Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Владимирский государственный университет

Д.Я.Данченко
С.А.Голопуз
В.И.Данченко

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Владимир - 2001

.

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов технических и физико-математических специальностей вузов. Оно написано на основе курса ТФКП (теории функций комплексного переменного), читавшегося в 1994 - 2001 годах во Владимирском государственном университете для студентов специальности "Прикладная математика"(0102).

Пособие включает справочный теоретический материал и сборник задач по всем наиболее важным разделам ТФКП, предусмотренным рабочей программой для специальности 0102. Для индивидуализации работы студентов предлагается 30 вариантов для каждого типа задач. В задачнике даются необходимые указания и разбираются примеры решений.

В последнем разделе пособия предлагаются задачи повышенной сложности. Некоторые из включенных сюда задач могут служить основой для дальнейших самостоятельных научных исследований студентов по ТФКП.

1. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ I

С комплексным числом (к.ч.) $z = x + iy$ связаны следующие общепринятые понятия и обозначения. К.ч. z изображается или как радиус-вектор с координатами (x, y), или как его концевая точка. Удобно использовать полярные координаты $\{r, \varphi\}$ вектора z, где, как обычно, $r =\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$ – длина, а $\varphi = \arg\ z$ – угол поворота радиус-вектора z. В ТФКП эти координаты называются соответственно модулем и аргументом к.ч. z. Ввиду неоднозначности определения аргумента под $\arg\ z$ обычно понимается так называемое главное значение аргумента, определяемое неравенствами $-\pi < \arg\ z \leq \pi$. Кроме главного значения в ТФКП рассматривается общая функция $\mathrm{Arg} z$ – аргумент числа (или функции) z; под $\mathrm{Arg} z$ понимается бесконечное множество значений, которые определяется как $\arg\ z + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Отметим, что $f(z) = \mathrm{Arg} z$ является типичным примером неоднозначной функции, которые играют чрезвычайно важную роль в ТФКП.

Тригонометрическая форма записи к.ч. имеет вид:

$$z =\mid z \mid (x/|z| + iy/|z|) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Удобно принять сокращение $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (формула Эйлера). Тогда получается показательная (полярная) форма записи к.ч. $z = re^{i\varphi}$. Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},\ z_1/z_2 = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Решения уравнения $w^n = z$, т.е. значения корня $\sqrt[n]{z}$ имеют вид

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \cdots, n-1.$$

Геометрические образы этих значений делят окружность $|z| = \sqrt[n]{r}$ на n равновеликих дуг. Приняты обозначения $x = \Re\ z = \mathrm{Re\ z}$, $y = \Im\ z = \mathrm{Im}\ z$, $\bar{z} = x - iy$.

Множество всех комплекных чисел обозначается через $\mathbf{C}$ и называется (открытой) комплексной плоскостью. Однозначные функции $w = f(z)$ в ТФКП определяются обычным образом, как определенное правило соответствия $z \ \rightarrow\ w$, при котором каждому z из некоторого множества $G \subset \mathbf{C}$ ставится в соответствие ровно одно значение w. Удобно записывать функции в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = z + iy$, u, v – действительнозначные функции двух переменных x, y. Элементарные однозначные трансцендентные функции определяются соотношениями:

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$,

$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, $\qquad \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$,

$\mathrm{sh} z = -i\sin iz$, $\qquad \mathrm{ch} z = \cos iz$,

$\mathrm{tg}\ z = \sin z/\cos z$, $\qquad \mathrm{ctg}\ z = \cos z/\sin z$

и.т.д. Отсюда находим

$|e^z| = e^x$, $\qquad |e^{i\varphi}| = 1$ (φ вещественное),

$\sin z = \sin x\ \mathrm{ch} y + i\cos x\ \mathrm{sh} y$, $\qquad \cos z = \cos x\ \mathrm{ch} y - i\ \sin x\ \mathrm{sh} y$,

$\mathrm{sh} z = \mathrm{sh} x\ \cos y + i\ \mathrm{ch} x\ \sin y$, $\qquad \mathrm{ch} z = \mathrm{ch} x\ \cos y + i\ \mathrm{sh} x\ \sin y$,

$|\sin z|^2 = \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x$, $\qquad |\cos z|^2 = \mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x$,

$|\mathrm{sh} z|^2 = \mathrm{ch}^2 x - \cos^2 y$, $\qquad |\mathrm{ch} z|^2 = \mathrm{ch}^2 x - \sin^2 y$.

Решить уравнения.

1.1. $z^3 + \bar{z}^3 = 8 + i$;
1.2. $z^4 - \bar{z}^4 = 1 + 2^8 i$;
1.3. $z^8\ \bar{z}^4 = i4^6$;
1.4. $z^{10}\ \bar{z}^7 = -1$;
1.5. $z^3\ \bar{z}^7 = -i$;
1.6. $z^5\ \bar{z}^{11} = 4^8$.

Найти наименьшие положительные степени, при возведении в которые выражений 1.7-1.12 получаются действительные значения.

1.7. $\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$;
1.8. $\sqrt{3} - i$;
1.9. $i/(i\sqrt{3} - 1)$;
1.10. $(1+i)/(\sqrt{3}+i)$;
1.11. $(\sqrt{3} - i)/(1 + i\sqrt{3})$.
1.12. $\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

Объяснить "парадокс"несовпадения выражений: $(z^m)^{1/n} \neq (z^{1/n})^m$ при натуральных $m, n \geq 2$, не являющихся взаимно простыми числами, вычислить соответствующие выражения при заданных z, m, n.

1.13. $z = i$, $m = 8$, $n = 6$;
1.14. $z = -i$, $m = 6$, $n = 4$;
1.15. $z = i$, $m = 4$, $n = 6$;
1.16. $z = -i$, $m = 6$, $n = 3$;
1.17. $z = i$, $m = 8$, $n = 4$.
1.18. $z = i$, $m = -8$, $n = 2$.

Разложить многочлены на множители $x^2 + p_1 x + q_1$ и $x^2 + p_2 x + q_2$ с действительными коэффициентами.

1.19. $z^4 + 6\,z^2 + 25$;
1.20. $z^4 + 4$;
1.21 $z^4 - 16\,z^2 + 100$;
1.22. $z^4 - 10\,z^2 + 169$;
1.23. $z^4 - 14\,z^2 + 625$.
1.24. $4z^4 + 5z^2 + 1$.

Решить алгебраические уравнения.

1.25. $\sum_{k=0}^{3}(4z-1)^k = 0$;
1.26. $\sum_{k=1}^{6}(2z+1)^k = 0$;
1.27. $\sum_{k=1}^{4}(9z+1)^k = 0$;
1.28. $\sum_{k=0}^{3}(3z+1)^k = 0$;
1.29. $\sum_{k=1}^{4}(5z-1)^k = 0$;
1.30. $\sum_{k=1}^{6}(16z+1)^k = 0$.

2. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ II

2.1. Доказать, что $\frac{\mathrm{Im}\,\mathrm{tg}(x+iy)}{\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}(x+iy)} = \frac{\mathrm{sh}y\ \mathrm{ch}y}{\sin x\ \cos x}$.

2.2. Решить уравнение $\sin(x + i\ln y) = \sin x$.

2.3. Решить уравнение $\cos z = 10i$.

2.4. Решить алгебраическое уравнение $(1-i)(i-z)^5 = (1+i)(i+z)^5$ и сделать проверку.

2.5. Найти корни системы уравнений $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = 1/3 \\ z_1 z_2 z_3 = 3/2. \end{cases}$

2.6. Пусть $z^4 + w^4 = 0$. Доказать, что для двух значений z имеем $\mid z - w/\sqrt{2} \mid = \mid w/\sqrt{2} \mid$.

2.7. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – корни уравнения $z^4 = -1$, занумерованные в порядке возрастания аргумента в промежутке $(0, 2\pi]$. Вычислить $(z_1 - z_2)^4 + (z_2 - z_3)^4 + (z_3 - z_4)^4$.

2.8. Пусть числа z_1, z_2, z_3 удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = 0. \end{cases}$ Доказать, что z_j $(j = 1, 2, 3)$ являются кубическими корнями из некоторого числа v.

2.9. Решить неравенство $\operatorname{Re} \sin z > \operatorname{Im} \cos z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.10. Решить уравнение $\left| e^{z^2} \right| = 1$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.11. Решить неравенство $\operatorname{Im} \sin z > 0$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.12. Решить уравнение $\left| e^{\frac{1}{z}} \right| = \frac{1}{2}$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.13. Решить неравенство $\operatorname{Re} \cos(x + iy) > \cos x$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.14. Решить уравнение $\left| e^{e^z} \right| = 1$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.15. Пусть $z_1/z_2 = z_2/z_3 = z_3/z_4$, $z_1 = -z_4$ и числа z_k попарно различны. Доказать, что $z_2 = z_4\ e^{\pm 4\pi/3}$.

2.16. Доказать, что $|\sin(x + iy)| \geq |\sin x|$.

2.17. Найти корни системы $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = 1/2 \\ z_1 z_2 z_3 = 2. \end{cases}$

2.18. Доказать, что $\operatorname{Re}(\cos(x + iy) \cos(x - iy)) = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$.

2.19. Пусть z_1, z_2, z_3 – корни уравнения $z^3 = 1$. Вычислить значение выражения $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2$.

2.20. Доказать, что $\operatorname{Re}(\cos^2(3\pi/4 - i)) = 1/2$.

2.21. Решить уравнение $\overline{\cos z} = \cos z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.22. Решить уравнение $\overline{\sin z} = \sin z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.23. Решить неравенство $|\operatorname{Im}\ \operatorname{tg}\ z| > |\operatorname{Re}\ \operatorname{tg}\ z|$.

2.24. Равносильны ли уравнения $|\operatorname{tg}\ z| = 0$ и $|\operatorname{ch}\ y| = |\cos\ x|$?

2.25. Показать, что $17\operatorname{tg}\ (\frac{\pi}{4} + i \ln 2) = 8 + 15i$.

2.26. Решить неравенство $\operatorname{Re}\ \operatorname{tg}\ z > 0$.

2.27. Доказать, что $\overline{\sin(x + iy)} \sin x - \cos(x + iy) \cos x = -\cos 2x\ \operatorname{ch} y$.

2.28. Решить неравенство $\operatorname{Re} \cos z > \operatorname{Re} \sin z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

2.29. Доказать неравенство $|\sin z \cos x - \cos z \sin x| \geq \sin y$ при $z = x + iy$.

2.30. Решить неравенство $\left| e^{\sin z} \right| > 1$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

3. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Говорят, что последовательность комплексных чисел $z_k = x_k + iy_k$ имеет пределом число $a = \alpha + i\beta$ (или сходится к числу a), если $\lim_{n\to\infty} \mid z_k - a \mid = 0$. Существование предела записывается в виде $a = \lim_{n\to\infty} z_k$ и равносильно тому, что $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_k$ и $\beta = \lim_{n\to\infty} y_k$. Если в полярных координатах $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $a = \rho e^{i\theta} \neq 0$, то существование предела $a = \lim_{n\to\infty} z_k$ равносильно тому, что $\rho = \lim_{k\to\infty} r_k$ и $\theta = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$.

Говорят, что числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм $z_k = \sum_{n=1}^{k} \zeta_n$ имеет конечный предел. Таким образом, исследование на сходимость всегда можно свести к случаю действительных последовательностей и рядов. Однако на практике это обычно не облегчает исследования и оперируют непосредственно с комплексными величинами.

При решении задач этого раздела полезно иметь в виду следующие факты, известные из теории числовых рядов:

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geq 1$;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

В задачах 3.1–3.30 следует подобрать (какие-нибудь) числовые последовательности $z_k = x_k + i\ y_k$, удовлетворяющие указанным свойствам. Применяютя сокращения: "сх.ходится, "расх.асходится, & – знак конъюнкции (и).

3.1.	$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\cos z_k}$ сх.
3.2.	$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k^k + \bar{z}_k^k)$ сх.	&	$z_k \to \infty$ при $k \to \infty$.
3.3.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{x_k}$ сх.
3.4.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \sin x_k$ сх.
3.5.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin 2z_k}$ расх.
3.6.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mid \cos z_k \mid}$ расх.
3.7.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(iz_k)}$ сх.
3.8.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ расх.
3.9.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} z_k}$ сх.
3.10.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} z_k}$ расх.
3.11.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} (\arg z_k - \pi)$ сх.
3.12.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos 2z_k}$ расх.
3.13.	$\sum_{k=1}^{\infty} \cos z_k e^{-z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.
3.14.	$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\sin z_k}$ расх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\cos z_k}$ сх.
3.15.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{x_k}$ сх.
3.16.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \sin x_k$ сх.
3.17.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \sin x_k$ сх.
3.18.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mid \sin z_k \mid}$ расх.
3.19.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} z_k}$ сх.

3.20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ расх.

3.21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh} z_k}$ сх.

3.22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{z_k}$ сх.

3.23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{z_k}$ сх.

3.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos 4z_k}$ расх.

3.25. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin z_k e^{-z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.

