# РАЗДЕЛ I . АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Задача 1. Найти площадь *,* если *, , .*

Решение. Найдем координаты векторов и :

; .

Вычислим векторное произведение:

.

Тогда площадь равна

.

Ответ: .

Задача 2. Найти уравнение высоты, опущенной из точки на плоскость : .

Решение. Вектор перпендикулярен плоскости и, значит, коллинеарен искомой прямой .

Ответ: каноническое уравнение прямой :

.

Задача 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки , и перпендикулярной плоскости

.

Решение. Имеем: , и поэтому где - искомая плоскость. Вектор также коллинеарен плоскости . Следовательно, вектор

перпендикулярен этой плоскости. Тогда задача сводится к стандартной: найти уравнение плоскости , проходящей через точку и перпендикулярной вектору с координатами. Получаем уравнение плоскости

.

Ответ: .

Задача 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми и и уравнение их общего перпендикуляра.

Решение. Общая точка прямой есть , а прямой . Здесь . Находим параметры и так, чтобы вектор был перпендикулярен к и одновременно. Так как вектор имеет координаты и , − направляющие векторы прямых и соответственно, то для и получаем систему двух линейных уравнений: или

откуда находим , ; , . Тогда . Расстояние между прямыми и равно

Ответ: . Каноническое уравнение общего перпендикуляра: .

Задача 5. В ромб с диагоналями , вписан эллипс Точка касания делит сторону ромба в отношении . Найти канониче­ское уравнение эллипса.

Решение. Выберем систему координат, как указано на рисунке; координаты точки ка­сания в первом квадранте обозначим , . Так как по условию, то . Отсюда . Аналогично . Пусть - каноническое уравнение эллипса. Требуется найти и . Тангенс угла наклона прямой равен – , что совпадает с производной в точке функции , заданной неявно соотношением . Дифференцируя по , считая функцией переменной и подставляя и получим:

Кроме того,

Соотношения и представляют линейную систему двух уравнений относительно неизвестных , . Решая ее, получим

;

.

Ответ: , .

Задача 6. Написать уравнение биссектрисы угла , где , , .

Решение. Найдем , . Пусть вектор коллинеарен биссектрисе угла . Тогда косинус угла между векторами и будет равен косинусу угла между векторами и ; откуда

или , откуда . Следовательно, в качестве направляющего вектора биссектрисы можно взять . Тогда - каноническое уравнение биссектрисы.

Ответ: - уравнение биссектрисы.

Задача 7. Решить систему линейных уравнений

Решение. Сначала систему приводим к ступенчатому виду. Для этого первое уравнение умножаем на , и прибавляем ко второму и третьему уравнению соответственно:

Далее, вычитая из третьего уравнения второе, получаем ступенча­тый вид. Число ненулевых уравнений меньше, чем число неизвестных ; отсюда следует, что система неопределена. Для того, чтобы записать формулу общего решения, объявим неизвестную свободной; и выражаются тогда через .

Ответ: .

Задача 8. Найти собственные числа и собственные вектора линейного оператора пространства , заданного матрицей

.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

,

, , .

Определяем собственные векторы , , , соответствующие найденным характеристическим числам , , , из системы од­нородных уравнений . Здесь − единичная Получаем

1) 2) 3)

; ; .

Ответ. Собственные числа - , , ; соответствующие им собственные векторы − , , , .

ЗАДАНИЯ

1. Даны декартовы прямоугольные координаты вершин пирамиды . Найти:
2. угол между ребрами и ;
3. площадь грани ;
4. объем пирамиды;
5. уравнение плоскости грани ;
6. угол между ребром и гранью ;
7. уравнение высоты, опущенной из вершины на грань .

1.1. , , , .

1.2. , , , .

1.3. , , , .

1.4. , , , .

1.5. , , , .

1.6. , , , .

1.7. , , , .

1.8. , , , .

1.9. , , , .

1.10. , , , .

1.11. , , , .

1.12. , , , .

1.13. , , , .

1.14. , , , .

1.15. , , , .

1.16. , , , .

1.17. , , , .

1.18. , , , .

1.19. , , , .

1.20. , , , .

1.21. , , , .

1.22. , , , .

1.23. , , , .

1.24. , , , .

1.25. , , , .

1.26. , , , .

1.27. , , , .

1.28. , , , .

1.29. , , , .

1.30. , , , .

1. Заданы плоскость и точка . Написать уравнение плоскости , проходящей через точку параллельно плоскости . Найти расстояние между плоскостями.

2.1. , .

2.2. , .

2.3. , .

2.4. , .

2.5. , .

2.6. , .

2.7. , .

2.8. , .

2.9. , .

2.10. , .

2.11. , .

