Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

В. А. Скляренко О. И. Трубина

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практикум

Владимир 2008

УДК 517.5
ББК 22.161.11
С 43

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Владимирского государственного педагогического университета
В. В. Жиков

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
С. Г. Танкеев

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Скляренко, В. А.
С 43 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: практикум / В. А. Скляренко, О. И. Трубина; Владим. гос. ун-т. — Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 72 с.
ISBN 978-5-89368-844-3

Издание соответствует программе курса математического анализа. Содержатся необходимые теоретические сведения и задачи для самостоятельного решения.

Издание может использоваться студентами технических и физико-математических специальностей первого курса дневного обучения.

Ил. 4. Библиогр.: 16 назв.

УДК 517.5
ББК 22.161.11

ISBN 978-5-89368-844-3

Предисловие

Издание представляет собой сборник заданий к типовому расчету по разделу «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» и предназначено как для физико-математических и технических, так и для иных специальностей университета.

Сборник составлен в соответствии с программой курса математического анализа. Задачи, включенные в сборник, отражают различные аспекты данного раздела: от его базовых понятий и основных теорем до применения аппарата дифференциального исчисления к исследованию функций и функциональных зависимостей, приближенным вычислениям, уравнениям в частных производных, к изучению геометрии кривых и поверхностей.

Заданиям типового расчета предшествует последовательное изложение необходимого для решения задач теоретического материала раздела, приведены примеры его использования при решении типовых задач.

Теоретическая часть никоим образом не является самодостаточным курсом лекций. Ее включение в практикум продиктовано лишь желанием расставить акценты на фундаментальных понятиях и утверждениях, показать их взаимосвязь и взаимозависимость. С нашей точки зрения, это поможет студенту в его самостоятельной работе по изучению данного раздела математического анализа и в его работе над типовым расчетом.

Доказательства сформулированных здесь теорем и утверждений, а также дополнительные сведения можно найти в классических учебниках [1, 3, 7, 8, 9, 10, 15, 16], подробнее свойства кривых и поверхностей в трехмерном пространстве описаны в [9, 12, 13], о дополнительных приемах решения некоторых задач можно узнать в пособиях и задачниках [4, 5, 11], также задачи можно найти в [2, 6, 14].

Авторы надеются, что данное издание окажется полезным и преподавателям математики при выборе материала для практических занятий, при составлении вариантов индивидуальных заданий и контрольных работ.

1. Предел и непрерывность

Функцию нескольких переменных $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$[1] считают функцией одной переменной $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, являющейся элементом пространства $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ евклидово, его элементы, в зависимости от контекста, можно считать точками или векторами. В $\mathbb{R}^n$ определены *линейные операции*, если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n).$$

Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ определяется как $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, что позволяет задавать *расстояния*

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \quad \text{и } \textit{углы} \quad \cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

Отметим, что свойства *нормы* $|x| = \sqrt{(x, x)}$ в $\mathbb{R}^n$ аналогичны свойствам модуля в $\mathbb{R}$.

Окрестностью радиуса $\delta > 0$ точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называют множество

$$U_\delta(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \delta\}$$

— открытый шар радиуса δ с центром в x^0.

Последовательность $\{x^p\}_{p=1}^{\infty}$ точек называется *сходящейся* в пространстве $\mathbb{R}^n$ к x^0, если $\lim\limits_{p \to \infty} |x^p - x^0| = 0$, что равносильно покоординатной сходимости: $\lim\limits_{p \to \infty} x_k^p = x_k^0$ при всех $k = 1, \ldots, n$.

Приведем необходимые понятия, касающиеся множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *ограниченным*, если конечен его диаметр, число $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x', x'' \in E} |x'' - x'|$.

Точка x^0 называется *предельной* точкой множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если в любой ее окрестности есть точки из E, отличные от x^0. Точка x^0 — предельная для E, если найдется последовательность точек $\{x^p\}$ из E, отличных от x^0 и сходящихся к x^0. Точка x^0 называется *изолированной* точкой для E, если в некоторой ее окрестности нет точек из E, отличных от x^0. Каждая точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является либо его изолированной точкой, либо предельной.

[1]При небольших значениях n используют обычно запись $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, и так далее.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *открытым*, если все его точки принадлежат ему вместе с некоторой окрестностью, то есть являются его *внутренними* точками. *Граничной* точкой множества E называют точку, в любой окрестности которой есть точки из E и из его дополнения. Открытое множество не содержит своих граничных точек, а замкнутое содержит все свои граничные точки. Все $\mathbb{R}^n$ и пустое множество $\varnothing$ считаются одновременно и открытыми и замкнутыми множествами.

Ограниченное замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактным*.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x^1, x^2 \in E$ найдется *непрерывная кривая* Γ — множество точек $\mathbb{R}^n$, описываемое уравнениями $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$; $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, лежащая в E и такая, что $x^1 = (x_1(\alpha), \ldots, x_n(\alpha))$, $x^2 = (x_1(\beta), \ldots, x_n(\beta))$.

Открытое линейно связное множество называется *областью*; область вместе со своими граничными точками называют *замкнутой областью*.

Определение (Коши). Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и x^0 — предельная точка E. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в x^0, запись $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \quad 0 < |x - x^0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение (Гейне). Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и x^0 — предельная точка E. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в x^0, если для любой последовательности точек $\{x^p\}$ такой, что

$$x^p \in E, \ x^p \neq x^0, \quad \lim_{p \to \infty} x^p = x^0$$

существует предел числовой последовательности $\lim\limits_{p \to \infty} f(x^p) = A$.

Определения Коши и Гейне равносильны. Свойства предела функции нескольких переменных совпадают со свойствами предела функций одной переменной.

Если множество G является подмножеством области определения E функции $f(x)$, и x^0 — предельная точка G, то пределом $f(x)$ по G называют число $\lim\limits_{G \ni x \to x^0} f(x) = \lim\limits_{x \to x^0} \varphi(x)$, где $\varphi = f\big|_G$ — *сужение* f на G.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x^0 \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E \quad |x - x^0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon.$$

В изолированной точке своей области определения функция непрерывна всегда, а в предельной ее непрерывность равносильна выполнению равенства $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$.

Отметим некоторые локальные свойства непрерывных функций.

Непрерывная в точке x^0 функция ограничена в некоторой окрестности x^0. Если функции $f(x), g(x)$ определены в окрестности и непрерывны в точке x^0, то их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x)g(x)$ и отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x^0) \neq 0$) непрерывны в точке x^0.

Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а функции $\varphi_k(t) = \varphi_k(t_1, \ldots, t_s)$ при всех $k = 1, \ldots, n$ непрерывны в точке $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_s^0)$, причем $\varphi_k(t^0) = x_k^0$, $k = 1, \ldots, n$, то композиция $F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ непрерывна в t^0.

Определение. Функция называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Отметим некоторые свойства функций, непрерывных на множестве.

Непрерывная в области функция принимает все свои промежуточные значения: если $f(x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^n$, то для любых двух точек $x^1, x^2 \in D$ и любого числа A, лежащего между $f(x^1)$ и $f(x^2)$, найдется точка $x^0 \in D$ такая, что $f(x^0) = A$.

Непрерывная на компактном множестве K функция $f(x)$

- ограничена на K:

$$\exists M\ \forall x \in K \quad |f(x)| \leqslant M;$$

- принимает на K свои наибольшее и наименьшее значения:

$$\exists x^1, x^2 \in K\ \forall x \in K \quad f(x^1) \leqslant f(x) \leqslant f(x^2);$$

- равномерно непрерывна на K:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in E \quad |x'' - x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Пример 1. Можно ли доопределить в точке $M_0(0,0)$ функцию двух переменных (*a*) $f(x, y) = \sin \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{|xy|}}$; (*b*) $g(x, y) = \dfrac{y \operatorname{tg} xy}{\sqrt{x^4 + y^4}}$ так, чтобы она стала в этой точке непрерывной.

Решение. (*a*) Условием того, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) — предельной точке области определения, является выполнение равенства

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{1}{n^3},\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\tfrac{1}{n^4}-1\right) = -\sin 1 \neq$$
$$\neq \lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(1-\tfrac{1}{n^4}\right) = \sin 1,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует. Доопределить функцию так, чтобы она стала непрерывной, нельзя.

(b) Представим функцию в виде произведения

$$g(x,y) = y\cdot\frac{\operatorname{tg} xy}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}},$$

где первый множитель — бесконечно малый при $(x,y)\to(0,0)$, второй ограничен в окрестности точки $(0,0)$, так как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} z}{z} = 1$, а третий не превосходит по модулю $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, так как $2x^2y^2 \leqslant x^4+y^4$. Таким образом, функция $g(x,y)$ является бесконечно малой при $(x,y)\to(0,0)$ и станет непрерывной, если доопределить ее в точке M_0 нулем.

Ответ. (a) Нельзя. (b) Можно, положив $g(0,0)=0$.

2. Дифференцируемость

Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x^0, называется *дифференцируемой* в x^0, если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k - x_k^0) + \alpha(x)|x-x^0|, \quad \text{где } \lim_{x\to x^0}\alpha(x) = 0,$$

при этом *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x^0 называют выражение $df(x^0, x-x^0) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(x_k - x_k^0)$.

Из дифференцируемости в точке x^0 функции $f(x)$ вытекает существование в x^0 *частных производных* по каждой из n переменных, $k=1,\ldots,n$:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} = \lim_{x\to x^0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{x\to x^0} \frac{f(x_1^0,\ldots,x_k,\ldots,x_n^0) - f(x_1^0,\ldots,x_k^0,\ldots,x_n^0)}{x_k - x_k^0}.$$

Альтернативное обозначение $f'_{x_k}(x^0)$.

Обратное неверно, однако если все n частные производные функции $f(x)$ существуют в окрестности точки x^0 и непрерывны в самой этой точке, то $f(x)$ дифференцируема в x^0 и коэффициенты $A_k = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$. Таким образом, $df = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}(x_k - x_k^0)$ или $df = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} dx_k$.[2]

Поскольку частная производная $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ есть обычная производная от функции $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$, рассматриваемой как функция только одной переменной x_k при фиксированных остальных переменных, то для частных производных справедливы все свойства обыкновенных производных.

Пример 2. Найти частные производные первого порядка функции (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{|x-2|y+4}$ в точке $M_0(2,0)$; (b) $g(x,y) = \cos\sqrt[5]{y(x+1)}$ в точке $M_0(-1,0)$ и исследовать функцию на дифференцируемость в этой точке.

Решение. (a) Найдем значения функции в точке M_0 и на координатных линиях, проходящих через нее:

$$f(2,0) = \frac{1}{2}, \quad f(x,0) = \frac{x}{4}, \quad f(2,y) = \frac{2+y}{4};$$

откуда $f'_x(2,0) = \frac{1}{4}$, $f'_y(2,0) = \frac{1}{4}$.

Если $f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0, то ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta f(2,0) = \frac{x+y}{|x-2|y+4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4}y + o(\rho) \quad \text{при } \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \to 0$ при $(x,y) \to (2,0)$.

Преобразуя последнее равенство, получим

$$-\frac{y(x+y)|x-2|}{4(y|x-2|+4)} = o(\rho),$$

что справедливо. Действительно

[2] Принято отождествлять приращения и дифференциалы независимых переменных: $x_k - x_k^0 = dx_k$.

$$\left|\frac{y(x+y)|x-2|}{4(y|x-2|+4)\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\right| = \frac{|y||x-2|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\cdot\frac{|x+y|}{4\big|y|x-2|+4\big|} = o(\rho) \quad \text{при } \rho\to 0,$$

поскольку $0 < \dfrac{|y||x-2|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} \leqslant |x-2|$ и, следовательно, $\dfrac{|y||x-2|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}$ — бесконечно малая, а второй множитель, функция $\dfrac{|x+y|}{4\big|y|x-2|+4\big|}$ — ограничен при $(x,y)\to(2,0)$ как функция, имеющая конечный предел.

(b) Найдем: $g(-1,0) = 1$, $g(x,0) = 1$, $g(-1,y) = 1$. Поэтому $g'_x(-1,0) = g'_y(-1,0) = 0$.

Если $g(x,y)$ дифференцируема в точке M_0, то ее приращение представимо в виде

$$\Delta g(-1,0) = g(x,y) - g(-1,0) = \cos\sqrt[5]{y(x+1)} - 1 = o(\rho) \quad \text{при } \rho\to 0,$$

где $\rho = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$. В частности, для точек прямой $y = x+1$ при $x\to -1$ получим

$$\cos\sqrt[5]{(x+1)^2} - 1 = o(|x+1|).$$

Однако, последнее равенство неверно. Действительно, преобразовав левую часть, получим

$$-2\sin^2\frac{(x+1)^{2/5}}{2} = o(|x+1|) \quad \text{при } x\to -1,$$

что, очевидно, не является верным, так как

$$-2\sin^2\frac{(x+1)^{2/5}}{2} \sim -\frac{(x+1)^{4/5}}{2} \neq o(|x+1|) \quad \text{при } x\to -1.$$

Таким образом, функция не является дифференцируемой в указанной точке.

Ответ. (a) $f'_x(2,0) = \frac{1}{4}$, $f'_y(2,0) = \frac{1}{4}$, функция дифференцируема. (b) $g'_x(-1,0) = g'_y(-1,0) = 0$, функция не дифференцируема.

Геометрический смысл дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x^0 состоит в существовании *касательной плоскости* π и вектора нормали $\overrightarrow{N}$,

$$\pi : y = f(x^0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}(x_k - x_k^0), \qquad \overrightarrow{N} = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n},-1\right)$$

к *графику функции* $G_f : y = f(x)$. *Единичный* вектор нормали $\vec{n} = \pm\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{N}\right|}\overrightarrow{N}$.

Плоскость $\pi\subset\mathbb{R}^{n+1}$ (рис. 1 при $n = 2$) удовлетворяет условиям:

- точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0, f(x^0))$ лежит и на графике и на касательной плоскости;
- отклонение графика от касательной плоскости представимо в виде:

$$f(x) - \left(f(x^0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}(x_k - x_k^0) \right) = \alpha(x)|x - x^0|,$$

где $\lim\limits_{x \to x^0} \alpha(x) = 0$.

Отображение $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, определенное на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и принимающее значения в $\mathbb{R}^m$, называют *непрерывным* в точке $x^0 \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \quad |x - x^0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x^0)| < \varepsilon.$$

Непрерывность отображения $\mathbf{F}(x)$ в x^0 равносильна непрерывности всех его *координатных функций* $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ в этой точке.

Отображение $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$, определенное в окрестности точки $x^0 \in E$, называют *дифференцируемым* в этой точке, если найдется линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, для которого

$$\Delta\mathbf{F}(x^0) = \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x^0) = L(x - x^0) + \alpha(x)|x - x^0|, \quad \text{где } \lim_{x \to x^0} \alpha(x) = 0.$$

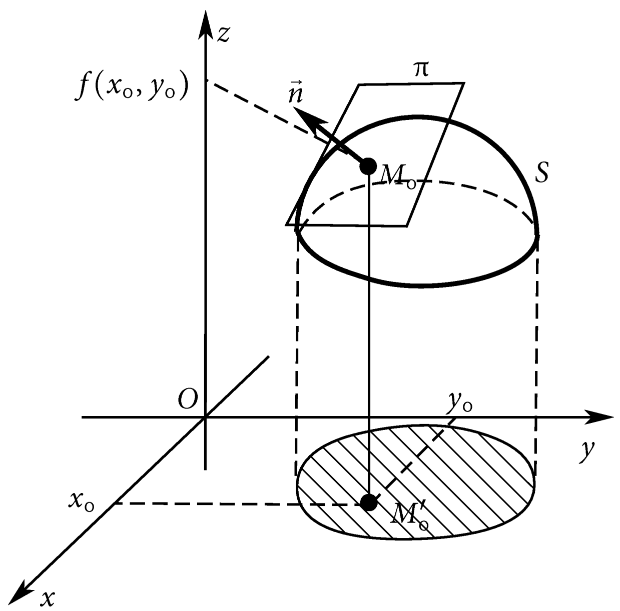

Рис. 1

При этом отображение L называют *производной* отображения $\mathbf{F}(x)$ в точке x^0 и обозначают $\mathbf{F}'(x^0)$. Дифференцируемость отображения $\mathbf{F}(x)$ в x^0 равносильна дифференцируемости всех его координатных функций $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ в этой точке, при этом матрица производной — *матрица Якоби* имеет вид

$$\mathbf{F}'(x^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

При $m = n$ определитель матрицы Якоби называют *якобианом* и обозначают $\dfrac{D(F_!, \ldots, F_n)}{D(x_1 \ldots, x_n)}(x^0)$.

Если отображение $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$ дифференцируемо в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, а отображение $\mathbf{G}(y) = (G_1(y), \ldots, G_s(y))$ дифференцируемо в точке $y^0 = \mathbf{F}(x^0) \in \mathbb{R}^m$, то их композиция $\mathbf{\Phi}(x) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(x))$ дифференцируема в точке x^0 и ее производная вычисляется по правилу $\mathbf{\Phi}'(x^0) = \mathbf{G}'(y^0)\mathbf{F}'(x^0)$, как произведение производных.

Отсюда, в частности, следует формула дифференцирования сложной функции. Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а функции $\varphi_k(t) = \varphi_k(t_1, \ldots, t_s)$, $k = 1, \ldots, n$ дифференцируемы в точке $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_s^0)$, причем $\varphi_k(t^0) = x_k^0$, $k = 1, \ldots, n$, то композиция $F(t) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ дифференцируема в t^0 и

$$\frac{\partial F(t^0)}{\partial t_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k(t^0)}{\partial t_i}.$$

Пример 3. Для отображений

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (4x - 4y - 4z, 2xy - 4z^2)$$

и

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{G}(u, v) = (e^v, \sin(u - v), e^{u+v})$$

найти матрицы Якоби композиции $\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ в точке $M_0(-2, -4)$ — непосредственно и композиции $\mathbf{\Psi} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ в точке $N_0(5, -4, -5)$ — с помощью теоремы о дифференцировании композиции.

Решение. Композиция двух всюду дифференцируемых отображений

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(u, v)) = (4e^v - 4\sin(u - v) - 4e^{u+v}, 2e^v \sin(u - v) - 4e^{2(u+v)}),$$

$\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ всюду дифференцируема и ее производная, матрица Якоби отображения $\mathbf{\Phi}$, составлена из частных производных ее компонент.

$$\mathbf{\Phi}'(u, v) = \begin{pmatrix} -4\cos(u - v) - 4e^{u+v} & 4e^v + 4\cos(u - v) - 4e^{u+v} \\ 2e^v\cos(u-v) - 8e^{2(u+v)} & 2e^v\sin(u-v) - 2e^v\cos(u-v) - 8e^{2(u+v)} \end{pmatrix}.$$

Подставляя $u = -2, v = -4$, получим

$$\mathbf{\Phi}'(-2, -4) = \begin{pmatrix} -4\cos 2 - 4e^{-6} & 4e^{-4} + 4\cos 2 - 4e^{-6} \\ 2e^{-4}\cos 2 - 8e^{-12} & 2e^{-4}\sin 2 - 2e^{-4}\cos 2 - 8e^{-12} \end{pmatrix}.$$

По теореме о дифференцируемости композиции отображений

$$\mathbf{\Psi}'(x,y,z) = \mathbf{G}'(\mathbf{F}(x,y,z))\mathbf{F}'(x,y,z).$$

Вычисляем $\mathbf{F}(5,-4,-5) = (56,-140)$. Составляем матрицы производных отображений $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$.

$$\mathbf{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 2y & 2x & -8z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}'(5,-4,-5) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -8 & 10 & 40 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G}'(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & e^{v} \\ \cos(u-v) & -\cos(u-v) \\ e^{u+v} & e^{u+v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}'(56,-140) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-140} \\ \cos 196 & -\cos 196 \\ e^{-84} & e^{-84} \end{pmatrix}.$$

Перемножая полученные матрицы, получаем матрицу $\mathbf{\Psi}'(5,-4,-5)$.

$$\mathbf{\Psi}'(5,-4,-5) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-140} \\ \cos 196 & -\cos 196 \\ e^{-84} & e^{-84} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -8 & 10 & 40 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8e^{-140} & 10e^{-140} & 40e^{-140} \\ 12\cos 196 & -14\cos 196 & -44\cos 196 \\ -4e^{-84} & 6e^{-84} & 36e^{-84} \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$\mathbf{\Phi}'(-2,-4) = \begin{pmatrix} -4\cos 2 - 4e^{-6} & 4e^{-4} + 4\cos 2 - 4e^{-6} \\ 2e^{-4}\cos 2 - 8e^{-12} & 2e^{-4}\sin 2 - 2e^{-4}\cos 2 - 8e^{-12} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{\Psi}'(5,-4,-5) = \begin{pmatrix} -8e^{-140} & 10e^{-140} & 40e^{-140} \\ 12\cos 196 & -14\cos 196 & -44\cos 196 \\ -4e^{-84} & 6e^{-84} & 36e^{-84} \end{pmatrix}.$$

Пусть функция $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$ определена в окрестности точки $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$, ℓ — луч, с началом в точке x^0 в направлении вектора $\vec{p}$:

$$\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x^0 + t\vec{p}, \quad t \geqslant 0\}.$$

Производной по направлению $\vec{p}$ в x^0 функции $f(x)$ называется

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \vec{p}} = \lim_{\ell \ni x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0)}{|x - x^0|} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x^0 + t\vec{p}) - f(x^0)}{t|\vec{p}|},$$

если этот предел существует. Производная по направлению равна скорости изменения функции на соответствующем луче. Если $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ существует, то существует и с ней совпадает производная по направлению k-й координатной оси.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то по любому направлению $\vec{p}$ в этой точке существует

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \vec{p}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} \frac{p_k}{|\vec{p}|} = \frac{1}{|\vec{p}|}(\operatorname{grad} f(x^0), \vec{p}), \tag{1}$$

где $\operatorname{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right)$ — *градиент* функции $f(x)$ в точке x^0, вектор, показывающий направление наибольшего роста функции; модуль этого вектора равен соответствующей скорости роста.

