

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Владимирский государственный университет**  
**имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**  
**(ВлГУ)**

Институт прикладной математики и информатики, био- и нанотехнологий  
Кафедра "Функциональный анализ и его приложения"

Буланкина Л.А.

Методические указания к самостоятельным занятиям  
по дисциплине **«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
СТАТИСТИКА»**

для студентов ВлГУ

**Направление подготовки – 010200.62 математика и компьютерные науки**

**Квалификация (степень) выпускника - бакалавр**

**Форма обучения – очная**

Владимир – 2014 г.

- понятие закона распределения случайные величины (с конечным числом значений);
- □ понятия математического ожидания и дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины;
- неравенство Чебышева

**приобрести навыки:**

- решения задач на построение закона распределения случайные величины (с конечным числом значений);
- решения задач на вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины;
- использование неравенства Чебышева

**Термины для запоминания**

- ❖ дискретная случайная величина; закон распределения дискретной случайной величины; функция распределения; математическое ожидание; дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

**Список контрольных вопросов**

1. Определение случайной величины и связанных с ней понятий: распределения и функции распределения.
2. Дискретные случайные величины, законы распределения, примеры (распределение Бернулли, биномиальное распределение, распределение Пуассона).
3. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.
4. Математическое ожидание дискретной случайной величины, имеющей распределение Бернулли, биномиальное распределение, распределение Пуассона.
5. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины, свойства дисперсии.

**Самостоятельное занятие 10**

Схема Бернулли. Предельные теоремы:  
закон больших чисел, локальная предельная теорема, интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа, теорема Пуассона.

**Студент должен**

**освоить:**

- понятие схемы Бернулли;
- биномиальный закон распределения;
- □ теорему Муавра-Лапласа;
- теорему Пуассона

**приобрести навыки:**

- решения задач на построение вероятностного пространства в схеме Бернулли;
- использования теоремы Муавра-Лапласа;
- использования теоремы Пуассона

#### Термины для запоминания

- ❖ биномиальное распределение; вероятность «успеха» предельное распределение.

#### Список контрольных вопросов

1. Определение  $n$  независимых в совокупности событий. Доказать, что из попарной независимости не следует независимость в совокупности.
2. \* Прямое произведение вероятностных пространств как специальное вероятностное пространство, связанное с независимыми событиями.
3. Схема Бернулли: традиционная постановка задачи и построение вероятностного пространства.
4. Схема Бернулли. Локальная и интегральная предельные теоремы Муавра – Лапласа. Неравенство Берри – Эссена ([5] I. 6.3).
5. Схема Бернулли. Предельная теорема Пуассона. Неравенство Прохорова ([5] I. 6.4).

#### Самостоятельное занятие 11

Оценка вероятности успеха в схеме Бернулли (несмещенная эффективная, неравенство Рао-Крамера, доверительные интервалы).

#### Студент должен

##### освоить:

- понятие точечной оценки неизвестного параметра распределения случайной величины;
- понятия несмещенности, эффективности и состоятельности точечной оценки неизвестного параметра распределения случайной величины;
- понятие интервальной оценки неизвестного параметра распределения случайной величины;
- неравенство Рао-Крамера

##### приобрести навыки:

- построения оценки вероятности успеха в схеме Бернулли;
- проверки свойств оценки вероятности успеха в схеме Бернулли

#### Термины для запоминания

- ❖ точечная оценка, интервальная оценка, несмещенность, эффективность в классе несмещенных, состоятельность, надежность интервальной оценки.

#### Список контрольных вопросов

1. Понятие о статистической оценке параметров, свойства оценок (состоятельность, несмещенность, эффективность).
2. Оценка вероятности "успеха" в схеме Бернулли.
3. Оптимальность оценки вероятности "успеха" в схеме Бернулли

## Самостоятельные занятия 12-18

Аксиоматика Колмогорова. Измеримые пространства.

Способы задания вероятностных мер на измеримых пространствах. Общее определение случайной величины.

Интеграл Лебега. Общее определение математического ожидания и его свойства (теоремы о неравенствах и о предельных переходах под знаком математического ожидания)

Условные вероятности и условные математические ожидания относительно  $\sigma$ -алгебр.