3.26. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i \sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i \sin \bar{z}_k}$ расх.

3.27. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i \cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i \cos \bar{z}_k}$ расх.

3.28. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \cos x_k$ сх.

3.29. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{x_k}$ сх.

3.30. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i \sin 2z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \cos y_k$ сх.

Пример. Подобрать числовую последовательность $z_k = x_k + iy_k$, для которой ряды $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\sin z_k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \cos x_k$ сходятся.

Решение. Задача сводится к тому, чтобы подобрать вещественные x_k и y_k так, чтобы общие члены указанных рядов достаточно быстро стремились к нулю.

Сходимость второго ряда будет обеспечена, если положить $x_k = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2}$. Действительно, в этом случае

$$\cos x_k = \sin \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2} \quad (k \to \infty).$$

Так как

$$|e^{i\sin z_k}| = e^{Re(i \sin z_k)} = e^{-\mathrm{Im}\sin z_k} = e^{-\cos x_k \mathrm{sh} y_k},$$

то для сходимости первого ряда достаточно, чтобы произведение $\cos x_k \mathrm{sh} y_k$ стремилось к $+\infty$ со скоростью порядка k, то есть $\mathrm{sh} y_k \to +\infty$ как k^3. Поскольку в этом случае $\mathrm{sh} y_k = (e^{y_k} - e^{-y_k})/2$, то можно положить $y_k = \ln k^3 = 3\ln k$. Тогда при $k \to \infty$

$$|e^{i\sin z_k}| = \exp\left(-\sin\frac{1}{k^2}\,\frac{k^3 - k^{-3}}{2}\right) = \exp\left((-k^{-2} + O(k^{-6}))\frac{k^3 - k^{-3}}{2}\right) =$$

$$= e^{-\frac{k}{2} + O(k^{-3})} \sim (1/\sqrt{e})^k,$$

а ряд с таким общим членом сходится.

Ответ. Указанные ряды будут сходиться, если положить $z_k = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2} + 3i\ln k$.

4. АНАЛИТИЧНОСТЬ, УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ определена в некоторой окрестности U точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Говорят, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 в комплексном смысле (моногенна в точке z_0), если существует предел $f'(z_0) = \lim_{dz\to 0} \frac{f(z_0+dz) - f(z_0)}{dz}$, $dz = z - z_0$. Из моногенности функции f в точке z_0 следует соотношение $f(z_0 + dz) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot dz + \epsilon(dz) \cdot dz$, где величина $\epsilon(dz) \to 0$ при $dz \to 0$. Пренебрегая малыми величинами $\epsilon(dz) \cdot dz$, запишем $f(dz + z_0) -$

$f(z_0) \asymp f'(z_0)dz$. Последнее выражение называется комплексным дифференциалом функции f в точке z_0 и обозначается через $df(z_0)$. Из существования комплексного дифференциала в точке z_0 следует, что если $f'(z_0) \neq 0$, то при отображении $w = f(z)$ все бесконечно малые векторы dz, выходящие из z_0, поворачиваются на угол $\mathrm{Arg} f'(z_0)$ и растягиваются в $|f'(z_0)|$ раз. Это явление называется *конформностью* в точке z_0. Итак, малый вектор $dz = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ при конформном отображении $w = f(z)$ (с точностью до бесконечно малых порядка более высокого, чем величина dz) переходит в некоторый малый вектор $df = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ где

$$R = r \mid f'(z_0) \mid, \quad \vartheta = \mathrm{Arg\,df} = \mathrm{Arg\,dz} + \mathrm{Arg\,f'(z_0)}.$$

Геометрически это означает, что отображение $w = f(z)$ вблизи данной точки z_0 совершает лишь простейшие деформации области, которые сводятся к следующему: 1) растяжение всех векторов dz, выходящих из точки z_0, в $\mid f'(z_0) \mid$ раз; 2) поворот всех векторов dz на один и тот же угол равный $\arg f'(z_0)$ или, что то же самое, сохранение углов между кривыми, проходящими через точку z_0 (консерватизм углов).

Далее, из определения моногенности f в точке z_0 вытекают, что действительная и мнимая части u, v функции $f = u + iv$ не могут быть произвольными функциями, в частности, должны выполняться *условия Коши-Римана* в точке z_0, которые имеют вид:

$$\partial\ u/\partial\ x = \partial\ v/\partial\ y, \quad \partial\ v/\partial\ x = -\partial\ u/\partial\ y,$$

где все частные производные вычислены в точке (x_0, y_0). Функция f называется аналитической в области G, если она моногенна во всех точках $z \in G$. Отметим, что при условии непрерывности всех указанных частных производных в области G аналитичность функции f в G равносильна выполнению условий Коши-Римана всюду в G. Кроме того, из аналитичности функции f в G следует, что u, v являются гармоническими функциями, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

В задачах 4.1–4-30 заданы две функции $u(x, y)$ (первый столбец) и $v(x, y)$ (второй столбец). Требуется:

1). Найти параметры a, b, при которых u и v образуют гармоническую пару, т.е. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической функцией.

2). Записать f как функцию от переменной $z = x + iy$. Вычислить прозводную и дифференциал функции f.

3). Нарисовать образы треугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1/10$ при отображениях функцией $w = f(z)$ и дифференциалом $w - f(0) = f'(0)z$. На этом примере объяснить геометрический смысл конформности (см. следующую задачу) и значения производной $f'(0)$.

4). Показать, что при указанном отображении величины углов при вершинах треугольника сохраняются, если в этих вершинах отлична от нуля производная f'.

4.1. $2ax^2 - 2ay^2 - 3bx^2 + 3by^2 + bx - ax$; $10xyb - by + 2y - ay$.
4.2. $2ax^2 - 2ay^2 - 7bx^2 + 7by^2 + bx - ax$; $18xyb - by + 4y - ay$.
4.3. $2ax^2 - 2ay^2 + 5bx^2 - 5by^2 + bx - ax$; $-6xyb - by - 2y - ay$.
4.4. $2ax^2 - 2ay^2 + 9bx^2 - 9by^2 + bx - ax$; $-14xyb - by - 4y - ay$.
4.5. $2ax^2 - 2ay^2 - 11bx^2 + 11by^2 + bx - ax$; $26xyb - by + 6y - ay$.
4.6. $2ax^2 - 2ay^2 + 13bx^2 - 13by^2 + bx - ax$; $-4xyb - by - 6y - ay$.
4.7. $2ax^2 - 2ay^2 - 4bx^2 + 4by^2 + bx - 2ax$; $-4xyb - by + 2y - 2ay$.
4.8. $2ax^2 - 2ay^2 - 2bx^2 + 2by^2 + bx + 2x - 2ax$; $-8xyb - by - 2ay$.
4.9. $2ax^2 - 2ay^2 - 5bx^2 + 5by^2 + bx - x - 2ax$; $-2xyb - by + 3y - 2ay$.
4.10. $2ax^2 - 2ay^2 - bx^2 + by^2 + bx + 3x - 2ax$; $-10xyb - by - y - 2ay$.
4.11. $2ax^2 - 2ay^2 - 6bx^2 + 6by^2 + bx - 2x - 2ax$; $-by + 4y - 2ay - 8bxy$.
4.12. $2ax^2 - 2ay^2 + bx + 4x - 2ax$; $-12xyb - by - 2y - 2ay$.
4.13. $2ax^2 - 2ay^2 - 7bx^2 + 7by^2 + bx - 3x - 2ax$; $2xyb - by + 5y - 2ay$.
4.14. $2ax^2 - 2ay^2 + bx^2 - by^2 + bx + 5x - 2ax$; $-14xyb - by - 3y - 2ay$.
4.15. $2ax^2 - 2ay^2 - \frac{7}{2}bx^2 + \frac{7}{2}by^2 + bx + \frac{1}{2}x - 2ax$; $-5xyb - by + \frac{3}{2}y - 2ay$.
4.16. $2ax^2 - 2ay^2 - \frac{10}{3}bx^2 + \frac{10}{3}by^2 + bx + \frac{2}{3}x - 2ax$; $-\frac{16}{3}xyb - by + \frac{4}{3}y - 2ay$.
4.17. $ax + 7xb + 14x^2 - 14y^2 - 9x$; $-ay - 7yb - 4xyb - 9y$.
4.18. $ax - xb - 2x^2 + 2y^2 - x$; $-ay + yb - 4xyb - y$.
4.19. $ax + xb + 2x^2 - 2y^2 - 3x$; $-ay - yb - 4xyb - 3y$.
4.20. $ax - 2xb - 4x^2 + 4y^2$; $-ay + 2yb - 4xyb$.
4.21. $ax + 2xb + 4x^2 - 4y^2 - 4x$; $-ay - 2yb - 4xyb - 4y$.
4.22. $ax - 3xb - 6x^2 + 6y^2 + x$; $-ay + 3yb - 4xyb + y$.
4.23. $ax + 3xb + 6x^2 - 6y^2 - 5x$; $-ay - 3yb - 4xyb - 5y$.
4.24. $ax - 4xb - 8x^2 + 8y^2 + 2x$; $-ay + 4yb - 4xyb + 2y$.
4.25. $ax + 4xb + 8x^2 - 8y^2 - 6x$; $-ay - 4yb - 4xyb - 6y$.
4.26. $ax - 5xb - 10x^2 + 10y^2 + 3x$; $-ay + 5yb - 4xyb + 3y$.
4.27. $ax + 5xb + 10x^2 - 10y^2 - 7x$; $-ay - 5yb - 4xyb - 7y$.
4.28. $ax - 6xb - 12x^2 + 12y^2 + 4x$; $-ay + 6yb - 4xyb + 4y$.
4.29. $ax + 6xb + 12x^2 - 12y^2 - 8x$; $-ay - 6yb - 4xyb - 8y$.
4.30. $ax - 7xb - 14x^2 + 14y^2 + 5x$; $-ay + 7yb - 4xyb + 5y$.

5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенной ряд (с.р.) общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - \zeta_0)^n$ заменой переменной $z = \zeta - \zeta_0$ преобразуется в стандартный с.р. (с.с.р.) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Радиус сходимости R с.с.р. можно определить по формуле

$$1/R = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если в выражении для общего члена степенного ряда присутствуют факториалы, то радиус сходимости удобно вычислять по формуле Даламбера

$$R = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$$

(если этот предел существует), а для исследования на границе круга сходимости можно применять формулу Стирлинга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\Theta_n},$$

где Θ_n стремится к 0 при $n \to \infty$ (точнее, имеет место оценка $|\Theta_n| \le \frac{1}{12n}$).

Если $R = 0$, то с.с.р. сходится только при $z = 0$; если $R = \infty$, то с.с.р. сходится при всех $z \in \mathbf{C}$; если $0 < R < \infty$, то с.с.р. сходится абсолютно при $|z| < R$ (а при $|z| \le R - \epsilon$, $\epsilon \in (0, R)$, сходится абсолютно и равномерно) и расходится при $|z| > R$. На границе круга сходимости, т.е. при $|z| = R$ с.с.р. может как сходиться, так и расходиться. Это предмет дополнительных исследований.

Найти радиус R сходимости данного степенного ряда. В случае $0 < R < \infty$ исследовать ряд на сходимость на границе круга. Обозначение: $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.

5.1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k (2k)!!}{(k!)^2} (z - i)^k$.

5.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!! \cos(ik)}{(2k+1)!!} (2z + i)^k$.

5.3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!! k^k}{(4k)!!} (z + i)^k$.

5.4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)! \mathrm{sh} k}{k^k\, k!} (2z + i)^k$.

5.5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!(2k+1)!!}{(2k)!} (2z - i)^k$.

5.6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(k \ln k)}{(k+1)! \cos(ik)} (z + 2i)^{2k}$.

5.7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch} k\, \sin(ik \ln k)}{5^k\, k!} (z - 2i)^{2k}$.

5.8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \mathrm{ch} k}{3^k (2k)!!} (z + i)^{4k}$.

5.9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)! \mathrm{sh}(3k)}{k!(2k+1)!!} (z + i)^{2k}$.

5.10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(i \ln k) k!}{(2k-1)!!} (2z + i)^k$.

5.11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k} 5^k}{k!(2k+1)!!} (2z + i)^k$.

5.12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k} 3^k}{((2k)!!)^2} (2z - i)^{2k}$.

5.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 (k+1)^k}{(2k+1)!! \mathrm{ch} k} (z - 2i)^{3k}$.

5.14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k!)^2 \sin(ik)}{k^k (2k+1)!} (2z - 3i)^k$.

5.15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!! \cos(3ik)}{k! \sin(2ik)} (z + 3i)^k$.

5.16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \mathrm{ch}(k)}{\sqrt{k}(2k+1)!!} (z + i)^{4k}$.

5.17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)!! \cos(ik)}{k^{k+1}} (z - 2i)^{3k}$.

5.18. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k! \mathrm{sh}(k)}{(2k+2)!!} (2z - i)^{2k+1}$.

5.19. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k)!! k!}{k^k\, \mathrm{sh}(k \ln k)} (z + i)^k$.