2.12. , .

2.13. , .

2.14. , .

2.15. , .

2.16. , .

2.17. , .

2.18. , .

2.19. , .

2.20. , .

2.21. , .

2.22. , .

2.23. , .

2.24. , .

2.25. , .

2.26. , .

2.27. , .

2.28. , .

2.29. , .

2.30. , .

1. Написать уравнение плоскости , проходящей через точки и перпендикулярно заданной плоскости .

3.1. , , .

3.2. , , .

3.3. , , .

3.4. , , .

3.5. , , .

3.6. , , .

3.7. , , .

3.8. , , .

3.9. , , .

3.10. , , .

3.11. , , .

3.12. , , .

3.13. , , .

3.14. , , .

3.15. , , .

3.16. , , .

3.17. , , .

3.18. , , .

3.19. , , .

3.20. , , .

3.21. , , .

3.22. , , .

3.23. , , .

3.24. , , .

3.25. , , .

3.26. , , .

3.27. , , .

3.28. , , .

3.29. , , .

3.30. , , .

1. Даны прямая и точка .
2. Написать уравнение плоскости , проходящей через прямую и точку ;
3. Написать уравнение плоскости , проходящей через точку перпендикулярно прямой ;
4. Написать канонические уравнения прямой , проходящей через точку перпендикулярно к .

4.1. , .

4.2. , .

4.3. , .

4.4. , .

4.5. , .

4.6. , .

4.7. , .

4.8. , .

4.9. , .

4.10. , .

4.11. , .

4.12. , .

4.13. , .

4.14. , .

4.15. , .

4.16. , .

4.17. , .

4.18. , .

4.19. , .

4.20. , .

4.21. , .

4.22. , .

4.23. , .

4.24. , .

4.25. , .

4.26. , .

4.27. , .

4.28. , .

4.29. , .

4.30. , .

1. Даны уравнения прямых и .
2. Убедиться в том, что прямые и скрещивающиеся;
3. Составить уравнение плоскости , проходящей через параллельно ;
4. Найти расстояние между прямыми и ;
5. Составить канонические уравнения общего перпендикуляра прямых и .

5.1. , .

5.2. , .

5.3. , .

5.4. , .

5.5. , .

5.6. , .

5.7. , .

5.8. , .

5.9. , .

5.10. , .

5.11. , .

5.12. , .

5.13. , .

5.14. , .

5.15. , .

5.16. , .

5.17. , .

5.18. , .

5.19. , .

5.20. , .

5.21. , .

5.22. , .

5.23. , .

5.24. , .

5.25. , .

5.26. , .

5.27. , .

5.28. , .

5.29. , .

5.30. , .

1. В ромб с диагоналями и вписан эллипс так, что больший из диаметров эллипса лежит на большей из диагоналей ромба. Сторона ромба в точке касания с эллипсом делится в отношении .Вычислить:
2. координаты фокусов эллипса;
3. полуоси эллипса;
4. эксцентриситет эллипса;
5. длины фокальных радиусов, проведенных в точку касания;
6. с точностью до 1 градуса угол между указанными фокальными радиусами;
7. координаты точки касания в I-м квадранте.

Написать уравнения прямых, проходящих через указанную точку касания и фокусы эллипса.

6.1. , , , .

6.2. , , , .

6.3. , , , .

6.4. , , , .

6.5. , , , .

6.6. , , , .

6.7. , , , .

6.8. , , , .

6.9. , , , .

6.10. , , , .

6.11. , , , .

6.12. , , , .

6.13. , , , .

6.14. , , , .

6.15. , , , .

6.16. , , , .

6.17. , , , .

6.18. , , , .

6.19. , , , .

6.20. , , , .

6.21. , , , .

6.22. , , , .

6.23. , , , .

6.24. , , , .

6.25. , , , .

6.26. , , , .

6.27. , , , .

6.28. , , , .

6.29. , , , .

6.30. , , , .

1. Даны координаты вершин четырехугольника .
2. Проверить без построения чертежа, что четырехугольник вы­пуклый;
3. В каком отношении диагонали делятся в точке пересечения?

7.1. , , , .

7.2. , , , .

7.3. , , , .

7.4. , , , .

7.5. , , , .

7.6. , , , .

7.7. , , , .

7.8. , , , .

7.9. , , , .

7.10. , , , .

7.11. , , , .

7.12. , , , .

7.13. , , , .

7.14. , , , .

7.15. , , , .

7.16. , , , .

7.17. , , , .

7.18. , , , .

7.19. , , , .

7.20. , , , .

7.21. , , , .

7.22. , , , .

7.23. , , , .

7.24. , , , .

7.25. , , , .

7.26. , , , .

7.27. , , , .