Если аргументы функции $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$, $(\Delta x_k \geqslant 0)$ известны лишь приближенно, $x_1 = x_1^0 \pm \Delta x_1, \ldots, x_n = x_n^0 \pm \Delta x_n$, то и значение ее можно найти только приближенно. Поскольку разница между приращением функции и ее дифференциалом является бесконечно малой более высокого порядка, чем приращения ее аргументов, то абсолютная и относительная погрешности вычисления функции могут быть оценены как

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \Delta x_k; \qquad \delta u = \frac{\Delta u}{|u|}.$$

Пример 4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 36.7 ± 0.2 см и 27.5 ± 0.1 см, угол между плоскостью большего основания и образующей $38 \pm 1^\circ$. Вычислить объем конуса и оценить абсолютную и относительную погрешности результата.

Решение. Обозначим радиус большего основания R, меньшего r, угол при основании конуса α. Достроим усеченный конус до полного. Его высота $H = R \operatorname{tg} \alpha$, объем $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg} \alpha$. Аналогично объем отсекаемой части конуса $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg} \alpha$. Таким образом, объем усеченного конуса $V(R, r, \alpha) = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3}(R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha$. При $R = 36.7$, $r = 27.5$, $\alpha = 38^\circ = 0.6632251158$ радиан, объем $V = 23427.19493$. Абсолютная погрешность

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial R}\right| \Delta R + \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| \Delta r + \left|\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right| \Delta\alpha = $$
$$= \pi R^2 \operatorname{tg} \alpha \Delta R + \pi r^2 \operatorname{tg} \alpha \Delta r + \frac{\pi(R^3 - r^3)}{3\cos^2 \alpha} \Delta\alpha = 1689.601449.$$

Относительная погрешность

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = 0.07212137236.$$

Ответ. $V = 23427.19493$ см^3, $\Delta V = 1689.601449$ см^3, $\delta V = 0.07212137236$.

3. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и в каждой точке этой области определены частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $x \in D$, которые в свою очередь дифференцируемы в D, тогда их частные производные называются *частными производными второго порядка*: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k}$, $i, k = 1, \ldots, n$, $x \in D$.

Если определены и дифференцируемы частные производные $\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{k_r} \ldots \partial x_{k_1}}$, порядка r, то *частные производные следующего порядка* $r+1$ определяем индуктивно:

$$\frac{\partial^{r+1} f(x)}{\partial x_{k_{r+1}} \partial x_{k_r} \ldots \partial x_{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_{r+1}}} \left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{k_r} \ldots \partial x_{k_1}} \right).$$

Альтернативное обозначение $f^{(r)}_{x_{k_1} \ldots x_{k_r}}(x) = \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{k_r} \ldots \partial x_{k_1}}$. Порядок индексов показывает порядок выполнения операций дифференцирования. При некоторых ограничениях, например, если все частные производные до порядка r непрерывны в области D, значение частной производной зависит лишь от того, по каким координатам и сколько раз выполнялось дифференцирование, но не зависит от порядка выполнения дифференцирований.

Дифференциалом порядка r функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ называют выражение

$$d^r f(x) = \sum_{k_r=1}^{n} \ldots \sum_{k_1=1}^{n} f^{(r)}_{x_{k_1} \ldots x_{k_r}}(x)\, dx_{k_1} \ldots dx_{k_r}$$

в предположении, что все частные производные до порядка $r-1$ функции $f(x)$ дифференцируемы.

Пример 5. Найти второй дифференциал функции $f(x, y, z) = \ln\left(\frac{xyz}{x^2 - yz} + 1 \right)$.

Решение. Находим первые и вторые частные производные функции $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{yz\left(x^2+zy\right)}{(xyz-zy+x^2)(x^2-yz)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{zx^3}{(xyz-zy+x^2)(x^2-yz)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{yx^3}{(xyz-zy+x^2)(x^2-yz)};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\left(z^3y^3-4z^2y^2x^2+6z^2y^2x-4x^3yz-x^4yz-2x^5\right)zy}{(zyx-zy+x^2)^2(x^2-yz)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\left(2zyx-2zy+2x^2-x^3\right)z^2x^3}{(zyx-zy+x^2)^2(zy-x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\left(2zyx-2zy+2x^2-x^3\right)y^2x^3}{(zyx-zy+x^2)^2(zy-x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{\left(2z^2y^2x-3z^2y^2+2zyx^2+x^4\right)zx^2}{(zyx-zy+x^2)^2(zy-x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = -\frac{\left(2z^2y^2x-3z^2y^2+2zyx^2+x^4\right)yx^2}{(zyx-zy+x^2)^2(zy-x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\left(x^4+z^2y^2x-z^2y^2\right)x^3}{(zyx-zy+x^2)^2(zy-x^2)^2}.$$

Зная вторые частные производные, составляем второй дифференциал.

Ответ. $d^2f=\frac{\left(x^4yz+2x^5+4x^3yz+4y^2z^2x^2-6y^2z^2x-y^3z^3\right)yz\,dx^2}{(xyz+x^2-yz)^2(x^2-yz)^2} + \frac{\left(2xyz+2x^2-2yz-x^3\right)x^3z^2\,dy^2}{(xyz+x^2-yz)^2(x^2-yz)^2} -$
$- \frac{\left(-2xyz-2x^2+2yz+x^3\right)x^3y^2\,dz^2}{(xyz+x^2-yz)^2(x^2-yz)^2} - 2\,\frac{x^2\left(x^4+2x^2yz+2y^2z^2x-3y^2z^2\right)z\,dx\,dy}{(xyz+x^2-yz)^2(x^2-yz)^2} -$
$- 2\,\frac{\left(x^4+2x^2yz+2y^2z^2x-3y^2z^2\right)x^2y\,dx\,dz}{(xyz+x^2-yz)^2(x^2-yz)^2} + 2\,\frac{\left(x^4+y^2z^2x-y^2z^2\right)x^3\,dy\,dz}{(xyz+x^2-yz)^2(x^2-yz)^2}.$

Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ и в этой окрестности $r+1$ раз дифференцируема, то для нее справедлива *формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*: для каждого x из этой окрестности

$$f(x) = f(x^0)+df(x^0)+\frac{1}{2!}d^2f(x^0)+\ldots+\frac{1}{r!}d^rf(x^0)+\frac{1}{(r+1)!}d^{r+1}f(x^0+\theta(x-x^0)),$$

где θ — некоторое число из интервала $(0,1)$.

Используется также *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*: если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ и в этой окрестности r раз дифференцируема, то в этой окрестности

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2f(x^0) + \ldots + \frac{1}{r!}d^rf(x^0) + \alpha(x)|x - x^0|^r,$$

где $\lim\limits_{x\to x^0} \alpha(x) = 0$.

Пример 6. Используя известные разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, разложить функцию $f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{\operatorname{ch}(x+y)}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ до $o(\rho^3)$, где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Решение. Чтобы воспользоваться известными разложениями

$$\operatorname{ch}\alpha = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + o(\alpha^3) \quad \text{при } \alpha \to 0,$$

$$(1+\alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 + o(\alpha^2) \quad \text{при } \alpha \to 0,$$

нужно предварительно сделать замену переменных:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{\operatorname{ch}(x+y)}} = \begin{vmatrix} x = \xi + 1, & \xi = x - 1 \\ y = \eta - 1, & \eta = y - 1 \end{vmatrix} = \frac{\xi - \eta + 2}{\sqrt{\operatorname{ch}(\xi+\eta)}} =$$

$$= \frac{\xi - \eta + 2}{\sqrt{\operatorname{ch}(\xi+\eta)}} = (\xi - \eta + 2) \cdot \left(1 + \frac{(\xi+\eta)^2}{2} + o(\rho^3)\right)^{-1/2} =$$

$$= (\xi - \eta + 2)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{(\xi+\eta)^2}{2} + o(\rho^3)\right) + o(\rho^3)\right) =$$

$$= 2 + \xi - \eta - \frac{\xi^2}{2} - \xi\eta - \frac{\eta^2}{2} - \frac{\xi^3}{4} - \frac{\xi^2\eta}{4} + \frac{\xi\eta^2}{4} + \frac{\eta^3}{4} + o(\rho^3).$$

Используя обратную замену, получаем ответ.

Ответ. $f(x,y) = 2 + (x-1) - (y+1) - \frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)(y+1) - \frac{(y+1)^2}{2} - - \frac{(x-1)^3}{4} - \frac{(x-1)^2(y+1)}{4} + \frac{(x-1)(y+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^3}{4} + o(\rho^3)$ при $\rho \to 0$.

Пример 7. Используя формулу Тейлора, разложить функцию $u = 4x^4 + + 4x^3y - y^4 - 3xy^2 + 3x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x + 4y$ по степеням $x-4$, $y-3$.

Решение. Функция $u(x,y)$ — многочлен 4-й степени по переменным x и y, $d^5u \equiv 0$, следовательно, остаточный член формулы Тейлора четвертого порядка равен нулю и $u(x,y)$ совпадает со своим многочленом Тейлора четвертой степени в точке $x_0 = 4$, $y_0 = 3$:

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + du(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2u(x_0,y_0) + \frac{1}{3!}d^3u(x_0,y_0) + \frac{1}{4!}d^4u(x_0,y_0).$$

Последовательно находим

$$u(x_0,y_0) = 1645;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 16x^3 + 12x^2y - 3y^2 + 6x - 4y + 3\Big|_{(x_0,y_0)} = 1588,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3 - 4y^3 - 6xy - 4x + 4y + 4\Big|_{(x_0,y_0)} = 76,$$

$$du(x_0,y_0) = 1588(x-4) + 76(y-3);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 48x^2 + 24xy + 6\Big|_{(x_0,y_0)} = 1062,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 12x^2 - 6y - 4\Big|_{(x_0,y_0)} = 170,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12y^2 - 6x + 4\Big|_{(x_0,y_0)} = -128,$$
$$d^2u(x_0, y_0) = 1062(x-4)^2 + 340(x-4)(y-3) - 128(y-3)^2;$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 96x + 24y\Big|_{(x_0,y_0)} = 456, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 24x\Big|_{(x_0,y_0)} = 96,$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -6, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -24y\Big|_{(x_0,y_0)} = -72,$$
$$d^3u(x_0, y_0) = 456(x-4)^3 + 288(x-4)^2(y-3) - 18(x-4)(y-3)^2 - 72(y-3)^3;$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 96, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = -24,$$
$$d^4u(x_0, y_0) = 96(x-4)^4 + 96(x-4)^3(y-3) - 24(y-3)^4.$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ. $u = 1645 + 1588(x-4) + 76(y-3) - 64\,(y-3)^2 + 531\,(x-4)^2 + 170\,(x-4)\,(y-3) - 3\,(x-4)\,(y-3)^2 - 12\,(y-3)^3 + 48\,(x-4)^2\,(y-3) + 76\,(x-4)^3 + 4\,(x-4)^3\,(y-3) - (y-3)^4 + 4\,(x-4)^4.$

4. Функции, заданные неявно. Неявные отображения. Замена переменных

Говорят, что $y = y(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ — *функция, неявно заданная* уравнением $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, если на множестве E выполняется тождество $f(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$.

Справедлива теорема о неявной функции.

Теорема. *Если функция $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$, причем $f(x^0, y^0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$, то найдется $\delta > 0$ и непрерывно дифференцируемая при $|x - x^0| < \delta$ функция $y = y(x)$ такая, что $y(x^0) = y^0$ и при всех $x:\ |x - x^0| < \delta$ выполняется $f(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$. Функция $y(x)$, обладающая указанными свойствами, единственна, и ее частные производные удовлетворяют соотношениям:*

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x_k} = -\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x_k} \Big/ \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}, \quad |x - x^0| < \delta, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что если в условиях теоремы исходная функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка r, то этим свойством будет обладать и неявная функция $y(x)$.

Эта теорема допускает обобщение на неявно заданные отображения.

Теорема. *Пусть отображение* $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{F}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ *определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки* $(x^0,y^0) = (x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ *и принимает значения в пространстве* $\mathbb{R}^m$, *причем* $\mathbf{F}(x^0,y^0) = 0$, *а якобиан* $\dfrac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(x^0,y^0) \neq 0$, *то найдется окрестность точки* x^0 *и непрерывно дифференцируемое в ней отображение* $\mathbf{y}(x)$ *такое, что* $\mathbf{y}(x^0) = y^0$, *и при всех* x *из этой окрестности выполняется тождество* $\mathbf{F}(x,\mathbf{y}(x)) \equiv 0$. *Производная* $\mathbf{y}(x)$ *удовлетворяет соотношению*: $\mathbf{y}'(x) = -\left(\mathbf{F'}_y(x,\mathbf{y}(x))\right)^{-1}\cdot\mathbf{F'}_x(x,\mathbf{y}(x))$, *где*

$$\mathbf{F'}_y(x,\mathbf{y}(x))=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}(x,\mathbf{y}(x)),\quad \mathbf{F'}_x(x,\mathbf{y}(x))=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}(x,\mathbf{y}(x)).$$

В координатной форме теорема о неявном отображении означает, что в окрестности точки (x^0,y^0) систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0\end{cases}$$

можно разрешить относительно $(y_1,\dots,y_m)$, выразив их через $(x_1,\dots,x_n)$.

Теорема о неявном отображении эквивалентна теореме об обратном отображении.

Теорема. *Пусть отображение* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки* x^0, *причем* $\det\mathbf{F}'(x^0) \neq 0$. *Тогда существуют открытые множества* $U \ni x^0$. *и* $V \ni \mathbf{F}(x^0)$ *такие, что отображение* $\mathbf{F} : U \to V$, *имеет непрерывно дифференцируемое обратное* $\mathbf{F}^{-1} : V \to U$. *Производная обратного отображения при каждом* $y \in V$ *удовлетворяет равенству* $(\mathbf{F}^{-1})'(y) = (\mathbf{F}'(\mathbf{F}^{-1}(y)))^{-1}$.

Пример 8. Для функции $z = z(x,y)$, неявно заданной уравнением $x^2 + 5y^2 - z^2 + xz + 3xy + 7yz + 4z = 0$, найти d^2z в точке $M_0(1,-1)$, если $z(1,-1) = 1$.

Решение. Для непрерывно дифференцируемой функции $F(x,y,z) = x^2 + 5y^2 - z^2 + xz + 3xy + 7yz + 4z$ в точке $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$ выполнены все условия теоремы о функции, заданной неявно:

$$F(1,-1,1)=0, \qquad \tfrac{\partial F}{\partial z}(1,-1,1)=-4\neq 0$$

и, следовательно, уравнение $F(x,y,z)=0$ в некоторой окрестности точки (1, – 1) однозначно задает непрерывно дифференцируемую функцию $z{=}z(x,y)$, обращающую это уравнение в тождество и такую, что $z(1,-1)=1$. Заметим, что поскольку функция $F(x,y,z)$ бесконечно дифференцируема, то бесконечно дифференцируемой будет и $z=z(x,y)$.

Дифференцируя тождество $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$, получим

$$\begin{multline*}2x\,dx+10y\,dz-2z\,dz+7y\,dz+7z\,dy+\\+x\,dz+z\,dx+3x\,dy+3y\,dx+4\,dz=0, \quad (2)\end{multline*}$$

откуда, подставляя $x=1,\ y=-1,\ z=1$, находим, что $dz=0$.

Дифференцируем тождество (2) с учетом того, что x и y — независимые переменные, и, следовательно, $d^2x=0$, $d^2y=0$, а $z=z(x,y)$ — их функция:

$$\begin{multline*}2\,dx^2+10\,dy^2-2z\,d^2z-2\,dz^2+7y\,d^2z+7\,dy\,dz+\\+7\,dz\,dy+dx\,dz+x\,d^2z+dz\,dx+3\,dx\,dy+3\,dy\,dx+4\,d^2z=0. \quad (3)\end{multline*}$$

Подставляя в (3) $x=1,\ y=-1, z=1,\ dz=0$, получим

$$2\,dx^2+10\,dy^2-2\,d^2z-7\,d^2z+d^2z+6\,dx\,dy+4\,d^2z=0,$$

откуда следует, что

$$d^2z=\frac{1}{2}\left(dx^2+3\,dx\,dy+5\,dy^2\right).$$

Решить задачу можно иначе, вычисляя частные производные функции $z(x,y)$.

Применяя известные формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},$$

найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+z+3y}{-2z+7y+x+4}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{10y+7z+3x}{-2z+7y+x+4}.$$

Дифференцируя полученные равенства с учетом того, что $z=z(x,y)$, найдем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(2+z'_x)(-2z+7y+x+4)-(2x+z+3y)(-2z'_x+1)}{(-2z+7y+x+4)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{(z'_y+3)(-2z+7y+x+4)-(2x+z+3y)(-2z'_y+7)}{(-2z+7y+x+4)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(10+7z'_y)(-2z+7y+x+4)-(10y+7z+3x)(-2z'_y+7)}{(-2z+7y+x+4)^2}.$$

Подставляя $x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 1$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{5}{2}.$$

Таким образом, опять получим $d^2 z = \frac{1}{2}\big(dx^2 + 3\,dx\,dy + 5\,dy^2\big)$.

Ответ. $d^2 z = \frac{1}{2}\big(dx^2 + 3\,dx\,dy + 5\,dy^2\big)$.

Пример 9. Найти в точке $M_0(1,1)$ дифференциалы первого и второго порядков функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $u^2 + xv - y = 1,\ uv - xy = 0$, если $u(1,1) = 1,\ v(1,1) = 1$.

Решение. Пусть $F(x,y,u,v) = u^2 + xv - y - 1$, $G(x,y,u,v) = uv - xy$. Покажем, что для системы уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u^2 + xv - y - 1 = 0, \\ G(x,y,u,v) = uv - xy = 0 \end{cases} \tag{4}$$

в окрестности точки $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1$ выполнены условия теоремы о системе функций, заданных неявно. Действительно, функции F и G равны нулю в точке $(1,1,1,1)$, непрерывно дифференцируемы в ее окрестности (любое число раз), якобиан

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & x \\ v & u \end{vmatrix} = 2u^2 - xv$$

в заданной точке $(1,1,1,1)$ отличен от нуля. Следовательно, в некоторой окрестности точки $(1,1)$ можно определить бесконечно дифференцируемые функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, обращающие систему уравнений в тождества и удовлетворяющие равенствам $u(1,1) = 1$, $v(1,1) = 1$.

Чтобы найти дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, продифференцируем тождества (4):

$$
\begin{cases} 2u\,du + v\,dx + x\,dv - dy = 0, \\ u\,dv + v\,du - x\,dy - y\,dx = 0. \end{cases} \tag{5}
$$

Подставляя в (5) $x = y = u = v = 1$, получим

$$
\begin{cases} 2\,du + dx + dv - dy = 0, \\ \quad dv + du - dy - dx = 0, \end{cases}
$$

откуда $du = -2\,dx$, $dv = 3\,dx + dy$.

Для нахождения d^2u и d^2v продифференцируем (5) с учетом того, что x и y — независимые переменные, и, следовательно, $d^2x = d^2y = 0$:

$$
\begin{cases} 2u\,d^2u + 2\,du^2 + dx\,dv + dv\,dx + x\,d^2v = 0, \\ u\,d^2v + du\,dv + v\,d^2u + dv\,du - dx\,dy - dy\,dx = 0. \end{cases} \tag{6}
$$

В точке $(1,1,1,1)$, с учетом равенств $du = -2\,dx$, $dv = 3\,dx + dy$, система (6) преобразуется к виду:

$$
\begin{cases} 2\,d^2u + d^2v = -14\,dx^2 - 2\,dx\,dy, \\ \quad d^2u + d^2v = 12\,dx^2 + 6\,dx\,dy, \end{cases}
$$

откуда $d^2u = -26\,dx^2 - 8\,dx\,dy$, $d^2v = 38\,dx^2 + 14\,dx\,dy$.

Ответ. $du = -2\,dx$, $dv = 3\,dx + dy$; $d^2u = -26\,dx^2 - 8\,dx\,dy$, $d^2v = 38\,dx^2 + 14\,dx\,dy$.

Правила дифференцирования сложных и неявно заданных функций используют при замене переменных в дифференциальных выражениях.

