k})$.

Доказательство. Метод математической индукции по номеру k.

Так как $(0,1) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_m^1$, то для любого $x \in (0,1)$ найдется натуральное k, равное рангу интервала с номером 1, содержащему x.

При $x \in \Delta_1^1 = [\frac{1}{2}, 1)$ по лемме 9 имеем $|D_{2n}(x)| = 0$, по лемме 10 имеем $|D_{2n+1}(x)| = 1$, что соответствует $|D_n(x)| = < n >_1$. База индукции доказана.

Пусть известно, что $|D_m(y)| = < m >_{k-1}$ при $y \in \Delta_{k-1}^1$ и $k \geqslant 2$. Для произвольного $x \in \Delta_k^1$ имеем $2x \in \Delta_{k-1}^1$ и $|D_m(2x)| = < m >_{k-1}$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Применим это соотношение при m равном n и $n+1$. Так как $x \in \Delta_k^1 \subset \Delta_1^0$, то для четных номеров по лемме 9 получаем $|D_{2n}(x)| = 2|D_n(2x)| = 2\cdot < n >_{k-1} = < 2n >_k$; а для нечетных номеров по леммам 10 и 11 (учитывая совпадение знаков ядер Дирихле): $|D_{2n+1}(x)| = |D_n(2x) + D_{n+1}(2x)| = < n >_{k-1} + < n+1 >_{k-1} = < 2n+1 >_k$. □

Следствие 3. *Явная формула* L_p *-норм ядер Дирихле при* n *вида (2) следующая*

$$||D_n(\cdot)||_p^p = \int_0^1 |D_n(x)|^p dx = n^p \cdot 2^{-m} + \sum_{k=1}^{m} (< n >_k)^p \cdot 2^{-k}.$$

Используя ортонормированность функций Уолша отсюда выводим интересный (возможно новый) результат для чисел.

Следствие 4. *Для любого* n *вида (2) в символах отклонения числа:*

$$n = n^2 \cdot 2^{-m} + \sum_{k=1}^{m} (< n >_k)^2 \cdot 2^{-k}.$$

Например, $5 = 5^2/8 + 3^2/8 + 1/4 + 1/2$, $9 = 9^2/16 + 7^2/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2$.

Определение 6. *Мажорантой ядра Дирихле* назовем функцию

$$h(x) = 2^m \qquad \text{при} \quad x \in \Delta^1_{m+1}\,, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

Из теоремы 2 по первому свойству отклонения (лемма 11) заключаем, что функция $h(x)$ на $(0,1)$ является точной (что вытекает из леммы Пэли) мажорантой ядра Дирихле $|D_n(x)| \leqslant h(x)$.

Вывод о поведении модуля ядра Дирихле.

В любой фиксированной точке $x \in (0,1)$ значение модуля ядра Дирихле $|D_n(x)|$ как функция целочисленного аргумента n совершает периодические колебания (сначала растет, а потом убывает) с равномерной скоростью равной 1 от исходного положения (от функции $e(x) \equiv 0$) до своей мажоранты (до функции $h(x)$) и обратно.

Подтверждением сформулированного вывода служит следующая

Лемма 12 (самоподобия системы Уолша). *Если $k < 2^{m-1}$, то*

$$D_{2^{m-1}+k}(x) = \begin{cases} 2^{m-1} + k\,, & \text{если } x \in \Delta^0_m = [0, 2^{-m}), \\ 2^{m-1} - k\,, & \text{если } x \in \Delta^1_m = [2^{-m}, 2^{-m+1}), \\ w_{2^{m-1}}(x) \cdot D_k(x), & \text{если } x \in [2^{-m+1}, 1). \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Уточним значение ядра Дирихле, приведенное в лемме 6. Интервал Δ^0_{m-1} представим в виде $\Delta^0_m \cup \Delta^1_m$ и подставим значение функции Радемахера: $w_{2^{m-1}}(x) = r_{m-1}(x) = 1$ при $x \in \Delta^0_m$ и $w_{2^{m-1}}(x) = r_{m-1}(x) = -1$ при $x \in \Delta^1_m$. Вычислим значение ядра с меньшим номером (ссылкой на лемму Пэли) $D_k(x) = k$ при $x \in \Delta^0_{m-1}$ и подставим во второе слагаемое. □

6. Константы Лебега

Определение 7. Интеграл от модуля ядра Дирихле

$$L_n = \int_0^1 |D_n(x)|\,dx$$

называется *константой Лебега* для системы Уолша-Пэли.

