Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Институт инновационных технологий
Кафедра «Технология машиностроения»

Конспект лекций

по дисциплине

«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» (часть 1)

для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

Составитель:
доцент кафедры ТМС Беляев Б.А.

Владимир 2015

Конспект лекций по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Настоящий конспект лекций составлен в соответствии с требованиями ФГОС ВО и ОПОП направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», рабочей программы дисциплины «Теоретическая механика». В качестве рекомендаций для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих ВУЗов России.

Рекомендации предназначены для студентов очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании
кафедры ТМС
Протокол № 5/1 от 29.01.2015 г.

Рукописный фонд кафедры ТМС ВлГУ

Предисловие

Настоящий курс лекций разработан на основе теоретической части учебников:

1) Шевченко А.П. Практикум по дисциплине "Теоретическая механика" / А. П. Шевченко [и др.]; под ред. А. П. Шевченко — Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ); 2007 . -115с.
http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1041/3/00513.pdf;

2) Теоретическая механика: методические указания к лабораторным работам, составители: А.П. Шевченко, Л.Ф. Метлина. Владим. гос. ун-т – Владимир, 2010 – 94с.
http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/1373/3/00776.pdf

А также на основе учебника:

Новожилов А. И. Краткий курс теоретической механики учеб. пособие для вузов / А. И. Новожилов; под ред. В. Н. Филимонова.— Изд. 2-е, перераб. и доп.— Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ), 2006.— 241с.
http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/2816/1/00328.pdf

ОГЛАВЛЕНИЕ КУРСА ЛЕКЦИЙ

ПЛАН И ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ЛЕКЦИЙ

Лекция №1

План лекции.

Введение. Предмет статики Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентной системы сил, сила внешняя и внутренняя, основные аксиомы статики. Связи реакций и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость, поверхность и опора, гибкая нить, цилиндрический шарнир (подшипник), сферический шарнир (подпятник), невесомый стержень. Реакция этих связей.

Основная часть лекции

ВВЕДЕНИЕ

Механика - это наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел. Под *механическим движением* понимается изменение положения материальных тел в пространстве с течением времени. *Механическим взаимодействием* называется такое взаимодействие материальных тел, в результате которого происходит изменение их механического движения или формы (деформация). Мерой механического взаимодействия материальных тел является *сила.*

Механика относится к разряду естественных наук, т.е. наук о природе, зарождение которой в Древней Греции (V-IV вв. до н.э.) обусловлено потребностями практики. Наибольшее влияние на развитие механики вплоть до эпохи Возрождения (XIV-XVI вв.) оказали учения Аристотеля (384-322гг. до н.э.) и Архимеда (284-212гг. до н.э.). Яркими представителями эпохи Возрождения, с именами которых связано бурное и успешное развитие механики, являются: Леонардо да Винчи (1452-1519), Н. Коперник (1473-1543), И. Кеплер (1571-1630). К этому же периоду относятся работы Г. Галилея (1564-1642), сумевшего систематизировать отдельные разрозненные сведения по механике, накопленные человечеством на протяжении многих столетий, и впервые сформулировать важнейшие понятия механики: принцип относительности классической механики и принцип инерции вещества, законы падения тел, сложения движений и скоростей, понятие ускорения и т.д.

В 1687 г. вышло в свет знаменитое сочинение И. Ньютона (1642-1727) "Математические начала натуральной философии", в котором он, обобщая опыт и завершая работы своих предшественников, систематически изложил основные законы классической механики. С этого времени механика окончательно сформировалась как наука, которую часто называют механикой Галилея-Ньютона, или классической механикой.

Последующее развитие механики связано с разработкой аналитических методов в трудах Л. Эйлера (1707-1783), Ж. Даламбера (1717-1783), Ж. Лагранжа (1736-1813).

На развитие исследований по механике в России большое влияние оказали работы М. В. Остроградского (1801-1862), П.Л. Чебышева (1821-1894), А.М.
Ляпунова (1857-1918), И.В. Мещерского (1859-1935), Н.Е. Жуковского (1847-1921), А.Н. Крылова (1863-1945), С.А. Чаплыгина (1869-1942) и других выдающихся ученых.

В *классической механике* рассматриваются материальные тела, размеры которых много больше межмолекулярных расстояний и которые движутся со скоростями, много меньшими скорости света.