Пример 10. Преобразовать выражение

$$
F = 2(x - y)(z''_{yy} - z''_{xy}) + z'_x - z'_y,
$$

где $z = z(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, к новым переменным:

$$
u = x + y, \quad v = \sqrt{x - y}.
$$

Решение. С учетом того, что

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 1, \quad v'_x = \frac{1}{2\sqrt{x-y}}, \quad v'_y = -\frac{1}{2\sqrt{x-y}},$$

дифференцируя композицию $z(u(x,y), v(x,y))$ по переменным x и y, найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u + \frac{z'_v}{2\sqrt{x-y}},$$
$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u - \frac{z'_v}{2\sqrt{x-y}}.$$

Для вычисления производных второго порядка полученные равенства дифференцируем еще раз с учетом того, что z'_u и z'_v также являются сложными функциями переменных x и y. Заметим, что по теореме об обратном отображении функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Следовательно, композиция $z(u,v) = z(x(u,v), y(u,v))$ имеет непрерывные, а потому равные, смешанные производные z''_{uv} и z''_{vu}. Тогда

$$z''_{xy} = z''_{uu} \cdot u'_y + z''_{uv} \cdot v'_y + \frac{1}{2\sqrt{x-y}}(z''_{vu} \cdot u'_y + z''_{vv} \cdot v'_y) + \frac{1}{4\sqrt{(x-y)^3}} z'_v =$$
$$= z''_{uu} - \frac{1}{4(x-y)} z''_{vv} + \frac{1}{4\sqrt{(x-y)^3}} z'_v.$$

Аналогично найдем

$$z''_{yy} = z''_{uu} \cdot u'_y + z''_{uv} \cdot v'_y - \frac{1}{2\sqrt{x-y}}(z''_{vu} \cdot u'_y + z''_{vv} \cdot v'_y) - \frac{1}{4\sqrt{(x-y)^3}} z'_v =$$
$$= z''_{uu} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} z''_{uv} + \frac{1}{4(x-y)} z''_{vv} - \frac{1}{4\sqrt{(x-y)^3}} z'_v.$$

Подставим найденные выражения для производных в исходное выражение F. Замечая, что $x - y = v^2$, после приведения подобных слагаемых получим:

$$F = z''_{vv} - 2v z''_{uv}.$$

Ответ. $F = z''_{vv} - 2v z''_{uv}$.

Пример 11. Преобразовать уравнение

$$z'_x + (y-x) z'_y = z - x - 1,$$

приняв $u = x$, $v = x - 2y + z$ за новые независимые переменные, а $w = x - y + z$ за новую функцию.

Решение. Выразим частные производные z'_x и z'_y через частные производные функции w по переменным u и v. Для этого дифференцируем равенство $w = x - y + z$ по переменным x и y, считая, что $w = w(u(x, y), v(x, y))$;

$$\begin{gathered} w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = 1 + z'_x, \\ w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = -1 + z'_y. \end{gathered}$$

Эти равенства с учетом того, что

$$u'_x = 1, \quad v'_x = 1 + z'_x, \quad u'_y = 0, \quad v'_y = z'_y - 2,$$

перепишем в виде:

$$\begin{gathered} w'_u + w'_v(1 + z'_x) = 1 + z'_x, \\ w'_v(z'_y - 2) = -1 + z'_y. \end{gathered}$$

Отсюда найдем

$$z'_x = \frac{w'_u + w'_v - 1}{1 - w'_v} \quad \text{и} \quad z'_y = \frac{1 - 2w'_v}{1 - w'_v}.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, после упрощения получим

$$w'_u + (z - 2y + x)w'_v = z - y.$$

Осталось лишь заменить старые переменные x и y, а также старую функцию z на их выражения через u, v и w. Для этого достаточно разрешить систему уравнений

$$\begin{cases} u = x, \\ v = x - 2y + z, \\ w = x - y + z, \end{cases}$$

относительно x, y, z. В данном случае, однако, в этом нет необходимости, так как

$$z - 2y + x = v, \quad z - y = w - u.$$

Ответ. $w'_u + vw'_v = w - u$.

5. Локальный экстремум. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Определение. Точку $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называют *точкой локального максимума* (*локального минимума*) функции $f(x)$, если x^0 — внутренняя точка области определения функции и для некоторого $\delta > 0$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x^0)$ $(f(x) \geqslant f(x^0))$ при всех $x : |x - x^0| < \delta$. Точки локального максимума и локального минимума объединяются общим названием *точек локального экстремума*.

Если неравенство в определении строгое при $x \neq x^0$, то экстремум называют *строгим*.

Отметим *необходимые условия* локального экстремума.

1. Если x^0 — точка локального экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} = 0$ при всех $k = 1, \ldots, n$, то есть точка x^0 является *критической точкой* функции $f(x)$.
2. Если x^0 — точка локального минимума (локального максимума) дважды дифференцируемой функции $f(x)$, то квадратичная форма второго дифференциала $d^2 f(x^0)$ неотрицательна (неположительна).

Достаточные условия локального экстремума дает теорема:

Теорема. *Пусть x^0 критическая точка дважды дифференцируемой функции $f(x)$.*

- *Если квадратичная форма второго дифференциала $d^2 f(x^0)$ положительно определена, то в этой точке $f(x)$ имеет строгий локальный минимум.*
- *Если квадратичная форма второго дифференциала $d^2 f(x^0)$ отрицательно определена, то в этой точке $f(x)$ имеет строгий локальный максимум.*
- *Если квадратичная форма второго дифференциала $d^2 f(x^0)$ знакопеременна, то в этой точке $f(x)$ не имеет локального экстремума.*

Для определения знака второго дифференциала бывает полезен *критерий Сильвестра*: для положительной определенности квадратичной формы $B(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны:

$$\Delta_1 = b_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

В частности, из критерия Сильвестра следует, что для дважды дифференцируемой функции двух переменных $f(x, y)$ такой, что $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$,

- если $\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial x} \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$, то локального экстремума в (x_0, y_0) нет;
- если $\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial x} \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$, то локальный экстремум в (x_0, y_0) имеется, причем
  - ✓ при $\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial x} > 0$ — это локальный минимум,
  - ✓ при $\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial x} < 0$ — это локальный максимум.

Пример 12. Исследовать функцию $f(x, y, z) = 9x^2 + 2xy + 8xz + 9y^2 - 8yz + 9z^2 + 24x + 56y - 36z - 3$ на локальный экстремум.

Решение. Составляем систему уравнений для нахождения критических точек.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 18x + 2y + 8z + 24 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 18y - 8z + 56 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 8x - 8y + 18z - 36 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x_0 = -2$, $y_0 = -2$, $z_0 = 2$. Исследуем на экстремум полученную критическую точку.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 18;$$
$$d^2 f(x_0, y_0, z_0) = 18\,dx^2 + 4\,dx\,dy + 16\,dx\,dz + 18\,dy^2 - 16\,dy\,dz + 18\,dz^2.$$

Для определения знака второго дифференциала воспользуемся методом Лагранжа.

$$d^2f(x_0,y_0,z_0) = 18\left(dx+\frac{1}{9}dy+\frac{4}{9}dz\right)^2+\frac{160}{9}\left(dy-\frac{1}{2}dz\right)^2+10dz^2.$$

Из полученного представления следует, что при всех dx, dy, dz, не обращающихся одновременно в нуль, $d^2f(x_0,y_0,z_0) > 0$, откуда получаем, что в точке $(-2,-2,2)$ у функции $f(x,y,z)$ имеется локальный минимум. Подставляя $x_0 = -2$, $y_0 = -2$, $z_0 = 2$, находим, что в этой точке значение функции $f(-2,-2,2) = -119$.

Ответ. В точке $(-2,-2,2)$ функцией достигается локальный минимум, $f(-2,-2,2) = -119$.

Задачей на *условный экстремум* называют задачу нахождения точки локального экстремума функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ при выполнении условий

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) & = & 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $m < n$ — *уравнений связи* описывают $(n-m)$-мерную «поверхность», на которой должна лежать точка экстремума.

Точнее, точка $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ называется точкой *условного локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$ при условии (7), если найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $x:\ |x-x^0| < \delta$ и удовлетворяющих уравнениям (7), выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x^0)$ $(f(x) \geqslant f(x^0))$.

Таким образом, точка условного экстремума функции $f(x)$ при выполнении условий (7) — это точка экстремума сужения функции $f(x)$ на множество решений (7).

Для нахождения точек условного экстремума можно, разрешив уравнения связи (7), выразить одни переменные через остальные и, подставив найденные выражения в $f(x)$, исследовать на обычный локальный экстремум функцию меньшего числа переменных.

Найти точки условного экстремума, не решая уравнения (7), позволяет *метод множителей Лагранжа*.

Пусть функции $f(x)$ и $g_1(x),\ldots,g_m(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0, и ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен m, то есть точка x^0 не является особой для «поверхности», заданной уравнениями связи (7). Составим *функцию Лагранжа*

$$L(x,\lambda) = L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Точка x^0 может быть точкой условного экстремума только в том случае, когда существует набор чисел $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0$ такой, что точка $(x_1^0,\ldots,x_n^0,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0)$ является критической точкой для функции Лагранжа $L(x,\lambda)$. Сами числа $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0$ называются *множителями Лагранжа* для точки x^0.

Если функции f и $g_1,\ldots,g_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в точке x^0, то характер этой точки можно уточнить, исследовав на знакоопределенность квадратичную форму второго дифференциала $d^2L(x^0,\lambda^0)$, в которой после дифференцирования уравнений связи (7) и получения зависимостей между $dx_1,\ldots,dx_n$ «лишние» дифференциалы исключены.

Пример 13. Исследовать функцию $f(x,y) = 7x - 9y - 3$ на экстремум при условии $-4x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = 7x - 9y - 3 + \lambda(-4x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 4y + 5)$$

и ищем ее критические точки.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 7 - 8\lambda x + 4\lambda y + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -9 + 4\lambda x + 6\lambda y - 4\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -4x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = \dfrac{23}{8}, y_1 = \dfrac{7}{4}, \lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = -2$, $y_2 = -1$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. На кривой[3], задаваемой условием $-4x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, дифференциалы dx и dy связаны соотношением, которое можно найти, дифференцируя уравнение связи: $(-8x + 4y + 2)dx + (4x + 6y - 4)dy = 0$. Подставляя в полученное равенство $x_1 = \dfrac{23}{8}, y_1 = \dfrac{7}{4}$, находим, что в первой точке $dy = \dfrac{7}{9}dx$. Далее

[3] В данном случае это гипербола.

$$d^2L(x,y,\lambda) = \lambda(-8\,dx^2 + 8\,dx\,dy + 6\,dy^2), \qquad d^2L(x_1,y_1,\lambda_1) = \frac{25}{27}dx^2 > 0,$$

что означает, что первая точка — точка минимума. Значение функции в ней $f\left(\frac{23}{8},\frac{7}{4}\right) = \frac{11}{8}$. Аналогично для точки $x_2 = -2, y_2 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ также $dy = \frac{7}{9}dx$ и $d^2L(x_2,y_2,\lambda_2) = -\frac{25}{27}dx^2 < 0$, $f(-2,-1) = -8$ — условный максимум. То, что значение функции в точке максимума меньше, чем в точке минимума, удивлять не должно, эти точки лежат на разных ветвях гиперболы.

Ответ. $f(-2,-1) = -8$ — условный максимум, $f\left(\frac{23}{8},\frac{7}{4}\right) = \frac{11}{8}$ — условный минимум.

Пример 14. Найти радиус основания и высоту цилиндра, который имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$ см^3.

Решение. Пусть r — радиус цилиндра, h — его высота. Тогда объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, а площадь полной поверхности $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Нужно найти r и h, при которых $2\pi r^2 + 2\pi rh$ достигает минимума в области, где $r > 0$, $h > 0$ при условии $\pi r^2 h = \frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(r,h,\lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda\left(\pi r^2 h - \frac{16\sqrt{3}}{9}\pi\right)$$

и выписываем необходимые условия локального условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h + 2\lambda\pi rh = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - \dfrac{16\sqrt{3}}{9}\pi = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим точку $r_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $h_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\lambda_0 = -\sqrt{3}$.

Для проверки достаточных условий находим знак второго дифференциала $d^2L(r_0,h_0,\lambda_0)$ с учетом того, что dr и dh зависимы. Дифференцируя уравнение связи $\pi r^2 h - \frac{16\sqrt{3}}{9}\pi = 0$, получим, что $2rh\,dr + r^2\,dh = 0$, откуда при $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ следует $dh = -4\,dr$. Таким образом,

$$d^2L(r_0,h_0,\lambda_0) = \frac{\partial^2 L}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial r\partial h}dr\,dh + \frac{\partial^2 L}{\partial h^2}dh^2\Big|_{(r_0,h_0,\lambda_0)} = 12\pi\,dr^2 > 0,$$

откуда следует, что полученная точка доставляет условный локальный минимум.

Ответ. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ h = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$ в ограниченной замкнутой области $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$ достигаются в ее точках. Достигаться они могут или во внутренних точках $\overline{D}$, или в граничных. Если $f(x)$ дифференцируема во внутренних точках $\overline{D}$, то внутренние точки максимума и минимума будут критическими для $f(x)$. Граничные точки максимума и минимума $f(x)$ будут точками условного экстремума.

Пример 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u(x,y) = -7x^2 + 6xy + y^2 - 26x + 2y - 2$ в треугольнике $\triangle ABC$, где $A(-4,-1)$, $B(4,4)$, $C(-2,3)$.

Решение. Из всех значений, принимаемых функцией на границе области, найдем наибольшее и наименьшее значения. Граница треугольника состоит из трех отрезков:

$$BC:\quad y_1 = \tfrac{1}{6}x + \tfrac{10}{3},\quad -2 \leqslant x \leqslant 4;\quad u_1(x) = u(x,y_1(x)) = -\tfrac{215}{36}x^2 - \tfrac{41}{9}x + \tfrac{142}{9},$$
$$u_1'(x) = -\tfrac{215}{18}x - \tfrac{41}{9},\quad u_1'(x) = 0 \text{ при } x = -\tfrac{82}{215} \in [-2,4];$$
$$u_1(-2) = 1,\quad u_1(4) = -98,\quad u_1(-\tfrac{82}{215}) = \tfrac{3579}{215};$$
$$\min_{(x,y)\in BC} u(x,y) = u(4,4) = -98,\qquad \max_{(x,y)\in BC} u(x,y) = u(-\tfrac{82}{215},\tfrac{703}{215}) = \tfrac{3579}{215};$$

$$CA:\quad y_2 = 2x + 7,\quad -4 \leqslant x \leqslant -2;\quad u_2(x) = u(x,y_2(x)) = 9x^2 + 48x + 61,$$
$$u_2'(x) = 18x + 48,\quad u_2'(x) = 0 \text{ при } x = -\tfrac{8}{3} \in [-4,-2];$$
$$u_2(-4) = 13,\quad u_2(-2) = 1,\quad u_2(-\tfrac{8}{3}) = -3;$$
$$\min_{(x,y)\in CA} u(x,y) = u(-\tfrac{8}{3},\tfrac{5}{3}) = -3,\qquad \max_{(x,y)\in CA} u(x,y) = u(-4,-1) = 13;$$

$$AB:\quad y_3 = \tfrac{5}{8}x + \tfrac{3}{2},\quad -4 \leqslant x \leqslant 4;\quad u_3(x) = u(x,y_3(x)) = -\tfrac{183}{64}x^2 - \tfrac{111}{8}x + \tfrac{13}{4},$$
$$u_3'(x) = -\tfrac{183}{32}x - \tfrac{111}{8},\quad u_3'(x) = 0 \text{ при } x = -\tfrac{148}{61} \in [-4,4];$$
$$u_3(-4) = 13,\quad u_3(4) = -98,\quad u_3(-\tfrac{148}{61}) = \tfrac{1225}{61};$$
$$\min_{(x,y)\in AB} u(x,y) = u(4,4) = -98,\qquad \max_{(x,y)\in AB} u(x,y) = u(-\tfrac{148}{61},-\tfrac{1}{61}) = \tfrac{1225}{61}.$$

Критические точки функции находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -14x + 6y - 26 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 6x + 2y + 2 = 0, \end{cases}$$

откуда получим $x_0 = -1,\ y_0 = 2$. Точка $(-1, 2) \in \triangle ABC$, значение функции в ней $u(-1, 2) = 13$. Впрочем, так как $\Delta = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = -64 < 0$, экстремума в критической точке нет, и ее можно не учитывать.

Выбирая из найденных значений функции наибольшее и наименьшее, получим: наименьшее значение функции -98 достигается в точке $(4, 4)$, наибольшее значение $\dfrac{1225}{61}$ достигается в точке $\left(-\dfrac{148}{61}, -\dfrac{1}{61}\right)$.

Ответ. $-98, \dfrac{1225}{61}$.

6. Геометрические приложения теории неявных функций. Кривые и поверхности в трехмерном пространстве

6.1. Простая параметрически заданная кривая

Определение. Множество Г точек в $\mathbb{R}^3$, заданное как образ при непрерывном отображении φ числового промежутка T, называется *простой параметрически заданной кривой*, если разным значениям $t \in T$ соответствуют разные точки множества Г.

Если в пространстве $\mathbb{R}^3$ введены декартовы прямоугольные координаты (x, y, z), то положение точек кривой определяется соотношениями:

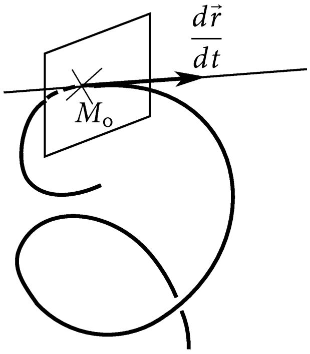

Рис. 2

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in T,$$

где $x(t), y(t), z(t)$ — координатные функции отображения φ непрерывны на промежутке T. Указанные соотношения называют *параметрическими уравнениями* кривой Г, а переменную t её *параметром.*

Ограничимся рассмотрением кривых, для которых функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемы. Пусть $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — *радиус-вектор* точки такой кривой. Тогда вектор

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

называется *вектором скорости* кривой или ее *касательным вектором* (рис. 2).

Определение. Точка с радиус-вектором $\vec{r}\,(t_0)$ на кривой Г называется *неособой точкой* этой кривой, если $\vec{r'}\,(t_0) \neq 0$.

Определение. *Касательной прямой* (рис. 2) к кривой Г в её неособой точке $\vec{r}\,(t_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку в направлении вектора $\vec{r'}\,(t_0)$. Плоскость, проходящую перпендикулярно касательной прямой через точку касания, называют, *нормальной плоскостью* к кривой в этой точке (рис. 2).

Из данных определений следует, что канонические уравнения касательной прямой имеют вид:

$$\frac{x - x\,(t_0)}{x'\,(t_0)} = \frac{y - y\,(t_0)}{y'\,(t_0)} = \frac{z - z\,(t_0)}{z'\,(t_0)},$$

а уравнение нормальной плоскости:

$$x'\,(t_0)\,(x - x\,(t_0)) + y'\,(t_0)\,(y - y\,(t_0)) + z'\,(t_0)\,(z - z\,(t_0)) = 0.$$

Пример 16. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$\Gamma: \quad \begin{cases} x(t) = \ln(1 + 2\operatorname{sh} t), \\ y(t) = t - \ln(\operatorname{ch} 2t), \\ z(t) = 2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} 2t \end{cases}$$

в точке M_0, соответствующей $t = 0$.

Решение. Функции $x(t), y(t), z(t)$, задающие кривую Г, дифференцируемы в точке $t = 0$. Находим значения параметризующих кривую функций и их производных:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1;$$

$$x'(0) = \frac{2\operatorname{ch} t}{1 + 2\operatorname{sh} t}\bigg|_{t=0} = 2, \quad y'(0) = 1 - \frac{2\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{ch} 2t}\bigg|_{t=0} = 1, \quad z'(0) = (2\operatorname{ch} t + 2\operatorname{sh} 2t)\Big|_{t=0} = 2.$$

Так как вектор $\vec{r'}(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))$ не нулевой, то в точке $M_0(0, 0, 1)$ кривая имеет касательную прямую с направляющим вектором $(2, 1, 2)$. Канонические уравнения касательной имеют вид:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{2},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$2x + y + 2(z-1) = 0 \quad \text{или} \quad 2x + y + 2z = 2.$$

Ответ. Касательная прямая $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$; нормальная плоскость $2x + y + 2z = 2$.

6.2. Простая параметрически заданная поверхность

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^2$, пространстве переменных u, v.

Определение. Множество S точек в $\mathbb{R}^3$, заданное как образ множества Ω при непрерывном отображении $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, называется *простой параметрически заданной поверхностью*, если разным точкам множества Ω отвечают разные точки множества S.

Отображение φ в координатной форме записывается равенствами вида:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \qquad (u,v) \in \Omega,$$

которые называют *параметрическими уравнениями* поверхности; независимые переменные u, v — *параметры* или *координаты* на S.