5.20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^3(ik)(2k)!}{k^k k!} (z - 2i)^{2k}$.

5.21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ik) \mathrm{ch}(2k \ln k)}{(k!)^2} (2z + i)^{k-1}$.

5.22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(k \ln k)}{3^k (2k-1)!!} (z - 2i)^{2k+1}$.

5.23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k \mathrm{sh}(k \ln k)}{k!(2k)!!} (4z + i)^{2k-1}$.

5.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)!!}{e^k (2k)!!} (2z + i)^{3k}$.

5.25. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k!)^2 5^k}{k(2k+1)!} (z - 3i)^{k+2}$.

5.26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k k!}{k^2 (2k-1)!!} (2z + i)^{4+k}$.

5.27. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!(2k)!!}{((2k+1)!!)^2} (2z + 1)^k$.

5.28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 \sin(ik)}{(2k+1)!} (z - 2i)^k$.

5.29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{4^k k!} (-2z + 1)^{k!}$.

5.30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4^k+1)!!}{k!} (z - 2i)^{k^2+k+1}$.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)^k (2k)!! 2^k}{(2k)!} (z - 1)^{2k}.$$

Решение. Перейдем к ряду стандартного вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k$, где

$$a_k = \frac{(2k+1)^k (2k)!! 2^k}{(2k)!} > 0, \qquad \zeta = (z - 1)^2.$$

Его радиус сходимости R_1 найдем по формуле Даламбера

$$R_1 = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k+1)^k(2k)!!2^k}{(2k)!}\frac{(2k+2)!}{(2k+3)^{k+1}(2k+2)!!2^{k+1}}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)^k(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)^{k+1}(2k+2)2} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+3}\right)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{2}{2k+3}\right)^{k+1} == \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}e^{-\frac{2(k+1)}{2k+3}} = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

Следовательно, $R = \sqrt{R_1} = 1/\sqrt{2e}$, ряд сходится при $|z-1| < 1/\sqrt{2e}$ и расходится при $|z-1| > 1/\sqrt{2e}$. Пусть теперь $|z-1| = 1/\sqrt{2e}$. Тогда

$$\left|\frac{(2k+1)^k(2k)!!2^k}{(2k)!}(z-1)^{2k}\right| = \frac{(2k+1)^k2^kk!2^k}{(2k)!(2e)^k} = \frac{(2k+1)^k2^kk^ke^{-k}\sqrt{2\pi k}e^{\Theta_k}}{(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{4\pi k}e^{\Theta_{2k}}e^k} =$$

$$= \frac{(2k+1)^ke^{\Theta_k}}{(2k)^k\sqrt{2}e^{\Theta_{2k}}} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^k\frac{e^{\Theta_k}}{\sqrt{2}e^{\Theta_{2k}}} \to \sqrt{e/2}.$$

Так как общий член не стремится к 0, то ряд расходится.

Ответ. Ряд сходится при $|z-1| < 1/\sqrt{2e}$.

6. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ I

Аналитическая в некоторой проколотой ϵ-окрестности $U = \{z: \ |z - z_0| < \epsilon\}$ точки z_0 функция $f(z)$ разлагается в U в ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. При этом коэффициенты вычисляются по формулам $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}(z-z_0)^{-n-1}f(z)dz$, где $0 < \delta < \epsilon$ и интеграл не зависит от выбора δ. Для оценки погрешностей в окрестности точки z_0 при аппроксимации функции f ее рядом Лорана можно применять неравенство Коши $|a_n| \le \delta^{-n}M(\delta)$, $n \in \mathbf{Z}$, где $M(\delta) = \max_{|z-z_0|=\delta}|f(z)|$. При этом δ не произвольно, а выбирается из условия аналитичности функции f в проколотой окрестности $0 < |z-z_0| < \delta_1$ с некоторым $\delta_1 > \delta$. Тогда, если требуется при некотором целом N оценить остаток

$$R_N(z) = f(z) - \sum_{n=-\infty}^{N} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

на некоторой окружности $|z - z_0| = r$ с $0 < r < \delta$, то находим

$$|R_N(z)| \le M(\delta)\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{r}{\delta}\right)^n = M(\delta)\left(\frac{r}{\delta}\right)^{N+1}\frac{\delta}{\delta - r}.$$

Если $a_n = 0$ при всех $n < 0$, то точка z_0 называется устранимой особенностью (или правильной точкой); ряд Лорана в окрестности такой точки состоит лишь из правильной части (т.е. из членов с неотрицательными номерами) и является рядом Тейлора. Заметим, что если $M(\delta) < C < \infty$ при всех достаточно малых δ, то из вышеприведенной оценки, очевидно, следует, что $|a_n| = 0$ при $n < 0$. Верна теорема: точка z_0 является правильной точкой тогда и только тогда, когда $M(\delta) < C < \infty$ при всех достаточно малых δ.

Если $a_n = 0$ при всех $n < n_0 < 0$ и $a_{n_0} \ne 0$, то точка z_0 называется полюсом порядка n_0; при этом $M(\delta) \asymp \delta^{n_0}$. Если главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов (т.е. членов с отрицательными номерами), то точка z_0 называется существенно особой. В двух последних случаях (полюс, существенно особая точка) определяется *вычет* функции f в точке z_0 по формуле: $\mathrm{Res}_{z=z_0}f(z) = a_{-1}$. На практике для вычисления вычета в полюсе z_0 порядка n_0 применяют формулу

$$\mathrm{Res}_{z=z_0}f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^n \ f(z)\right)^{(n-1)},$$

где $(n-1)$ означает порядок производной. Для вычисления вычета в существенно особой точке удобной формулы нет.

1). В задачах 6.1-6.30 с четными номерами написать разложение функции f в ряд (Тейлора или Лорана) по степеням z в окрестности точки $z = 0$ с указанием общего члена ряда. В задачах с нечетными номерами, пользуясь рекуррентными формулами для коэффициентов, написать 7 членов разложения функции f в ряд по степеням z (привести не только ответ, но и подробные выкладки). Указать тип особенности функции в точке $z = 0$.
2). Найти $\mathrm{Res}_{z=0}f(z)$ (в случае неустранимости особенности).
3). Найти область сходимости.

4). Оценить абсолютную погрешность 7-членной аппроксимации заданной функции ее степенным рядом на окружности $|z| = 1/5$ (т.е. взять в указанной выше формуле $r = 1/5$, значение δ выбрать самостоятельно, N определится из вида разложения, см. пример ниже). Вычислить с помощью разложения приближенное значение $f(\sqrt{2}(1+i)/10)$.

6.1. $f = z/(1-\cos z)$;	6.2. $f = z^{-2}\ \sin^2 2z$;
6.3. $f = 1/(z\sin z)$;	6.4. $f = z^{-3}\,\mathrm{sh}\, iz\ \sin z$;
6.5. $f = (1-e^z)/\sin z$;	6.6. $f = z^{-4}e^{-iz}\ \cos z$;
6.7. $f = (1-z)/(1-e^z)$;	6.8. $f = z^{-4}e^{-z}\ \mathrm{ch}\, z$;
6.9. $f = \sin z/(z^2\cos 2z)$;	6.10. $f = z^{-2}\cos iz\ \ \mathrm{sh}\, 2z$;
6.11. $f = (1-\cos z)/(1-e^{-z})$;	6.12. $f = z^{-2}\ e^{2z}\sin iz$;
6.13. $f = \sin 2z/(z+z^3)$;	6.14. $f = z^{-1}\ \cos^3 z$;
6.15. $f = (1-e^{-z})/(z\sin z)$;	6.16. $f = z^{-4}\ \sin^3 z$;
6.17. $f = (1-\cos z)/(1-e^{2z})$;	6.18. $f = z^{-2}\,\mathrm{sh}\, 2z\ \sin iz$;
6.16. $f = z/(\sin(z^2))$;	6.20. $f = z^{-1}e^{2iz}\ \cos z$;
6.21. $f = (z-\sin z)/(1-e^{2z})$;	6.22. $f = z^{-3}e^{iz}\ \mathrm{sh}\, z$;
6.23. $f = z/(1-\cos 2z)$;	6.24. $f = z^{-1}e^{-z}\ \mathrm{sh}\, 2z$;
6.25. $f = (1+z)/(\sin 2z)$;	6.26. $f = z^{-1}e^{z}\ \mathrm{sh}\, iz$;
6.27. $f = (e^z-1)/(\sin z)$;	6.28. $f = z^{-2}e^{-2z}\ \mathrm{ch}^z$;
6.27. $f = (z-\sin 2z)/(z\sin z)$;	6.28. $f = z^{-3}\,\mathrm{sh}\, 3z\cdot\cos z$;
6.29. $f = (z+\cos z)/(z^2+z^4)$;	6.30. $f = z^{-4}\,\mathrm{ch}^2\, 3z\ \ \sin iz$;

Пример. Пусть задана функция

$$f(z) = \frac{e^z+1}{z\ \sin 2z}.$$

Точка $z=0$ является полюсом второго порядка. Подставим в выражение $f(z)$ разложения числителя и знаменателя по степеням z и приравняем это к разложению в ряд Лорана функции $f(z)$:

$$\frac{2+z+z^2/2!+z^3/3!+\dots}{2z^2-2^3z^4/3!+2^5z^6/5!-\dots} = \frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+2\frac{c_1}{z}+\dots \tag{1}$$

Приводим к общему знаменателю и находим следующие уравнения для равенства коэффициентов слева и справа в (1) при одинаковых степенях z:

$z^0: \quad 2-2\,c_{-2}=0,$

$z^1: \quad 1-2\,c_{-1}=0,$

$z^2: \quad 1/2-2\,c_0+4/3\,c_{-2}=0,$

$z^3: \quad 4/3\,c_{-1}-2\,c_1+1/6=0,$

$z^4: \quad -2\,c_2+1/24+4/3\,c_0-4/15\,c_{-2}=0,$

$z^5: \quad 4/3\,c_1-4/15\,c_{-1}+1/120-2\,c_3=0,$

$z^6: \quad 4/3\,c_2+1/720+8/315\,c_{-2}-4/15\,c_0-2\,c_4=0.$

Решаем последовательно и получаем: $c_{-2}=1$, $c_{-1}=1/2$, $c_0=11/12$, $c_1=5/12$, $c_2=359/720$, $c_3=31/144$, $c_4=6761/30240$. Отсюда

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{11}{12}+\frac{5}{12}z+\frac{359}{720}z^2+\frac{31}{144}z^3+\frac{6761}{30240}z^4+R(z), \tag{2}$$

где $R(z) = O(z^5)$.

Вычет в точке $z = 0$ равен $c_{-1} = 1/2$.

Поскольку функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z| < \pi/2$ (почему?), то и ряд (1) сходится в этом кольце.

Оценим модуль остатка $R(z)$ по указанной формуле. В данном случае $N + 1 = 5$. Пусть $z = \delta e^{it}$ и $\delta \leq 1$. Тогда

$$|e^z + 1| \leq |e^z| + 1 = e^{\Re z} + 1 \leq e^{\delta} + 1 \leq 1 + e;$$

$$|\sin 2z| \geq 2\delta - \delta^3(2^3/3! + 2^5/5! + 2^7/7! + ...) > 2\delta - 9\delta^3/5 \geq \delta/5.$$

Итак, при $\delta = 1$ имеем $M(\delta) \leq (1+e)/(\delta^2/5)) = 5(1+e)$. Отсюда при всех $|z| = 1/5$ получаем $|R(z)| \leq 5(1 + e) \cdot 5^{-5}(1/(1 - 1/5)) < 0.007$. Наконец, проведя вычисления суммы (2) с $z = (1 + i)\sqrt{2}/10$, получим $f(z) = 2.74... - 26.68...i$.

7. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ II

В следующих задачах 7.1-7.30 написать все разложения в ряд Лорана по степеням z (т.е. во всех различных кольцах аналитичности) дроби $R(z) = P(z)/Q(z)$, а также вычислить вычеты в особых точках функции R, где

$P(z) = k_5z^2 + ((k_1 - k_5 + 1 - k_5k_4)\, i - 2\, k_5k_3 + 1 + k_2 - 2\, k_5)\, z+$
$(-2 - k_4 + k_5 - k_3 + k_5k_3k_4 - k_2 + k_5k_4 - k_1k_3 - k_2k_4 + k_5k_3 - k_1)\, i+$
${k_5k_3}^2 + 2\, k_5k_3 - 1 - k_3 + k_5 - k_2 - k_2k_3;$
$Q(z) = z^2 - ((1 + k_4)\, i + 2 + 2k_3)\, z + (1 + k_3)\,(1 + k_4)\, i + (1 + k_3)^2,$

а параметры $(k_5, k_4, k_3, k_2, k_1)$ равны либо нулю, либо единице и находятся как цифры номера варианта, записанного в двоичной системе.

Так, в задаче 7.26 получаем $26 = (11010)_2$ и $k_5 = 1$, $k_4 = 1$, $k_3 = 0$, $k_2 = 1$, $k_1 = 0$. Подстановка этих значений дает $P(z) = z^2 - iz - 1 - 3\,i$; $Q(z) = z^2 + (-2 - 2\,i)\,z + 1 + 2\,i$; откуда $R(z) = 1 + 2\,(z - 1)^{-1} + i(z - 1 - 2\,i)^{-1}$.