Утверждение 7. Если $n = 2^{m-1} + k$, где $0 < k < 2^{m-1}$, то

$$L_n = 1 - \frac{k}{2^{m-1}} + L_k. \tag{17}$$

Доказательство. Из леммы 12

$$L_n = \int_{\Delta_m^0} (2^{m-1} + k)\,dx + \int_{\Delta_m^1} (2^{m-1} - k)\,dx + \int_{2^{-m+1}}^1 |D_k(x)|\,dx.$$

Добавим и вычтем число $\frac{k}{2^{m-1}}$, добавляя его в виде $\int_{\Delta_{m-1}^0} k\,dx$. Получим

$$L_n = (2^{m-1} + k) \cdot 2^{-m} + (2^{m-1} - k) \cdot 2^{-m} - \frac{k}{2^{m-1}} + \\ + \int_{\Delta_{m-1}^0} k\,dx + \int_{2^{-m+1}}^1 |D_k(x)|\,dx.$$

Так как $|D_k(x)| = k$ при $x \in \Delta_{m-1}^0$, то получили (17). $\square$

Хотя эту формулу доказали при $0 < k < 2^{m-1}$, она верна при всех $0 \leqslant k \leqslant 2^{m-1}$, что доказывается ссылкой на лемму Пэли.

Формулы для вычисления констант Лебега получил [12] Файн. Предложим новые доказательства его формул.

Утверждение 8. Для номера n, записанного в виде (4), справедлива формула Файна [12] для констант Лебега

$$L_n = \nu - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} 2^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}. \tag{18}$$

Доказательство. Метод математической индукции по длине записи числа. База индукции $L_{2^n} = 1$ вытекает из леммы Пэли, а по формуле (17) получается при $k = 0$. В частности, $L_1 = L_2 = 1$.

Полагаем справедливость формулы (18) для $k = n - 2^{\varepsilon_\nu} = n - 2^{m-1}$ (то есть для числа k длины $\nu - 1$):

$$L_k = (\nu - 1) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu - 1} 2^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}. \quad \square$$

По формуле (17)

$$L_n = 1 - \sum_{l=1}^{\nu-1} 2^{\varepsilon_l - \varepsilon_\nu} + (\nu - 1) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu - 1} 2^{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \nu - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant \nu} 2^{\varepsilon_i - \varepsilon_j}.$$

Из (18) Файн выводит [12] следующее

Утверждение 9. Справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} L_{2n} = L_n \ , \\ L_{2n+1} = \frac{1}{2}(L_n + L_{n+1} + 1) \ . \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство. Как следствие леммы 9 получаем

$$L_{2n} = \int_0^1 |D_{2n}(x)|\, dx = \int_0^{1/2} 2|D_n(2x)|\, dx = \int_0^1 |D_n(x)|\, dx = L_n.$$

В случае нечетного номера применим лемму10 и утверждение о том, что в одной и той же точке $2x$ величины D_n и D_{n+1}, различающиеся на 1, не могут принимать значения с противоположными знаками:

$$L_{2n+1} = \int_0^{1/2} |D_n(2x) + D_{n+1}(2x)|\, dx + \int_{1/2}^1 |w_{2n}(x)|\, dx =$$

$$= \int_0^{1/2} |D_n(2x)|\, dx + \int_0^{1/2} |D_{n+1}(2x)|\, dx + \int_{1/2}^1 dx = \frac{1}{2} L_n + \frac{1}{2} L_{n+1} + \frac{1}{2}.$$

$\square$

В следствии 3 при $p = 1$ приведена еще одна явная формула для констант Лебега.

Из сформулированного в предыдущем параграфе вывода о поведении модуля ядра Дирихле вытекает [4]

Лемма 13 (симметрии). *Константы Лебега симметричны внутри пачки:*

$$L_{2^{n-1}+k} = L_{2^n-k}$$

для всех $0 \leqslant k < 2^{n-1}$.

Лемму симметрии также легко доказать методом математической индукции через рекуррентные соотношения Файна.

Файн ввел [12] функцию

$$f(n) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2 3n,$$

которую назовем *почти-мажорантой констант Лебега.*

Обозначим как у Файна $e(n) = L_n - f(n)$ *отклонение констант Лебега от своей почти-мажоранты.* В [5] доказана следующая теорема о константах Лебега.