Положение точек поверхности описывает её радиус-вектор

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in \Omega.$$

Примером простой параметрически заданной поверхности является график непрерывной функции $z = f(x,y)$; здесь $x = u, y = v$ и $\vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

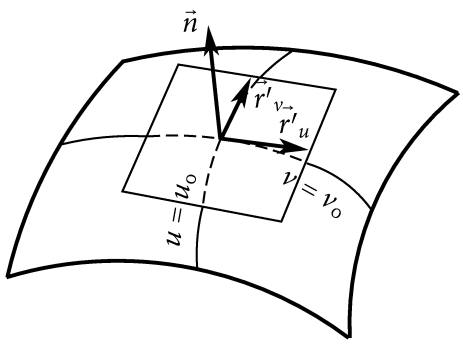

Рис. 3

Если в области Ω задана кривая $u = u(t), v = v(t), t \in T$, то её образ при отображении φ определяет кривую $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ на поверхности S.

В частности, на S определены кривые $\vec{r}(u) = \vec{r}(u, v_0)$ и $\vec{r}(v) = \vec{r}(u_0, v)$, где u_0, v_0 — фиксированные значения параметров; их называют *координатными кривыми* (рис. 3).

Предположим, что функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v), z = z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда в каждой точке поверхности определены векторы $\vec{r}'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (x'_u, y'_u, z'_u)$ и $\vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (x'_v, y'_v, z'_v)$, касательные к координатным кривым, проходящим через эту точку.

Определение. Точка $\vec{r}(u_0, v_0)$ поверхности S называется *неособой,* если векторы $\vec{r'}_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r'}_v(u_0, v_0)$ не коллинеарны, то есть их векторное произведение $[\vec{r'}_u(u_0, v_0), \vec{r'}_v(u_0, v_0)]$ отлично от нуля.

Заметим, что в окрестности неособой точки $\vec{r}\,(u_0, v_0)$ поверхность может быть представлена в виде графика некоторой функции. Действительно, условие $[\vec{r'}_u, \vec{r'}_v] \neq 0$ означает, что ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}(u_0, v_0)$$

равен двум. Пусть, например, $\dfrac{D\,(x, y)}{D\,(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$. Тогда по теореме об обратном отображении в некоторой окрестности W точки (x_0, y_0), где $x_0 = x\,(u_0, v_0)$, $y_0 = y\,(u_0, v_0)$, существует обратное отображение $u = u\,(x, y)$, $v = v\,(x, y)$. Считая независимые переменные x и y параметрами, получаем локальное представление поверхности в виде графика функции

$$z = z(u(x, y), v\,(x, y)), \quad (x, y) \in W.$$

Определение. Пусть $\vec{r}\,(u_0, v_0)$ — неособая точка поверхности S. Плоскость, проходящую через эту точку, и приложенные к ней неколлинеарные векторы $\vec{r'}_u\,(u_0, v_0)$ и $\vec{r'}_v\,(u_0, v_0)$, называют *касательной плоскостью* к поверхности в этой точке (рис. 3).

Вектор $\vec{n} = [\vec{r'}_u, \vec{r'}_v]$, перпендикулярный касательной плоскости, называется *вектором нормали* к поверхности S в точке касания.

Если $x_0 = x\,(u_0, v_0)$, $y_0 = y\,(u_0, v_0)$, $z_0 = z\,(u_0, v_0)$, то уравнение касательной плоскости, как это следует из её определения, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u\,(u_0, v_0) & y'_u\,(u_0, v_0) & z'_u\,(u_0, v_0) \\ x'_v\,(u_0, v_0) & y'_v\,(u_0, v_0) & z'_v\,(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

В случае поверхности вида $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, указанное уравнение касательной плоскости, в котором полагаем $u = x, v = y, z = f(x, y)$, преобразуется к виду:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)\,.$$

Основное свойство касательной плоскости, которое может быть положено в основу её определения, сформулировано в следующем утверждении.

Утверждение. Касательная плоскость к поверхности содержит все касательные к кривым, проходящим на поверхности через точку касания.

Действительно, пусть через неособую точку $\vec{r}\,(u_0, v_0)$ на поверхности проходит кривая $\vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(u\,(t)\,, v\,(t))$, $u_0 = u\,(t_0)\,, v_0 = v\,(t_0)$, причем точка $\vec{r}\,(t_0)$ — неособая точка этой кривой.

Дифференцируя $\vec{r}\,(t)$ как сложную функцию, найдем вектор, касательный к кривой в точке $\vec{r}\,(t_0)$:

$$\vec{r}'\,(t_0) = \vec{r}'_u\,(u_0, v_0)\,u'\,(t_0) + \vec{r}'_v\,(u_0, v_0)\,v'\,(t_0)\,.$$

Из этого равенства заключаем, что $\vec{r}'(t_0)$ компланарен касательной плоскости к поверхности в точке $\vec{r}\,(u_0, v_0)$. Кроме того, касательная прямая и касательная плоскость имеют общую точку $\vec{r}(t_0) = \vec{r}(u_0, v_0)$. Следовательно, касательная к кривой в точке (u_0, v_0) принадлежит касательной плоскости к поверхности в этой точке.

Определение. Прямая, проходящая перпендикулярно касательной плоскости к поверхности через точку касания, называется *нормальной прямой* к поверхности в указанной точке.

Её канонические уравнения:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}.$$

Пример 17. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности S, заданной параметрически уравнениями

$$S: \quad \begin{cases} x = \dfrac{9u}{v^2 - 1}, \\ y = \dfrac{2v}{u^2 + 1}, \\ z = uv \end{cases}$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, соответствующей значениям параметров $u_0 = 1$, $v_0 = -2$.

Решение. Определим координаты точки M_0: $x_0 = 3,\ y_0 = -2,\ z_0 = -2$.

Найдем векторы $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$, касательные к координатным линиям поверхности в точке $M_0(3, -2, -2)$. Так как

$$x'_u = \frac{9}{v^2-1}, \qquad y'_u = \frac{-4uv}{(u^2+1)^2} \qquad z'_u = v,$$

$$x'_v = \frac{-18uv}{(v^2-1)^2}, \qquad y'_v = \frac{2}{u^2+1}, \qquad z'_v = u,$$

то $\vec{r'}_u(M_0) = (3, 2, -2)$, $\vec{r'}_v(M_0) = (4, 1, 1)$.

Поскольку векторы $\vec{r'}_u(M_0)$ и $\vec{r'}_v(M_0)$ не коллинеарны, уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z+2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $4x - 11y - 5z - 44 = 0$, а уравнение нормальной прямой к поверхности в точке M_0: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-11} = \frac{z+2}{-5}$.

Ответ. Касательная плоскость $4x-11y-5z-44 = 0$; нормальная прямая $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-11} = \frac{z+2}{-5}$.

6.3. Неявно заданная поверхность

Другой способ определить поверхность в $\mathbb{R}^3$ — задать её с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, где F — непрерывная функция в некоторой области $U \in \mathbb{R}^3$.

В этом случае поверхность понимают как геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют указанному уравнению.

Такую поверхность называют *неявно заданной*.

Поверхность, являющуюся графиком непрерывной функции $z=f(x,y)$, можно рассматривать как частный случай неявно заданной поверхности, поскольку

$$z = f(x, y) \Leftrightarrow z - f(x, y) = 0.$$

Далее полагаем, что функция $F(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема в U.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ неявно заданной поверхности называется её *неособой точкой*, если $\operatorname{grad} F(M_0) \neq 0$.

В окрестности неособой точки неявно заданную поверхность можно представить как график некоторой функции двух переменных. Действительно, пусть, например, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда из теоремы о неявной функции следует, что в достаточно малой окрестности точки M_0 уравнение $F(x, y, z) = 0$ однозначно разрешимо относительно z и определяет z как непрерывно дифференцируемую функцию переменных x и y: $z = f(x, y)$.

Таким образом, можно утверждать, что неявно заданная поверхность в своей неособой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет касательную плоскость:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Подставляя в это уравнение частные производные функции $f(x, y)$, вычисленные по формулам

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

получим для неявно заданной поверхности уравнение касательной плоскости в виде:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Соответственно уравнение нормальной прямой

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пример 18. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой в точке $M_0(5, -2, 3)$ к поверхности S, заданной неявно уравнением $x - \frac{1}{y + 1} - z - 3 = 0$.

Решение. Функция $F(x, y, z) = x - \frac{1}{y+1} - z - 3$, задающая поверхность, непрерывно дифференцируема в окрестности точки M_0, вектор

$$\operatorname{grad} F(5, -2, 3) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \neq 0,$$

поэтому точка M_0 — неособая и в ней у поверхности S имеется касательная плоскость

$$1 \cdot (x - 5) + 1 \cdot (y + 2) + (-1) \cdot (z - 3) = 0, \quad \text{или} \quad x + y - z = 0$$

и нормальная прямая

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

Ответ. Нормальная прямая $\frac{x-5}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$; касательная плоскость $x+y-z=0$.

6.4. Кривая, заданная как пересечение поверхностей

Кривая Γ в пространстве $\mathbb{R}^3$ может быть задана как пересечение двух поверхностей. Если поверхности S и Σ заданы неявно уравнениями

$$S: F(x,y,z)=0, \qquad \Sigma: G(x,y,z)=0,$$

то Γ есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{8}$$

Определение. Точка $M_0\,(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ называется *неособой*, если векторы $\operatorname{grad} F\,(M_0)$ и $\operatorname{grad} G\,(M_0)$ не коллинеарны (рис. 4).

Если M_0 — неособая точка кривой, то среди миноров второго порядка матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix}_{M_0}$$

есть не равный нулю. Предположим, что $\frac{D\,(F,G)}{D\,(x,y)}\neq 0$. Тогда на основании теоремы о системе неявных функций заключаем, что в некоторой окрестности точки M_0 система уравнений (8) разрешима относительно переменных x и y, то есть равносильна системе вида:

$$\begin{cases} x=x(z) \\ y=y(z) \\ z=z. \end{cases} \tag{9}$$

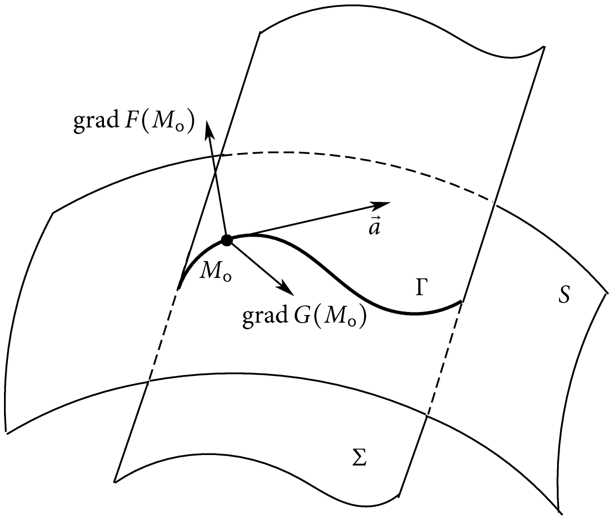

Рис. 4

Следовательно, локально, в окрестности неособой точки, кривую Γ можно считать параметрической кривой, z — её параметр.

Заметим, что для полученной параметрической кривой точка M_0 также является неособой, так как

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = (x'_z, y'_z, 1) \neq 0.$$

Обратно, параметрическая кривая $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ в окрестности своей неособой точки может быть задана системой вида (8). Действительно, из условия

$$\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} = (x'_t(t_0), y'_t(t_0), z'_t(t_0)) \neq 0$$

следует, что хотя бы одна из производных отлична от нуля. Пусть, например, $z'_t(t_0) \neq 0$. Воспользуемся теоремой об обратной функции, которая утверждает, что в некоторой окрестности точки $z_0 = z(t_0)$ определена обратная функция $t = t(z)$, и исключим параметр t из системы (9) параметрических уравнений кривой. Получим равносильную систему вида (8):

$$\begin{cases} x - x(t(z)) = 0, \\ y - y(t(z)) = 0. \end{cases}$$

Из сказанного следует, что в окрестности неособой точки рассмотренные способы задания кривой — параметрический и как пересечение двух поверхностей равносильны.

Отсюда заключаем, что в неособой точке M_0 кривая, заданная пересечением поверхностей, имеет касательную. Чтобы найти уравнение касательной прямой, достаточно заметить следующее. Поскольку кривая расположена и на поверхности S, и на поверхности Σ, то искомая касательная принадлежит и касательной плоскости к поверхности S в точке M_0, и касательной плоскости к поверхности Σ в точке M_0, то есть является пересечением этих касательных плоскостей. Тогда направляющим вектором касательной прямой может служить векторное произведение (см. рис. 4)

$$\vec{a} = [\operatorname{grad} F(M_0), \operatorname{grad} G(M_0)] \neq 0.$$

Уравнение касательной к кривой, определяемой системой (8), в неособой точке имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{M_0}}, \tag{10}$$

а уравнение нормальной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F'_x(x_0, y_0, z_0) & F'_y(x_0, y_0, z_0) & F'_z(x_0, y_0, z_0) \\ G'_x(x_0, y_0, z_0) & G'_y(x_0, y_0, z_0) & G'_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Пример 19. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M_0(1, 2, 3)$ к кривой, заданной как пересечение двух поверхностей $S\colon x^2 - 6xy + y^2 + 3z - 2 = 0$ и $\Sigma\colon 4x^2 + y^2 - 4\sqrt{z+1} = 0$.

Решение. Для задающих поверхности функций $F(x, y, z) = x^2 - 6xy + y^2 + 3z - 2$ и $G(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 4\sqrt{z+1}$ имеем

$$\operatorname{grad} F(M_0) = (-10, -2, 3) \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} G(M_0) = (8, 4, -1),$$

и $\vec{a}$ может быть найден как их векторное произведение:

$$\vec{a} = [\operatorname{grad} F, \operatorname{grad} G] = (-10, 14, -24) \neq 0.$$

Следовательно, точка M_0 — неособая точка кривой. Применяя формулы (10) и (11), получим уравнения касательной прямой и нормальной плоскости:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{12},$$
$$5(x-1) - 7(y-2) + 12(z-3) = 0.$$

Ответ. Касательная прямая $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{12}$; нормальная плоскость $5x - 7y + 12z - 27 = 0$.

Пример 20. Найти производную функции $u(x, y, z) = \frac{xyz^2}{x-y}$ по направлению вектора нормали $\overrightarrow{N}$ к поверхности $S\colon 6x^2 - 4xy - 8xz + 9y^2 - 4yz + 12z^2 + 30y - 44z - 21 = 0$ в точке $M_0(-1, 1, 1)$, если вектор $\overrightarrow{N}$ образует острый угол с осью Oz.

Решение. Производная дифференцируемой функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\overrightarrow{N}$ может быть вычислена по формуле $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{N}}(M_0) = \left(\operatorname{grad} u(M_0), \frac{1}{|\overrightarrow{N}|}\overrightarrow{N}\right)$, (см. (1), стр. 13).

Для поверхности, неявно заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, за вектор нормали $\overrightarrow{N}$ в ее неособой точке можно принять $\operatorname{grad} F(M_0)$. Так как $F(x,y,z)=6x^2-4xy-8xz+9y^2-4yz+12z^2+30y-44z-21$, то $\operatorname{grad} F(M_0)=$ $=-24\vec{i}+48\vec{j}-16\vec{k}$. Поскольку $(\overrightarrow{N},\vec{k})<0$, то в качестве вектора единичной нормали следует взять $\vec{n}=-\frac{1}{|\overrightarrow{N}|}\overrightarrow{N}=\left(\frac{3}{7},-\frac{6}{7},\frac{2}{7}\right)$.

Вычислим

$$\operatorname{grad} u(x,y,z)=-\frac{y^2z^2}{(x-y)^2}\vec{i}+\frac{x^2z^2}{(x-y)^2}\vec{j}+2\frac{xyz}{x-y}\vec{k},$$
$$\operatorname{grad} u(M_0)=-\frac{1}{4}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}+\vec{k}.$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=(\operatorname{grad} u(M_0),\vec{n})=-\frac{1}{28}$.

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(M_0)=-\frac{1}{28}$.

7. Задания к типовому расчету

Задача 1. Можно ли доопределить функцию $f(x,y)$ в точке $M_0(0,0)$ так, чтобы она стала в этой точке непрерывной.

1. $f(x,y)=\frac{x\sin xy}{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y)=(e^{xy}-1)\cos\frac{1}{x}$.
3. $f(x,y)=\frac{\sin xy}{x\sin y}$.
4. $f(x,y)=\cos(y\operatorname{arcctg}\frac{y}{x})$.
5. $f(x,y)=\frac{\sin x}{y}$.
6. $f(x,y)=\frac{\operatorname{arctg} xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
7. $f(x,y)=\frac{x^2\sin\frac{1}{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
8. $f(x,y)=\frac{xy}{\sin(x+y)}$.
9. $f(x,y)=\sin y\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.
10. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$.
11. $f(x,y)=\frac{\sin xy}{|x|+|y|}$.
12. $f(x,y)=\frac{1-\cos x^2y}{x^4+y^2}$.
13. $f(x,y)=\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
14. $f(x,y)=\frac{xy}{\sin(|x|+|y|)}$.
15. $f(x,y)=\operatorname{arctg} y\sin\frac{1}{x}$.
16. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{xy}$.
17. $f(x,y)=\frac{3+\sqrt[3]{y^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{2-\sin(x^2+y^2)}$.
18. $f(x,y)=\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}$.

19. $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$.

20. $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$.

21. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{\operatorname{arctg}\frac{1}{xy}}$.

22. $f(x,y) = \cos\dfrac{xy}{|x|+|y|}$.

23. $f(x,y) = (1+x)^{1/y}$.

24. $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{|x|+|y|}$.

25. $f(x,y) = \sin\dfrac{x^6+y^6}{x^4+y^4}$.

26. $f(x,y) = \cos\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

27. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\ln(1+xy)}$.

28. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{2+y\sin\frac{1}{x}}$.

29. $f(x,y) = \dfrac{y\sin x}{x\sin y}$.

30. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$.

Задача 2. Найти частные производные первого порядка функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ и исследовать функцию на дифференцируемость в этой точке.

1. $f(x,y) = \cos\left(1+2\sqrt{|xy|}\right), \quad M_0(0,0)$.

2. $f(x,y) = \dfrac{1}{2+\sqrt[3]{x^2y^2}}, \quad M_0(0,0)$.

3. $f(x,y) = \sqrt[3]{y}\sin\sqrt[3]{x^2y}, \quad M_0(0,0)$.

4. $f(x,y) = x+\sqrt{|x-1|\cdot(y+3)}, \quad M_0(1,-3)$.

5. $f(x,y) = \ln\left(2+\sqrt[3]{x^3+y^3}\right), \quad M_0(0,0)$.

6. $f(x,y) = |x|\arcsin\sqrt{|y+1|}, \quad M_0(0,-1)$.

7. $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x\sqrt[3]{y-1}}, \quad M_0(0,1)$.

8. $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}\right), & \text{если } xy\neq 0, \\ 0, & \text{если } xy=0, \end{cases} \quad M_0(0,0)$.

9. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5-y^5}{x^4+y^4}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0, \end{cases} \quad M_0(0,0)$.

10. $f(x,y) = \cos\sqrt[3]{x(y-1)^2}, \quad M_0(0,1)$.

11. $f(x,y) = y+\sqrt{|(x+2)(y-1)|}, \quad M_0(-2,1)$.

12. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+|(x+1)(y+1)|}, \quad M_0(-1,-1)$.

13. $f(x,y) = \operatorname{tg}\sqrt[5]{x(y^3-1)}, \quad M_0(0,1).$

14. $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+y}\cos\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right), & \text{если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } xy = 0, \end{cases} \quad M_0(0,0).$

15. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases} \quad M_0(0,0).$

16. $f(x,y) = \ln\left(2+\sqrt{|xy|}\right), \quad M_0(0,0).$

17. $f(x,y) = \sqrt[3]{x-1}\operatorname{arctg}|y|, \quad M_0(1,0).$

18. $f(x,y) = \sin\sqrt[5]{x^5+y^5}, \quad M_0(0,0).$

19. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2-4)\sqrt[3]{y}\cos\dfrac{x^2}{y}, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases} \quad M_0(2,0).$

20. $f(x,y) = \dfrac{1}{2+\sqrt{|x^3(y-1)|}}, \quad M_0(0,1).$

21. $f(x,y) = x + \sqrt[5]{y(x-2)^3}, \quad M_0(2,0).$

22. $f(x,y) = \sqrt[7]{x}\left(\sqrt[3]{1+y}-1\right), \quad M_0(0,0).$

23. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-2y^4}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases} \quad M_0(0,0).$

24. $f(x,y) = \operatorname{tg}\left(2+\sqrt{x^4+y^4}\right), \quad M_0(0,0).$

25. $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|}\sin\left(\dfrac{y}{x}+1\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad M_0(0,0).$

26. $f(x,y) = \left(e^{|x|}-1\right)\sqrt[3]{y-1}, \quad M_0(0,1).$

27. $f(x,y) = \sin\left(3+\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt{|y-2|}\right), \quad M_0(0,2).$

28. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases} \quad M_0(0,0).$

29. $f(x,y) = y\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right), \quad M_0(0,0).$

30. $f(x,y) = \dfrac{x}{1+(x-2)|y-1|}, \quad M_0(2,1).$

Задача 3. Для отображений $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ и $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ найти матрицы Якоби композиции $\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ в точке $M_0(u_0, v_0)$ непосредственно и композиции $\mathbf{\Psi} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ — с помощью теоремы о дифференцировании композиции.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - 5y - 3z, 2xy - 5z^2)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (\operatorname{arctg}(u + v), \cos v, -\operatorname{arctg}(-u + v))$;
   $M_0(-3, 3)$, $N_0(5, 2, -3)$.
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz^2, 5x - 4y - 2z)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (\operatorname{arctg}(u + v), \cos u, e^{u-v})$;
   $M_0(-3, 5)$, $N_0(2, 2, 5)$.
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x - 3y + 4z, x^2yz)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (\cos(-u + v), \sin(u + v), \ln(u^2 + 1))$;
   $M_0(4, 2)$, $N_0(3, 4, 4)$.
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + 5y + 4z, 4x^2 + 5yz)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (e^u, \cos(u + v), -\sin(-u + v))$;
   $M_0(5, -4)$, $N_0(-3, -3, 2)$.
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy - 5z^2, 5x + 5y + 2z)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (\sqrt{v^2 + 1}, \operatorname{arctg}(u + v), \cos(-u + v))$;
   $M_0(2, 4)$, $N_0(-3, 3, 2)$.
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + 5z^2, 5x + 2y + 5z)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (\sin(u + v), -\operatorname{arctg}(-u + v), \ln(v^2 + 1))$;
   $M_0(-3, -2)$, $N_0(5, 5, -2)$.
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + 2y + 2z, 4xy + 4z^2)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (e^{u-v}, \sqrt{u^2 + 1}, e^{u+v})$;
   $M_0(-5, -5)$, $N_0(4, 4, -5)$.
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2 - 3yz, 5x + 4y + 2z)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (\sin(u + v), -\operatorname{arctg}(-u + v), \cos u)$;
   $M_0(3, 3)$, $N_0(-5, -5, -4)$.
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + 5y - 4z, xy^2z)$,
   $\mathbf{G}(u, v) = (\sin(u + v), \cos u, -\operatorname{arctg}(-u + v))$;
   $M_0(5, -3)$, $N_0(-5, -5, -5)$.
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (5x + 4y - 5z, x^2yz)$,
    $\mathbf{G}(u, v) = (\operatorname{arctg}(u + v), \operatorname{arctg} v, -\sin(-u + v))$;
    $M_0(4, -3)$, $N_0(-5, -3, -5)$.

11. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x^2 + 2yz, 5x + 5y + 2z)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\cos v, \cos(-u+v), \operatorname{arctg}(u+v))$;
$M_0(-4,-5)$, $N_0(-3,-5,-2)$.

12. $\mathbf{F}(x,y,z) = (xyz^2, 5x - 2y + 3z)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (-\sin(-u+v), \sin(u+v), \sqrt{u^2+1})$;
$M_0(-5,3)$, $N_0(-5,-5,5)$.

13. $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z, 2x + 3y + 2z)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\sin(u+v), e^{u-v}, \sin u)$;
$M_0(-3,3)$, $N_0(-4,-5,3)$.

14. $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^2 - 3yz, 3x - 2y - 5z)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\operatorname{arctg}(u+v), \sqrt{u^2+1}, \cos(-u+v))$;
$M_0(-2,2)$, $N_0(-2,5,-2)$.

15. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + 3y + 4z, xyz^2)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (e^{u+v}, e^{v}, e^{u-v})$;
$M_0(3,5)$, $N_0(-2,-2,-5)$.

16. $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x + 2y + 5z, xy^2z)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\sin(u+v), e^{u-v}, \sin u)$;
$M_0(3,2)$, $N_0(-2,-4,5)$.

17. $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z, 3x + 5y - 4z)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\operatorname{arctg}(u+v), \ln(u^2+1), \cos(-u+v))$;
$M_0(-2,2)$, $N_0(-5,3,2)$.

18. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x - 2y - 2z, 3x^2 + 3yz)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\operatorname{arctg}(u+v), -\operatorname{arctg}(-u+v), \ln(u^2+1))$;
$M_0(-5,-5)$, $N_0(2,-2,3)$.

19. $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x - 4y + 5z, 3xy - 3z^2)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\operatorname{arctg}(u+v), -\sin(-u+v), \cos u)$;
$M_0(-2,3)$, $N_0(5,3,4)$.

20. $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x + 3y - 5z, 5x^2 + 4yz)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (\ln(v^2+1), \cos(u+v), \cos(-u+v))$;
$M_0(-5,5)$, $N_0(-3,4,4)$.

21. $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z, 3x - 5y - 3z)$,
$\mathbf{G}(u,v) = (-\operatorname{arctg}(-u+v), \cos u, \cos(u+v))$;
$M_0(4,3)$, $N_0(-5,-5,4)$.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = (5x - 3y + 2z, 5xy - 5z^2)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (-\operatorname{arctg}(-u + v), \sqrt{u^2 + 1}, \operatorname{arctg}(u + v))$;
$M_0(4, -5)$, $N_0(3, -5, 3)$.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x - 4y + 2z, 2x^2 + 5yz)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (e^{u-v}, \sin(u + v), \cos v)$;
$M_0(4, 5)$, $N_0(5, 2, -4)$.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz^2, 5x - 5y + 4z)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (-\sin(-u + v), \sin(u + v), \sin v)$;
$M_0(5, -5)$, $N_0(4, -3, 4)$.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x - 4y - 5z, xy^2z)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (\cos(u + v), e^v, e^{u-v})$;
$M_0(5, -5)$, $N_0(3, -4, -3)$.

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = (5x - 3y - 5z, xyz^2)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (\sin(u + v), \operatorname{arctg} u, e^{u-v})$;
$M_0(-5, -2)$, $N_0(-5, -5, 4)$.

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + 4y - 2z, xy^2z)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (e^{u-v}, \ln(v^2 + 1), \sin(u + v))$;
$M_0(-3, -3)$, $N_0(2, -3, -5)$.

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x - 2y + 3z, xy^2z)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (\cos u, \cos(-u + v), \cos(u + v))$;
$M_0(3, -5)$, $N_0(-4, 5, -2)$.

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2z, 5x + 4y - 2z)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (\operatorname{arctg} u, e^{u-v}, \sin(u + v))$;
$M_0(-2, -5)$, $N_0(3, 2, 4)$.

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2z, 4x + 5y + 2z)$,
$\mathbf{G}(u, v) = (\operatorname{arctg} u, -\sin(-u + v), e^{u+v})$;
$M_0(-4, 3)$, $N_0(-2, -5, -4)$.

Задача 4.

1. Большее основание равнобедренной трапеции равно 63.7 ± 0.2 см, высота 23.8 ± 0.1 см, острый угол $48 \pm 1^\circ$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
2. Основания равнобедренной трапеции равны 66.5 ± 0.2 см и 30.1 ± 0.1 см, острый угол $58 \pm 1^\circ$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.

3. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 28.1 ± 0.2 см, наклонная боковая сторона 23.5 ± 0.1 см, острый угол $47 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
4. Большее основание равнобедренной трапеции равно 85.5 ± 0.2 см, боковая сторона 18.9 ± 0.1 см, тупой угол $147 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
5. Большее основание прямоугольной трапеции равно 23.8 ± 0.2 см, высота 14.3 ± 0.1 см, острый угол $37 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
6. Стороны треугольника равны 73.9 ± 0.2 см и 32.2 ± 0.1 см, а угол между ними $128 \pm 1°$. Найти площадь треугольника и оценить абсолютную и относительную погрешность.
7. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 37.2 ± 0.2 см, высота 14.3 ± 0.1 см, острый угол $25 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
8. Основания равнобедренной трапеции равны 92.7 ± 0.2 см и 33.2 ± 0.1 см, тупой угол $118 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
9. Стороны треугольника равны 66.5 ± 0.2 см и 29.7 ± 0.1 см, а угол между ними $55 \pm 1°$. Найти медиану, проведенную к большей стороне треугольника, и оценить абсолютную и относительную погрешность.
10. Стороны параллелограмма равны 47.6 ± 0.2 см и 32.4 ± 0.1 см, острый угол $33 \pm 1°$. Найти площадь параллелограмма и оценить абсолютную и относительную погрешность.
11. Основания прямоугольной трапеции равны 35.1 ± 0.2 см и 14.7 ± 0.1 см, тупой угол $139 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
12. Большее основание прямоугольной трапеции равно 46.5 ± 0.2 см, наклонная боковая сторона 46.8 ± 0.1 см, острый угол $47 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
13. Стороны параллелограмма равны 54.9 ± 0.2 см и 47.6 ± 0.1 см, тупой угол $158 \pm 1°$. Найти меньшую диагональ параллелограмма и оценить

абсолютную и относительную погрешность.

14. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 45.6 ± 0.2 см, наклонная боковая сторона 23.3 ± 0.1 см, тупой угол $122 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
15. Большее основание прямоугольной трапеции равно 48.7 ± 0.2 см, высота 24.7 ± 0.1 см, тупой угол $110 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
16. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 43.9 ± 0.2 см, высота 10.1 ± 0.1 см, острый угол $12 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
17. Стороны параллелограмма равны 31.6 ± 0.2 см и 23.9 ± 0.1 см, острый угол $59 \pm 1°$. Найти большую диагональ параллелограмма и оценить абсолютную и относительную погрешность.
18. Большее основание равнобедренной трапеции равно 48.8 ± 0.2 см, высота 23.6 ± 0.1 см, тупой угол $129 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
19. Стороны параллелограмма равны 43.7 ± 0.2 см и 35.6 ± 0.1 см, острый угол $68 \pm 1°$. Найти меньшую диагональ параллелограмма и оценить абсолютную и относительную погрешность.
20. Большее основание прямоугольной трапеции равно 76.6 ± 0.2 см, наклонная боковая сторона 35.9 ± 0.1 см, тупой угол $126 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
21. Стороны треугольника равны 90.9 ± 0.2 см и 23.5 ± 0.1 см, а угол между ними $42 \pm 1°$. Найти площадь треугольника и оценить абсолютную и относительную погрешность.
22. Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 33.2 ± 0.2 см, высота 17.7 ± 0.1 см, тупой угол $147 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.
23. Основания прямоугольной трапеции равны 44.7 ± 0.2 см и 34.2 ± 0.1 см, острый угол $57 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.

24. Стороны параллелограмма равны 25.7 ± 0.2 см и 14.8 ± 0.1 см, тупой угол $129 \pm 1°$. Найти площадь параллелограмма и оценить абсолютную и относительную погрешность.

25. Большее основание равнобедренной трапеции равно 95.5 ± 0.2 см, боковая сторона 11.3 ± 0.1 см, острый угол $73 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.

26. Стороны треугольника равны 65.1 ± 0.2 см и 55.7 ± 0.1 см, а угол между ними $171 \pm 1°$. Найти третью сторону треугольника и оценить абсолютную и относительную погрешность.

27. Стороны треугольника равны 79.4 ± 0.2 см и 27.5 ± 0.1 см, а угол между ними $33 \pm 1°$. Найти третью сторону треугольника и оценить абсолютную и относительную погрешность.

28. Стороны параллелограмма равны 37.4 ± 0.2 см и 34.7 ± 0.1 см, тупой угол $167 \pm 1°$. Найти большую диагональ параллелограмма и оценить абсолютную и относительную погрешность.

29. Стороны треугольника равны 82.5 ± 0.2 см и 19.4 ± 0.1 см, а угол между ними $143 \pm 1°$. Найти медиану, проведенную к большей стороне треугольника, и оценить абсолютную и относительную погрешность.

30. Большее основание равнобедренной трапеции равно 85.5 ± 0.2 см, боковая сторона 18.9 ± 0.1 см, тупой угол $147 \pm 1°$. Найти площадь трапеции и оценить абсолютную и относительную погрешность.

Задача 5. Найти второй дифференциал функции $f(x, y, z)$.

1. $f(x,y,z) = e^{\frac{zxy}{zx-y^2}}$.
2. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{zxy}{z^2-yx}\right)$.
3. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{z^2yx}{x-y}\right)$.
4. $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{z^2yx}{x-y}+1\right)$.
5. $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{zxy}{z^2-yx}+1\right)$.
6. $f(x,y,z) = e^{\frac{zxy}{z^2-y^2}}$.
7. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{xyz}{x-y}\right)$.
8. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{zxy}{x^2-z^2}\right)$.
9. $f(x,y,z) = \sin\left(\frac{yzx}{x^2-zy}\right)$.
10. $f(x,y,z) = \sin\left(\frac{yzx}{x^2-y^2}\right)$.
11. $f(x,y,z) = \sin\left(\frac{z^2yx}{x-y}\right)$.
12. $f(x,y,z) = \arcsin\left(\frac{xyz}{x-y}\right)$.

13. $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{zyx}{x^2-z^2}+1\right)$.

14. $f(x,y,z)=\cos\left(\frac{zyx}{x^2-y^2}\right)$.

15. $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{zxy}{x^2-zy}\right)$.

16. $f(x,y,z)=\cos\left(\frac{xyz}{x^2-z^2}\right)$.

17. $f(x,y,z)=\arcsin\left(\frac{x^2yz}{x-y}\right)$.

18. $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2yz}{x-y}\right)$.

19. $f(x,y,z)=\arcsin\left(\frac{zyx}{x^2-y^2}\right)$.

20. $f(x,y,z)=\sin\left(\frac{zyx}{z^2-yx}\right)$.

21. $f(x,y,z)=\cos\left(\frac{zyx}{x^2-zy}\right)$.

22. $f(x,y,z)=\sin\left(\frac{zyx}{x^2-z^2}\right)$.

23. $f(x,y,z)=e^{\frac{zyx^2}{y-z}}$.

24. $f(x,y,z)=\cos\left(\frac{zyx^2}{y-z}\right)$.

25. $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{x^2yz}{x-y}\right)$.

26. $f(x,y,z)=\sin\left(\frac{zyx}{x^2-z^2}\right)$.

27. $f(x,y,z)=\cos\left(\frac{x^2yz}{x-y}\right)$.

28. $f(x,y,z)=\cos\left(\frac{xyz}{x-y}\right)$.

29. $f(x,y,z)=\sin\left(\frac{zyx}{x^2-zy}\right)$.

30. $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{xyz}{x-y}\right)$.

Задача 6. Используя известные разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, разложить функцию $f(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ до $o(\rho^3)$, где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

1. $f(x,y)=\sqrt{x+\sin y}$, $x_0=1$, $y_0=0$.
2. $f(x,y)=\frac{x}{1+\operatorname{sh} y}$, $x_0=0$, $y_0=0$.
3. $f(x,y)=\sqrt[3]{1+x+xy+y^2}$, $x_0=0$, $y_0=0$.
4. $f(x,y)=\frac{x}{\operatorname{ch} y}$, $x_0=0$, $y_0=0$.
5. $f(x,y)=\frac{e^x}{x+y}$, $x_0=0$, $y_0=1$.
6. $f(x,y)=(1-x+y)^{-2}$, $x_0=0$, $y_0=0$.
7. $f(x,y)=\frac{\sin x}{\cos y}$, $x_0=0$, $y_0=0$.
8. $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$, $x_0=1$, $y_0=0$.
9. $f(x,y)=\frac{1+x-y}{1-x+y}$, $x_0=0$, $y_0=0$.

10. $f(x,y) = \sin\left(x + y^2\right)$, $x_0 = 1/2\,\pi$, $y_0 = 0$.

11. $f(x,y) = \sqrt{y + \cos x}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

12. $f(x,y) = \ln\left(e + ye^x\right)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

13. $f(x,y) = \operatorname{ch}\left(x - y^2\right)$,1 $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

14. $f(x,y) = e^{e^{x+y}-1}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

15. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{y}}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

16. $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

17. $f(x,y) = \ln\left(1 + \operatorname{sh}(x+y)\right)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

18. $f(x,y) = \dfrac{y}{\cos x}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

19. $f(x,y) = \ln\left(y + x^2\right)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

20. $f(x,y) = \sqrt[3]{y + \operatorname{sh} x}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

21. $f(x,y) = \dfrac{x}{1-x-y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

22. $f(x,y) = e^{\sin(x+y)}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

23. $f(x,y) = \ln\left(1 + \sin(x-y)\right)$, $x_0 = 2$, $y_0 = 2$.

24. $f(x,y) = \sin\left(y + x^2\right)$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

25. $f(x,y) = \ln\left(\cos(x-y)\right)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

26. $f(x,y) = \sqrt[4]{2 - x + 2\,y + xy}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

27. $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos(x+y)}$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

28. $f(x,y) = \dfrac{e^y}{(x-1)^2}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$.

29. $f(x,y) = \sqrt[3]{\cos(x-y)}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

30. $f(x,y) = \ln\left(y + \operatorname{ch} x\right)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Задача 7. Используя формулу Тейлора, разложить функцию $u = u(x,y)$ по степеням $x - x_0$, $y - y_0$.

1. $u = 2x^4 - 2x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 4x^3 + 2xy - x - 3;\quad x_0 = 1,\ y_0 = -3.$
2. $u = -4x^4 - 4x^2y^2 - 3xy^3 - y^4 + x^3 - x^2y + 2y^3 - xy - 4x;\quad x_0 = 2,\ y_0 = -1.$
3. $u = -3x^4 - xy^3 - 4xy^2 + y^3 + 3x;\quad x_0 = -2,\ y_0 = -2.$

4. $u = -x^4 - xy^3 + 3y^4 - 4x^2y - y; \quad x_0 = 1,\ y_0 = 4.$

5. $u = 3x^4 - 3x^2y - xy^2 + 4y^3 - x^2 - 3xy - 4y^2 - 2x - 1; \quad x_0 = 2,\ y_0 = -3.$

6. $u = 3x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + y^4 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - xy - 3; \quad x_0 = -4,\ y_0 = 4.$

7. $u = -3x^4 + 4x^3y + xy^3 + 2y - 2; \quad x_0 = -3,\ y_0 = -3.$

8. $u = x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 + 3x^3 - xy^2 - 4y^3 + 3xy - 4x; \quad x_0 = -4,\ y_0 = -4.$

9. $u = -x^4 + 3x^2y^2 + 3x^3 + x^2y - 2xy - 2y^2; \quad x_0 = 1,\ y_0 = 2.$

10. $u = -2x^4 - 2x^3y - 3xy^3 - 2y^4 + x^2y + xy^2 - y^3 + 2xy; \quad x_0 = 2,\ y_0 = 4.$

11. $u = -2x^4 + 3x^3y + 4xy^3 - 2x^3 - 4x^2y + 3x^2 - 2xy; \quad x_0 = -1,\ y_0 = 4.$

12. $u = 4x^4 - x^3y - 4x^2y^2 + 2y^3 + 4xy - 1; \quad x_0 = -1,\ y_0 = -4.$

13. $u = -x^4 + 4x^2y^2 - 2xy^3 - 4y^2 + 1; \quad x_0 = -2,\ y_0 = 4.$

14. $u = -2x^4 + y^4 + 4x^3 + 4x^2 + xy; \quad x_0 = -1,\ y_0 = -1.$

15. $u = -3x^4 - 4x^3y - 4y^3 + 4y^2 - 1; \quad x_0 = -4,\ y_0 = 3.$

16. $u = 2x^4 + 2x^3y - x^2y^2 - 2x^2 + 3x; \quad x_0 = 1,\ y_0 = -2.$

17. $u = -x^4 - 3x^2y^2 - 2xy^3 + x^3 - xy^2 - 4x^2 + 2y^2 - 1; \quad x_0 = 1,\ y_0 = 1.$

18. $u = -4x^4 - 4x^2y^2 + 4xy^3 - 2y^4 - x - 4; \quad x_0 = -2,\ y_0 = 4.$

19. $u = -2x^4 + x^3y + 2x^2y^2 - 3xy^3 - 4xy^2 - 3x^2 - 3xy + 3; \quad x_0 = 2,\ y_0 = -4.$

20. $u = -2x^4 - 3xy^3 - 4x^2y - 3y^3 - 3x; \quad x_0 = -3,\ y_0 = 3.$

21. $u = 4x^4 + xy^2 - 2y^3 - x^2 - 3xy; \quad x_0 = -3,\ y_0 = 2.$

22. $u = -x^4 - 3x^3y + 4y^4 - 2xy^2 - x^2; \quad x_0 = 1,\ y_0 = 4.$

23. $u = 3x^4 - 4y^4 + 2y^3 + 3x^2 + 3x - 4; \quad x_0 = 4,\ y_0 = 2.$

24. $u = -2x^4 - 4y^4 - 3xy^2 - 2xy - 4x + 3; \quad x_0 = -2,\ y_0 = 2.$

25. $u = -2x^4 - 4x^2y^2 - 2x^2y + xy + 4x + 2y; \quad x_0 = -3,\ y_0 = 2.$

26. $u = -4x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - 3xy^3 - 4x^2y - x - 3; \quad x_0 = 4,\ y_0 = -4.$

27. $u = -3x^4 - 4xy^3 - x^2 + 4y^2 - 4y; \quad x_0 = 1,\ y_0 = -1.$

28. $u = 2x^4 - 4x^3y - 3xy - 4y^2 - y; \quad x_0 = 1,\ y_0 = -2.$

29. $u = x^4 - x^3 - 3x^2y - y^2 + 4x - 2y + 1; \quad x_0 = -3,\ y_0 = -2.$

30. $u = -2x^4 + 4x^3y + 3x^2y + 4y^3 - x^2 - 4xy - 3y; \quad x_0 = 1,\ y_0 = 2.$

Задача 8. Для функции $z = z(x, y)$, неявно заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, найти d^2z в точке $M(x_0, y_0)$, если $z(x_0, y_0) = z_0$.