В задаче 7.1 получаем $1 = (00001)_2$ и $k_5 = k_4 = k_3 = k_2 = 0$, $k_1 = 1$.

Пример. Пусть $P(z) = z^2 - 2z - 4i, Q(z) = z^2 - (4 + 2i)z + 4 + 4i$. Разложим прежде всего R(z) в сумму простейших дробей:

$$R(z) = 1 + \frac{(2 + 2i)z - 4 - 8i}{(z - 2)(z - 2 - 2i)} = 1 + \frac{2}{z - 2} + \frac{2i}{z - 2 - 2i}.$$

Функция R имеет две особые точки: $z_1 = 2$ и $z_2 = 2 + 2i$. Разложим ее в ряд Лорана во всех трех кольцах аналитичности.

а) $|z| < 2$. Используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, получаем

$$\frac{2}{z - 2} = -\frac{1}{1 - z/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n},$$

$$\frac{2i}{z-2-2i} = -\frac{i/(1+i)}{1-z/(2+2i)} = -\frac{i}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n(1+i)^n},$$

откуда

$$R(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{i}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n(1+i)^n} = -\frac{1+i}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{(1+i)^{n+1}}\right)\frac{z^n}{2^n}.$$

б) $2 < |z| < 2\sqrt{2}$. Здесь $|z/2| > 1$, $|z/(2+2i)| < 1$. Поэтому для второй дроби сохраняется прежнее разложение, а для первой дроби имеем

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{z}\,\frac{1}{1-2/z} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^n}.$$

Следовательно,

$$R(z) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^n} - \frac{i}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n(1+i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^n} + \frac{1-i}{2} - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n(1+i)^{n+1}}.$$

в) $|z| > 2\sqrt{2}$. Поскольку в данной области $|z/(2+2i)| > 1$, то

$$\frac{2i}{z-2-2i} = \frac{2i}{z}\,\frac{1}{1-(2+2i)/z} = \frac{2i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+2i)^n}{z^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i2^n(1+i)^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{iz^n}{2^n(1+i)^{n+1}}.$$

Для $2/(z-2)$ ряд Лорана будет тем же, что и в предыдущем случае. Таким образом, в рассматриваемой области

$$R(z) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{iz^n}{2^n(1+i)^{n+1}} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{i}{(1+i)^{n+1}}+1\right)\frac{z^n}{2^n}.$$

Из разложения функции $R(z)$ на простейшие дроби видно, что $\mathrm{Res}_{z=2}R = 2,\ \mathrm{Res}_{z=2+2i}R = 2i$.

8. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ III

В задачах 8.1-8.30 задан тригонометрический ряд

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi,$$

где коэффициенты вычисляются по формуле $A_n = 2^{-n(2k_4+k_2+1)}$ $B_n = 3^{-n(k_5+2k_3+k_1+1)}$, а параметры $(k_5, k_4, k_3, k_2, k_1)$ равны либо нулю, либо единице и находятся как в предыдущей задаче.

1) Показать, что $f(\varphi)$ является значением некоторой аналитической функции $F(z)$ на окружности $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}^1$. Для этого сделать подстановку $\cos\varphi = (z + 1/z)/2$, $\sin\varphi = -i(z - 1/z)/2$, где $z = e^{i\varphi}$.

2) Написать разложение функции F в ряд Лорана по степеням z, выделив главную и правильную его части; найти область сходимости ряда.

3) Найти обобщенный вычет функции F (см. следующий пример).

Пример. Пусть

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{-4n}\cos\ n\varphi + 3^{-5n}\sin\ n\varphi).$$

Сделав указанную выше подстановку, получим разложение функции $F(z)$ при $|z| = 1$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n + z^{-n}}{2^{4n+1}} + \frac{z^n - z^{-n}}{2i3^{5n}}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{2^{4n+1}} + \frac{z^n}{2i3^{5n}}\right) + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-4n-1}z^{-n} + \frac{i}{2}3^{-5n}z^{-n}) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}(2^{4n-1} + \frac{i}{2}3^{5n})z^n + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-4n-1} - \frac{i}{2}3^{-5n})z^n.$$

Так как при $n \to +\infty$

$$|2^{-4n-1} - \frac{i}{2}3^{-5n}| = 2^{-4n-1}|1 - i(16/243)^n|,$$

то по формуле Коши-Адамара $1/R = 2^{-4}$, откуда внешний радиус сходимости $R = 16$. Аналогично при $n \to -\infty$ находим

$$|2^{4n-1} + \frac{i}{2}3^{5n}| \sim 2^{4n-1} = 2^{-4|n|-1},$$

в силу чего внутренний радиус сходимости $r = 2^{-4} = 1/16$. На границе кольца сходимости ряд расходится, так как модуль общего члена стремится к $1/2 \neq 0$. Таким образом, ряд для $F(z)$ сходится при $1/16 < |z| < 16$, и тем самым $F(z)$ аналитична в этом кольце. Внутри круга $|z| < 1/16$ функция F имеет некоторое множество E особенностей (возможно, неизолированных). В этом случае определяется *обобщенный вычет* функции $F(z)$ на множестве E, равный контурному интегралу $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\,dz$, где γ – произвольный замкнутый контур, содержащий внутри себя множество E и не содержащий никаких других особенностей. В данном случае, например, таковым является контур $\gamma = \{z :\ |z| = 1\}$, лежаший в кольце аналитичности функции $F(z)$. Полученный ряд для $F(z)$ можно почленно интегрировать по γ, в силу чего обобщенный вычет функции $F(z)$ на множестве E равен коэффициенту при z^{-1}, то есть

$$\mathrm{Res}_E F(z) = 2^{-5} + \frac{3^{-5}\ i}{2} = \frac{1}{32} + \frac{i}{486}.$$

В задачах 9.1-9.30 найти вычет функции $f(z, a, b, ...)$ в точке $z = 0$ в зависимости от значений параметров a, b,.. Кроме того, следует указать тип особенности в точке $z = 0$ при различных значениях указанных параметров.

9.1. $f = \frac{\sin bz + z^2}{1 - \cos az - 1/2\, a^2 z^2}$.

9.2. $f = \frac{\sin bz + z^2}{e^{az} - 1 - bz}$.

9.3. $f = \frac{1}{a \sin bz - b \sin az}$.

9.4. $f = \frac{z}{z \sin bz + b \sin az^2}$.

9.5. $f = \frac{1}{a \sin az - b \sin bz}$.

9.6. $f = \frac{a \sin z + 4 \sin cz}{z \sin bz + b \sin az^2}$.

9.7. $f = \frac{\cos z}{a \sin bz - b \sin az}$.

9.8. $f = \frac{a \sin z + \sin bz}{z \sin bz + b \sin az^2}$.

9.9. $f = \frac{bz - \sin az}{(1 - e^{az}) \sin bz - z^2}$.

9.10. $f = \frac{b - a \cos az}{(1 - e^{az}) \cos bz}$.

9.11. $f = \frac{a \sin z - 1}{z - b \sin(2\, z)}$.

9.12. $f = \frac{\sin z - az}{z - b \sin az}$.

9.13. $f = \frac{cz - \sin az}{(1 - e^{bz}) \sin bz - z^2}$.

9.14. $f = \frac{z}{1 - \cos az + bz^2}$.

9.15. $f = \frac{e^{az} - \cos bz}{\sin az - z - \sin bz}$.

9.16. $f = \frac{e^{az} - e^{bz}}{\sin az - z - \sin bz}$.

9.17. $f = \frac{e^{az} - e^{bz}}{\sin az - az - z \sin bz}$.

9.18. $f = \frac{\cos az - e^{bz}}{\sin bz - bz - z \sin az}$.

9.19. $f = \frac{\cos az - b}{\sin bz - bz - z \sin az}$.

9.20. $f = \frac{\sin az - z}{z \cos bz + (a-1)z - \sin az}$.

9.21. $f = \frac{e^z - a \cos z}{az + b \sin z}$.

9.22. $f = \frac{ae^z - \cos z}{az - b \sin z}$.

9.23. $f = \frac{ae^z - b \cos z}{z \cos z - b \sin z}$.

9.24. $f = \frac{ae^z - \cos z}{z \cos z - b \sin z - z}$.

9.25. $f = \frac{a \cos(3\, z) - \cos z}{z \cos(2\, z) - b \sin z}$.

9.26. $f = \frac{a \cos z - e^z}{z \cos z - b \sin(2\, z)}$.

9.27. $f = \frac{a \cos z - be^z}{z - b \sin(2\, z)}$.

9.28. $f = \frac{a \cos z - b}{z - b \sin(2\, z)}$.

9.29. $f = \frac{\sin az - \sin bz}{1 - e^z \cos bz + z}$.

9.30. $f = \frac{\cos az - b \cos z}{1 - e^z \cos bz + z}$.

9.31. $f = \frac{\sin az + z^2}{1 - \cos az + bz^2}$.

9.32. $f = \frac{\sin az + z^2}{e^{bz} - \cos az - bz}$

Пример. Пусть

$$f(z) = \frac{3z}{6 \sin z - 6z + z^3} - \frac{60}{z^4} - \frac{10}{7z^2}.$$

Решение. Воспользуемся разложением Тейлора $\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + z^9/9! + O(z^{11})$. Тогда

$$6 \sin z - 6z + z^3 = 6z - z^3 + \frac{z^5}{20} - \frac{z^7}{840} + \frac{z^9}{60480} + O(z^{11}) - 6z + z^3 =$$

$$= \frac{z^5}{20} \left(1 - \frac{z^2}{42} + \frac{z^4}{3024} + O(z^6)\right);$$

$$f(z) = \frac{60}{z^4(1 - z^2/42 + z^4/3024 + O(z^6))} - \frac{60}{z^4} - \frac{10}{7z^2} =$$

$$\frac{420 - 420(1 - z^2/42 + z^4/3024 + O(z^6)) - 10z^2(1 - z^2/42 + O(z^4))}{7z^4(1 - z^2/42 + O(z^4))} =$$

$$= \frac{10z^2 - 5z^4/36 - 10z^2 + 5z^4/21 + O(z^6)}{7z^4 + O(z^6)} = \frac{25/252 + O(z^2)}{7 + O(z^2)} = \frac{25}{1764} + O(z^2).$$

Отсюда находим $\lim_{z\to 0} f(z) = 25/1764$, т.е. z=0 – устранимая особая точка. Вычет в такой точке равен нулю.

Ответ. $z = 0$ – устранимая особая точка; $\mathrm{Res}_{z=0} f = 0$.

10. ИНТЕГРАЛ I

Криволинейный интеграл $I = \int_\Gamma f(z)\, dz$ от функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, вдоль кусочно гладкой ориентированной кривой Γ определяется стандартно как предел интегральных сумм $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$, где z_k – точки разбиения кривой Γ, взятые в порядке обхода, причем z_0 и z_n совпадают с началом и концом кривой Γ соответственно, а ζ_k – проивольные точки на дугах $[z_{k-1}, z_k]$ этой кривой. На практике можно использовать формулу

$$I = \int_\Gamma udx - vdy \ + i\int_\Gamma udy + vdx,$$

т.е. вычисление интеграла от ФКП сводится к вычислению четырех криволинейных интегралов от действительных функций u и v. Если $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ – параметрическое уравнение кривой Γ, причем параметр t в соответствии с ориентацией изменяется от значения t_0 к значению t_1, то из последней формулы находим

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt,$$

где $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ вычисляется в точках гладкости кривой Γ, а в угловых точках доопределяется произвольными конечными значениями.

В случае графического задания $y = y(x)$ кривой Γ можно ввести параметр t, положив $x = t$, $y = y(t)$.

В задачах 10.1-10.30 вычислить $\int_\gamma f\ dz$ вдоль кривой $\gamma:\quad y = y(x)$ от точки с абсциссой α до точки с абсциссой β. В первом столбце приводимой ниже таблицы записана функция $f(z)$.

10.1. $\frac{2+iz+i\bar{z}}{(1+i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2i)}$;	$y = \ln x$,	$\alpha = 1$,	$\beta = 2$.
10.2. $\frac{z-\bar{z}+8}{(4+5iz+3i\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$;	$y = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
10.3. $\frac{8i+z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2-4}{(2+3z+\bar{z})^2(-4-4i+iz^2-2iz\bar{z}+i\bar{z}^2)}$;	$y = \mathrm{tg}\, x$,	$\alpha = 0$,	$\beta = \frac{\pi}{4}$.
10.4. $\frac{-4+z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{(4i+z-\bar{z})^2(-4-4i+iz^2-2iz\bar{z}+i\bar{z}^2)}$;	$y = \mathrm{tg}\, x$,	$\alpha = 0$,	$\beta = \frac{\pi}{4}$.
10.5. $\frac{i+z+\bar{z}}{(8i+3z+\bar{z})^2(z+\bar{z}+2i)}$;	$y = \ln x$,	$\alpha = 1$,	$\beta = 2$.
10.6. $\frac{-4+z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{(4+z-\bar{z})^2(-4-4i+iz^2-2iz\bar{z}+i\bar{z}^2)}$;	$y = \mathrm{tg}\, x$,	$\alpha = 0$,	$\beta = \frac{\pi}{4}$.
10.7. $\frac{z-\bar{z}-2}{(1+2\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$;	$y = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
10.8. $\frac{-2i+z+\bar{z}}{(-1+\bar{z})^2(z+\bar{z}+2i)}$;	$y = \ln x$,	$\alpha = 2$,	$\beta = 4$.
10.9. $\frac{z-\bar{z}+4}{(4+3iz+i\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$;	$y = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.