Теорема 3. *Во всех точках, кроме точек* $t_{2m} = 1+4+16+\ldots+4^m$, *константы Лебега меньше* $f(n) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3}\log_2 3n$. *То есть* $e(n) < 0$ *при* $n \neq t_{2m}$.

В отмеченных точках отклонение от функции $f(n)$ *мало:*

$$0 < e(t_{2m}) < \frac{1}{10} \cdot 4^{-m} < (t_{2m})^{-1}.$$

Данная теорема служит уточнением и во многом повторяет доказательство **теоремы Радемахера-Файна**, в которой утверждается, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} e(n) = 0$. Файн указал [12], что этот результат был получен Радемахером в 1921 году, но не опубликован. В [12] Файн предложил более короткое, по его словам, доказательство. Однако в приведенном доказательстве присутствует небольшая неточность, которая устранена в [5].

7. Ряд Фурье по системе Уолша

Обозначим Λ_n – *класс* 2^{-n}*-ступенчатых функций*: полагаем $f \in \Lambda_n$, если $f(x)$ постоянна на каждом интервале n-го ранга $\Delta_n^k = [\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n})$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Символом $\Delta_m(x)$ обозначим интервал m-го ранга, где содержится x.

Лемма 14. *Частная сумма с номером 2^m в любой точке $x \in [0,1)$ равна среднему значению функции на интервале m-го ранга, содержащем x; то есть*

$$S_{2^m}(f, x) = 2^m \int_{\Delta_m(x)} f(t)\, dt.$$

Если $f \in \Lambda_m$ и $k \geqslant 2^m$, то $S_k(f) \equiv f$.

Доказательство. По формуле (9) и лемме Пэли получим

$$S_{2^m}(f, x) = \int_0^1 f(x \dot{+} t) D_{2^m}(t)\, dt = 2^m \cdot \int_{\Delta_m^0} f(x \dot{+} t)\, dt$$

и применим формулу $\int_{\Delta_m(x)} f(t)\, dt = \int_{\Delta_m^0} f(x \dot{+} t)\, dt$, которая составляет свойство инвариантности интеграла относительно сдвига.

Пусть $f \in \Lambda_m$. Равенство $S_{2^m}(f) = f$ очевидно. Если $k > 2^m$, то по лемме 3 получаем

$$c_k[f] = \sum_{i=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^i} f(x) w_k(x)\, dx = \sum_{i=0}^{2^m-1} f(\Delta_m^i) \int_{\Delta_m^i} w_k(x)\, dx = 0. \qquad \square$$

Операцией 2^m*-усреднения* непрерывного сигнала называется операция перехода от функции $f \in L[0,1]$ к функции $f_m \in \Lambda_m$ такой, что для всех $x \in [0,1)$ выполнено $f_m(x) = 2^m \int_{\Delta_m(x)} f(t)\, dt$.

Лемма 14 утверждает, что переход к частной сумме Фурье-Уолша с номером 2^m есть операция 2^m- усреднения. В лемме 14 также доказано, что любая двоично-ступенчатая функция есть многочлен по системе Уолша. Обратное утверждение тоже верно – любой многочлен по системе Уолша есть двоично-ступенчатая функция.

Лемма 15. *Коэффициенты Фурье-Уолша с номерами $i < 2^m$ для функции $f \in L[0,1]$ и ее 2^m-усреднения $f_m \in \Lambda_m$ совпадают.*

Доказательство. Так как функция $w_i(x)$ постоянна на Δ_m^k, то

$$c_i[f] = \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^k} f(x)w_i(x)\,dx = \sum_{k=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_m^k} f_m(x)w_i(x)\,dx = c_i[f_m]. \qquad \square$$

Из двух предыдущих лемм вытекает

Следствие 5. *Ряд по системе Уолша будет рядом Фурье-Уолша некоторой функции $f \in L[0,1]$ тогда и только тогда, когда все частные суммы с номерами 2^m совпадают с 2^m- усреднениями функции.*

Если потребовать $f \in L^2[0,1]$, то стандартным образом как в курсе математического анализа [7, 10] доказываются следующие утверждения.

Минимальное свойство ряда Фурье. Среди всех многочленов по системе Уолша частные суммы ряда Фурье-Уолша дают наилучшее приближение

$$\min_{a_k} ||f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k(x)||_2 = ||f - S_n[f]||_2.$$

Сходимость в даннном пространстве: $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - S_n[f]||_2 = 0.$

Равенство Парсеваля.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n[f])^2 = \int_0^1 f^2(x)\,dx. \tag{20}$$

Стремление к нулю коэффициентов Фурье-Уолша:

$$\lim_{n\to\infty} c_n[f] = 0.$$

По теореме Мерсера (теорема 8.7 в [7]) последнее свойство переносится на более широкий класс функций.