1. $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 6 + 3yz + z$; $\quad x_0 = 0,\ y_0 = 3,\ z_0 = -4.$

2. $F(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + z^2 + 1 + 12xz + 5yz + 9z$; $\quad x_0 = -4,\ y_0 = 5,\ z_0 = 2.$

3. $F(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + z^2 - 9 - 3yz + 2z$; $\quad x_0 = 0,\ y_0 = 3,\ z_0 = -2.$

4. $F(x,y,z) = -y^2 + 2yz + 3x^2 + 6xz + z^2 + z$; $\quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1.$

5. $F(x,y,z) = 2y^2 + yz - 2x^2 + z^2 + 3z - 32$; $\quad x_0 = 0,\ y_0 = 2,\ z_0 = -8.$

6. $F(x,y,z) = -y^2 - yz + 6x^2 - 3xz + z^2 - 14$; $\quad x_0 = 1,\ y_0 = -2,\ z_0 = 4.$

7. $F(x,y,z) = 7y^2 + 5x^2 + 2xz + z^2 - 3z - 5$; $\quad x_0 = -1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 5.$

8. $F(x,y,z) = -11y^2 + 2x^2 + 14xz + z^2 - 40z + 14$; $\quad x_0 = 7,\ y_0 = 0,\ z_0 = -2.$

9. $F(x,y,z) = 7y^2 + 8x^2 + 24xz + z^2 + 30z + 8$; $\quad x_0 = -3,\ y_0 = 0,\ z_0 = 2.$

10. $F(x,y,z) = 2y^2 + 3yz - 5x^2 + 5xz + z^2 + 12z + 30$; $\quad x_0 = -2,\ y_0 = 3,\ z_0 = -4.$

11. $F(x,y,z) = -7y^2 - 14yx + x^2 + 2xz + 3z^2 + 8z - 120$; $\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = -8.$

12. $F(x,y,z) = 2y^2 + 4yx + x^2 + 2xz + 3z^2 + 7z - 11$; $\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 1.$

13. $F(x,y,z) = 5y^2 + 10yx + x^2 + 2xz - 3z^2 + 7z + 16$; $\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 4.$

14. $F(x,y,z) = 3y^2 + 6yx + x^2 + 2xz + 7z^2 - 5z - 20$; $\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 2.$

15. $F(x,y,z) = -y^2 - 2yx + x^2 - 2xz + 5z^2 + 3z - 12$; $\quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ z_0 = -2.$

16. $F(x,y,z) = y^2 - 3yx + x^2 + xz - 2z^2 + 7z + 10$; $\quad x_0 = 2,\ y_0 = 3,\ z_0 = 5.$

17. $F(x,y,z) = 2y^2 + 3yx + x^2 + xz - 7z^2 + 13z - 8$; $\quad x_0 = 4,\ y_0 = -3,\ z_0 = 1.$

18. $F(x,y,z) = -y^2 + yx + x^2 + xz + 8z^2 - 30z - 45$; $\quad x_0 = -2,\ y_0 = -1,\ z_0 = 5.$

19. $F(x,y,z) = 3y^2 - 3yx + x^2 + xz - 7z^2 - 10z + 42$; $\quad x_0 = 6,\ y_0 = 3,\ z_0 = -3.$

20. $F(x,y,z) = y^2 + 3yx + x^2 + xz + 2z^2 - 4z - 35$; $\quad x_0 = 2,\ y_0 = -3,\ z_0 = 5.$

21. $F(x,y,z) = 4y^2 + 5yx + x^2 + xz - 5z^2 + 30z + 99$; $\quad x_0 = 8,\ y_0 = -5,\ z_0 = 9.$

22. $F(x,y,z) = -y^2 - yx + x^2 + xz + 6z^2 - 20z - 45$; $\quad x_0 = -2,\ y_0 = 1,\ z_0 = 5.$

23. $F(x,y,z) = 3y^2 + 4yx + x^2 + xz + z^2 - 15z + 32$; $\quad x_0 = 6,\ y_0 = -4,\ z_0 = 4.$

24. $F(x,y,z) = y^2 + 4yx + 2yz + 2x^2 + 3z^2 + 7z - 11$; $\quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1.$

25. $F(x,y,z) = y^2 + 10yx + 2yz + 5x^2 - 3z^2 + 7z + 16$; $\quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 4.$

26. $F(x,y,z) = -y^2 + yx - 4yz + 6x^2 + 2xz - z^2 - 3$; $\quad x_0 = 0,\ y_0 = -2,\ z_0 = 1.$

27. $F(x,y,z) = -y^2 + yx + 6yz + 2x^2 - 3xz - z^2 - 8$; $\quad x_0 = 0,\ y_0 = 3,\ z_0 = 1.$

28. $F(x,y,z) = -y^2 + yx + 2\,yz + 7\,x^2 - xz - z^2 + 5\,z - 5;\quad x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1.$

29. $F(x,y,z) = -4\,y^2 + 14\,yx + 7\,yz + x^2 + xz - z^2 + 5;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = -2.$

30. $F(x,y,z) = -y^2 + 20\,yx + 5\,yz + 2\,x^2 + xz - z^2 + 18;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = -4.$

Задача 9. Найти в точке $M(x_0, y_0)$ дифференциалы первого и второго порядков функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $F(x,y,u,v) = 0,\ G(x,y,u,v) = 0$, если $u(x_0,y_0) = u_0$, $v(x_0,y_0) = v_0$.

1. $F = u^2 + v + x - 2,\ G = v^2 + u + y - 1;\quad x_0 = 0,\ y_0 = -1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$
2. $F = u^2 + v + x - 1,\ G = uv + y - 1;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ u_0 = -1,\ v_0 = -1.$
3. $F = u + v + y,\ G = u^2 + v^2 + x + 1;\quad x_0 = -2,\ y_0 = -1,\ u_0 = 0,\ v_0 = 1.$
4. $F = u + v + x + y,\ G = u^2 + xv - 4;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = -2,\ v_0 = 0.$
5. $F = u - v - x - y - 1,\ G = uv - xy - 1;\quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 0.$
6. $F = u^2 - v^2 - x,\ G = u^2 + u - y - 3;\quad x_0 = 0,\ y_0 = -1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$
7. $F = u^2 - v - y + 1,\ G = uv + x - 1;\quad x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$
8. $F = u - v - y + 2,\ G = u^2 + v^2 - x;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = -1,\ v_0 = 0.$
9. $F = u - v - x + y + 1,\ G = u^2 - xv - 1;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 2,\ v_0 = 3.$
10. $F = u + v - x - y,\ G = uv - 2\,xy + 2;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 0,\ v_0 = 2.$
11. $F = u^2 + v - x - 2,\ G = v^2 - u + y + 1;\quad x_0 = 0,\ y_0 = -1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$
12. $F = u^2 - v + x,\ G = uv^2 - y - x + 2;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 0,\ v_0 = 1.$
13. $F = u - v + y + 1,\ G = u^2 - v^2 + x;\quad x_0 = -1,\ y_0 = -2,\ u_0 = 1,\ v_0 = 0.$
14. $F = u^2 + v - 2,\ G = v^2 + u + x + y;\quad x_0 = -1,\ y_0 = -1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$
15. $F = u - v + x - y + 2,\ G = u^2 - vy - 2;\quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 2,\ v_0 = 2.$
16. $F = u + v + x + y,\ G = uv + xy + 2;\quad x_0 = 0,\ y_0 = -1,\ u_0 = -1,\ v_0 = 2.$
17. $F = u^2 + v - y,\ G = uv + x + y;\quad x_0 = -1,\ y_0 = 1,\ u_0 = -1,\ v_0 = 0.$
18. $F = u + v - x,\ G = u^2 + v^2 - y;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 0,\ v_0 = 1.$
19. $F = u + v - x - 2,\ G = uv + xy - 1;\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ u_0 = 2,\ v_0 = 1.$
20. $F = u^2 - v + x,\ G = v^2 - u - y - 1;\quad x_0 = 0,\ y_0 = -1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$
21. $F = u + v + x + y - 2,\ G = v^2 + 2\,ux - 5;\quad x_0 = 2,\ y_0 = -2,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$

22. $F = u - v - y - 2,\ G = uv - xy - 3;\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ u_0 = 2,\ v_0 = 1.$

23. $F = u - v - x,\ G = u^2 - v^2 + y;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 0,\ v_0 = -1.$

24. $F = u^2 - v - 3,\ G = v^2 + u - x - y - 1;\quad x_0 = -1,\ y_0 = -1,\ u_0 = -2,\ v_0 = 1.$

25. $F = u + yv - 1,\ G = uv + x - 1;\quad x_0 = -1,\ y_0 = -1,\ u_0 = 2,\ v_0 = 1.$

26. $F = u - v + x,\ G = u^2 - v^2 - y;\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ u_0 = 0,\ v_0 = 1.$

27. $F = u + v - x - y + 2,\ G = u^2 + yv - 2;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 2,\ v_0 = -2.$

28. $F = u^2 + v - 2x,\ G = v^2 - u - 2y - 2;\quad x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$

29. $F = ux + yv - 3,\ G = uv - x - y;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ u_0 = 2,\ v_0 = 1.$

30. $F = u - v + x + y,\ G = uv + 2xy - 2;\quad x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ u_0 = 1,\ v_0 = 2.$

Задача 10. Преобразовать выражение $F = F(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy})$, где $z = z(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, к новым переменным u и v.

1. $F = \frac{1}{2}z''_{xy} + \frac{2}{x^6}z''_{yy} - \frac{2}{x^3}z''_{xy} + \frac{3}{x^4}z'_y;\quad u = y - x^{-2},\ v = x^2.$

2. $F = yz''_{yy} - \frac{x^2}{y}z''_{xx} + z'_y - \frac{x}{y}z'_x;\quad u = \sqrt{xy},\ v = \sqrt{\frac{y}{x}}.$

3. $F = z''_{xx} - z''_{yy};\quad u = \frac{1}{2}\sqrt{2x + 2y},\ v = \frac{1}{2}\sqrt{2x - 2y}.$

4. $F = x^4 yz''_{xx} + 2yx^2 z''_{xy} + yz''_{yy} + 2x^3 yx'_x;\quad u = \frac{1}{x} + y,\ v = \sqrt{y}.$

5. $F = 2\sqrt{x}z''_{xy} - \frac{1}{2}z''_{yy} - 2xz''_{xx} - z'_x;\quad u = \sqrt{x} + y,\ v = \sqrt{y}.$

6. $F = 2x^2y^2z''_{xy} - y^4z''_{yy} - 2x^2yz'_x;\quad u = x^{-1} + y^{-1},\ v = y.$

7. $F = \frac{1}{2}(z''_{xx} - z''_{yy}) + (x - y)(z'_x + z'_y);\quad u = x - y,\ v = \sqrt{x + y}.$

8. $F = 2xz''_{xx} - 2yz''_{yy} + z'_x - z'_y;\quad u = \sqrt{x} + \sqrt{y},\ v = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$

9. $F = xz''_{xx} - 2yz''_{xy} + y^3z''_{yy} + 2z'_x;\quad u = \frac{y}{xy - 1},\ v = y.$

10. $F = 2z''_{xx} + y^3z''_{xy};\quad u = x + y^{-2},\ v = y^2.$

11. $F = z''_{xx} - \frac{y^2}{x^2}z''_{yy} + \frac{1}{x}z'_x - \frac{y}{x^2}z'_y;\quad u = \sqrt{xy},\ v = \sqrt{\frac{x}{y}}.$

12. $F = z''_{xx} + \frac{1}{2y}z''_{xy};\quad u = (x - y^2)^{-1},\ v = y^2.$

13. $F = x^2 z''_{xx} + z''_{xy} + 2xz'_x;\quad u = x^{-1} + y,\ v = \sqrt{y}.$

14. $F = z''_{xy} + \frac{1}{2y} z''_{yy} - \frac{1}{2y^2} z'_y;\quad u = x,\ v = y^2 - x.$

15. $F = z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy};\quad u = x^2,\ v = x + y.$

16. $F = x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy};\quad u = xy,\ v = \sqrt{\frac{x}{y}}.$

17. $F = z''_{yy} - 4yz''_{xy} - \frac{1}{y} z'_y;\quad u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2,\ v = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x.$

18. $F = 4(x + y)\left(z''_{xx} + z''_{xy} + z''_{yy}\right) + 3(z'_x + z'_y);\quad u = x - y,\ v = \sqrt{x + y}.$

19. $F = 2xz''_{xx} + 2yz''_{yy} + z'_x + z'_y;\quad u = \sqrt{x} + \sqrt{y},\ v = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$

20. $F = x^4 z''_{xx} - x^2 y^2 z''_{xy} + 2x^3 z'_x;\quad u = x^{-1} + y^{-1},\ v = y.$

21. $F = 2z''_{yy} + \frac{1}{x} z''_{xy};\quad u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y,\ v = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y.$

22. $F = z''_{xx} - y^2 z''_{xy};\quad u = \frac{y}{xy - 1},\ v = y.$

23. $F = \frac{x^4}{y^2} z''_{xx} - 2x^2 z''_{xy} + y^2 z''_{yy};\quad u = x^{-1} + y^{-1},\ v = y.$

24. $F = 2z''_{xx} + 2z''_{xy} + \frac{z'_x + z'_y}{x + y};\quad u = x - y,\ v = \sqrt{x + y}.$

25. $F = \frac{z''_{xy} + z''_{xx}}{x + y} - \frac{z'_x + z'_y}{(x + y)^2};\quad u = (x + y)^2,\ v = \sqrt{x - y}.$

26. $F = \frac{1}{x^2} z''_{xx} + 4z''_{yy} - \frac{1}{x^3} z'_x;\quad u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y,\ v = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y.$

27. $F = x^4 z''_{xx} + x^2 y^2 z''_{xy} + 2x^3 z'_x;\quad u = x^{-1} - y^{-1},\ v = x^{-1} + y^{-1}.$

28. $F = 4xz''_{xx} - \frac{1}{4}\frac{z''_{yy}}{y^2} + 2z'_x;\quad u = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}y^2,\ v = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}y^2.$

29. $F = x^2 y^2 z''_{xy} + y^4 z''_{yy} + 2y^3 z'_y;\quad u = x^{-1} + y^{-1},\ v = x^{-1} - y^{-1}.$

30. $F = 2(x - y)\left(z''_{xy} - z''_{yy}\right) - z'_x + z'_y;\quad u = (x + y)^2,\ v = \sqrt{x - y}.$

Задача 11. Преобразовать дифференциальное уравнение, приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию.

1. $z'_x + (x - z)z'_y = x + z - 1;\quad u = x,\ v = x + z,\ w = x + y + z.$

2. $z'_x + (y - 1)z'_y = 1 - y;\quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

3. $z'_x + (y + z - 1)z'_y = x;\quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + z.$

4. $z'_x + (z - 2y)\, z'_y = x - 4y + 2z - 1; \quad u = x,\ v = x - 2y + z,\ w = x - y + z.$

5. $z'_x + (y + z)\, z'_y = x - y - z - 1; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

6. $z'_x + (y + z)\, z'_y = x - 1; \quad u = x,\ v = x + z,\ w = x + y + z.$

7. $z'_x + (x + 1)\, z'_y = -x - 3; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

8. $z'_x + (y + z + 1)\, z'_y = x - y - z - 2; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

9. $z'_x + (z - x)\, z'_y = x + z - 1; \quad u = x,\ v = x + z,\ w = x - y + z.$

10. $z'_x + (2y + z - 1)\, z'_y = 1 - 2y - z; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

11. $z'_x - (z - x)\, z'_y = 2x - 1; \quad u = x,\ v = x + z,\ w = x - y + z.$

12. $z'_x + (x + 1)\, z'_y = 2x; \quad u = x,\ v = x - 2y + z,\ w = x - y + z.$

13. $z'_x + (x - 2y - z)\, z'_y = 4y + 2z - 1; \quad u = x,\ v = x + 2y + z,\ w = x + y + z.$

14. $z'_x + (z - 1)\, z'_y = z - 1; \quad u = x,\ v = x - y + z,\ w = x + z.$

15. $z'_x + (x - 2)\, z'_y = 2x - 3; \quad u = x,\ v = x - 2y + z,\ w = x - y + z.$

16. $z'_x + (z - x)\, z'_y = 2x - 1; \quad u = x,\ v = x + z,\ w = x + y + z.$

17. $z'_x - (x - y - z)\, z'_y = 3x - y - z - 1; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

18. $z'_x + (y + z - x)\, z'_y = 2x - 1; \quad u = x,\ v = x - y + z,\ w = x - 2y + z.$

19. $z'_x - (y + z)\, z'_y = x + y + z - 1; \quad u = x,\ v = y + z,\ w = x + z.$

20. $z'_x + (x + 1)\, z'_y = -2x - 4; \quad u = x,\ v = x + 2y + z,\ w = x + 3y + z.$

21. $z'_x + (2y + z)\, z'_y = x - 2y - z - 1; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

22. $z'_x + (z - y + 1)\, z'_y = x - y + z; \quad u = x,\ v = x - y + z,\ w = x + z.$

23. $z'_x - (x + y - z)\, z'_y = -2y + 2z - 1; \quad u = x,\ v = x - y + z,\ w = x - 2y + z.$

24. $z'_x + (x + y - z)\, z'_y = 2x - 1; \quad u = x,\ v = x - y + z,\ w = x + z.$

25. $z'_x + (z - 1)\, z'_y = x + z - 1; \quad u = x,\ v = x + z,\ w = x - y + z.$

26. $z'_x - zz'_y = x + z - 1; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + z.$

27. $z'_x + (y - z)\, z'_y = x + y - z - 1; \quad u = x,\ v = x - y + z,\ w = x - 2y + z.$

28. $z'_x + (3 - x)\, z'_y = 4x - 10; \quad u = x,\ v = x + 4y + z,\ w = x + 3y + z.$

29. $z'_x + (2y + z - 1)\, z'_y = 1 - 2y - z; \quad u = x,\ v = x + y + z,\ w = x + 2y + z.$

30. $z'_x + (z - 2y + 1)\, z'_y = x - 4y + 2z + 1; \quad u = x,\ v = x - 2y + z,\ w = x - y + z.$

Задача 12. Исследовать функцию $f(x, y, z)$ на локальный экстремум.

1. $f(x, y, z) = 4x^2 + 10xy + 6xz - 2y^2 - 4yz + 7z^2 - 28y - 2z - 4.$
2. $f(x, y, z) = 9x^2 - 2xy + 4xz + 3y^2 - 8yz + 6z^2 + 14x + 2y - 4z - 3.$
3. $f(x, y, z) = 9x^2 - 8xz + 9y^2 - 14yz + 9z^2 + 2x - 64y + 56z - 6.$
4. $f(x, y, z) = 9x^2 - 2xy + 9y^2 - 8yz + 9z^2 - 14x - 26y - 2z + 7.$
5. $f(x, y, z) = -6x^2 - 2xy - 10xz - 6y^2 - 2yz - 9z^2 - 24y - 20z + 2.$
6. $f(x, y, z) = x^2 - 6xy - 2xz + y^2 - 4yz - 2z^2 - 6x + 12y + 2z - 1.$
7. $f(x, y, z) = 4x^2 - 12xy - 4xz + y^2 + 2yz + z^2 - 12x - 6y + 2z - 3.$
8. $f(x, y, z) = 4x^2 + 12xy + 4xz + y^2 + 8yz + z^2 - 8x - 30y - 2z - 7.$
9. $f(x, y, z) = 9x^2 - 12xz + 9y^2 + 12yz + 12z^2 + 30x - 48y - 60z + 4.$
10. $f(x, y, z) = 6x^2 + 8xy + 4xz + 6y^2 + 12yz + 9z^2 + 28x + 16y + 2z - 8.$
11. $f(x, y, z) = -9x^2 - 4xy - 2xz - 6y^2 + 4yz - 3z^2 - 34x + 8y - 14z - 2.$
12. $f(x, y, z) = x^2 - 20xy - 8xz + 4y^2 - 4yz + 7z^2 + 58x - 28y - 28z - 1.$
13. $f(x, y, z) = -6x^2 - 14xy - 9y^2 + 4yz - 12z^2 - 52x - 72y + 56z + 3.$
14. $f(x, y, z) = -9x^2 - 6xy - 6y^2 - 6yz - 9z^2 + 12x + 12z - 4.$
15. $f(x, y, z) = -3x^2 - 8xy - 4xz - 6y^2 - 6yz - 6z^2 - 12x - 20y - 28z - 5.$
16. $f(x, y, z) = 9x^2 + 6xz + 9y^2 + 6yz + 3z^2 - 12x + 42y + 12z - 1.$
17. $f(x, y, z) = 4x^2 + 4xy + 2xz + y^2 + 10yz + z^2 + 18x + 12z + 5.$
18. $f(x, y, z) = x^2 - 16xy + 10xz + 7y^2 - 6yz + z^2 + 2x + 24y - 16z + 7.$
19. $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 8xz + 9y^2 - 2yz + 6z^2 - 4x - 14y - 2z - 5.$
20. $f(x, y, z) = -9x^2 - 6xy - 2xz - 3y^2 + 2yz - 9z^2 + 14x - 2y + 22z + 2.$
21. $f(x, y, z) = 9x^2 + 6xy + 10xz + 6y^2 + 4yz + 3z^2 - 10x - 22y - 6z - 2.$
22. $f(x, y, z) = 6x^2 + 4xy - 2xz + 3y^2 + 6z^2 - 14x - 10y - 10z + 2.$
23. $f(x, y, z) = -9x^2 - 2xy - 14xz - 6y^2 - 6yz - 9z^2 + 50x + 38y + 62z - 3.$
24. $f(x, y, z) = 6x^2 + 10xy - 10xz + 9y^2 - 4yz + 6z^2 + 14x + 30y + 8.$
25. $f(x, y, z) = -9x^2 + 4xy + 8xz - 6y^2 - 14yz - 9z^2 - 10x + 9.$
26. $f(x, y, z) = x^2 - 4xy + 16xz + 4y^2 + 10yz + z^2 + 40x + 4y + 26z + 6.$
27. $f(x, y, z) = -3x^2 + 2xy + 2xz - 9y^2 + 14yz - 9z^2 + 2x - 6y - 6z + 5.$

28. $f(x,y,z)=4x^2-16xz+y^2-4yz+4z^2+24x+2y-20z-9.$

29. $f(x,y,z)=-6x^2+8xz-12y^2-8yz-6z^2-32x+56y+44z+4.$

30. $f(x,y,z)=9x^2-2xy+9y^2-8yz+9z^2-14x-26y-2z+7.$

Задача 13. Исследовать функцию $f(x,y)$ на экстремум при выполнении условия $\varphi(x,y)=0$.