10.10. $\frac{2\,z+2\,\bar{z}-i}{(3\,iz-i\bar{z}-2)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.11. $\frac{2\,z-2\,\bar{z}+1}{(4+5\,iz-3\,i\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$; $y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.12. $\frac{2\,z+2\,\bar{z}-i}{(3\,z-\bar{z}-2)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.13. $\frac{3\,i+z+\bar{z}}{(8\,i+5\,z-\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.14. $\frac{z-\bar{z}-2}{(-4-4\,i+iz^2-2\,iz\bar{z}+i\bar{z}^2)(2+z-\bar{z})}$; $y=\operatorname{tg} x$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{4}$.

10.15. $\frac{z-\bar{z}-2}{(1+\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$; $y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.16. $\frac{1+iz+i\bar{z}}{(2+iz+3\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.17. $\frac{1+z+\bar{z}}{(-2+z-\bar{z}+2\,iz+2\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.18. $\frac{z+\bar{z}-2}{(2\,z+2\,\bar{z}-1+iz-i\bar{z})^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.19. $\frac{z+\bar{z}-2\,i}{(3\,iz+i\bar{z}-1)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.20. $\frac{-1+z+\bar{z}}{(2-z+\bar{z}+2\,iz+2\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.21. $\frac{z-\bar{z}-4}{(2+z+3\,\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$; $y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.22. $\frac{z+\bar{z}-i}{(2\,z-1)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.23. $\frac{i}{(2+z-\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.24. $\frac{1}{(4\,i+z-\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.25. $\frac{1}{(8\,i+z-\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.26. $\frac{z+\bar{z}+i}{(i\bar{z}+1)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.27. $\frac{-4\,i+z^2-2\,z\bar{z}+\bar{z}^2-4}{(1+i\bar{z})^2(-4-4\,i+iz^2-2\,iz\bar{z}+i\bar{z}^2)}$; $y=\operatorname{tg} x$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{4}$.

10.28. $\frac{i}{(-1+2\,iz)^2}$; $y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

10.29. $\frac{-1+z+\bar{z}}{(-4-z+\bar{z}+2\,iz+2\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

10.30. $\frac{-i+z+\bar{z}}{(-4+z+3\,\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

Пример. Пусть
$$f(z)=\frac{-i+z+\bar{z}}{(-8+z+3\bar{z})^2(z+\bar{z}+2i)},$$
где $\gamma=\{z=x+iy;\ y=\ln x,\ 1\le x\le 2\}$. Полагая $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, $dz=dx+idy$, получаем
$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\frac{-i+2x}{(-8+4x-2iy)^2(2x+2i)}(dx+idy)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(2x-i)(1+i/x)dx}{(4x-2i\ln x-8)^2(x+i)}=\frac{1}{8}\int_1^2\frac{(2-i/x)dx}{(2x-i\ln x-4)^2}=$$
$$=\frac{1}{8}\int_1^2\frac{d(2x-i\ln x-4)}{(2x-i\ln x-4)^2}=-\frac{1}{8(2x-i\ln x-4)}\bigg|_1^2=$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{i\ln 2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\left(\frac{i}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16} - \frac{i}{8\ln 2}.$$

11. ИНТЕГРАЛ II

Если функция $f(z)$ аналитична внутри простой замкнутой кусочно гладкой кривой Г (контура) и непрерывна в некоторой ее окрестности, то (терема Коши) $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$. Если же внутри контура Г имеются изолированные неустранимые особенности $z_1, \cdots, z_n$ функции f, то (основная теорема о вычетах) $\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_{\,\mathrm{z=z_k}} \mathrm{f}$.

В задачах 11.1-11.30 показать, что $\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$ при всех значениях параметра p, для которых заданная ниже функция f определена (исключая те случаи, когда полюсы функции f лежат на окружности $|z| = 1$).

11.1. $\frac{3z-3p-5\ln 2\ \mathrm{tg}\, p}{z^2-2pz+p^2+(\ln 2)^2}\sin z.$

11.2. $\frac{4z-\pi-4p\ \mathrm{cth}\, p}{16z^2-8\pi z+\pi^2+16p^2}\sin z.$

11.3. $\frac{8z-\pi+8\sqrt{2}p\ \mathrm{cth}\, p+8p\ \mathrm{cth}\, p}{64z^2-16\pi z+\pi^2+64p^2}\cos z.$

11.4. $\frac{6z-6p-\pi\sqrt{3}}{36z^2-72pz+36p^2+\pi^2}\mathbf{e}^z.$

11.5. $\frac{8z-8p-\pi\sqrt{2}-\pi}{64z^2-128pz+64p^2+\pi^2}\mathbf{e}^z.$

11.6. $\frac{z-p-p\ \mathrm{ctg}\, p}{z^2-2pz+2p^2}\mathbf{e}^z.$

11.7. $\frac{z-2p-p\ \mathrm{ctg}\, p}{z^2-4pz+5p^2}\mathbf{e}^z.$

11.8. $\frac{3z-1-3p\ \mathrm{ctg}\, p}{9z^2-6z+1+9p^2}\mathbf{e}^z.$

11.8. $\frac{2z-1-2p\ \mathrm{ctg}\, p}{4z^2-4z+1+4p^2}\mathbf{e}^z.$

11.10. $\frac{4z-1-4p\ \mathrm{ctg}\, p}{16z^2-8z+1+16p^2}\mathbf{e}^z.$

11.11. $\frac{-z+1/2+p\ \mathrm{cth}\, p\,\mathrm{tg}(1/2)}{z^2-z+1/4+p^2}\sin z.$

11.12. $\frac{-z+1/3+p\ \mathrm{cth}\, p\,\mathrm{tg}(1/3)}{z^2-2/3z+1/9+p^2}\sin z.$

11.13. $\frac{5z-1-5p\ \mathrm{ctg}\, p}{25z^2-10z+1+25p^2}\mathbf{e}^z.$

11.14. $\frac{6z-1-6p\ \mathrm{ctg}\, p}{36z^2-12z+1+36p^2}\mathbf{e}^z.$

11.15. $\frac{7z-1-7p\ \mathrm{ctg}\, p}{49z^2-14z+1+49p^2}\mathbf{e}^z.$

11.16. $\frac{2z-p-2p\ \mathrm{ctg}\, p}{4z^2-4pz+5p^2}\mathbf{e}^z.$

11.17. $\frac{6z-\pi+6\sqrt{3}p\ \mathrm{cth}\, p}{36z^2-12\pi z+\pi^2+36p^2}\cos z.$

11.18. $\frac{4z-\pi+4p\ \mathrm{cth}\, p}{16z^2-8\pi z+\pi^2+16p^2}\cos z.$

11.19. $\frac{3z-p-3p\ \mathrm{ctg}\, p}{9z^2-6pz+10p^2}\mathbf{e}^z.$

11.20. $\frac{4z-p-4p\ \mathrm{ctg}\, p}{16z^2-8pz+17p^2}\mathbf{e}^z.$

11.21. $\frac{5z-p-5p\ \mathrm{ctg}\, p}{25z^2-10pz+26p^2}\mathbf{e}^z.$

11.22. $\frac{6z-p-6p\ \mathrm{ctg}\, p}{36z^2-12pz+37p^2}\mathbf{e}^z.$

11.23. $\frac{6z-\pi-2\sqrt{3}p\ \mathrm{cth}\, p}{36z^2-12\pi z+\pi^2+36p^2}\sin z.$

11.24. $\frac{8z-\pi-8\sqrt{2}p\ \mathrm{cth}\, p+8p\ \mathrm{cth}\, p}{64z^2-16\pi z+\pi^2+64p^2}\sin z.$

11.25. $\frac{7z-p-7p\ \mathrm{ctg}\, p}{49z^2-14pz+50p^2}\mathbf{e}^z.$

11.26. $\frac{8z-p-8p\ \mathrm{ctg}\, p}{64z^2-16pz+65p^2}\mathbf{e}^z.$

11.27. $\frac{-z+1/4+p\ \mathrm{cth}\, p\,\mathrm{tg}(1/4)}{z^2-1/2z+1/16+p^2}\sin z.$

11.28. $\frac{3z-3p+5\ln 2\,\mathrm{ctg}\, p}{z^2-2pz+p^2+(\ln 2)^2}\cos z.$

11.29. $\frac{8z-1-8p\ \mathrm{ctg}\, p}{64z^2-16z+1+64p^2}\mathbf{e}^z.$

11.30. $\frac{9z-p-9p\ \mathrm{ctg}\, p}{81z^2-18pz+82p^2}\mathbf{e}^z.$

Пример. Пусть

$$f(z) = \frac{9z - p - 9p\mathrm{ctg}\, p}{81z^2 - 18pz + 82p^2}e^z.$$

Находим корни знаменателя: $z_{1,2} = (p \pm p\sqrt{1-82})/9 = (\pm i + 1/9)p$. Отсюда

$$f(z) = \frac{9z - p - 9p\mathrm{ctg}\, p}{(9z - p + 9pi)(9z - p - 9pi)}e^z.$$

Так как $|z_1| = |z_2|$, то обе особые точки будут находиться либо вне, либо внутри контура. Поскольку

$$\mathrm{Res}_{(1/9\pm i)p} f(z) = \left.\frac{(9z - p - 9p\mathrm{ctg}\, p)e^z}{9(9z - p \pm 9pi)}\right|_{z=(1/9\pm i)p} =$$

$$= \frac{p \pm 9ip - p - 9p\mathrm{ctg}\, p}{\pm 9 \cdot 18pi} e^{p/9 \pm pi} = \frac{\pm i\mathrm{ctg}\, p + 1}{18} e^{p/9\pm pi} =$$

$$\frac{1 \pm i\mathrm{ctg}\, p}{18} e^{p/9}(\cos p \pm i\sin p) = \pm i \frac{e^{p/9}}{18\sin p},$$

то сумма вычетов равна нулю, откуда и вытекает требуемый результат.

12. ИНТЕГРАЛ III (ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ДРОБИ)

В задачах 12.1-12.30 вычислить определенный интеграл от заданного тригонометрического выражения $f(\cos\varphi, \sin\varphi)$ по отрезку $[0, 2\pi]$. Для этого следует применить комплексную подстановку $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\cos\varphi = (z + 1/z)/2, \ \sin\varphi = -i(z - 1/z)/2, \ d\varphi = -i \ dz/z,$$

и интеграл $\int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$ преобразуется к контурному интегралу $\oint_{|z|=1} R(z)dz$, где $R(z)$ – некоторая рациональная дробь.

12.1. $\frac{2\cos^2\varphi - 1}{16\cos^2\varphi - 25}$.

12.2. $\frac{\sin^2\varphi}{13 - 12\cos\varphi}$.

12.3. $\frac{-5 + 12\cos\varphi + 2\cos^2\varphi}{32\cos^2\varphi - 28\cos\varphi - 85}$.

12.4. $\frac{2\cos^2\varphi - 7\cos\varphi + 9}{16\cos^2\varphi - 40\cos\varphi + 25}$.

12.5. $\frac{2\cos^2\varphi - 3\cos\varphi - 11}{16\cos^2\varphi - 25}$.

12.6. $\frac{-5 + 9\cos\varphi + 2\cos^2\varphi}{12\cos^2\varphi - 5\cos\varphi - 25}$.

12.7. $\frac{2\cos\varphi + 1}{3\cos\varphi + 5}$.

12.8. $\frac{\sin^2\varphi}{26 - 10\cos\varphi}$.

12.9. $\frac{4\cos^2\varphi - 9\cos\varphi + 2}{16\cos^2\varphi - 40\cos\varphi + 25}$.

12.10. $\frac{4\cos^2\varphi - 3\cos\varphi - 1}{16\cos^2\varphi - 40\cos\varphi + 25}$.

12.11. $\frac{4\cos^2\varphi + 3\cos\varphi - 1}{16\cos^2\varphi + 40\cos\varphi + 25}$.

12.12. $\frac{4\cos^2\varphi + \cos\varphi - 3}{16\cos^2\varphi - 25}$.

12.13. $\frac{16\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 9}{16\cos^2\varphi - 25}$.

12.14. $\frac{10\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 5}{4\cos\varphi - 5}$.

12.15. $\frac{20\cos^3\varphi - 16\cos^2\varphi - 19\cos\varphi + 8}{4\cos\varphi - 5}$.