Утверждение 10. Если $f \in L[0,1]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n[f] = 0$.

Утверждение 11 (Обобщенное равенство Парсеваля). Для любых $f, g \in L^2[0,1]$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n[f])(c_n[g]) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Доказательство. Формулу (20) перепишем в терминах квадратов норм последовательности c и функции: $||c||^2 = ||f||^2$. Аналогично, сначала для функции $g(x)$ и последовательности d ее коэффициентов Фурье $d_n = c_n[g]$: $||d||^2 = ||g||^2$; а потом для функции $f(x) + g(x)$ и последовательности $c+d$ ее коэффициентов Фурье: $||c+d||^2 = ||f+g||^2$. Последнее равенство распишем как скалярные произведения последовательностей и функций:

$$(c+d, c+d) = (f+g, f+g),$$

которые раскроем по правилам скалярных произведений

$$||c||^2 + 2(c,d) + ||d||^2 = ||f||^2 + 2(f,g) + ||g||^2.$$

Получили $(c,d) = (f,g)$, что и требовалось доказать. □

Равенство Парсеваля (20) означает полноту системы Уолша в пространстве $L^2[0,1]$ функций суммируемых в квадрате. В [8] показано, что и в большем пространстве сиистема Уолша остается полной.

Утверждение 12. Система Уолша полна в $L[0,1]$.

Теорема 4 (принцип локализации Римана). *Пусть* $f \in L[0,1]$ *и* $f(x) = 0$ *при* $x \in \Delta_m(x_0)$ *для некоторого* m*. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x_0) = 0$$

и, в частности, справедливо $S_{2^k}(f;x_0) = 0$ *при* $k \geqslant m$*.*

Доказательство. Второе (не основное) утверждение вытекает из леммы 14.

Для n вида $s2^m + k$, где $0 < k < 2^m$, воспользуемся леммой 8, представлением (9), условием $f(x) = 0$ при $x \in \Delta_m(x_0)$ и следствием 5:

$$S_n(f;x_0) = \int_{\Delta_0\setminus\Delta_m^0} f(t \dot{+} x_0)\cdot D_k(t)\cdot w_{s2^m}(t)\,dt.$$

Введем $2^m - 1$ функций при $k = 1,2,3,\ldots,2^m-1$

$$\varphi(t) = \varphi(t; x_0, k) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{если} \quad x \in \Delta_m^0 \ , \\ f(t \dot{+} x_0) D_k(t), & \text{если} \quad x \notin \Delta_m^0 . \end{cases}$$

Согласно ограниченности ядра Дирихле, каждая из введенных функций суммируема. В этих обозначениях $S_n(f; x_0) = c_{s2^m}[\varphi]$, то есть частная сумма равна коэффициенту Фурье-Уолша одной из введенных функций. По утверждение 10 при $n \to \infty$ ($n > s2^m \geqslant n - 2^m$) эти коэффициенты Фурье-Уолша стремятся к нулю. □

8. Сходимость рядов Уолша

Из леммы 14 выводится утверждение 13 о равномерной сходимости последовательности частных сумм с номерами 2^n ряда Фурье-Уолша к заданной непрерывной функции.

Утверждение 13. Если $f \in C[0,1]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - S_{2^n}[f]||_\infty = 0.$

Если же рассматривать поточечное или равномерное приближение всеми частными суммами, то нужно добавить дополнительное требование. Одним из таких требований служит *условие Дини.*

Теорема 5 (признак Дини). *Если*

$$\int\limits_0^1 |f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)| \cdot h(t) dt < \infty,$$

где $h(t)$ мажоранта ядра Дирихле определенная формулой (15), то ряд Фурье-Уолша в точке x_0 сходится к значению функции в этой точке

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f; x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Условие теоремы равносильно сходимости ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Delta_m^1} |f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)| \cdot 2^m \, dt,$$

что влечет для произвольного $\varepsilon > 0$ существование такого M, что $\sum\limits_{m=M}^{\infty} \int_{\Delta_m^1} |f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)| \cdot 2^m \, dt < \varepsilon/2$. Представим $|f(x_0) - S_n(f; x_0)| =$

$$= \Big| \int\limits_0^{2^{-M}} (f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)) \cdot D_n(t)\, dt + \int\limits_{2^{-M}}^{1} (f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)) \cdot D_n(t)\, dt \Big|.$$