7.28. , , , .

7.29. , , , .

7.30. , , , .

1. Дана гипербола .
2. Построить график;
3. Привести уравнение к каноническому виду и вычислить параметры гиперболы;
4. Найти координаты фокусов в исходной системе координат.

8.1. 8.2. 8.3.

8.4. 8.5. 8.6.

8.7. 8.8. 8.9.

8.10. 8.11. 8.12.

8.13. 8.14. 8.15.

8.16. 8.17. 8.18.

8.19. 8.20. 8.21.

8.22. 8.23. 8.24.

8.25. 8.26. 8.27.

8.28. 8.29. 8.30.

1. Найти координаты фокуса и указать систему координат, в которой уравнение заданной параболы имеет канонический вид.

9.1. 9.2.

9.3. 9.4.

9.5. 9.6.

9.7. 9.8.

9.9. 9.10.

9.11. 9.12.

9.13. 9.14.

9.15. 9.16.

9.17. 9.18.

9.19. 9.20.

9.21. 9.22.

9.23. 9.24.

9.25. 9.26.

9.27. 9.28.

9.29. 9.30.

1. Даны три точки , , .
2. Проверить, что эти три точки не лежат на одной прямой, т.е. образуют треугольник;
3. вычислить параметры треугольника (площадь, периметр, вели­чину угла с точностью до одного градуса);
4. написать уравнение описанной окружности;
5. написать уравнение биссектрисы угла ;
6. написать уравнения двух перпендикуляров, опущенных из точек и на биссектрису угла и вычислить расстояние между ними.

10.1. , , .

10.2. , , .

10.3. , , .

10.4. , , .

10.5. , , .

10.6. , , .

10.7. , , .

10.8. , , .

10.9. , , .

10.10. , , .

10.11. , , .

10.12. , , .

10.13. , , .

10.14. , , .

10.15. , , .

10.16. , , .

10.17. , , .

10.18. , , .

10.19. , , .

10.20. , , .

10.21. , , .

10.22. , , .

10.23. , , .

10.24. , , .

10.25. , , .

10.26. , , .

10.27. , , .

10.28. , , .

10.29. , , .

10.30. , , .

1. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

11.1. 11.2.

11.3. 11.4.

11.5. 11.6.

11.7. 11.8.

11.9. 11.10. 11.11. 11.12. 11.13. 11.14.

11.15. 11.16.

11.17. 11.18.

11.19. 11.20.

11.21. 11.22.

11.23. 11.24.

11.25. 11.26. 11.27. 11.28.

11.29. 11.30.

1. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

12.1.

12.2.

12.3.

12.4.

12.5.

12.6.

12.7.

12.8.

12.9.

12.10.

12.11.

12.12.

12.13. 12.14.

12.15.

12.16.

12.17.

12.18.

12.19.

12.20.

12.21.

12.22.

12.23.

12.24.

12.25. 12.26.

12.27.

12.28.

12.29.

12.30.

1. Вычислить определитель

13.1. 13. 2.

13.3. 13. 4.

13.5. 13.6.

13.7. 13.8.

13.9. 13.10.

13.11. 13.12.

13.13. 13.14.

13.15. 13.16.

13.17. 13.18.

13.19. 13.20.

13.21. 13.22.

13.23. 13.24.

13.25. 13.26.

13.27. 13.28.

13.29. 13.30.

1. Найти обратную матрицу

14.1. 14.2.

14.3. 14.4.

14.5. 14.6.

14.7. 14.8.

14.9. 14.10.

14.11. 14.12.

14.13. 14.14.

14.15. 14.16.

14.17. 14.18.

14.19. 14.20.

14.21. 14.22.

14.23. 14.24.

14.25. 14.26.

14.27. 14.28.

14.29. 14.30.

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

15.1. 15.2.

15.3. 15.4.

15.5. 15.6.

15.7. 15.8.

15.9. 15.10.

15.11. 15.12.

15.13. 15.14.

15.15. 15.16.

15.17. 15.18.

15.19. 15.20.

15.21. 15.22.

15.23. 15.24.

15.25. 15.26.

15.27. 15.28.

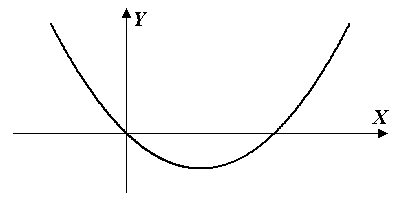
15.29. 15.30.