Если объектами исследования механики являются любые реальные тела: деформируемые твердые тела, жидкие, газообразные и др., то в теоретической механике рассматриваются идеализированные материальные объекты такие, как материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело. Данные абстракции, которые, конечно, не существуют

в природе, позволяют выявить наиболее общие законы механического движения и механического взаимодействия, справедливые для любых материальных тел независимо от их конкретных физических свойств.

Наука об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел называется *теоретической механикой.* Таким образом, теоретическая механика - это раздел механики, составляющий основу общей механики, которая лежит в основе всех остальных технических дисциплин: сопротивления материалов, деталей машин, теории машин и механизмов, строительной механики, гидромеханики, газодинамики и т.д. Отсюда понятны роль и значение теоретической механики, позволяющей получить необходимые знания о природе посредством обобщенных методов построения математических моделей движений материальных объектов природы и техники.

В теоретической механике движение материальных тел рассматривается в *трехмерном евклидовом пространстве.* Для изучения движения вводят так называемую *систему отсчета,* понимая под ней совокупность тела отсчета (т.е. тела, по отношению к которому изучается движение других тел) и связанных с ним систем координатных осей и часов. Принимается, что время не зависит от движения тел и одинаково во всех точках пространства и системах отсчета (*абсолютное время*). Поэтому, говоря о системе отсчета в теоретической механике, как правило, ограничиваются указанием только тела отсчета и системы координатных осей, связанных с ним.

Тело находится в движении относительно выбранной системы отсчета, если с течением времени происходит изменение координат хотя бы одной его точки, в противном случае тело находится в *покое* по отношению к этой системе отсчета. Таким образом, движение и покои тела по сути дела понятия относительные, зависящие от выбора системы отсчета. Поэтому в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел. Под *равновесием* понимается состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам (телам отсчета). Если движением тела отсчета, по отношению к которому изучается равновесие, можно пренебречь, то равновесие условно называется *абсолютным.* Часто при инженерных расчетах систему отсчета, связанную с Землей, можно условно принять за неподвижную. Возникающие при таком допущении ошибки, как правило, практического значения не имеют. В задачах, в которых нельзя пренебречь вращением Земли, за неподвижную систему отсчета можно принять *гелиоцентрическую систему отсчета* с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на одни и те же далекие «неподвижные» звезды.

По характеру решаемых задач курс теоретической механики обычно делится натри части: статику, кинематику и динамику. В данной книге излагаются первые две части.

Основные понятия и аксиомы

Основные понятия, определения

Статика - раздел механики, в котором изучаются методы приведения систем сил к простейшему виду и выводятся условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Как во всякой естественной науке, в теоретической механике используются идеализированные понятия, которые служат моделью для построения приближенной теории движения и равновесия реальных физических объектов. К таким понятиям можно отнести материальную точку, абсолютно твердое тело, идеальную жидкость и т.п.

Материальная точка - тело, размеры которого в конкретных условиях можно не учитывать. Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами.

Механическая система - любая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных точек.

Абсолютно твердое тело - механическая система, расстояния между любыми точками которой остаются неизменными при механических воздействиях со стороны других тел. Допущение о неизменяемости формы тел упрощает изучение их равновесия и вместе с тем позволяет решать многие технические задачи с достаточной степенью точности, так как в большинстве случаев деформации тел пренебрежимо малы.

Свободное тело - материальное тело, перемещения которого из данного положения в любом направлении в пространстве не ограничены другими телами.

Одним из основных понятий статики является понятие силы.

Сила - векторная мера механического взаимодействия тел. Она может быть изображена вектором, т.е. направленным отрезком прямой (рис.1.1,а). Одна из точек, ограничивающих вектор, называется началом вектора (точка А), другая - концом. Направление вектора указывается стрелкой на его конце. Силу как величину векторную принято обозначать буквой со знаком вектора над ней, например, $\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}$. Длину вектора называют его *модулем* и обозначают одним из способов $|\vec{F}|, |\vec{P}|, |\vec{Q}|$ или F, P, Q. Таким образом, сила $\vec{F}$ характеризуется точкой приложения А, модулем F и направлением.

Прямая, по которой направлена сила, называется линией действия силы.

В международной системе единиц измерения СИ за единицу измерения силы принимается ньютон (Н).

Система сил - **любая** совокупность сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$), действующих на материальное тело.

Эквивалентные системы сил - такие, которые по отдельности оказывают одинаковое действие на одно и то же свободное твердое тело (материальную точку) при прочих равных условиях.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n').$$

Необходимо различать понятия эквивалентности и равенства сил. Силы векторно (или геометрически) равны, если они параллельны, направлены в одну сторону и имеют одинаковые модули (рис. 1.1, б): $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$, так как $\vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_2 \uparrow\uparrow \vec{F}_3$ и $F_1 = F_2 = F_3$.