Модуль первого слагаемого оценивается сверху величиной $\varepsilon/2$. Введем функцию $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \in \Delta_M^0 = [0, 2^{-M})\ , \\ f(x_0) - f(t \dot{+} x_0) & \text{при остальных } t, \end{cases}$ удовлетворяющую требованиям принципа локализации. Согласно принципу локализации найдется N , что

$$\Big| \int\limits_{2^{-M}}^{1} (f(x_0) - f(t \dot{+} x_0)) \cdot D_n(t)\, dt \Big| = |S_n(\varphi; 0)| < \varepsilon/2$$

для всех $n > N$. Установили, что $|f(x_0) - S_n(f; x_0)| < \varepsilon$ для всех $n > N$. □

Аналогично доказывается

Теорема 6 (условие равномерной сходимости ряда). *Если интеграл* $\int_0^1 |f(x) - f(x \dot{+} t)| h(t) dt$ *сходится равномерно на множестве* $[0, 1]^*$, *то ряд Фурье-Уолша функции* $f(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно на всем модифицированном отрезке.*

Теорема 7 (единственности). [9, с. 89] *Если два ряда по системе Уолша сходятся всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, к одной и той же конечной функции, то эти ряды совпадают.*

В следующей теореме отмечается, что без дополнительных условий сходимости в пространстве $L[0, 1]$ в общем случае нет.

Теорема 8. *Существует* $f \in L[0, 1)$, *ряд Фурье-Уолша которой расходится по норме пространства* $L[0, 1]$.

Доказательство. Указанным свойством обладает функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} r_{k^3}(x) D_{2^{k^3}}(x).$$

Так как $\|r_{k^3} D_{2^{k^3}}\| = 1$, то $f \in L[0,1]$. Отметим, что $c_m[f] = \frac{1}{k^2}$ при $2^{k^3} \leqslant m \leqslant 2^{k^3+1} - 1$. Если $n < 2^{k^3}$, то

$$\|S_{2^{k^3}+n} - S_{2^{k^3}}\| = \int_0^1 \frac{1}{k^2} |w_{2^{k^3}}(x) D_n(x)| dx = \frac{L_n}{k^2}.$$

Возьмем в качестве n левую точку максимума констант Лебега в пачке; $n = t_{k^3}$. (Здесь t_s определена условием $L_{t_s} = \max\limits_{n \in]s[} L_n$.) В [5] доказано, что $L_n > \frac{k^3}{3}$. Значит, ряд Фурье-Уолша данной функции расходится по норме пространства $L[0,1]$. □

Теорема 9. *Существует $f \in L[0,1)$, ряд Фурье-Уолша которой расходится всюду.*

Конструкцию теоремы 8 можно немного усложнить, добавив сдвиги ядер Дирихле, которые достигаются расстановкой знаков у коэффициентов Фурье-Уолша, и получить расходимость на заданном множестве. Сумма подобных функций и будет примером функции в теореме 9.

Процедуру вычисления коэффициентов Фурье-Уолша и частной суммы ряда Фурье-Уолша рассмотрим как применение оператора частных сумм S_n к функции некоторого класса.

Теорема 10. *Норма оператора $S_n : L[0,1] \to L[0,1]$ равна константе Лебега L_n.*

Доказательство. По теореме Фубини для $f, g \in L[0,1]$ и свойству инвариантности интеграла относительно сдвига получаем одно из основных свойств двоичной свертки, введенной формулой (11)

$$\|f * g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Представление $S_n(f) = f * D_n$ позволяет получит оценку сверху

$$\|f * D_n\| \leqslant \|f\| \cdot \|D_n\| = \|f\| \cdot L_n.$$

Следовательно, $\|S_n\|_{L[0,1]\to L[0,1]} \leqslant L_n$.

Функция $f(x) = D_{2^m}(x)$ (вычисленная по лемме Пэли), где $n < 2^m$, показывает, что эта оценка точная: $\|S_n(f)\| = \|D_n\| = L_n$ при $\|f\| = 1$. $\square$

В двоичном гармоническом анализе в качестве пространства $L_\infty[0,1]$ часто берут пространство функций, рассмотренных на модифицированном отрезке $[0,1]^*$ и непрерывных относительно метрики этого отрезка. Это пространство еще называют пространство g-непрерывных функций. Его можно интерпретировать как пространство функций, все точки разрыва которых первого рода и находятся в двоично-рациональных точках $\frac{k}{2^n}$. В следующей теореме пространство L_∞ можно рассматривать как пространство g-непрерывных функций и как пространство непрерывных функций.