1. $f(x,y)=x-9y+2,\quad \varphi(x,y)=-2x^2+2xy+4y^2-2x+2y-16.$
2. $f(x,y)=8x+3y-1,\quad \varphi(x,y)=-x^2+4xy+4y^2+2x+2y+19.$
3. $f(x,y)=-2x^2+4xy-4y^2-2x-2y-2,\quad \varphi(x,y)=-x+3y+4.$
4. $f(x,y)=x-3y+4,\quad \varphi(x,y)=-2x^2+2xy-2y^2+4x-4y+2.$
5. $f(x,y)=5x+3y+4,\quad \varphi(x,y)=-3x^2-2xy-4y^2+2x-4y+7.$
6. $f(x,y)=-8x-4y+4,\quad \varphi(x,y)=-3x^2-2xy+y^2+4x-4y+24.$
7. $f(x,y)=5x-6y-1,\quad \varphi(x,y)=x^2+2xy-4y^2+4x+2y+3.$
8. $f(x,y)=3x+3y-1,\quad \varphi(x,y)=x^2+4xy-2y^2-2x+2y-8.$
9. $f(x,y)=2x^2-2xy-y^2-2x+2y+1,\quad \varphi(x,y)=2x-2y-2.$
10. $f(x,y)=-6y-2,\quad \varphi(x,y)=2x^2-2xy-3y^2-4x+4y+12.$
11. $f(x,y)=10x-4,\quad \varphi(x,y)=4x^2+2xy+2y^2-2x-2y-28.$
12. $f(x,y)=4x+3y+2,\quad \varphi(x,y)=2x^2-2xy-3y^2+2x+2y-1.$
13. $f(x,y)=x-4y+4,\quad \varphi(x,y)=x^2-2xy+4y^2+2x-2y-3.$
14. $f(x,y)=-6x+4y+4,\quad \varphi(x,y)=4x^2+2xy-4y^2-2x+2y-2.$
15. $f(x,y)=3x^2+2xy-y^2+2x+4y+2,\quad \varphi(x,y)=8x+3y-19.$
16. $f(x,y)=-12x+3y+3,\quad \varphi(x,y)=3x^2+2xy-4y^2-4x+4y-37.$
17. $f(x,y)=-3x^2+4xy-y^2-2x-2y+3,\quad \varphi(x,y)=9x-7y+32.$
18. $f(x,y)=-4x^2-4xy-2y^2-2x-2y+2,\quad \varphi(x,y)=5x+y+9.$
19. $f(x,y)=2x^2-2xy+y^2-4x+4y+3,\quad \varphi(x,y)=-6x+3y-12.$
20. $f(x,y)=-3x^2+2xy-2y^2+4x+4y+1,\quad \varphi(x,y)=6x+4y+20.$
21. $f(x,y)=2x+8y+4,\quad \varphi(x,y)=x^2+4xy-2y^2+4x+4y+2.$
22. $f(x,y)=-3x^2+2xy-y^2+4x+4y-2,\quad \varphi(x,y)=3x+3y+9.$
23. $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-4x-2y-1,\quad \varphi(x,y)=-2x-5y-7.$

24. $f(x, y) = -x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 2y + 4, \quad \varphi(x, y) = 7y - 7.$

25. $f(x, y) = -8x + 5y + 2, \quad \varphi(x, y) = 4x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 4y - 19.$

26. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy - 4y^2 + 4x - 4y + 3, \quad \varphi(x, y) = 3x + 8y + 19.$

27. $f(x, y) = -9x + 2y + 1, \quad \varphi(x, y) = -3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2y + 21.$

28. $f(x, y) = -2x - 4y + 2, \quad \varphi(x, y) = -x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 5.$

29. $f(x, y) = 5y + 4, \quad \varphi(x, y) = -3x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y - 11.$

30. $f(x, y) = 3x - y - 4, \quad \varphi(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 4y - 2.$

Задача 14.

1. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности $2\sqrt{3}$ см^2.
2. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ см^3.
3. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ см^3.
4. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности $\frac{8}{3}\pi$ см^2.
5. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см^3.
6. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $\frac{9}{8}$ см^2.
7. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$ см^3.
8. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности 12π см^2.

9. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $\frac{3}{2}$ см^2.
10. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{1}{3}\pi$ см^3.
11. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $\frac{\sqrt{3}}{54}$ см^3.
12. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности $3\sqrt{3}$ см^2.
13. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $\frac{\sqrt{3}}{9}$ см^2.
14. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $\frac{4}{3}\pi$ см^3.
15. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $\frac{9}{4}$ см^2.
16. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $16\sqrt{3}$ см^3.
17. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{\sqrt{2}}{3}$ см^3.
18. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $\pi\sqrt{3}$ см^2.
19. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности 6 см^2.

20. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности 8π см^2.
21. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^2.
22. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $\frac{1}{162}$ см^3.
23. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ см^2.
24. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\pi\sqrt{3}$ см^3.
25. Найти ребро основания и высоту треугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см^3.
26. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности 24 см^2.
27. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^3.
28. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $\frac{4}{81}\pi$ см^3.
29. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^3.
30. Найти ребро основания и высоту четырехугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь полной поверхности при заданном объеме $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ см^3.

Задача 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = u(x, y)$ в треугольнике $\triangle ABC$.

1. $u(x, y) = -5x^2 - 2xy + 3y^2 + 22x - 2y + 3$, $A(-2, -4)$, $B(4, 3)$, $C(-1, 3)$.
2. $u(x, y) = 5x^2 + 10xy + 5y^2 - 40x - 40y + 1$, $A(-1, -4)$, $B(3, 2)$, $C(0, 4)$.
3. $u(x, y) = 13x^2 - 26xy + 13y^2 + 26x - 26y - 3$, $A(-1, -1)$, $B(3, 1)$, $C(0, 2)$.
4. $u(x, y) = x^2 - 6xy + 13y^2 + 16x - 64y + 3$, $A(-4, -1)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 4)$.
5. $u(x, y) = 13x^2 + 34xy + 25y^2 + 120x + 168y + 4$, $A(-1, -1)$, $B(1, 4)$, $C(0, 4)$.
6. $u(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 6y + 3$, $A(-1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 4)$.
7. $u(x, y) = 13x^2 + 26xy + 13y^2 + 2$, $A(-4, -1)$, $B(3, 3)$, $C(-3, 1)$.
8. $u(x, y) = x^2 + 6xy + 13y^2 - 4x - 20y + 4$, $A(-3, -1)$, $B(4, 2)$, $C(-1, 3)$.
9. $u(x, y) = 5x^2 + 2xy - 3y^2 + 24x - 8y - 4$, $A(-4, -4)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 1)$.
10. $u(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y - 1$, $A(-1, -4)$, $B(4, 2)$, $C(0, 3)$.
11. $u(x, y) = 25x^2 + 36xy + 13y^2 + 64x + 46y - 3$, $A(-3, -2)$, $B(4, 4)$, $C(-2, 2)$.
12. $u(x, y) = 13x^2 + 6xy + y^2 + 58x + 14y + 3$, $A(-4, -4)$, $B(4, 4)$, $C(-1, 1)$.
13. $u(x, y) = 5x^2 + 14xy + 13y^2 - 4x - 12y + 4$, $A(-3, -4)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 4)$.
14. $u(x, y) = -5x^2 - 2xy + 3y^2 + 22x - 2y + 3$, $A(-2, -4)$, $B(4, 3)$, $C(-1, 3)$.
15. $u(x, y) = 25x^2 - 20xy + 5y^2 - 70x + 30y - 4$, $A(-1, -3)$, $B(4, 3)$, $C(0, 2)$.
16. $u(x, y) = -3x^2 + 8xy - 5y^2 - 20x + 26y + 4$, $A(-4, -1)$, $B(2, 2)$, $C(-2, 1)$.
17. $u(x, y) = 13x^2 - 16xy + 5y^2 + 36x - 22y + 1$, $A(-4, -1)$, $B(3, 3)$, $C(-3, 2)$.
18. $u(x, y) = x^2 + 4xy - 5y^2 - 2x + 14y - 4$, $A(-3, -1)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 4)$.
19. $u(x, y) = -5x^2 + 5y^2 + 10x - 20y + 4$, $A(-4, -4)$, $B(3, 2)$, $C(-3, 3)$.
20. $u(x, y) = -7x^2 + 4xy + 3y^2 - 24x + 14y - 4$, $A(-4, -1)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 2)$.
21. $u(x, y) = 13x^2 + 4xy + y^2 + 44x + 4y + 3$, $A(-4, -3)$, $B(3, 1)$, $C(-3, 4)$.
22. $u(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 14y - 3$, $A(-3, -3)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 2)$.
23. $u(x, y) = -3x^2 - 10xy - 7y^2 + 4x + 4y + 2$, $A(-4, -1)$, $B(1, 2)$, $C(-2, 2)$.
24. $u(x, y) = -3x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 1$, $A(-1, -4)$, $B(4, 3)$, $C(0, 3)$.
25. $u(x, y) = 25x^2 + 50xy + 25y^2 - 2$, $A(-4, -2)$, $B(1, 2)$, $C(-2, 2)$.
26. $u(x, y) = -5x^2 + 4xy + y^2 + 24x - 6y + 3$, $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$, $C(0, 3)$.

27. $u(x,y) = 25x^2 + 6xy + y^2 + 44x + 4y - 1, \quad A(-2,-4),\ B(4,4),\ C(-1,3).$

28. $u(x,y) = -3x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 12y + 4, \quad A(-2,-4),\ B(4,2),\ C(-1,2).$

29. $u(x,y) = 5x^2 - 14xy + 13y^2 + 38x - 66y - 4, \quad A(-2,-1),\ B(3,1),\ C(-1,3).$

30. $u(x,y) = -5x^2 - 2xy + 3y^2 + 22x - 2y + 3, \quad A(-2,-4),\ B(4,3),\ C(-1,3).$

Задача 16. Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к параметрически заданной кривой Γ в точке M_0, соответствующей $t = t_0$.

1. $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ z = 3t - \frac{\pi}{2}; \quad t_0 = \frac{\pi}{2}.$
2. $x = \dfrac{1+t}{1-t},\ y = \dfrac{3}{1-t^2},\ z = \dfrac{3t}{1+t^2}; \quad t_0 = 2.$
3. $x = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right),\ y = t + \sqrt{1+t^2},\ z = \sqrt{1+t^2} - t; \quad t_0 = 0.$
4. $x = \operatorname{sh}^2 t,\ y = \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t,\ z = \operatorname{ch}^2 t; \quad t_0 = \ln 2.$
5. $x = \sqrt{1-t^2},\ y = \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}},\ z = \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t^2}; \quad t_0 = \sqrt{3}/2.$
6. $x = \ln\left(\sqrt{t^2+3e^2} + t\right) - \ln 3,\ y = 3\ln t,\ z = \ln\left(\sqrt{t^2+3e^2} - t\right); \quad t_0 = e.$
7. $x = t + \cos\pi t - t\sin\pi t,\ y = \sin\pi t + t\cos\pi t,\ z = t^2 + 3/4; \quad t_0 = 1/2.$
8. $x = \dfrac{t}{t^3+t+1},\ y = \dfrac{2}{t^3+t+1},\ z = \dfrac{t^2}{t^3+t+1}; \quad t_0 = -1.$
9. $x = t + \ln\left(1-t^2\right),\ y = \operatorname{arctg} t,\ z = t - t^2 - 3; \quad t_0 = 0.$
10. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = 4e^{-t}; \quad t_0 = 0.$
11. $x = t\sqrt{t^2+t+3},\ y = \dfrac{\sqrt{t^2+t+3}}{t-1},\ z = t^2+t+3; \quad t_0 = 2.$
12. $x = t - \ln(4-t),\ y = \sqrt{4-t},\ z = t\ln(4-t); \quad t_0 = 3.$
13. $x = \dfrac{t\cos t}{\pi},\ y = t\sin t,\ z = \pi - 3t; \quad t_0 = 1/2\,\pi.$
14. $x = \dfrac{3t}{t^3+2},\ y = \dfrac{3t^2}{t^3+2},\ z = \dfrac{3}{t^3+2}; \quad t_0 = 1.$
15. $x = \dfrac{t}{\sqrt{2t+1}},\ y = t - \sqrt{2t+1},\ z = \dfrac{\sqrt{2t+1}}{t^2}; \quad t_0 = 4.$
16. $x = e^{\sqrt{1+t}-1},\ y = \sqrt{1+t},\ z = e^t - \sqrt{1+t}; \quad t_0 = 0.$
17. $x = 2\sqrt{2}\sin^3 t,\ y = 2\sqrt{2}\cos^3 t,\ z = 2t - \dfrac{\pi}{2}; \quad t_0 = \dfrac{1}{4}\pi.$
18. $x = \dfrac{1-t}{1+t},\ y = \dfrac{1+t}{1+t^2},\ z = 1 + t^2; \quad t_0 = 1.$

19. $x = e^{t^2-2t-3},\ y = te^{t-3},\ z = t^2 - 2t - 3;\quad t_0 = 3.$

20. $x = \arcsin\sqrt{\dfrac{t}{\pi}},\ y = \sqrt{\dfrac{t}{\pi}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ z = \arccos\left(2\,\dfrac{t}{\pi} - 1\right);\quad t_0 = \dfrac{3\pi}{4}.$

21. $x = 5\,\dfrac{t}{t^3-3},\ y = \dfrac{2t+1}{t^3-3},\ z = t^2;\quad t_0 = 2.$

22. $x = 4\sin^2 t,\ y = 3\sin t\cos t,\ z = 2\cos^2 t;\quad t_0 = \pi 4.$

23. $x = \operatorname{sh} 2t + \operatorname{ch} 2t,\ y = 8\operatorname{sh}^2 t + 1/2,\ z = 4\operatorname{ch}^2 t - 1/4;\quad t_0 = \ln 2.$

24. $x = 1/2 + \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right),\ y = \ln(\sin t + \cos t),\ z = \sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2};\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

25. $x = 3\,\dfrac{1}{\sqrt{t^2+t+3}},\ y = \dfrac{1+t}{\sqrt{t^2+t+3}},\ z = \sqrt{t^2+t+3};\quad t_0 = 2.$

26. $x = e^t\left(\cos\dfrac{\pi}{2}t + \sin\pi t\right),\ y = e^t\left(\cos\pi t - \sin\dfrac{\pi}{2}\right),\ z = 2e^t;\quad t_0 = 2.$

27. $x = \dfrac{1+\sqrt{t^2+5}}{t},\ y = 1 - \sqrt{t^2+5},\ z = t\sqrt{t^2+5};\quad t_0 = -2.$

28. $x = t^{-2} - t^{-1} + 2,\ y = t^{-2} + t^{-1} - 1,\ z = t - t^{-1};\quad t_0 = 1.$

29. $x = \ln t,\ y = \dfrac{e}{t},\ z = \ln^2(t^2 + te) - 2\ln 2;\quad t_0 = e.$

30. $x = 2\cos\dfrac{t}{3} + \cos\dfrac{2t}{3},\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{t}{3},\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{2t}{3};\quad t_0 = \pi.$

Задача 17. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности S, заданной параметрически

$$S:\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

если $x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0),\ z_0 = z(u_0, v_0)$.

1. $x = \dfrac{1}{\sqrt{(u+4)(v-4)}},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{(u-4)(v+4)}},\ z = \sqrt{uv};\quad u_0 = 5,\ v_0 = 5.$

2. $x = v + \ln(u^2 + v^2),\ y = \ln(u^2 - v^2),\ z = \dfrac{u}{e} + v;\quad u_0 = e,\ v_0 = 0.$

3. $x = 4\operatorname{sh} u\cos v,\ y = 6\operatorname{sh} u\sin v,\ z = \operatorname{ch}^2 u + \cos^2 v;\quad u_0 = \ln 2,\ v_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

4. $x = u\left(3v^2 - u^2 - \dfrac{1}{3}\right),\ y = v\left(3u^2 - v^2 - \dfrac{1}{3}\right),\ z = 2uv;\quad u_0 = 1,\ v_0 = \dfrac{1}{3}.$

5. $x = u + \dfrac{6}{1+v},\ y = v - \dfrac{6}{2-u},\ z = (1+v)(2-u);\quad u_0 = 1,\ v_0 = -2.$

6. $x = \frac{1}{2}\left(e^u + e^v\right)^2,\ y = \frac{1}{2}\left(e^u - e^v\right)^2,\ z = u - 2v;\quad u_0 = \ln(3),\ v_0 = 0.$

7. $x = 2\dfrac{v}{\cos u + \sin u},\ y = \dfrac{1}{\cos u + \sin u},\ z = v(\cos u + \sin u);\quad u_0 = \frac{1}{2}\pi,\ v_0 = 1.$

8. $x = \dfrac{u+v}{u^2+v^2},\ y = \dfrac{uv}{u^2+v^2},\ z = \dfrac{1}{u^2+v^2};\quad u_0 = 1,\ v_0 = 2.$

9. $x = u - \operatorname{ch} v,\ y = u^2 - \dfrac{\operatorname{sh} v}{u^2},\ z = u^3 + \dfrac{\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v}{u^2};\quad u_0 = 1,\ v_0 = 0.$

10. $x = v + u^2 \ln 3 - \pi,\ y = 3^u \cos v,\ z = 3^u \sin v;\quad u_0 = 1,\ v_0 = \pi.$

11. $x = 2\dfrac{v \sin u}{1+v^2},\ y = 6\dfrac{v\cos u}{1+v^2},\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+v^2\right);\quad u_0 = \frac{1}{4}\pi,\ v_0 = 2.$

12. $x = \sqrt{2\left(u^2-3\right)\left(1+v^2\right)},\ y = \sqrt{10\left(3-v^2\right)\left(u^2+1\right)},\ z = \sqrt{u^2v^2-3};$
$u_0 = 2,\ v_0 = 1.$

13. $x = \operatorname{tg}^2 v \cos u,\ y = \cos^2 v,\ z = \operatorname{tg}^2 v \sin u;\quad u_0 = \frac{1}{2}\pi,\ v_0 = \frac{1}{4}\pi.$

14. $x = \dfrac{2}{\operatorname{sh} u + \cos v},\ y = \dfrac{\cos v}{\operatorname{sh} u + \cos v},\ z = \sin v - \operatorname{ch} u;\quad u_0 = 0,\ v_0 = 0.$

15. $x = 3u + 3uv^2 - u^3,\ y = v^3 - 3v - 3u^2v,\ z = 3u^2 - 3v^2;\quad u_0 = 1,\ v_0 = 1.$

16. $x = 3u + \ln(v-u),\ y = 3v - \ln\left(v-u^2\right),\ z = u^2 + 2v + u;\quad u_0 = 1,\ v_0 = 2.$

17. $x = \dfrac{\sqrt{u}}{u-v},\ y = 2\dfrac{\sqrt{v}}{u-v},\ z = \frac{1}{3}\sqrt{uv};\quad u_0 = 4,\ v_0 = 1.$

18. $x = 4\operatorname{ch} u \cos v,\ y = 2\operatorname{ch} u \sin v,\ z = 6\operatorname{sh} u \sin v;\quad u_0 = \ln 2,\ v_0 = \frac{1}{6}\pi.$

19. $x = ue^v,\ y = e^v\left(\cos^2 u + 3\sin u\right),\ z = e^v\left(\sin^2 u + 4\cos u\right);\ u_0 = \pi,\ v_0 = 0.$

20. $x = 2u^2\cos v,\ y = 4u^2 \sin v,\ z = \sqrt{2}u^2 - 8\dfrac{v^2}{\pi} + \dfrac{\pi}{2};\quad u_0 = 1,\ v_0 = \frac{1}{4}\pi.$

21. $x = \dfrac{\operatorname{ch} u}{\sin v - \operatorname{ch} u},\ y = \dfrac{\operatorname{sh} u}{\sin v - \operatorname{ch} u},\ z = \dfrac{1+u}{\sin v - \operatorname{ch} u};\quad u_0 = 0,\ v_0 = \frac{1}{6}\pi.$

22. $x = u^2 + \ln v,\ y = v^2 - \ln u,\ z = uv;\quad u_0 = 1,\ v_0 = 1.$

23. $x = u(2v-u-1),\ y = v(2u-v-1),\ z = u^2+v^2;\quad u_0 = 3,\ v_0 = 1.$

24. $x = \sqrt{1+u}\cos 2v,\ y = \sqrt{1+u}\sin 2v,\ z = 2\sqrt{1+u} + \cos u;$
$u_0 = 0,\ v_0 = \frac{1}{3}\pi.$

25. $x = \sqrt{3\left(u^2-1\right)\left(1-v^2\right)},\ y = u(1+\operatorname{sh} v),\ z = v + u^2\operatorname{ch} v;\quad u_0 = 2,\ v_0 = 0.$

26. $x = \dfrac{e^{2u}}{1+v},\ y = \dfrac{ve^u}{1+v},\ z = \dfrac{v}{1+e^u};\quad u_0 = \ln 3,\ v_0 = 2.$

27. $x = \sqrt{(u+2)(v-2)},\ y = \sqrt{(u-2)(v+2)},\ z = \sqrt{3uv};\quad u_0 = 4,\ v_0 = 4.$

28. $x = \dfrac{\operatorname{sh} u \sin v}{1 + \operatorname{ch} u}$, $y = \dfrac{\operatorname{sh} u \cos v}{1 + \operatorname{ch} u}$, $z = \dfrac{\sin v}{1 + \operatorname{ch} u}$; $\quad u_0 = \ln 2$, $v_0 = \dfrac{1}{4}\pi$.