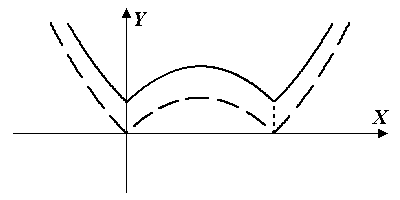
# РАЗДЕЛ 2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Напомним, что графики функций a) , б) , в) , г) , д) , е)  получаются из графика функции следующими геометрическими преобразованиями: а) отражением относительно оси , б) отражением относительно оси , в) сдвигом вдоль оси на единиц, г) сдвигом вдоль оси на единиц, д) гомотетией вдоль оси в раз , е) отражением относительно оси той части графика, которая лежит ниже этой оси.

Задача 1. Используя элементарные преобразования, построить график функции .

Решение. Сначала строим график параболы . Затем применяем последовательно преобразования е) и г) - сдвиг по оси на 2 единицы.





Приведем некоторые арифметические формулы, которые можно доказать методом математической индукции:

Задача 2. Вычислить предел

Решение. Используя третью из формул, приведенных выше, полу­чим:

Так как  
  
то

Ответ: .

Напомним, что порядком малости бесконечно малой величины (да­лее б.м.) относительно бесконечно малой называется такое натуральное число , что существует и не равен 0 предел отношения при . Обозначим через порядок малости б.м. относительно б.м. .

Тогда

для любых б.м. , , для которых определены порядки малости относительно . Действительно, если , , то

что доказывает равенство .

Задача 3. Определить порядок малости б.м. относительно при .

Решение. Имеем: . Так как согласно первому замечательному пределу, то . Далее, и так как , то . Функцию преобразуем так: . Уже доказано, что . Так как в силу непрерывности функции и то ввиду равенства (I). Окончательно

.

Ответ: порядок малости относительно равен 6.

Задача 4. Вычислить .

Решение. Обозначим , . Тогда

в силу непрерывности функции и первого замечательного пре­дела. Следовательно,

где использована непрерывность функций и .

Ответ: 3/2.

Задача 5. Локализовать какой-либо корень уравнения с точностью до 0,1.

Решение. Локализовать корень с точностью до , это значит найти такое число , что . Тогда с точностью . Заметим, что

и .

Так как функции и непрерывны, то по теореме Больцано-Коши существует корень уравнения . Для локализации этого корня будем использовать метод дихотомии (деления пополам). Вычисления сведем в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 1 | 1,5 | 1,25 | 1,125 | … |
|  | 1 | 7,39 | 2,72 | 4,48 | 3,49 | 3,08 | … |
|  | 2 | 4 | 3 | 3,5 | 3,25 | 3,125 | … |
| ? | < | > | < | > | > | < | … |

В этой таблице, начиная со столбца , выбор значения осуществляется по правилу , где , - значения переменной в предыдущих столбцах с условием, что неравенства в последней строке, соответствующие и , разного смысла и разность при этом наименьшая. Так как и интервал содержится в интервале то - искомая точка.

Ответ: один из корней уравнения содержится в интервале .

ЗАДАНИЯ

1. Для заданной функции и числа

1) найти область допустимых значений (ОДЗ) функции ;

2) элементарными преобразованиями (см. задачу 1) построить график функции ;

3) если принадлежит ОДЗ, то найти число такое, что

как только ; если же не принадлежит ОДЗ, то найти число такое, что как только , .

1.1. , .

1.2. , .

1.3. , .

1.4. , .

1.5. , .

1.6. , .

1.7. , .

1.8. , .

1.9. , .

1.10. , .

1.11. , .

1.12. , .

1.13. , .

1.14. , .

1.15. , .

1.16. , .

1.17. , .

1.18. , .

1.19. , .

1.20. , .

1.21. , .

1.22. , .

1.23. , .

1.24. , .

1.25. , .

1.26. , .

1.27. , .

1.28. , .

1.29. , .

1.30. , .

2. Вычислить предел последовательности

2.1. 2.2.

2.3. 2.4.

2.5. 2.6.

2.7. 2.8.

2.9. 2.10.

2.11. 2.12.

2.13. 2.14.

2.15. 2.16.

2.17. 2.18.

2.19. 2.20.

2.21. 2.22.

2.23. 2.24.

2.25. 2.26.

2.27. 2.28.

2.29. 2.30. .

3. Дана числовая последовательность .

1) исследовать на монотонность;

2) найти ;

3) указать натуральное число такое, начиная с которого выполняется неравенство .

3.1. 3.2. 3.3.

3.4. 3.5. 3.6.

3.7. 3.8. 3.9.

3.10. 3.11. 3.12.

3.13. 3.14. 3.15.

3.16. 3.17. 3.18.

3.19. 3.20. 3.21.

3.22. 3.23. 3.24.

3.25. 3.26. 3.27.

3.28. 3.29. 3.30.

Вычислить предел последовательности

4.1. 4.2. 4.3.