Теорема 11. *Норма опрератора $S_n : L_\infty[0,1] \to L_\infty[0,1]$ равна константе Лебега L_n.*

Доказательство. Заметим, что

$$|S_n(f;x)| = |(f * D_n)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|D_n\|_1 = \|f\|_\infty \cdot L_n.$$

С другой стороны, для $f = \operatorname{sgn} D_n$ в классе g-непрерывных функций имеем

$$S_n(f;0) = \int_0^1 f(t)D_n(t)dt = L_n$$

и $\|\operatorname{sgn} D_n\|_\infty = 1$. Следовательно, $\|S_n\|_{L_\infty[0,1]\to L_\infty[0,1]} = L_n$. В классе непрерывных функций данный пример функции стандартным образом (принятым в математическом анализе или в варицонном исчислении) слегка подправляем до непрерывной функции в точках разрыва так, чтобы норма уменьшилась не более, чем на наперед заданное произвольное положительное ε. $\square$

Точность приближения функции рассматриваемого класса $L[0,1]$ или $L_\infty[0,1]$ частными суммами ряда Фурье-Уолша оценивают, анализируя формулу (10), через константы Лебега и модули непрерывности соответствующего вида аналогичным образом. Так как здесь мы не вводим модули непрерывности, то желающих уточнить эти оценки отсылаем к книгам [1, 9, 14].

Список литературы

[1] Агаев, Г.Н. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах / *Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн.* — Баку : Элм, 1981. — 180 с.

[2] Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / *Н. Ахмед, К. Р. Рао.* — М.: Связь, 1980. — 248 с.

[3] Балашов, Л. А. Ряды по системе Уолша и их обобщения / *Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн.* В сб. Итоги науки. Математический анализ. 1970. — М.: ВИНИТИ, 1971. 147–202.

[4] Беспалов, М. С. Перестановки систем Уолша, сохраняющие константы Лебега / *М. С. Беспалов.* Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. 36–48.

[5] Беспалов, М. С. О результатах Файна для констант Лебега системы Уолша / *М. С. Беспалов.* Современная математика и ее приложения. Труды Межд. конф. по динамическим системам и дифференциальным уравнениям, Суздаль 2002, Т. 8, Ч. 2, Тбилиси: Академия наук Грузии, 2003. 49–59.

[6] Беспалов, М. С. Явный вид ядра Дирихле для рядов и преобразований Уолша / *М. С. Беспалов.* Матем. сборник. 2005. Т. 196, № 7. 3–26.

[7] Беспалов, М. С. Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч. 1. Элементы функционального анализа и адгебры / *М. С. Беспалов.* — Владимир: ВлГУ, 2006. — 92 с. ISBN 5-89368-679-9

[8] Беспалов, М. С. Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч. 2. Введение в прикладной гармонический анализ / *М. С. Беспалов.* — Владимир: ВлГУ, 2007. — 244 с. ISBN 5-89368-738-8

[9] Голубов, Б. И. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения / *Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов.* - М.: Наука, 1987. - 344 с.

[10] Ефимов, А. В. Математический анализ (специальные разделы). В 2-х ч. Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение / *А. В. Ефимов.* — М.: Высш. шк., 1980. — 279 с.

[11] Хьюитт, Э. Абстрактный гармонический анализ. В 2-х т. / *Э. Хьюитт, К. Росс.* — М.: Наука, 1975. 656+904 с.

[12] Fine, N. J. On the Walsh functions / *N. J. Fine.* Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65, № 3. 372-414.

[13] Paley, R. E. A. C. A Remarkable Series of Orthogonal Functions. I, II / *R. E. A. C. Paley.* Proc. Lond. Math. Soc. 1932. V. 34. 241–279.

[14] Schipp, F. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis / *F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, J. Pal.* — Budapest: Acad. Kiado, 1990. — 560 p.

[15] Walsh, J. L. A closed set of normal orthogonal functions / *J. L. Walsh.* Amer. J. Math. 1923. V. 45. 5–24.

Содержание

Учебное издание

БЕСПАЛОВ Михаил Сергеевич
СКЛЯРЕНКО Василий Алексеевич

ФУНКЦИИ УОЛША И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Методическое пособие

Подписано в печать ?
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. ?. Тираж ? экз.
Заказ
Издательство Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.