12.16. $\frac{4\cos^3\varphi - 4\cos^2\varphi - 11\cos\varphi + 2}{-17 + 8\cos\varphi}$.

12.17. $\frac{4\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2}{5 + 4\cos\varphi}$.

12.18. $\frac{25 - 33\cos\varphi + 2\cos^2\varphi}{12\cos^2\varphi - 35\cos\varphi + 25}$.

12.19. $\frac{29 - 27\cos\varphi + 4\cos^2\varphi}{24\cos^2\varphi - 91\cos\varphi + 85}$.

12.20. $\frac{18\cos^3\varphi + 12\cos^2\varphi - 19\cos\varphi - 5}{25 + 9\cos^2\varphi - 30\cos\varphi}$.

12.21. $\frac{9\cos^3\varphi + 9\cos^2\varphi - 7\cos\varphi - 5}{-25 + 9\cos^2\varphi}$.

12.22. $\frac{-13 + 3\cos\varphi + 4\cos^2\varphi}{12\cos^2\varphi - 5\cos\varphi - 25}$.

12.23. $\frac{10\cos^3\varphi + 24\cos^2\varphi + 5\cos\varphi - 15}{-65 + 15\cos^2\varphi - 14\cos\varphi}$.

12.24. $\frac{50\cos^3\varphi + 40\cos^2\varphi - 47\cos\varphi - 19}{169 + 25\cos^2\varphi - 130\cos\varphi}$.

12.25. $\frac{-9 + 11\cos\varphi + 2\cos^2\varphi}{12\cos^2\varphi + 5\cos\varphi - 25}$.

12.26. $\frac{2\cos\varphi + 3}{3\cos\varphi - 5}$.

12.27. $\frac{-13+16\cos\ \varphi+2\cos^2\varphi}{32\cos^2\varphi+28\cos\ \varphi-85}$. 12.28. $\frac{\cos\varphi(2\cos\varphi+3+\sin\varphi)}{8+12\cos\varphi+5\cos^2\varphi}$.

12.29. $\frac{1}{\cos\varphi+2\sin\varphi+4}$. 12.30. $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi+2}$.

Пример. Пусть $f(\cos\varphi,\sin\varphi)=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi+2}$. Сделав указанную замену, получим

$$I\equiv\int_0^{2\pi}f(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi=\int_{|z|=1}\frac{-i/2(z-1/z)(-idz/z)}{1/2(z+1/z)-i/2(z-1/z)+2}=$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{-(z^2-1)dz}{z(z^2+1-iz^2+i+4z)}=\int_{|z|=1}\frac{(1-z^2)dz}{z((1-i)z^2+4z+1+i)}=$$

$$=\frac{1}{1-i}\int_{|z|=1}\frac{(1-z^2)dz}{z(z^2+2(1+i)z+i)}.$$

Особые точки:
$z_1=0$;
$z_{2,3}=-1-i\pm\sqrt{2i-i}=-1-i\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}=(1+i)(-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$
являются полюсами первого порядка. При этом внутри контура $|z|=1$ находятся точки $z_1=0$ и $z_2=(1+i)(1/\sqrt{2}-1)$. Найдем вычеты подынтегральной функции в этих точках:

$$\mathrm{Res}_{z_1}=\left.\frac{(1-z^2)}{z^2+2(1+i)z+i}\right|_{z=0}=\frac{1}{i}=-i;$$

$$\mathrm{Res}_{z_2}=\left.\frac{(1-z^2)}{z(z+(1+i)(1/\sqrt{2}+1))}\right|_{z=z_2}=$$

$$=\frac{1-2i(1-\sqrt{2})^2/2}{(1+i)(1/\sqrt{2}-1)(1+i)\sqrt{2}}=\frac{1-i(1-\sqrt{2})^2}{2i(1-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+i\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Отсюда, применив теорему Коши о вычетах, окончательно получим

$$I=\frac{2\pi i}{1-i}(\mathrm{Res}_{z_1}+\mathrm{Res}_{z_2})=2\pi i\frac{1+i}{1-i}\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}=\pi i\cdot i(\sqrt{2}-1)=\pi(1-\sqrt{2}).$$

13. ИНТЕГРАЛ IV (НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

Используя теорему о вычетах, в задачах 13.1-13.30 вычислить несобственный криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L\frac{2x+1}{ky^2+mx^2+n}dy$$

вдоль параболы $L: y=ax^2+b$, $-\infty<x<\infty$. В условиях задач задаются необходимые параметры.

13.1.	$a=-7$	$b=-3$	$k=1$	$m=8$	$n=-8$
13.2.	$a=3$	$b=2$	$k=1$	$m=-2$	$n=-3$
13.3.	$a=17$	$b=1$	$k=9$	$m=-8$	$n=-8$
13.4.	$a=-2$	$b=-3$	$k=1$	$m=-7$	$n=-8$
13.5.	$a=-1$	$b=-1$	$k=4$	$m=-3$	$n=-3$
13.6.	$a=-7$	$b=-1$	$k=4$	$m=-3$	$n=-3$
13.7.	$a=6$	$b=2$	$k=4$	$m=1$	$n=-7$
13.8.	$a=4$	$b=1$	$k=9$	$m=1$	$n=-5$
13.9.	$a=2$	$b=3$	$k=1$	$m=8$	$n=7$
13.10.	$a=-6$	$b=-5$	$k=1$	$m=-8$	$n=-9$
13.11.	$a=-14$	$b=-2$	$k=1$	$m=-3$	$n=-3$
13.12.	$a=-1$	$b=-2$	$k=1$	$m=6$	$n=5$
13.13.	$a=-5$	$b=-4$	$k=1$	$m=-6$	$n=-7$
13.14.	$a=3$	$b=2$	$k=4$	$m=-3$	$n=-7$
13.15.	$a=1$	$b=5$	$k=1$	$m=7$	$n=-9$
13.16.	$a=3$	$b=2$	$k=4$	$m=-3$	$n=-7$
13.17.	$a=16$	$b=2$	$k=1$	$m=4$	$n=-3$
13.18.	$a=-2$	$b=-4$	$k=1$	$m=-3$	$n=-7$
13.19.	$a=-5$	$b=-3$	$k=1$	$m=-4$	$n=-8$
13.20.	$a=-7$	$b=-5$	$k=1$	$m=-5$	$n=-9$
13.21.	$a=-4$	$b=-4$	$k=1$	$m=9$	$n=9$
13.22.	$a=-3$	$b=-4$	$k=1$	$m=10$	$n=9$
13.23.	$a=3$	$b=0$	$k=1$	$m=10$	$n=1$
13.24.	$a=20$	$b=4$	$k=1$	$m=9$	$n=-7$
13.25.	$a=-18$	$b=-1$	$k=9$	$m=9$	$n=-8$
13.26.	$a=-5$	$b=-5$	$k=1$	$m=-9$	$n=-9$
13.27.	$a=2$	$b=2$	$k=1$	$m=5$	$n=5$
13.28.	$a=-18$	$b=-1$	$k=9$	$m=9$	$n=-8$
13.29.	$a=1$	$b=1$	$k=9$	$m=-8$	$n=-8$
13.30.	$a=2$	$b=1$	$k=1$	$m=9$	$n=8$
13.32.	$a=-14$	$b=-2$	$k=4$	$m=8$	$n=-7$

Пример. Вычислить интеграл

$$I \equiv \int_L \frac{2x+1}{4y^2+8x^2-7}dy$$

вдоль параболы $y=-14x^2-2$.

Решение. Имеем $y^2=196x^4+56x^2+4,\ dy=-28xdx$, а I преобразуется в несобственный интеграл от функции $F(x)$ действительной переменной x:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-56x^2-28x}{784x^4+232x^2+9}dx.$$

Так как подынтегральная функция $F(z)$ (рассматриваемая как функция комплексной переменной z) есть $O(|z|^{-2})$ при $z\to\infty$, то интеграл I равен величине $2\pi i$, умноженной на сумму вычетов функции F в особых точках верхней полуплоскости.

Найдем особые точки:

$$z^2 = \frac{-116 \pm \sqrt{13456 - 7056}}{784} = \frac{-116 \pm 80}{784},$$

то есть $z^2 = -9/196$ или $z^2 = -1/4$. В верхней полуплоскости находятся точки $z = 3i/14$ и $z = i/2$. Вычислим вычеты в этих точках.

$$\mathrm{Res}_{z=i/2} F = \left.\frac{-56z^2 - 28z}{(196z^2+9)2(2z+i)}\right|_{z=i/2} = \frac{14-14i}{4i(-49+9)} = \frac{7i-7}{80i},$$

$$\mathrm{Res}_{z=3i/14} F = \left.\frac{-56z^2 - 28z}{(4z^2+1)14(14z+3i)}\right|_{z=3i/14} = \frac{18/7-6i}{84i(-9/49+1)} = \frac{3-7i}{80i}.$$

Следовательно,

$$I = 2\pi i \left(\frac{7i-7}{80i} + \frac{3-7i}{80i}\right) = 2\pi i \frac{-4}{80i} = -\frac{\pi}{10}.$$

14. ИНТЕГРАЛ V (НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ИНТЕГРАЛА)

В задачах 14.1-14.30 вычислить все значения интеграла

$$\int_0^i \frac{(\mathrm{i} - \beta_2)(\alpha - \beta_1)^2}{(z - \beta_1 - \mathrm{i}\alpha)^2 (z - \beta_1 - \mathrm{i}\beta_2)}\, dz,$$

где параметры определяются с помощью чисел $k_1 \div k_5$, определенных в задаче №7, по формулам

$$\alpha = 1 + k_1 + k_3 + k_5,\ \beta_1 = 1 + k_1 + k_2 + \alpha,\ \beta_2 = 1 + \alpha + k_1 + k_2 + k_4.$$

15. ТЕОРЕМА РУШЕ

Теорема Руше. *Пусть область G ограничена кусочно-гладким контуром Γ и для двух аналитических в замкнутой области $\bar{G}$ функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеем $|f(z)| > |\varphi(z)|$ всюду на границе Γ. Тогда уравнения $f(z) = 0$ и $f(z) + \varphi(z) = 0$ имеют равное число корней в области G*

С помощью теоремы Руше показать, что в кольце $r < |z| < R$ многочлен $P(z) = az^m - bz^n + cz - d$ имеет $m - 1$ корней. Параметры a, b, c, d, m, n, R, r заданы в следующей таблице.

	a	b	c	d	m	n	R	r
15.1.	2	5	91	65	4	2	4	3
15.2.	2	3	93	89	4	2	4	3
15.3.	3	11	54	36	5	4	4	1
15.4.	2	3	71	29	5	4	3	2

15.5.	3	5	100	21	5	4	3	2
15.6.	2	7	66	43	4	3	5	2
15.7.	2	10	86	4	4	2	4	3
15.8.	2	4	92	76	4	2	4	3
15.9.	2	6	83	84	4	3	5	2
15.10.	3	12	74	3	4	3	5	2
15.11.	2	8	49	1	4	3	5	2
15.12.	2	9	87	17	4	2	4	3
15.13.	2	6	90	53	4	2	4	3
15.14.	2	7	89	41	4	2	4	3
15.15.	2	10	100	93	5	2	3	2
15.16.	3	17	102	86	4	2	4	2
15.17.	7	1	93	41	4	5	3	2
15.18.	6	1	74	17	4	5	3	2
15.19.	5	1	61	9	4	5	4	2
15.20.	5	6	48	30	3	2	4	2
15.21.	5	5	78	35	4	3	3	2
15.22.	7	6	72	62	3	2	4	2
15.23.	3	6	52	31	4	2	3	2
15.24.	5	1	93	97	4	3	3	2
15.25.	3	1	54	78	3	2	5	2
15.26.	3	7	56	58	3	2	6	2
15.27.	4	10	88	30	4	3	4	2
15.28.	4	3	67	89	3	2	5	2
15.29.	6	10	84	78	3	2	5	2
15.30.	2	1	38	38	4	2	3	2

Пример. Определить число корней многочлена $P(z) = z^4 + z^2 - 4z + 1$ в кольце $1 < |z| < 2$.

Решение. Найдем сначала количество корней в круге $|z| < 1$. Для этого представим $P(z)$ в виде суммы $f(z) + g(z)$, где $f(z) = -4z$, $g(z) = z^4 + z^2 + 1$. Тогда на границе круга имеем строгое неравенство $|g(z)| < |f(z)|$, поскольку

$$|g(z)| \leq |z^4| + |z^2| + 1 = 3 < 4 = |f(z)|.$$

По теореме Руше в круге $|z| < 1$ число корней функций $P(z) = f(z) + g(z)$ и $f(z) = -4z$ одинаково. Итак, число корней многочлена $P(z)$ в круге $|z| < 1$ равно 1.