4.4. 4.5. 4.6.

4.7. 4.8. 4.9.

4.10. 4.11. 4.12.

4.13. 4.14. 4.15.

4.16. 4.17. 4.18.

4.19. 4.20. 4.21.

4.22. 4.23. 4.24.

4.25. 4.26. 4.27.

4.28. 4.29. 4.30.

Вычислить предел функции

5.1. 5.2.

5.3. 5.4.

5.5. 5.6.

5.7. 5.8.

5.9. 5.10.

5.11. 5.12.

5.13. 5.14.

5.15. 5.16.

5.17. 5.18.

5.19. 5.20.

5.21. 5.22.

5.23. 5.24.

5.25. 5.26.

5.27. 5.28.

5.29. 5.30.

Вычислить предел функции

6.1. 6.2.

6.3. 6.4.

6.5. 6.6.

6.7. 6.8.

6.9. 6.10.

6.11. 6.12.

6.13. 6.14.

15. 6.16.

17. 6.18.

19. 6.20.

21. 6.22.

23. 6.24.

25. 6.26.

27. 6.28.

29. 6.30.

Вычислить предел выражения при .

7.1. 7.2.

7.3. 7.4.

7.5. 7.6.

7. 7. 7.8.

7.9. 7.10.

7.11. 7.12.

7.13. 7.14.

7.15. 7.16.

7.17. 7.18.

7.19. 7.20.

7.21. 7.22.

7.23. 7.24.

7.25. 7.26.

7.27. 7.28.

7.29. 7.30.

Определить порядок малости бесконечно малой величины относительно при .

8.1. 8.2.

8.3. 8.4.

8.5. 8.6.

8.7. 8.8.

8.9. 8.10.

8.11. 8.12.

8.13. 8.14.

8.15. 8.16.

8.17. 8.18.

8.19. 8.20.

8.21. 8.22.

8.23. 8.24.

8.25. 8.26.

8.27. 8.28.

8.29. 8.30.

Локализовать с точностью до какой - либо корень уравнения

9.1. 9.2.

9.3. 9.4.

9.5. 9.6.

9.7. 9.8.

9.9. 9.10.

9.11. 9.12.

9.13. 9.14.

9.15. 9.16.

9.17. 9.18.

9.19. 9.20.

9.21. 9.22.

9.23. 9.24.

9.25. 9.26.

9.27. 9.28.

9.29. 9.30.

Исследовать точки разрыва функции и дать схематический чертеж в окрестности исследуемой точки.

10.1. 10.2.

10.3. 10.4.

10.5. 10.6.

10.7. 10.8.

10.9. 10.10.

10.11. 10.12.

10.13. 10.14.

10.15. 10.16.

10.17. 10.18.

10.19. 10.20.

10.21. 10.22.

10.23. 10.24.

10.25. 10.26.

10.27. 10.28.

10.29. 10.30.

РАЗДЕЛ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задача 1. Вычислить производную функции .

Решение. Найдем сначала логарифмическую производную функции :

Так как , то .

Ответ: .

Задача 2. Найти от функции, заданной параметрически:

Решение. Имеем:

Ответ: .

Задача 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала , где .

Решение. Рассмотрим точку , в которой и мало. Заменяя на дифференциал в точке и при получим:

Ответ: .

Задача 4. Найти производную первого и второго порядка функции заданной неявно соотношением .

Решение. Дифференцируем заданное соотношение по , считая функцией от ; получаем . Сокращаем на 3 и решаем полученное соотношение относительно :

Этот ответ можно использовать для вычисления производной второго порядка, но лучше продифференцировать соотношение еще раз по :

Отсюда получаем

В последнем равенстве мы сократили в числителе дроби, используя основное соотношение между и .

Ответ: ; .

В задании 13 предлагается следующий план исследования функции с параллельным построением графика:

1. общие особенности функции - область допустимых значений, четность - нечетность, периодичность, ограниченность, положительность и т.п.;
2. точки разрыва функции и их классификация;
3. исследование функции по первой производной - участки возрастания и убывания, точки экстремума;
4. исследование функции по второй производной - участки выпуклости - вогнутости, точки перегиба;
5. асимптотическое поведение функции на .

Задача 5. Исследовать функцию и построить ее график.

Решение. а) Функция не определена в точке . Так как функция определена, только если , а , причем лишь в одной точке , то получаем еще одну особенность – – функции . Итак, ОДЗ - вcя числовая ось кроме точек .

Далее

поэтому - нечетная функция, а ее график симметричен относительно начала координат. Найдем точки пересечения графика функции с осью :

Определим знаки функции в интервалах знакопостоянства ; ; ; .