Распределения случайных величин: функция распределения, плотность распределения (в одномерном и многомерном случаях). Нормальное распределение

### Студент должен

#### освоить:

- понятие случайные величины (общий случай);
- понятия закона распределения случайные величины, функции и плотности распределения;
- □ понятия математического ожидания и дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины;
- понятие условного математического ожидания

#### приобрести навыки:

- решения задач на вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины;
- решение задач на отыскание условного математического ожидания

#### Термины для запоминания

- ❖ случайная величина; закон распределения случайной величины (совместный или многомерный и маргинальные, условные); функция распределения; математическое ожидание; дисперсия и среднеквадратическое отклонение, ковариация и коэффициент корреляции, независимость случайных величин.

#### Список контрольных вопросов

1. Абсолютно непрерывные случайные величины, свойства плотности распределения.
2. Равномерное распределение: плотность и функция распределения с графиками. Числовые характеристики.
3. Распределение Коши и его особенности.
4. Нормальное распределение: плотность и функция распределения с графиками. Смысл параметров распределения.
5. Определение независимых случайных величин. Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин.
6. Определение ковариации, связь между независимостью случайных величин и равенством нулю ковариации.

Определение коэффициента корреляции. Доказать утверждение:

7.  $\rho(\xi_1, \xi_2) = 1 \Leftrightarrow \xi_1 = a\xi_2 + b.$

8. Многомерные дискретные случайные величины: определение, совместный закон распределения, одномерные и условные законы распределения.
9. Абсолютно непрерывные двумерные величины: двумерная, одномерные и условные плотности распределения
10. Плотность двумерного нормального распределения ([5] П. 3.3), смысл параметров распределения.
11. \*Совместная плотность двух независимых нормально распределенных случайных величин. Доказать утверждение:  
если двумерная случайная величина  $(\xi_1 \ \xi_2)$  имеет нормальное распределение и  $\text{cov}(\xi_1 \ \xi_2) = 0$ , то  $\xi_1 \ \xi_2$  - независимые случайные величины.

### Самостоятельные занятия 19-21

Производящие и характеристические функции.  
Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.

#### Студент должен

##### освоить:

- понятие производящей функции;
- понятие характеристической функции;
- □ЦПТ
- 

##### приобрести навыки:

- решения задач на отыскание производящей функции закона распределения случайные величины;
- решения задач на отыскание характеристической функции закона распределения случайные величины;
- использования характеристических и производящих функций в решении задач.

#### Термины для запоминания

- ❖ Производящая функция, характеристическая функция.

#### Список контрольных вопросов

1. Функции случайных величин, формула для новой плотности распределения.
2. Плотность суммы независимых случайных величин.
3. Производящие функции: определение, примеры и свойства (теорема 1)
4. Производящие функции: вычисление факториальных моментов, примеры.
5. Производящие функции суммы независимых случайных величин. Доказательство предельной теоремы Пуассона с использованием производящих функций.
6. Определение характеристической функции случайной величины, примеры.
7. Характеристическая функция равномерного распределения.
8. Характеристическая функция нормального распределения.
9. Используя равенство  $\varphi_{\xi}^{(k)}(t) \Big|_{t=0} = i^k M\xi^k$ , для всех  $k \leq n$   $M|\xi^n| < \infty$ . Найти центральные моменты случайной величины, распределенной по нормальному закону.

10. Доказать, что сумма независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение распределена нормально
11. Закон больших чисел.
12. Центральная предельная теорема.

### **Самостоятельные занятия 22-27**

Основные понятия и задачи математической статистики.

Выборка, эмпирическая функция распределения и эмпирические моменты.

Задача оценивания неизвестных параметров распределения. Построение точечных и интервальных оценок.

Задача статистической проверки гипотез. Критерии согласия

#### **Студент должен**

##### **освоить:**

- понятия выборки, вариационного ряда, эмпирических законов распределения вероятностей, эмпирических числовых характеристик, точечных и интервальных оценок неизвестных параметров;
- Понятие статистической гипотезы, статистического критерия, ошибок первого и второго рода;

##### **приобрести навыки:**

- построения гистограммы, полигона, эмпирической функции распределения вероятностей, вычисления эмпирических числовых характеристик, построения доверительных интервалов.
- использования наиболее распространённых критериев проверки гипотез, в частности, критерия  $\chi^2$ -Пирсона.