Чтобы найти количество корней P(z) в круге $|z| < 2$, положим $f_1(z) = z^4$, $g_1(z) = z^2 - 4z + 1$. Тогда при $|z| = 2$ имеем

$$|f_1(z)| = 16, \quad |g_1(z)| \leq 4 + 8 + 1 = 13,$$

то есть $|g_1(z)| < |f_1(z)|$. Поскольку $f_1(z)$ имеет в круге $|z| < 2$ четыре корня (именно, корень $z = 0$ кратности 4), то и $P(z) = f_1(z) + g_1(z)$ в этом круге имеет 4 корня. А так как на границе кольца корней у $P(z)$, очевидно, нет, то число корней внутри кольца равно 4-1=3.

16. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ I

Мы знаем, что из дифференцируемости функции f в точке z_0 следует, что $\Delta f = f(z) - f(z_0) \asymp df$, где $df = f'(z_0)dz$ – комплексный дифференциал функции f в точке z_0. Отсюда при $f'(z_0) \neq 0$ следует, как отмечалось, конформность отображения f в точке z_0, состоящая в том, что отображение $w = f(z)$ вблизи данной точки z_0 совершает лишь простейшие деформации области: постоянное растяжение всех векторов dz, выходящих из точки z_0, и поворот таких векторов на один и тот же угол. Верно и обратное, т.е. из конформности отображения $w = f(z)$ следует его дифференцируемость в комплексном смысле. Функция f называется конформной в некоторой области, если она конформна во всех точках этой области.

Центральным результатом в теории конформных отображений является теорема Римана (1851 г.).

Теорема. *Для любых двух односвязных областей D и G, граница каждой из которых состоит более чем из одной точки, существует взаимно однозначное (однолистное) конформное отображение области D на всю область G.*

В гидродинамике, аэродинамике, в теории упругости возникают задачи построения таких отображений Римана для конкретных областей. Например, в гидродинамике задача об обтекании идеальной жидкостью заданного контура Γ обычно решается построением отображения верхней полуплоскости или неограниченной полосы на внешность контура Γ.

В следующих задачах 16.1-16.30 требуется

1). построить конформное однолистное отображение $w = f(z)$ угловой области

$$D = D(z_0, \alpha_1, \alpha_2) = \{z : \ \alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2\}$$

на единичный круг $G = \{w : \ |w < 1|\}$. Параметры (вершина угла и углы наклона его сторон) z_0, α_1, α_2 определяются с помощью чисел $k_1 \div k_5$, определенных в задаче $N^o 7$, по следующим формулам.

$$z_0 = (k_2 + k_3) + i(1 + 2k_1); \alpha_1 = \frac{\pi}{k_2 + k_4 + 6}, \alpha_2 = \frac{\pi}{k_1 + k_3 + k_5 + 2}.$$

2). Нарисовать образ лучей, делящих угол D на три равные части, при отображении $w = f(z)$. Какой из лучей, выходящих из вершины угла, переходит в диаметральный (прямолинейный) отрезок?

3). Нарисовать образ дуг окружностей радиусов 1,2,3,... с центром в точке z_0, лежащих внутри угла D (при том же отображении). Какая из дуг указанного вида переходит в диаметральный (прямолинейный) отрезок? Какая точка переходит в центр круга?

Указание. Одно из искомых отображений получается как суперпозиция следующих отображений. $z_1 = z - z_0$; $z_2 = e^{-i\alpha_1} z_1$; $z_3 = z_2^{\pi/(\alpha_2 - \alpha_1)}$; $w = (z_2 - i)/(z_2 + i)$.

17. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ II

В задачах 17.1-17.30 требуется построить конформное однолистное отображение вида $w = \sqrt{z^2 - k^2}$ верхней полуплоскости на вехнюю полуплоскость с исключенным отрезком $[0, ih]$ $(h > 0)$ мнимой оси. Вещественный параметр k подобрать так, чтобы $h = 1 + k_1 + k_2 + k_3$, где числа $k_1 \div k_3$, определены в задаче №7. Нарисовать линии тока идеальной жидкости, являюшиеся образами линий $y = \text{const}$ при указанном отображении.

18. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ III

В задачах 18.1-18.30 по заданному комплексному потенциалу $w = z + h^2/z$ обтекания окружности (указать ее радиус и центр) построить эквипотенциальные линии (т.е. Re w = const) и линии тока (т.е. Im w = const). Найти скорость течения $V = \text{grad}\ (\text{Re}\ w)$). Параметр h определен в предыдущей задаче.

19. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

19.1 Показать, что следующее выражение вещественно.

$$(z_2\,\overline{z_3} + z_1\overline{z_2} + z_3\overline{z_1} - z_2\,\overline{z_1} - z_1\,\overline{z_3} - z_3\overline{z_2})\,i/4.$$

Каков его геометрический смысл?

19.2. Пусть $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c = u(x, y) + iv(x, y)$. 1) Найти параметры a, b, c, если $xv - 3yu = 8xy^3 - 2xy$. 2) Найти параметры a, b, c, если $xu - yv - x^4 - y^4 = -6x^2y^2$.

19.3. Пусть $P(z) = 3z^3 + 3az^2 + a^2z + 3c$, где a, c – вещественные параметры. Показать, что при любом выборе параметров линия уровня (лемниската) $L: \ |P(z)| = |-(a/3)^3 + c|$ представляет собой "трехлепестковую розу"с лежащей на действительной оси точкой ветвления.

Пусть $P(z) = 27z^3 + 27az^2 + 5a^2z + 27c$, где a, c – вещественные параметры. Показать, что при любом выборе параметров одна из компонент линии уровня (лемниската) $L: \ |P(z)| = |-7(a/9)^3 + c|$ представляет собой "двухлепестковую розу"с лежащей на действительной оси точкой ветвления.

19.4. Пусть $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c = u + iv$. Показать, что $u^2 - v^2 = 0$, когда $z \to \infty$ по некоторым 12-ти кривым, асимптотически приближающимся к лучам, выходящим из начала координат под углами $\pi/12 + k\pi/6$, $k = 0, \cdots, 11$.

19.5. Решить уравнение $2x + 1 + iy = e^{i\,\mathrm{arctg}(y/x)}$.

19.6. При каких действительных значениях a и b уравнение $z^{10} - az + b = 0$ не имеет дейтвительных корней z?

19.7. При каких значениях параметра a уравнение $z^3 + i\,(a+1)\,z^2 + (2-a)\,z + 2\,ia = 0$ не имеет дейтвительных корней z?

19.8. При каких значениях параметра a уравнение $z^3 - i\,(6+a)\,z^2 + (-8 - 6\,a)\,z + 8\,ia = 0$ не имеет дейтвительных корней z?

19.9. Доказать, что уравнение $9\cos z - z^2 = 4\pi^2$ имеет ровно 4 решения в квадрате $|x| < 2\pi$, $|y| < 2\pi$ $(z = x + iy)$.

19.10. Доказать, что уравнение $5\cos z - z^2 = \pi^2$ имеет ровно 2 (чисто мнимых) решения в квадрате $|x| < \pi$, $|y| < \pi$ $(z = x + iy)$.

19.11. Показать, что корни алгебраического уравнения $\sum_{k=0}^{n} z^k/k! = 0$ лежат во внешности круга $|z| < n/5$.

19.12. Доказать, что уравнение $\sin\ z = z$ кроме корня $z = 0$ имеет и другие комплексные корни.

19.13. Доказать, что уравнение $\sin\ z = z$ имеет бесконечно много различных комплексных корней $z_n = x_n + iy_n$. Кроме того, для отличных от нуля корней имеем оценку $C_1 \ln x_n < |y_n| < C_2 \ln x_n$.

19.14. Доказать, что все корни уравнения $z \sin\ z = a$ вещественны, если 1) $a = 1$; 2) $a = 1.8$. Доказать, что при $a = 3$ не все корни вещественны.

19.15. Доказать, что все корни уравнения $z \operatorname{tg}\ z = 1$ вещественны.

19.16. Пусть $z_1^n + z_2^n + z_3^n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что все $|z_j| < 1$ $j = 1, 2, 3$.

19.17. Пусть $\alpha = \{e^{it} : \ -\pi/4 \le t \le \pi/4\}$ – дуга на единичной окружности. Показать, что при любом вещественном φ среди чисел $e^{i\varphi}$, $e^{2i\varphi}$,$\cdots$,$e^{7i\varphi}$ хотя бы одно лежит на дуге α.

19.20. Пусть $0 <_1 < |z_1^n + z_2^n + z_3^n| < C_2$ при всех натуральных n. Доказать, что модуль одного из чисел z_j $(j = 1, 2, 3)$ равен единице.

19.22. Пусть $z_1, \cdots, z_n$ $(n \ge 2)$ – комплексные числа на единичной окружности, заданные формулами $z_j = e^{2\pi(j-1)/(n+1)}$, $1 \le j \le n-1$ и $z_n = e^{2\pi n/(n+1)}$. Показать, что $| \sum_{j=1}^n z_j^k | = 1$ при всех $k = 1, \cdots, n$.

19.23. Существуют комплексные числа $z_1,\ z_2,\ z_3$ такие, что $z_1 = 1$, $|z_2| < 1$, $|z_3| < 1$ и $| \sum_{j=1}^3 z_j^k | < 9/10$ при $k = 1, 2, 3$. Привести пример.

19.24. Исследовать обобщение предыдущей задачи. Именно, доказать утверждение: *при любом натуральном $n \ge 2$ существуют комплексные числа $z_1, \cdots, z_n$ и некоторое число C, $0 < C < 1$, такие, что $z_1 = 1$, $|z_j| \le 1$ при $j = 2, \cdots, n$ и при этом $| \sum_{j=1}^n z_j^k | < C < 1$ при всех $k = 1, \cdots, n$. При каждом n найти нижнюю границу C_n всех C, для которых верно утверждение.*

19.25. Пусть, как в предыдущей задаче, $z_1 = 1$, $|z_j| \le 1$ при $j = 2, \cdots, n$. Верно ли, что хотя бы для одного значения k имеем $| \sum_{j=1}^n z_j^k | > 1$, если $k = 1, \cdots, n+1$?

19.26. Если $| \sum_{j=1}^3 z_j^k | \le 1$, при $k = 1, 2, 3$, то $| \sum_{j=1}^3 z_j^n | \le (1.9)^n$, при достаточно больших $n \ge n_0$. Доказать.

19.27. Пусть $s_1 = z_1 + z_2$, $s_2 = z_1^2 + z_2^2$. Показать, что любое выражение вида $s_k = z_1^k + z_2^k$ выражается через переменные s_1 и s_2 как многочлен от этих двух переменных. Например, $s_3 = \frac{3}{2}s_1 s_2 - \frac{1}{2}s_1^3$, $s_4 = s_1^2 s_2 - \frac{1}{2}s_1^4 + \frac{1}{2}s_2^2$, $s_5 = -\frac{1}{4}s_1^5 + \frac{5}{4}s_1 s_2^2$, $s_6 = \frac{3}{2}s_1^2 s_2^2 - \frac{3}{4}s_2 s_1^4 + \frac{1}{4}s_2^3$ и.т.д.

19.28. Вычислить сумму ряда $f(z) = 1 + z + \cdots + z^{n-1} - nz^n + z^{n+1} + \cdots + z^{2n} - nz^{2n+1} + \cdots$. Убедиться, что $f(z)$ представляет собой логарифмическую производную многочлена $P(z) = z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$.

19.29. Доказать, что ряд $\sum_{k=2}^\infty z^{\ln n}$ расходится при $|z| > 1/e$ (здесь $z^\alpha = r^\alpha\ e^{\alpha\varphi i}$ при $z = r\ e^{\varphi i}$ и действительных α).

19.30. Имеется многочлен вида $P(z) = z^n + az^{n-1} + \cdots + bz + 1$, причем все его корни лежат в единичном круге $|z| < 1$. Доказать, что всюду на единичной окружности (т.е. при $|z| = 1$) не может выполняться неравенство $|P(z)| > 1$ и не может выполняться неравенство $|P(z)| < 1$.

19.31. Многочлен $P(z) = z^n + az^{n-1} + \cdots + bz + c = u(x, y) + iv(x, y)$ называется устойчивым, если все его корни лежат в левой полуплоскости $\Re z < 0$. Доказать, что линии уровня $u(x, y) = 0$ и $v(x, y) = 0$ не пересекаются в правой полуплоскости. Если дополнительно известно, что $|P(iy)| > C > 0$ при всех вещественных y, то линии уровня $u(x, y) = A$ и $v(x, y) = A$ не пересекаются в правой полуплоскости при любом вещественном A с $|A| < C/\sqrt{2}$.

19.32. Пусть многочлен $P(z)$ устойчивый и $|d \arg P(iy)/dy| \le M < \infty$ при всех вещественных y (здесь $\arg P(iy)$ – непрерывно изменяющаяся при $-\infty < y < \infty$ какая-либо ветвь аргумента многочлена P). Тогда расстояние от множества нулей $z_k = x_k + iy_k$ многочлена P до мнимой оси не меньше величины $1/M$, т.е. все $x_k \le$

$-1/M$.

