

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Владимирский государственный университет**  
**имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**  
**(ВлГУ)**

Институт прикладной математики и информатики, био- и нанотехнологий  
Кафедра "Функциональный анализ и его приложения"

Буланкина Л.А.

Курс лекций  
по дисциплине **«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
СТАТИСТИКА»**

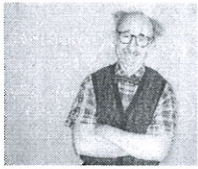
для студентов ВлГУ

**Направление подготовки – 010200.62** математика и компьютерные науки

**Квалификация (степень) выпускника - бакалавр**

**Форма обучения – очная**

Владимир – 2014 г.



### **Вводное слово**

По замыслу лектора, указанный материал, студент может изучать как до изложения его на лекции, так и после.

#### **Лекция 1-3**

Предмет теории вероятностей. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов. Построение вероятностного пространства. Пространство элементарных исходов, вероятностная интерпретация множества и операций над множествами. Некоторые классические модели и распределения. Вероятностная модель эксперимента с конечным числом исходов: выбор с возвращением, выбор без возвращения, упорядоченный и неупорядоченный. Подсчет числа элементарных исходов. Структура пространства элементарных исходов в задаче размещения  $n$  шаров по  $N$  ячейкам (статистика Максвелла-Больцмана, статистика Бозе-Эйнштейна, статистика Ферми-Дирака), дуализм с выниманием  $n$  шаров из урн.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 1, § 1- 3

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 1, § 1.

#### **Лекция 4**

Некоторые классические модели и распределения. Возникновение биномиального и мультиномиального (полиномиального) распределений в задачах выбора с возвращением. Возникновение геометрического и гипергеометрического распределений в задачах выбора без возвращений.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 2, § 1-4

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 1, § 2.

#### **Лекция 5**

Геометрические вероятности. Парадокс Бертрана.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 2, § 3

#### **Лекция 6**

Условная вероятность, формула Байеса, априорная и апостериорная вероятность, формула полной вероятности, независимые события.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 3, § 1-3

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 1, § 3.

#### **Лекция 7-9**

Простые случайные величины (с конечным числом значений), индикаторы. Математическое ожидание простых случайных величин и их свойства. Дисперсия. Неравенство Чебышева. Дисперсия суммы, понятие ковариации и коэффициента корреляции случайных величин.

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 1, § 4.

### **Лекция 10**

Схема Бернулли. Предельные теоремы: закон больших чисел, локальная предельная теорема, интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа, теорема Пуассона.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 4, § 3

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 1, § 5,6.

### **Лекция 11**

Оценка вероятности успеха в схеме Бернулли (несмещенная эффективная, неравенство Рао-Крамера, доверительные интервалы).

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 1, § 7.

### **Лекция 12-13**

Аксиоматика Колмогорова. Измеримые пространства. Алгебры и  $\sigma$ -алгебры. Теоремы о существовании наименьшей алгебры и  $\sigma$ -алгебры, содержащих множества из заданной системы множеств. Построение борелевской  $\sigma$ -алгебры в  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^n$ . Способы задания вероятностных мер на измеримых пространствах (теоремы об эквивалентности аксиом аддитивности и непрерывности вероятности, о продолжении меры, о соответствии между вероятностными мерами и функциями распределения). Общее определение случайной величины.

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 2, § 1-4.

### **Лекция 14-15**

Интеграл Лебега. Общее определение математического ожидания и его свойства (теоремы о неравенствах и о предельных переходах под знаком математического ожидания). Разные виды сходимости последовательности случайных величин (по вероятности, с вероятностью 1, по распределению).

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 2, § 6.

### **Лекция 16**

Условные вероятности и условные математические ожидания относительно  $\sigma$ -алгебр. Свойства условных математических ожиданий.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 6, § 6

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 2, § 7.

### **Лекция 17-18**

Распределения многомерных случайных величин: функция распределения, плотность распределения. Нормальное распределение.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 6, § 7

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 2, § 8.

### **Лекция 19-20**

Производящие и характеристические функции. Определение, основные свойства (прямая и обратная теоремы, формула обращения для характеристических функций.)

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 7, § 1-2

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 2, § 12.

#### **Лекция 21**

Центральная предельная теорема. Применение центральной предельной теоремы.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 7, § 4

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980. Глава 1, § 6, глава 3, § 4

#### **Лекция 22-23**

Основные понятия и задачи математической статистики. Значение методов математической статистики в анализе реальных данных. Статистические модели. Пространство статистических данных и семейства распределений. Генеральная совокупность и выборка из нее. Обработка данных. Эмпирическая (выборочная) функция распределения, гистограмма и эмпирические (выборочные) моменты. Статистики и функция правдоподобия. Примеры (схема Бернулли, нормальная линейная модель).

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 9, § 1-3

#### **Лекция 24**

Задача точечного статистического оценивания неизвестных параметров распределения. Статистические оценки и их основные свойства: состоятельность, несмещенность, эффективность, асимптотическая эффективность. Методы оценивания (моментов, максимума правдоподобия). Линейные статистические модели, оценки наименьших квадратов и их свойства.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 9, § 4

#### **Лекция 25**

Доверительное оценивание. Законы распределения выборочных характеристик, используемые при оценке параметров.

Анализ нормальной выборки. Построение интервальных оценок.

Оценка вероятности успеха в схеме Бернулли (состоятельная, несмещенная эффективная, неравенство Рао-Крамера). Доверительные интервалы для оценки вероятности успеха в схеме Бернулли.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 9, § 5

#### **Лекция 26**

Статистическая проверка гипотез. Основные типы гипотез, проверяемых в ходе статистической обработки данных. Общая логическая схема построения статистического критерия. Критические функции и функции мощности критериев. Лемма Неймана-Пирсона. Наиболее мощные критерии

Распределение Фишера-Снедекора. Гипотезы о генеральных средних и генеральных дисперсиях нормально распределенных генеральных совокупностей. Вычисление мощности критерия.

Гипотеза об однородности ряда вероятностей.

Задача статистической проверки гипотезы о типе закона распределения исследуемой случайной величин. Критерии согласия.

Проверка линейных гипотез в линейных моделях.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 9, § 6

### **Лекция 25**

Корреляционно - регрессионные задачи. Линейные регрессионные модели. Линейная регрессия с гауссовыми ошибками, общие линейные модели. Метод наименьших квадратов, исходные предпосылки его применения, пример двумерной линейной регрессионной модели.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987. Глава 9, § 7

### **Литература.**

[1] П.Л. Иванков Ю.В. Муранов Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей: типовые расчеты. Владимир 1997.

[2] П.Л. Иванков Ю.В. Муранов Сборник индивидуальных заданий по математической статистике: типовые расчеты. Владимир 1998.

[3] В.Е. Гмурман Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Москва, "Высшая школа" 1975.

[4] В.П. Чистяков Курс теории вероятностей. Москва, "Наука" 1987.

[5] А. Н. Ширяев Вероятность. Москва, "Наука" 1980.