+ + — —

-1 0 1

б) Так как и - монотонно возрастающая неограниченная функция, то - вертикальная асимптота и . В силу нечетности - также вертикальная асимптота и .

Находим решения уравнения . Имеем:

или .

Тогда .

Если же , то .

Следовательно, в области допустимых значений. Знаки производной , значит, и участки монотонности функции будут следующими:

+ — +

-1 1

Возрастает Убывает Возрастает

Заметим, что - тангенс угла наклона касательной графика функции в точке .

г) Вычисляем и находим решения уравнения . Получаем один корень: . Знаки и участки выпуклости будут следующими:

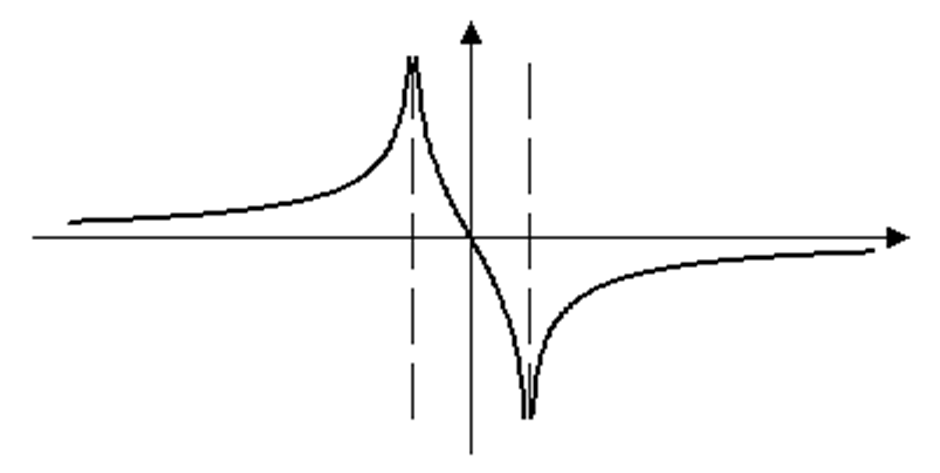
+ + — —

-1 0 1 Выпуклость Точка Выпуклость

вниз перегиба вверх

д) Так как , то и поэтому − горизонтальная асимптота на .

Эскиз графика представлен на рисунке ниже



-1 0 1

ЗАДАНИЯ

1. Найти производную функции

1.1. 1.2.

1.3. 1.4.

1.5. 1.6.

1.7. 1.8.

1.9. 1.10.

1.11. 1.12.

1.13. 1.14.

1.15. 1.16.

1.17. 1.18.

1.19. 1.20.

1.21. 1.22.

1.23. 1.24.

1.25. 1.26.

1.27. 1.28.

1.29. 1.30.

2. Найти производную функции

2.1. 2.2.

2.3. 2.4.

2. 5. 2.6.

2.7. 2.8.

2.9. 2.10.

2.11. 2.12.

2.13. 2.14.

2.15. 2.16.

2.17. 2.18.

2.19. 2.20.

2.21. 2.22.

2.23. 2.24.

2.25. 2.26.

2.27. 2.28.

2.29. 2.30.

3. Найти производную функции

3.1. 3.2.

3.3. 3.4.

3.5. 3.6.

3.7. 3.8.

3.9. 3.10.

3.11. 3.12.

3.13. 3.14.

3.15. 3.16.

3.17. 3.18.

3.19. 3.20.

3.21. 3.22.

3.23. 3.24.

3.25. 3.26.

3.27. 3.28.

3.29. 3.30.

4. Найти производную функции

4.1. 4.2.

4.3. 4.4.

4.5. 4.6.

4.7. 4.8.

4.9. 4.10.

4.11. 4.12.

4.13. 4.14.

4.15. 4.16.

4.17. 4.18.

4.19. 4.20.

4.21. 4.22.

4.23. 4.24.

4.25. 4.26.

4.27. 4.28.

4.29. 4.30.

5. Найти производную

5.1. 5.2.

5.3. 5.4.

5.5. 5.6.

5.7. 5.8.

5.9. 5.10.

5.11. 5.12.

5.13. 5.14.

5.15. 5.16.

5.17. 5.18.

5.19. 5.20.

5.21. 5.22.

5.23. 5.24.

5.25. 5.26.

5.27. 5.28.

5.29. 5.30.

6. Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически.

6.5. 6.14.

6.9. 6.2.

6.11. 6.8.

6.12. 6.3.

6.13. 6.16.

6.15. 6.6.

6.17. 6.10.

6.18. 6.27.

6.19. 6.1.

6.20. 6.7.

6.21. 6.30.

6.22. 6.4.

6.24. 6.29.

6.26. 6.25.

6.28. 6.23.