29. $x = \sqrt{2} - 2^u \cos v$, $y = 2^u \sin v$, $z = \sqrt{2}\,(1 - u^2) \ln 2$; $\quad u_0 = 1$, $v_0 = \dfrac{1}{4}\pi$.

30. $x = \dfrac{(1-u)(1+v^2)}{1+v}$, $y = \dfrac{(1-v)(u^2+1)}{1+u}$, $z = \dfrac{1}{(1+u)(1+v)}$; $\quad u_0 = -2$, $v_0 = -2$.

Задача 18. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой в точке M_0 к поверхности S, заданной неявно уравнением $S:\ F(x, y, z) = 0$.

1. $S:\ 8x - y - \sqrt{z^2 + 7} - 26 = 0, \quad M_0(4, 2, 3)$.
2. $S:\ x + 6y - 2^z - 8 = 0, \quad M_0(4, 2, 3)$.
3. $S:\ 2x^3 - \dfrac{1}{(y-1)^4} - z + 1 = 0, \quad M_0(1, 2, 2)$.
4. $S:\ 2x^2 + y^2 + \dfrac{5}{z^3} - 16 = 0, \quad M_0(-1, 3, 1)$.
5. $S:\ y + 2z + \ln x + 1 = 0, \quad M_0(1, 1, -1)$.
6. $S:\ y^2 + z^2 - \cos^2(x-1) - 4 = 0, \quad M_0(1, 1, 2)$.
7. $S:\ (x-2)^3 + 3y^2 - 48\sqrt{z} = 0, \quad M_0(2, 4, 1)$.
8. $S:\ 2x - y^3 - 6z = 0, \quad M_0(5, -2, 3)$.
9. $S:\ 2x^3 + y^2 - 4z + 10 = 0, \quad M_0(1, 2, 4)$.
10. $S:\ \dfrac{1}{2}x + z - \ln y = 0, \quad M_0(2, 1, 1)$.
11. $S:\ x^2 + y^2 - \dfrac{1}{(z-3)^2} - 3 = 0, \quad M_0(0, -2, 4)$.
12. $S:\ 4x - y + 7\sin z - 5 = 0, \quad M_0(2, 3, 0)$.
13. $S:\ 2x^2 + z^2 - \dfrac{1}{y^4} - 10 = 0, \quad M_0(1, 1, -3)$.
14. $S:\ x^2 + y - 7\cos z = 0, \quad M_0(2, 3, 0)$.
15. $S:\ 3x^2 + 4y^2 - \dfrac{1}{z^4} - 6 = 0, \quad M_0(1, 1, 1)$.
16. $S:\ 2z - x - \ln y = 0, \quad M_0(2, 1, 1)$.
17. $S:\ 1 - 2x + z - \dfrac{1}{(y-1)^4} = 0, \quad M_0(1, 2, 2)$.
18. $S:\ x + y + \cos z - 3 = 0, \quad M_0(-2, 4, 0)$.
19. $S:\ x - y + \dfrac{2}{z+1} - 7 = 0, \quad M_0(6, 0, 1)$.

20. $S: \ x + 7y - z5^z - 1 = 0, \quad M_0(6, 0, 1).$

21. $S: \ 3xy + x^2 - \frac{1}{2}z^3 + 4 = 0, \quad M_0(0, 1, 2).$

22. $S: \ 2x - y - \sqrt{z+1} = 0, \quad M_0(1, 0, 3).$

23. $S: \ 2y + z + \ln(1+x) - 1 = 0, \quad M_0(0, -1, 3).$

24. $S: \ x^2 + 3y^4 + z^2 - 8 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$

25. $S: \ \sqrt{x-1} + y^2 + (z-1)^2 - 6 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$

26. $S: \ z + 3y - \ln^2 x - 5 = 0, \quad M_0(1, 1, 2).$

27. $S: \ 4x^2 + 20y^4 + 5z^2 - 40 = 0, \quad M_0(0, 1, 2).$

28. $S: \ x^2 + y^4 - (z-4)^2 = 0, \quad M_0(3, 2, -1).$

29. $S: \ 4y + z - \sqrt{1-x} = 0, \quad M_0(-3, 1, -2).$

30. $S: \ \frac{1}{x^3} + y - 11z + 1 = 0, \quad M_0(1, -2, 0).$

Задача 19. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке M_0 к кривой, заданной как пересечение двух поверхностей S и Σ.

1. $S: y^2 + z^2 - x - 6 = 0, \ \Sigma: 4xz + 5z - 2 = 0; \ M_0(-1, 1, 2).$
2. $S: x + 6y + \frac{8}{z-4} - 8 = 0, \ \Sigma: 8x - y - \sqrt{z^2+7} - 26 = 0; \ M_0(4, 2, 3).$
3. $S: x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0, \ \Sigma: 1 - (y-1)^{-4} = 0; \ M_0(1, 2, 2).$
4. $S: x^2 - y^2 - 4x + 4y - 8z = 0, \ \Sigma: 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 16 = 0; \ M_0(-1, 3, 1).$
5. $S: y + z + \ln x = 0, \ \Sigma: z + 3y^2 - 2 = 0; \ M_0(1, 1, -1).$
6. $S: y^2 + z^2 - \cos^2(x-1) - 4 = 0, \ \Sigma: xy + 2x - 3 = 0; \ M_0(1, 1, 2).$
7. $S: 2x^2 + y^2 - 8z^2 - 16 = 0, \ \Sigma: (x-2)^2 + 3y^2 - 48z^2 = 0; \ M_0(2, 4, 1).$
8. $S: 2x - y^3 - 6z = 0, \ \Sigma: x - \frac{1}{y+1} - z - 3 = 0; \ M_0(5, -2, 3).$
9. $S: 2x^2 + y^2 - 4z + 10 = 0, \ \Sigma: (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0; \ M_0(1, 2, 4).$
10. $S: x^2 + 5z - 2y - 7 = 0, \ \Sigma: z - 1 - \ln y = 0; \ M_0(2, 1, 1).$
11. $S: x^2 + y^2 - (z-3)^{-2} - 3 = 0, \ \Sigma: x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 20 = 0; \ M_0(0, -2, 4).$
12. $S: 4x - y + 7\sin z - 5 = 0, \ \Sigma: 2x + y - 7\cos z = 0; \ M_0(2, 3, 0).$
13. $S: 2x^2 + z^2 - y^{-4} - 10 = 0, \ \Sigma: 3x - 4y + z + 4 = 0; \ M_0(1, 1, -3).$

14. $S\colon 3x^2 - 12y^2 + 4z^2 - 36 = 0$, $\Sigma\colon y^2 + z^2 - x - 8 = 0$; $M_0(2,1,-3)$.

15. $S\colon 3x^2 + 4y^2 - z^{-4} - 6 = 0$, $\Sigma\colon xy - 1 = 0$; $M_0(1,1,1)$.

16. $S\colon z - (x-1)^2 - 2y^2 + 4 = 0$, $\Sigma\colon (z-2)^2 + (x-3)^2 - 10y^2 = 0$; $M_0(2,1,-1)$.

17. $S\colon y + e^{-x} + 1 = 0$, $\Sigma\colon 3x^2 + 2y^2 + z - 5 = 0$; $M_0(0,-2,-3)$.

18. $S\colon 3x^2 - y^2 + 2z^2 - 1 = 0$, $\Sigma\colon x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0$; $M_0(1,2,-1)$.

19. $S\colon 4x^2 + z^2 - y^2 = 0$, $\Sigma\colon y + \cos z - 5 = 0$; $M_0(-2,4,0)$.

20. $S\colon x + 7y - ze^{z-1} - 5 = 0$, $\Sigma\colon x - y + \dfrac{2}{z+1} - 7 = 0$; $M_0(6,0,1)$.

21. $S\colon x^2 + 5y^2 - (z-5)^2 = 0$, $\Sigma\colon (z+3)(y-1) - 2 = 0$; $M_0(2,3,-2)$.

22. $S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$, $\Sigma\colon 2x - y - \sqrt{z+1} = 0$; $M_0(1,0,3)$.

23. $S\colon 3x^2 + 3y + z = 0$, $\Sigma\colon 2y + z + \ln(1+x) - 1 = 0$; $M_0(0,-1,3)$.

24. $S\colon x^2 + 3y^2 + z^2 - 8 = 0$, $\Sigma\colon (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 - 6 = 0$; $M_0(2,1,-1)$.

25. $S\colon x - 3y^2 + z = 0$, $\Sigma\colon 2z + \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) + 2 = 0$; $M_0(4,1,-1)$.

26. $S\colon z + 3y - \ln^2 x - 5 = 0$, $\Sigma\colon x(z-y) - 1 = 0$; $M_0(1,1,2)$.

27. $S\colon 4x^2 + 20y^2 + 5z^2 - 40 = 0$, $\Sigma\colon 3xy + x^2 - z^2 + 4 = 0$; $M_0(0,1,2)$.

28. $S\colon x^2 + 4y^2 - (z-4)^2 = 0$, $\Sigma\colon (x-2)(z+2) - 1 = 0$; $M_0(3,2,-1)$.

29. $S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$, $\Sigma\colon 4y + z - \sqrt{1-x} = 0$; $M_0(-3,1,-2)$.

30. $S\colon 2x^3 + 5y + z + 8 = 0$, $\Sigma\colon x^{-3} + y - 11z + 1 = 0$; $M_0(1,-2,0)$.

Задача 20. Найти производную функции $u = u(x,y,z)$ по направлению вектора нормали $\overrightarrow{N}$ к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если вектор $\overrightarrow{N}$ образует острый угол с осью Oz.

1. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - zy}$, $S\colon\ 9x^2 + 8xz + 2xy + 9z^2 - 8zy + 9y^2 + 22x + 42z - 42y - 240 = 0$, $M_0(-2,-2,2)$.

2. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - zy}$, $S\colon\ 9x^2 - 8xz + 9z^2 + 2zy + 9y^2 + 44x - 30z + 34y + 73 = 0$, $M_0(-2,-1,2)$.

3. $u = \dfrac{x^2yz}{y - z}$, $S\colon\ 6x^2 + 4xz - 6xy + 3z^2 + 2zy + 9y^2 - 16x - 18z - 26y - 66 = 0$, $M_0(1,-2,2)$.

4. $u = \dfrac{xyz}{xz - y^2}$, $S\colon\ 6x^2 + 8xz + 10xy + 12z^2 + 6y^2 + 10x + 32z - 2y - 24 = 0$, $M_0(1,2,-2)$.

5. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - z^2}$, $\quad S:\ 9x^2 - 6xy + 9z^2 + 6zy + 3y^2 + 30x + 6z - 12y - 51 = 0,$ $M_0(-1, -2, -2)$.

6. $u = \dfrac{xyz}{xz - y^2}$, $\quad S:\ 9x^2 - 2xz + 4xy + 9z^2 + 4zy + 6y^2 + 24x + 24z - 8y +$ $+ 5 = 0,$ $\quad M_0(-1, -1, -2)$.

7. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - zy}$, $\quad S:\ 9x^2 + 6xz + 6z^2 - 6zy + 9y^2 - 12x + 12z - 24y + 15 =$ $= 0,$ $\quad M_0(2, 1, -1)$.

8. $u = \dfrac{xyz}{z^2 - xy}$, $\quad S:\ 6x^2 + 2xz - 14xy + 6z^2 - 4zy + 9y^2 - 34x + 16z + 38y -$ $- 207 = 0,$ $\quad M_0(-2, 1, 2)$.

9. $u = \dfrac{xyz}{xz - y^2}$, $\quad S:\ 12x^2 + 16xz + 6z^2 + 2zy + 6y^2 + 40x + 26z - 10y + 2 =$ $= 0,$ $\quad M_0(-2, -1, -1)$.

10. $u = \dfrac{z^2xy}{x - y}$, $\quad S:\ 9x^2 + 8xz - 16xy + 9z^2 - 8zy + 9y^2 + 12x + 18z - 4y -$ $- 9 = 0,$ $\quad M_0(-2, -1, -2)$.

11. $u = \dfrac{xy^2z}{x - z}$, $\quad S:\ 9x^2 - 8xz + 10xy + 9z^2 - 12zy + 6y^2 + 24x - 32z + 22y +$ $+ 3 = 0,$ $\quad M_0(1, -2, 2)$.

12. $u = \dfrac{xyz}{z^2 - y^2}$, $\quad S:\ 9x^2 - 4xz + 6xy + 12z^2 - 16zy + 6y^2 + 44x - 16z + 20y -$ $- 25 = 0,$ $\quad M_0(1, -2, -1)$.

13. $u = \dfrac{z^2xy}{x - y}$, $\quad S:\ 6x^2 + 16xz - 10xy + 12z^2 - 12zy + 9y^2 - 18x - 20z + 26y -$ $- 15 = 0,$ $\quad M_0(2, 1, 1)$.

14. $u = \dfrac{xyz}{z^2 - xy}$, $\quad S:\ 12x^2 - 4xz + 8xy + 9z^2 + 4zy + 12y^2 - 56x - 36z - 72y +$ $+ 155 = 0,$ $\quad M_0(2, 2, 1)$.

15. $u = \dfrac{x^2yz}{y - z}$, $\quad S:\ 12x^2 - 16xz - 16xy + 6z^2 + 10zy + 6y^2 + 40x - 28z -$ $- 28y + 30 = 0,$ $\quad M_0(-1, 2, -1)$.

16. $u = \dfrac{xyz}{xz - y^2}$, $\quad S:\ 3x^2 + 4xz + 2xy + 6z^2 - 4zy + 3y^2 + 14x + 24z - 6y +$ $+ 2 = 0,$ $\quad M_0(1, 1, -1)$.

17. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - y^2}$, $\quad S:\ 6x^2 + 4xz + 10xy + 6z^2 + 6zy + 9y^2 - 6x - 10z + 2y -$ $- 36 = 0,$ $\quad M_0(-1, 2, 1)$.

18. $u = \dfrac{x^2yz}{y - z}$, $\quad S:\ 6x^2 + 6xz - 14xy + 9z^2 - 8zy + 9y^2 - 52x - 58z + 66y -$ $- 39 = 0,$ $\quad M_0(-2, -2, -1)$.

19. $u = \dfrac{x^2yz}{y-z}$, $S: \ 6x^2 - 2xz + 4xy + 9z^2 + 9y^2 - 14x - 16z - 22y - 91 =$
$= 0$, $M_0(1, -1, -2)$.

20. $u = \dfrac{xyz}{z^2 - xy}$, $S: \ 6x^2 - 14xy + 3z^2 - 2zy + 9y^2 + 40x + 10z - 52y - 254 =$
$= 0$, $M_0(1, -2, 2)$.

21. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - zy}$, $S: \ 9x^2 - 10xz + 6xy + 6z^2 + 2zy + 6y^2 - 38x + 4z - 38y -$
$- 97 = 0$, $M_0(-1, -1, -2)$.

22. $u = \dfrac{xy^2z}{x-z}$, $S: \ 6x^2 + 8xz - 2xy + 6z^2 + 2zy + 6y^2 + 8x + 12z - 18y +$
$+ 16 = 0$, $M_0(1, 1, -1)$.

23. $u = \dfrac{z^2xy}{x-y}$, $S: \ 9x^2 + 2xz + 6z^2 + 4zy + 9y^2 - 22x - 18z + 28y - 141 =$
$= 0$, $M_0(-1, 2, -1)$.

24. $u = \dfrac{z^2xy}{x-y}$, $S: \ 6x^2 + 14xz + 8xy + 9z^2 + 12zy + 12y^2 - 2x + 2z + 20y -$
$- 224 = 0$, $M_0(1, 2, 2)$.

25. $u = \dfrac{xy^2z}{x-z}$, $S: \ 12x^2 + 8xz - 4xy + 6z^2 - 2zy + 9y^2 - 48x - 24z - 26y -$
$- 78 = 0$, $M_0(1, -2, -1)$.

26. $u = \dfrac{xyz}{xz - y^2}$, $S: \ 12x^2 - 12xz + 4xy + 9z^2 + 2zy + 3y^2 - 40x + 52z + 12y -$
$- 327 = 0$, $M_0(-2, 1, 2)$.

27. $u = \dfrac{xyz}{x^2 - zy}$, $S: \ 9x^2 + 2xz - 4xy + 6z^2 + 10zy + 6y^2 - 40x + 40z + 52y +$
$+ 110 = 0$, $M_0(2, -1, -1)$.

28. $u = \dfrac{z^2xy}{x-y}$, $S: \ 6x^2 - 12xz - 14xy + 9z^2 + 16zy + 9y^2 - 52x + 62z + 66y -$
$- 15 = 0$, $M_0(1, -1, 2)$.

29. $u = \dfrac{z^2xy}{x-y}$, $S: \ 6x^2 + 4xz - 8xy + 9z^2 + 4zy + 6y^2 - 12x - 34z - 12y +$
$+ 30 = 0$, $M_0(2, 1, 2)$.

30. $u = \dfrac{xy^2z}{x-z}$, $S: \ 3x^2 + 6xz + 2xy + 9z^2 - 2zy + 3y^2 + 4x - 16z + 16y + 2 =$
$= 0$, $M_0(-2, 1, 1)$.

Список рекомендуемой литературы

1. Архипов, Г.И. *Лекции по математическому анализу* / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. — М.: Высш. шк., 2000. — 640 с. — ISBN 5-06-003596-4.
2. Берман, Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа* / Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1977. — 440 с.
3. Бугров, Я.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление* / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — М.: Наука, 1980. — 432 с.
4. Виноградова, И.А. *Задачи и упражнения по математическому анализу.* В 2 т. Т. 1 / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2000. — 725 с. — ISBN 5-7107-4295-3.
5. Данко, П.Е. *Высшая математика в упражнениях и задачах.*: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М.: Высш. шк., 1986. — 304 с.
6. Демидович, Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу* / Б.П. Демидович. — М.: Наука, 1977. — 528 с.
7. Зорич, В.А. *Математический анализ.* В 2 т. Т. 1 / В.А. Зорич. — М.: Наука, 1984. — 544 с.
8. Ильин, В.А. *Основы математического анализа.* В 2 т. Т. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М.: Наука, 1979. — 600 с.
9. Ильин, В.А. *Математический анализ.* В 2 т. Т. 1 / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. — М.: Проспект, 2004. — 628 с.
10. Кудрявцев, Л.Д. *Курс математического анализа.* В 3 т. Т. 2 / Л.Д. Кудрявцев. — М.: Высш. шк., 1981. — 584 с.
11. Кудрявцев, Л.Д. *Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных.* В 3 т. Т 3 / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. — Изд. 2-е. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 472 с. — ISBN 5-9221-0350-9.
12. Норден, А.П. *Теория поверхностей* / А.П. Норден. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 261 с.
13. Постников, М.М. *Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия* / М.М. Постников. — М.: Наука, 1979. — 312 с.
14. *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа* / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
15. Шилов, Г.Е. *Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных* / Г.Е. Шилов.— М.: Наука, 1972. — 624 с.
16. Фихтенгольц, Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* В 3 т. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1966. — 608 с.

Оглавление

Учебное издание

СКЛЯРЕНКО Василий Алексеевич
ТРУБИНА Ольга Ильинична

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Практикум

Подписано в печать 12.02.08.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 4,18. Тираж 300 экз.
Заказ
Издательство Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.