#### **Термины для запоминания**

- ❖ выборка; вариационный ряд; эмпирическая функция распределения; полигон; гистограмма; эмпирическая плотность распределения.
- ❖ эмпирические числовые характеристики; точечные оценки параметров; смещённые оценки; несмещённые оценки; состоятельные оценки; эффективные оценки;
- ❖ метод моментов; метод наибольшего правдоподобия; функция правдоподобия; оценка наибольшего правдоподобия.
- ❖ доверительные интервалы (интервальные оценки); доверительная вероятность; надёжность доверительного интервала.
- ❖ статистическая гипотеза; нулевая гипотеза; альтернативная гипотеза; критическая область; правосторонняя критическая область; левосторонняя критическая область;

двухсторонняя критическая область; ошибка первого рода; ошибка второго рода; статистический критерий; критерий  $\chi^2$ -Пирсона.

### Список контрольных вопросов

1. Перечислите основные задачи математической статистики. ([4], глава 9, § 1)
2. Что называют выборкой случайной величины? ([4], глава 9, § 2)
3. Что называют вариационным рядом? ([4], глава 9, § 2)
4. Каков допустимый объем выборки для обеспечения ее репрезентативности? ([7], § 2.2.4)
5. Что такое размах выборки?
6. Как построить эмпирическую функцию распределения вероятностей? ([4], глава 9, § 2)
7. Что такое полигон и что такое гистограмма эмпирического распределения? ([4], глава 9, § 2)
8. Как построить эмпирическую плотность распределения вероятностей? ([4], глава 9, § 2)
9. Как вычисляются эмпирические числовые характеристики случайных величин?
10. Какие оценки называют точечными оценками параметров? ([4], глава 9, § 4)
11. Какие оценки называются несмещёнными? ([4], глава 9, § 4)
12. Какие оценки называются состоятельными? ([4], глава 9, § 4)
13. Какие оценки называются эффективными? ([4], глава 9, § 4)
14. Перечислите методы получения оценок и поясните их смысл. ([4], глава 9, § 4)
15. Как построить оценку математического ожидания случайной величины по её измерениям? ([2], § 1)
16. Как построить оценку дисперсии случайной величины по её измерениям? ([2], § 1)
17. Как построить несмещённую оценку дисперсии случайной величины? ([2], § 1)
18. Что такое доверительный интервал и что такое доверительная вероятность? ([4], глава 9, § 5)
19. Какие законы распределения применяются при построении доверительных интервалов для параметров нормально распределённой случайной величины? ([4], глава 9, § 3.3)
20. Что называется статистической гипотезой? ([3], глава 13, § 1; [8], часть В, § 2.1)
21. Что такое альтернативная или конкурирующая гипотеза? ([3], глава 13, § 1; [8], часть В, § 2.1)
22. Что называется статистическим критерием? ([3], глава 13, § 1; [8], часть В, § 2.1)

23. Дайте определение ошибок первого и второго рода. ([3], глава 13, § 1; [8], часть В, § 2.1)
24. Что такое критическая область? ([3], глава 13, § 1; [8], часть В, § 2.1)
25. Поясните, чем отличается односторонняя и двухсторонняя критические области? ([3], глава 13, § 1)
26. Какие законы распределения можно применить для построения критической области в случае проверки гипотезы о математических ожиданиях? ([8], часть В, § 2.3; [2], §4; [3], глава 13, §§ 4-7;)
27. Какой закон распределения применяется для построения критической области в случае проверки гипотезы о дисперсиях? ([8], Часть В, § 2.3; [2], §4; [3], глава 13, §§ 2,3, 9,10;)
28. Какова основная идея критерия  $\chi^2$ -Пирсона проверки гипотез о законах распределения? ([8], Часть В, § 2.3; [2], §5)

## ЛИТЕРАТУРА

### *а) основная литература:*

1. П.Л. Иванков Ю.В. Муранов Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей: типовые расчеты. Владимир 1997.
2. П.Л. Иванков Ю.В. Муранов Сборник индивидуальных заданий по математической статистике: типовые расчеты. Владимир 1998.
3. В.Е. Гмурман Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Москва, "Высшая школа" 1975.
4. В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987.
5. А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980.

### *б) дополнительная литература:*

6. Н. Ш. Кремер ТВиМС.– М.: ЮНИТИ, 2002
  7. В.Ю. Королев ТВиМС. – М.: «ПРОСПЕКТ», 2006 .
  8. М. Я Кельберт, Ю.М. Сухов Основные понятия ТВиМС.- М.: МЦНМО, 2007
  9. М. Б. Лагутин Наглядная математическая статистика. – М.: БИНОМ, 2007
- А. М. Андропов, Е. А. Копытов, Л. Я. Гринглаз ТВиМС. – СПб.:Питер, 2004