7. Найти производную функции , заданной неявно

7.1.

7.2.

7.3.

7.4.

7.5.

7.6.

7.7.

7.8.

7.9.

7.10.

7.11.

7.12.

7.13.

7.14.

7.15.

7.16.

7.17.

7.18.

7.19.

7.20.

7.21.

7.22.

7.23.

7.24.

7.25.

7.26.

7.27.

7.28.

7.29.

7.30.

8. Найти производную второго порядка от функции , заданной неявно

8.1. 8.2.

8.3. 8.4.

8.5. 8.6.

8.7. 8.8.

8.9. 8.10.

8.11. 8.12.

8.13. 8.14.

8.15. 8.16.

8.17. 8.18.

8.19. 8.20.

8.21. 8.22.

8.23. 8.24.

8.25. 8.26.

8.27. 8.28.

8.29. 8.30.

9. Найти дифференциал функции

9.1.

9.2.

9.3.

9.4.

9.5.

9.6.

9.7.

9.8.

9.9.

9.10.

9.11. ,

9.12.

9.13.

9.14.

9.15.

9.16.

9.17.

9.18.

9.19.

9.20.

9.21.

9.22.

9.23.

9.24.

9.25.

9.26.

9.27.

9.28.

9.29.

9.30.

10. Для заданной функции и заданного числа вычислить приближенно c помощью дифференциала первого порядка

10.1. ; .

10.2. ; .

10.3. ; .

10.4. ; .

10.5. ; .

10.6. ; .

10.7. ; .

10.8. ; .

10.9. ; .

10.10. ; .

10.11. ; .

10.12. ; .

10.13. ; .

10.14. ; .

10.15. ; .

10.16. ; .

10.17. ; .

10.18. ; .

10.19. ; .

10.20. ; .

10.21. ; .

10.22. ; .

10.23. ; .

10.24. ; .

10.25. ; .

10.26. ; .

10.27. ; .

10.28. ; .

10.29. ; .

10.30. ; .

11. Составить уравнение нормали и касательной к графику заданной функции в заданной точке .

11.1. ; .

11.2. ; .

11.3. ; .

11.4. ; .

11.5. ; .

11.6. ; .

11.7. ; .

11.8. ; .

11.9. ; .

11.10. ; .

11.11. ; .

11.12. ; .

11.13. ; .

11.14. ;

11.15. ; .

11.16. ; .

11.17. ; .

11.18. ; .

19. ; .

11.20. ; .

11.21. ; .

11.22. ; .

11.23. ; .

11.24. ; .

11.25. ; .

11.26. ; .

11.27. ; .

11.28. ; .

11.29. ; .

11.30. ; .

12. Применяя правило Лопиталя, найти предел функции

12.1. 12.2.

12.3. 12.4.

12.5. 12.6.

12.7. 12.8.

12.9. 12.10.

12.11. 12.12.

12.13. 12.14.

12.15. 12.16.

12.17. 12.18.

12.19. 12.20.

12.21. 12.22.

12.23. 12.24.

12.25. 12.26.

12.27. 12.28.

12.29. 12.30.

13. Провести полное исследование функций и построить графики

13.1. ; .

13.2. ; .

13.3. ; .

13.4. ; .

13.5. ; .

13.6. ; .

13.7. ; .

13.8. ; .

13.9. ; .

13.10. ; .

13.11. ; .

13.12. ; .

13.13. ; .

13.14. ; .

13.15. ; .

13.16. ; .

13.17. ; .

13.18. ; .

13.19. ; .

13.20. ; .

13.21. ; .

13.22. ; .

13.23. ; .

13.24. ; .

13.25. ; .

13.26. ; .

13.27. ; .

13.28. ; .

13.29. ; .

13.30. ; .

# РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача 1. Исследовать на экстремум функцию .

Решение. Найдем частные производные первого порядка и воспользуемся необходимым условием экстремума:

Решая эту систему, получим две стационарные точки: и . Найдем частные производные 2-го порядка:

Затем вычислим дискриминант для каждой стационарной точки:

;

.

Следовательно, в силу достаточного условия экстремума в точке экстремума нет, а в точке локальный минимум.

Ответ: - точка локального минимума.

Точка называется условным максимумом (минимумом) функции с условием связи , если существует окрестность точки такая, что как только

Задача о вычислении условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа . Итак, система трех уравнений , , выражает необходимое условие условного экстремума. Пусть - решение этой системы, а

Если , то - условный максимум; в случае - условный минимум.

Задача 2. Найти условный экстремум функции при условии .

Решение. Составим функцию Лагранжа и воспользуемся необходимым условием условного экстремума:

Решая эту систему, получим две точки: , , ; , , . Так как

, , , , ;

то

Имеем: и . Следовательно, - точка услов­ного минимума, а - точка условного максимума.

