

### Независимость интеграла от формы пути

**Определение.** Пусть  $G$  – некоторая область. Через  $\gamma : z = z(t), t \in [\overrightarrow{\alpha, \beta}]$ , будем обозначать ориентированные кривые (пути), лежащие в  $G$ . Пусть  $f(z)$  – некоторая ф.к.п., заданная и непрерывная в области  $G$ .

Говорят, что интеграл  $\int_{\gamma} f(z)dz$  не зависит от формы кривой (пути)  $\gamma \subset G$ , если он зависит лишь от начала и конца кривой  $\gamma$ , то есть является функцией от  $A = z(\alpha)$  и  $B = z(\beta)$ . Это означает, что если имеется две кривых  $\gamma_{1,2} : z = z_{1,2}(t), t \in [\overrightarrow{\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}}]$ , лежащих в  $G$ , причем  $z_1(\alpha_1) = z_2(\alpha_2)$  и  $z_1(\beta_1) = z_2(\beta_2)$ , то

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

**Теорема.** Интеграл  $\int_{\gamma} f(z)dz$  не зависит от формы пути  $\gamma \subset G$  тогда и только тогда, когда интеграл  $\oint_{\gamma} f(z)dz$  по любому замкнутому контуру  $\gamma$ , лежащему в  $G$  равен нулю.

**Доказательство.** ( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\gamma \subset G$  – произвольная замкнутая кривая, ее начало и конец совпадают,  $A = z(\alpha) = z(\beta)$ . Рассмотрим стационарную кривую  $\gamma_1 : z = A$ , она имеет те же совпадающие начало и конец  $A$ , что и кривая  $\gamma$ . Интеграл по  $\gamma_1$ , очевидно, равен нулю. Но интегралы по  $\gamma$  и  $\gamma_1$  совпадают. Значит, и интеграл по  $\gamma$  равен нулю.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $\gamma_1 \subset G$ ,  $\gamma_2 \subset G$  – произвольные кривые, у которых начала и концы совпадают:  $z_1(\alpha_1) = z_2(\alpha_2)$  и  $z_1(\beta_1) = z_2(\beta_2)$ . Рассмотрим замкнутую кривую, составленную из двух кривых  $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ . Тогда

$$0 = \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

**Теорема Коши.** Пусть  $G$  – односвязная область, функция  $f$  аналитична в  $G$ . Тогда интеграл  $\oint_{\gamma} f(z)dz$  равен нулю по любому замкнутому контуру  $\gamma$ , лежащему в  $G$ .

**Теорема Коши.** (другая формулировка) Пусть  $G$  – односвязная область, функция  $f$  аналитична в  $G$ . Тогда интеграл  $\int_{\gamma} f(z)dz$  не зависит от формы пути, лежащего в  $G$ .

**Интеграл как функция верхнего предела**  
**Формула Ньютона-Лейбница**  
**Таблица интегралов**