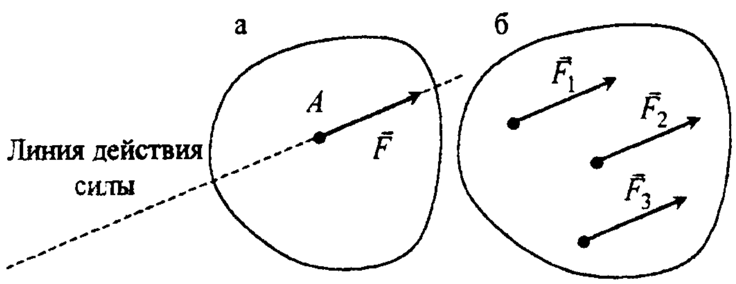


Рис. 1.1

Однако для эквивалентности сил этого недостаточно, т.е. нельзя утверждать, что, например, $\vec{F}_1 \sim \vec{F}_2$. Две силы эквивалентны, если они не только векторно равны, но еще и приложены в одной точке тела (по отдельности). Это отличает вектор силы от свободного вектора, понятие о котором в математике положено в основу векторного исчисления, занимающегося изучением операций над векторами.

Свободным вектором называется вектор, который характеризуется только модулем и направлением. Он не связан с какой-либо определенной прямой линией или точкой. Начало такого вектора может быть выбрано произвольно (свободно) в любой точке пространства. В механике, кроме свободных, часто рассматриваются векторы скользящие и связанные (или приложенные).

Скользящим вектором называется вектор, расположенный произвольно на своей линии действия. Этот вектор связан с прямой по которой он направлен.

Связанным вектором называется вектор, который характеризуется модулем, направлением и точкой приложения. Этот вектор связан с точкой своего приложения, поэтому называется также приложенным или неподвижным.

Равнодействующая R - сила, эквивалентная некоторой системе сил

$$(\vec{R}) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n).$$

Уравновешенная система сил (или система сил, эквивалентная нулю) -такая, под действием которой свободное твердое тело (материальная точка) находятся в равновесии

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

Уравновешивающая сила заданной системы сил - такая сила, добавление которой к заданной системе дает новую систему, эквивалентную нулю. Силы, действующие на механическую систему, делятся на силы внешние и внутренние.

Внешние силы - силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе.

Внутренние силы - силы взаимодействия между материальными точками (телами), входящими в состав данной системы.

Аксиомы статики

В основе изучения статики твердого тела лежат аксиомы, формулировка которых предполагает, что твердое тело или материальная точка в общем случае считаются свободными, имеющими возможность совершать в рассматриваемый момент времени любые перемещения в пространстве.

Аксиома инерции

Изолированная от внешних воздействий материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения.

Аксиома равновесия двух сил

Две силы уравновешиваются, если они приложены к одному твердому телу, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.2).

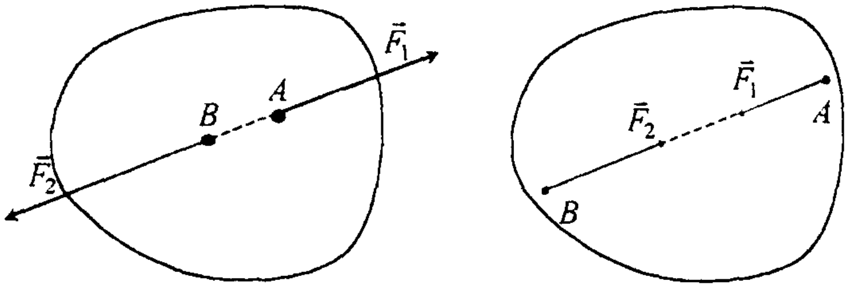


Рис. 1.2

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0; \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Аксиома о присоединении или исключении уравновешенной системы сил

Если к заданной системе сил присоединить или из нее исключить уравновешенную систему сил, то новая система сил будет эквивалентна заданной (рис. 1.3, 1.4). $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ - заданная система сил.