Ответ: - точка условного минимума, - точка условного максимума.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в треугольнике, ограниченном прямыми , , .

Решение. Во-первых, отметим, что - непрерывная функция, а (см. рисунок) - ограниченная замкнутая область.

Следовательно, по теореме Вейерштрасса существуют наибольшее и наименьшее значения функции в . Точка, в которой достигается наибольшее (наименьшее) значение, является либо стационарной точкой функции , лежащей внутри , либо стационарной точкой сужения функции на одну из сторон , либо, наконец, совпадает с одной из вершин , , .

Найдем стационарные точки внутри :

Ввиду того, что и внутри , мы смогли сократить на и . Точка действительно лежит внутри и .

Далее, сужая функцию на стороны и , находим, что . На стороне зависимость от такова: ; поэтому

Находим стационарные точки этой функции в интервале

Из этих двух точек интервалу принадлежит только вторая, для которой и .

Наибольшее значение функции в совпадает с наибольшим значением в точках , , , , , а также значением в любой из внутренних точек сторон и . Последнее наибольшее значение не составляет труда вычислить: , так как и ; . Аналогично, .

0 1 4 6

B

Ответ: ;

.

Заметим, что при решении 3-й задачи мы не пользовались достаточным условием экстремума.

ЗАДАНИЯ

1. Найти дифференциал второго порядка

1.1. 1.2.

1.3. 1.4.

1.5. 1.6.

1.7. 1.8.

1.9. 1.10.

1.11. 1.12.

1.13. 1.14.

1.15. 1.16.

1.17. 1.18.

1.19. 1.20.

1.21. 1.22.

1.23. 1.24.

1.25. 1.26.

1.27. 1.28.

1.29. 1.30.

2. Исследовать на экстремум функцию двух переменных

2.1. 2.2.

2.3. 2.4.

2.5. 2.6.

2.7. 2.8.

2.9. 2.10.

2.11. 2.12.

2.13. 2.14.

2.15. 2.16.

2.17. 2.18.

2.19. 2.20.

2.21. 2.22.

2.23. 2.24.

2.25. 2.26.

2.27. 2.28.

2.29. 2.30.

3. Определить наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в указанных областях

3.1. ; , , .

3.2. ; , , .

3.3. ; , .

3.4. ; , .

3.5. ; , , .

3.6. ; , .

3.7. ; , , .

3.8. ; , , .

3.9. ; , , .

3.10. ; , .

3.11. ; , , .

3.12. ; , .

3.13. ; , , .

3.14. ; , .

3.15. ; , , .

3.16. ; , , .

3.17. ; , , .

3.18. ; , .

3.19. ; , , .

3.20. ; , , .

3.21. ; , , .

3.22. , .

3.23. ; , , .

3.24. ; , .

3.25. ; , , .

3.26. ; , .

3.27. ; , .

3.28. ; , .

3.29. ; , .

3.30. ; , , .

4. Определить условные экстремумы функции двух переменных

4.1. при условии

4.2. при условии

4.3. при условии

4.4. при условии

4.5. при условии

4.6. при условии

4.7. при условии

4.8. при условии

4.9. при условии

4.10. при условии

4.11. при условии

4.12. при условии

4.13. при условии

4.14. при условии

4.15. при условии

4.16. при условии

4.17. при условии

4.18. при условии

4.19. при условии

4.20. при условии

4.21. при условии

4.22. при условии

4.23. при условии

4.24. при условии

4.25. при условии

4.26. при условии

4.27. при условии

4.28. при условии

4.29. при условии

4.30. при условии

5. Найти производные сложных функций

5.1. , , .

5.2. , , .

5.3. , , .

5.4. , .

5.5. , .

5.6. , .

5.7. , , .

5.8. , , .

5.9. , , .

5.10. , , .

5.11. , , .

5.12. , , .

5.13. , .

5.14. , .

5.15. , .

5.16. , .

5.17. , , .

5.18. , , .

5.19. , , .

5.20. , , .

5.21. , , .

5.22. , , .

5.23. , , .

5.24. , , .

5.25. , , .

5.26. , .

5.27. , .

5.28. , .

5.29. , .

5.30. , , .

6. Найти производные , (либо ) неявно заданных функций

6.1. 6.2.

6.3. 6.4.

6.5. 6.6.

6.7. 6.8.

6.9. 6.10.

6.11. 6.12.

6.13. . 6.14.

6.15. 6.16.

6.17. 6.18.

6.19. 6.20.

6.21. 6.22.

6.23. 6.24.

6.25. 6.26.

6.27. 6.28.

6.29. 6.30.

# 