19.33. Известно, что если для некоторого многочлена $Q(z)$ степени n с корнями ζ_k, $|\zeta_k| > 1$, имеем оценку $|Q'(z)/Q(z)| \le M < \infty$ при $|z| = 1$, то $\min_{1\le k\le n}\{|\ \zeta_k\ | -1\} \ge \frac{1}{3}\frac{\ln n}{n}$ при достаточно больших $n \ge n_0(M)$. На основании этого факта доказать следующее предложение об усиленной устойчивости многочлена. Если $P(z)$ – устойчивый многочлен степени n и $|1 + iy| \left|\frac{P'(iy)}{P(iy)}(1 + iy) - n\right| \le M$ при всех вещественных y, то все корни z_k многочлена P лежат левее прямой $x = -\frac{\ln n}{6n+\ln n}$ при $n \ge n_0(M)$.

19.34. Доказать, что в каждой области, ограниченной линией уровня $\gamma :\ |P(z)| = C$ многочлена $P(z)$ лежит по крайней мере один корень многочлена $P(z)$.

19.35. Доказать, что на линии уровня $\gamma :\ |f(z)| = C$ аналитической функции $f(z)$ значения $i\tau f'(z)/f(z)$ действительны всюду, где существует τ – вектор касательной к γ в точке z.

19.36. Пусть $f(z) = \sum_{k=1}^{n} z_k/(z - z_k)$, где z_k – произвольные комплексные числа, $n \in \mathbf{N}$. Показать, что на окружности $|z| = 1$ найдется точка ζ такая, что значение $f(\zeta)$ – вещественно.

19.37. Пусть $P(z) = z^2+az+b$, a, b – комплексные параметры. Исследовать процесс итерации вида $z_{k+1} = P(z_k)$, $k = 0, 1, \cdots$. Именно, при каких начальных z_0 множество $E = \{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 1) ограничено, 2) состоит из конечного числа различных точек, 3) состоит из двух точек.

19.38. Пусть $P(z) = z^2-\frac{7}{2}z+3$. Проверить, что в процессе указанной в предыдущей задаче итерации при начальном $z_0 = 0$ получается $z_3 = 0$ (т.е. P(P(P(0)))=0). Существуют ли другие многочлены второй степени, обладающие таким же свойством?

19.39. $P(z) = z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$, $Q(z) = z^{n+1} + z^n + \cdots + z + 1$. Доказать, что логарифмическая производная $R(z) = Q'(z)/Q(z)$ интерполирует многочлен $P(z)$ в точке $z = 0$ с кратностью n, т.е. выполняются равенства $R^{(s)}(0) = P^{(s)}(0)$ при $s = 0, 1, \cdots n$.

19.40. В условиях предыдущей задачи показать, что при $0 < x < 1$ имеем $|R(x) - P(x)| \le (1 + n/2)x^{n+1}$.

19.41. (Задача об аппроксимации логарифмической производной многочлена.) Пусть модуль многочлена $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ограничен единицей в единичном круге $|z| < r$. Введем многочлены $Q(z) = \int_0^z P(t)dt$ и $\alpha(z) = \sum_{j=0}^{k} Q^j(z)/j!$. Показать, что при всех z, $|z| < 1$, имеем $|P(z) - \alpha'(z)/\alpha(z)| \le 2e^r r^k/k!$. *Заметим, что степень многочлена α равна nk и тем самым получается высокая факториальная скорость аппроксимации многочленов логарифмическими производными, имеющими простой вид $\sum_j^{nk} 1/(z - z_j)$ и удобными в приближенных вычислениях.*

19.42. Доказать, что при любых допустимых значениях параметров a, b все вычеты следующей дроби R в ее конечных полюсах равны единице

$$R(z) = \frac{25\,a^2b^4z^4 - 24\,b^2a^3 - 3\,b^4 + 2\,a^6}{(a^3 - b^2)\,(5\,b^2az^3 + 5\,ba^2z^2 + (3\,b^2 + 2\,a^3)\,z + 5\,ba)}.$$

19.43. Вычислить повторный интеграл

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{d\varphi}{x - e^{i\varphi}}.$$

19.44. Пусть γ_1 и γ_2 – прямолинейные отрезки длины 1 и $\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}|z_1-z_2|^{-2}|dz_1||dz_2|<C$, $C=\text{const}>0$. Получить оценку (в зависимости от C) снизу для расстояния между отрезками.

19.45. С помощью теоремы о среднем для гармонических функций вычислить $\int_0^{2\pi}\ln(1+2r\cos\varphi+r^2)\,d\varphi$, где r – произвольный вещественный параметр.

19.46. Проверить с помощью контурного интегрироваия равенства

$$\int_0^h \frac{1}{x+h}\ln\frac{1}{x}dx=\ln 2\ln\frac{1}{h}+\frac{\pi^2}{12};\ \int_0^\infty \frac{1}{x}\sin(x+\frac{1}{x})\cos(x-\frac{1}{x})dx=\frac{\pi}{2}.$$

19.47. Пусть все нули $z_1,\cdots,z_n$ многочлена $P(z)$ лежат в единичном круге $|z|<1$ и $|P'(e^{it})|/|P(e^{it})|\le M$ при $0\le t<2\pi$ и некотором $M>0$. Доказать, что 1) $n\le M$; 2) расстояние от множества нулей $\{z_j\}$ до окружности $|z|=1$ не меньше величины $1/(2M)^2$.

19.48. Пусть на единичной окружности максимум модуля многочлена $P(z)$ достигается в точке z_0, $|z_0|=1$. Показать, что значение $z_0P'(z_0)/P(z_0)$ вещественно и положительно.

19.49. Пусть $L=\{z:\ |P(z)|=1\}$ – линия уровня некоторого полинома $P(z)$. Пусть из некоторой точки z_0 выходит $k>2$ гладких дуг линии L, имеющих в z_0 различные полукасательные лучи $l_1,\cdots,l_k$. Доказать, что 1) k четно; 2) $P'(z_0)=0$. Установить, как связан порядок нуля z_0 производной $P'(z)$ с числом k.

19.50. (*Задача В.К.Дзядыка.*) Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – аналитическая функция. Показать, что площади поверхностей-графиков $z=u(z,y)$ и $z=v(z,y)$ с одинаковыми проекциями на плоскость XOY равны (всюду, где эти площади определены).

19.51. Пусть $z_1=e^{xi}$, $z_2=e^{2xi}$, $z_3=e^{5xi}$, $u_1=z_1+z_2+z_3$, $u_2=z_1^2+z_2^2+z_3^2$, $u_3=z_1^3+z_2^3+z_3^3$. Решить уравнение $u_1^3-3u_1u_2+u_3=6i$ относительно действительного x.

19.52. Пусть $s_1=z_1+z_2+z_3$, $s_2=z_1^2+z_2^2+z_3^2$. Если $s_1=0$, $s_2=i$, то $s_4=z_1^4+z_2^4+z_3^4=-1/2$. Доказать.

19.53. Пусть $s_1=z_1+z_2+z_3$, $s_2=z_1^2+z_2^2+z_3^2$, $s_3=z_1^3+z_2^3+z_3^3$. Если $s_1=0$, $s_2=e^{it}$, $s_3=e^{-it}$, то $s_5=z_1^5+z_2^5+z_3^5=\frac{5}{6}$. Доказать.

19.54. Пусть $s_1=z_1+z_2$, $s_2=z_1^2+z_2^2$. Если $s_1=1$, $s_2=i$, то $s_6=z_1^6+z_2^6=-\frac{1}{4}(9+i)$. Доказать.

19.55. Пусть $s=\sin z+\cos z$. Доказать тождество $\sin^6 z+\cos^6 z=-\frac{3}{4}s^4+\frac{3}{2}s^2+\frac{1}{4}$.

19.56. Пусть $0\le a<1$, $b(z)=(z-a)/(1-z\,a)$, заданы натуральное n и вещественное α. Тогда при $\varphi_k:=\alpha+2\pi k/n$ верно тождество

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}|\,b'(e^{i\varphi_k})\,|=\Re[(e^{i\alpha n}+a^n)/(e^{i\alpha n}-a^n)].$$

19.57. Пусть $n\ge 2$ и $\alpha_n=\{e^{it}:\ -\pi/n\le t\le\pi/n\}$ – дуга на единичной окружности. Показать, что при любом вещественном φ среди чисел $e^{i\varphi}$, $e^{2i\varphi}$,$\cdots$,$e^{(2n-1)i\varphi}$ хотя бы одно лежит на дуге α_n.

19.58. Пусть $P(z)=1+az+\cdots+bz^n$ – многочлен степени n с вещественными коэффициентами. Пусть $z_1,\cdots,z_n$ – корни Q и все степенные (вещественные) суммы $S_k=z_1^k+\cdots+z_n^k$ при $k=1,\cdots,n$ 1) не превосходят единицы; 2) отрицательны. Доказать, что в любом случае все корни многочлена P лежат вне отрезка $[-1,1]$.

19.59. Пусть $P(z)$ – произвольный многочлен степени n, корни которого не лежат на действительной прямой. Доказать, что при всех действительных x справедливо неравенство
$|\mathrm{Im}(P'(x)/P(x))'| \leq 2\,|\mathrm{Im}(P'(x)/P(x)| \cdot \max_{-\infty<x<\infty} |\mathrm{Re}(P'(x)/P(x)|$.

19.60. Пусть Γ – гладкая кривая на комплексной плоскости, точки z_1 и z_2 не лежат на Γ. Определим непрерывную однозначную на Γ функцию $\psi(z_1, z_2; \zeta) = \arg((\zeta - z_1)/(\zeta - z_2)) \geq 0$, равной углу при вершине ζ в треугольнике $\triangle z_1\zeta z_2$ в случае, когда ζ не лежит на прямой, проходящей через точки z_1 и z_2; если же ζ лежит на этой прямой, то доопределим $\psi(z_1, z_2; \zeta)$ по непрерывности (значением 0 или π). Таким образом, $0 \leq \psi \leq \pi$. Определим полную вариацию $\Psi(\Gamma, z_1, z_2) = \mathrm{Var}_{z\in\Gamma}\psi(z_1, z_2; \zeta)$ угла ψ вдоль кривой γ и величину наибольшей вариации $\Psi(\Gamma) = \max_{z_1,z_2\in\mathbf{C}} \Psi(\Gamma, z_1, z_2)$. Доказать, что
1) функция $\Psi(\Gamma, z_1, z_2)$ инвариантна относительно линейных и дробно-линейных преобразований кривой γ.
2) $\Psi(R(\Gamma)) \leq n\Psi(\Gamma)$, где R – рациональная функция (т.е. отношение многочленов) степени n;
3) если кривая Γ лежит в некотором круге радиуса r, то ее длина не превосходит произведения $r\Psi(\Gamma)$;
4) образ $R(\Gamma)$ кривой Γ при отображении $w = R(z)$ рациональной функцией R степени n имеет длину, не превосходящую произведения $n\Psi(\Gamma)M$, где M – максимум модуля функции R на Γ.

19.61. Если $|\sum_{j=1}^{m} z_j^k| \leq 1$, при $k = 1, \cdots, m$, то $|\sum_{j=1}^{m} z_j^n| \leq 2^n$, при достаточно больших $n \geq n_0(m)$. Доказать.

Если $|\sum_{j=1}^{m} z_j^k| \leq 1/2$, при $k = 1, \cdots, m$, то $|\sum_{j=1}^{m} z_j^n| \leq m\epsilon_n$, где $\epsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать.

19.62. Если $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$, то при $f(z) = \int_0^z P(t)\,dt$ функция $F(z) = e^{f(z)}$ имеет следующее разложение в ряд Тейлора $F(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n+1} + \cdots$. Доказать.

19.63. Пусть множество Γ задается уравнением $\bar{z} = R(z)$, где R – рациональная функция, т.е. отношение многочленов. Доказать, что Γ есть окружность или прямая, а R – дробно-линейная функция.

19.64. Бианалитической называется функция вида $f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$, где φ_0 и φ_1 – аналитические функции – компоненты функции f. Доказать, что для бианалитических функций в некоторой области G:

1) не справедлив принцип максимума;

2) нет обычной теоремы единственности, точнее, из условия $f_1(z) = f_2(z)$ на некоторой кривой, лежащей в G, не следует, что $f_1 = f_2$ тождественно в G;

3) однако справедлива следующая теорема единственности: если $f_1(z) = f_2(z)$ в некоторой подобласти области G, то $f_1 = f_2$ тождественно в G;

4) компоненты φ_0 и φ_1, вообще говоря, не выражаются через значения функции f на границе области бианалитичности (т.е. нет аналога интегральной формулы Коши).

5) Указать формулы, по которым можно вычислить значения $\varphi_0(0)$ и $\varphi_1(0)$, зная значения функции f на границе круга $\Delta: \ |z| \leq 1$ (лежащего в G).

Библиографический список

1. Голузин Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд. "Наука", М., 1966.

2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. "Наука", М. 1977.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. "Наука", М. 1987.

4. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. "Наука", М. 1978.

5. Евграфов М.А. Аналитические функции. "Наука", М. 1965.

6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. "Наука", М. 1970.

7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. "Наука", М. 1971.

8. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. "Высшая школа", М. 1988.

Оглавление