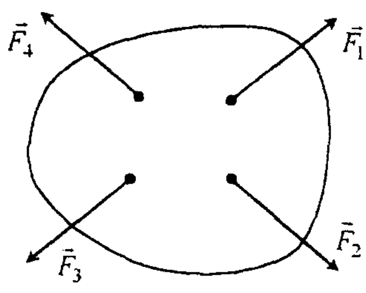


Рис. 1.3

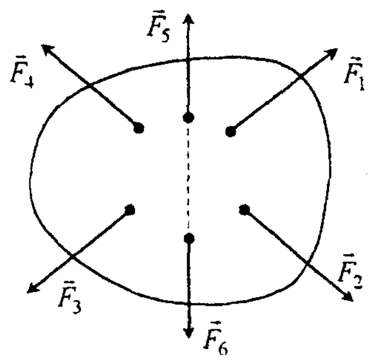


Рис. 1.4

$(\vec{F}_5, \vec{F}_6) \sim 0$ - присоединенная система сил. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6)$.

Следствие. Не изменяя действия на твердое тело, силу можно переносить вдоль ей линии действия в любую другую точку тела

Пусть на твердое тело действует сила $\vec{F}$, приложенная в точке А (рис. 1.5). На линии действия этой силы возьмем произвольную точку В и приложим к ней две уравновешенные

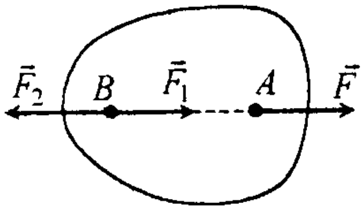


Рис. 1.5

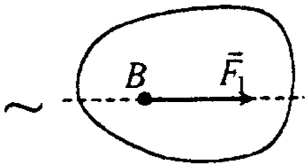


Рис.1.6

силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, при этом $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}$. От этого действие силы $\vec{F}$ на тело не изменится. Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ также образуют уравновешенную систему, которая может быть исключена. В результате на тело будет действовать сила $\vec{F}_1$, равная $\vec{F}$, но приложенная в точке В на линии действия силы (рис. 1.6).

На основании этого следствия вектор силы $\vec{F}$ считается скользящим

Аксиома параллелограмма сил

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, приложена в той же точке, а по величине и направлению определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.7).

Замену двух сил одной равнодействующей называют *геометрическим (или векторным) сложением* этих сил, которое математически записывается так:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены по одной прямой в одну или противоположные стороны, то они складываются алгебраически.

Модуль равнодействующей определяют по формуле

$$\vec{R} = \sqrt{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + 2F_1F_2\cos(\vec{F}_1 \hat{,} \vec{F}_2)}.$$

Необходимо отметить, что справедливо и обратное. Одну силу можно разложить последовательно на две, три и т.д. составляющие по заданным направлениям.

Аксиома о равенстве сил действия и противодействия

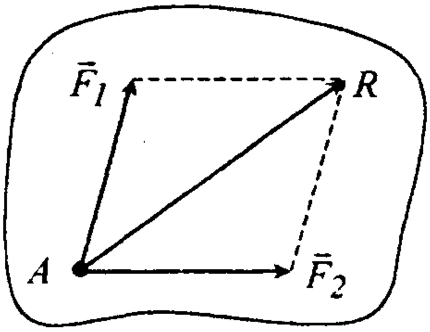


Рис. 1.7

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Эта аксиома утверждает, что силы взаимодействия между двумя телами (точками) равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.8).

Силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ не образуют уравновешенную систему, так как они приложены к разным телам. Отметим, что твердые тела или материальные точки, могут взаимодействовать путем соприкоснове-ния или посредством силовых полей, т.е. на расстоянии.

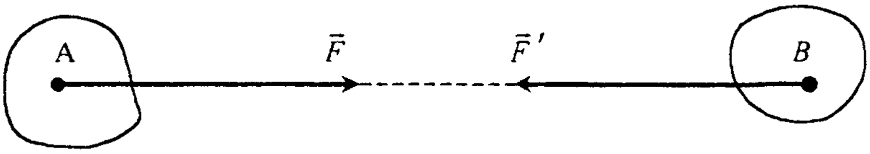


Рис. 1.8

Аксиома затвердевания

Равновесие сил, приложенных к деформируемому телу, не нарушится при его затвердевании.

Эта аксиома утверждает, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, должны выполняться и для сил, приложенных к деформируемому телу.

Например, равновесие гибкой нити, на которой подвешено тело, не нарушится, если эта нить затвердеет.

Однако для деформируемого тела условия равновесия сил необходимы, но недостаточны. Так, например, для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам, условия равновесия этих сил не являются достаточными, требуется еще, чтобы приложенные силы были растягивающими.

Связи. Реакции связей. Аксиома связей

Материальное тело, перемещения которого в пространстве ограничены другими телами, называется *несвободным.*

Связи - материальные объекты (тела), которые ограничивают переме-щения данного твердого тела.

Реакция связи - сила, с которой связь действует на тело.

Активные - силы, которые не являются реакциями связей.

Упомянутые ранее внешние и внутренние силы могут быть активными и реакциями связей.

Аксиома связей

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связи условно отбросить и заменить их действие реакциями связей.

Реакции связей зависят от приложенных к телу активных сил и от вида связей. Поэтому очень важно уметь правильно заменять действие отброшенных связей их реакциями. При этом надо помнить, что реакция связи направлена в сторону, противоположную той, в которую связь препятствует перемещению тела. Если связь препятствует перемещению тела по нескольким направлениям, направление реакции связи неизвестно, ее обычно раскладывают по правилу параллелограмма на составляющие, направленные параллельно осям координат.

Лекция №2

План лекции

Система сходящихся сил. Геометрический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия. Аналитический способ определение равнодействующей. Аналитическое условие уравнения равновесия системы сходящихся сил.

Теория моментов сил. Момент силы относительно точки как вектор. Момент силы относительно оси. Зависимость между ними. Момент силы относительно точки как алгебраическая величина.

Основная часть лекции.

Система сходящихся сил

Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

На материальные тела могут действовать различные системы сил -сходящихся, параллельных, произвольно расположенных на плоскости или в пространстве. Одной из наиболее простых является система сходящихся сил.

Системой сходящихся сил называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Теорема. Система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна геометрической сумме всех сил и проходит через точку пересечения их ли-

Доказательство. Пусть задана система сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу. Согласно следствию из аксиомы III перенесем силы по линиям их действия в точку пересечения этих линий (рис.2.1). Складывая силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, на основании аксиомы IV получим их равнодействующую: $\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, индекс равнодействующей соответствует номеру добавляемой силы. Затем, сложив $\vec{R}_2$ с $\vec{F}_3$, найдем равнодействующую трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Дойдя, таким образом, до последней силы $\vec{F}_n$, получим равнодействующую $\vec{R}$ всей системы n данных сил:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \qquad (2.1)$$

Построение равнодействующей может быть упрощено, если вместо параллелограммов построить силовой многоугольник (рис. 2.2). 0т конца вектора $\vec{F}_1$ отложим вектор $\vec{F}_2$, от его конца отложим вектор $\vec{F}_3$ и т.д. Получим, что вектор, идущий от начала первого $\vec{F}_1$ к концу последнего $\vec{F}_n$, является равнодействующей $\vec{R}$.

Пространственный многоугольник, который получен указанным способом, называется силовым многоугольником. Если для нахождения равнодействующей при помощи силового многоугольника используются правила геометрии, то такой способ нахождения равнодействующей называется геометрическим способом.

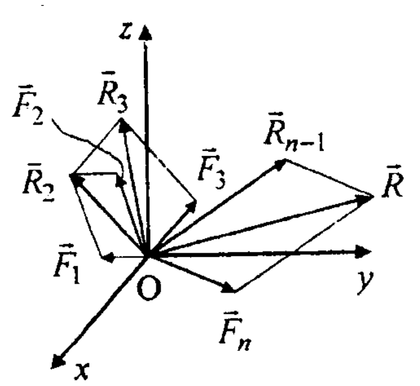


Рис. 2.1

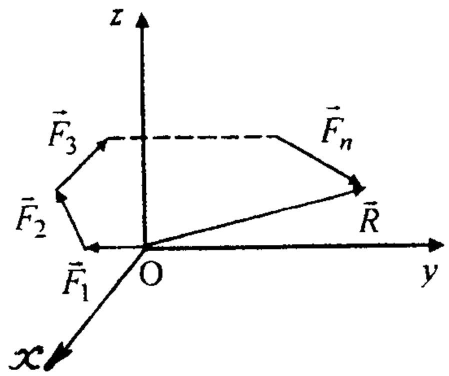


Рис. 2.2

Наиболее общим методом определения модуля и направления равнодействующей является аналитический метод.

Вспомним, что *проекция силы на ось* есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси. Если этот угол острый, - проекция положительная, если тупой, - отрицательная, а если сила перпендикулярна оси, - ее проекция на ось равна нулю. Так, для сил, изображенных на рис.2.3:

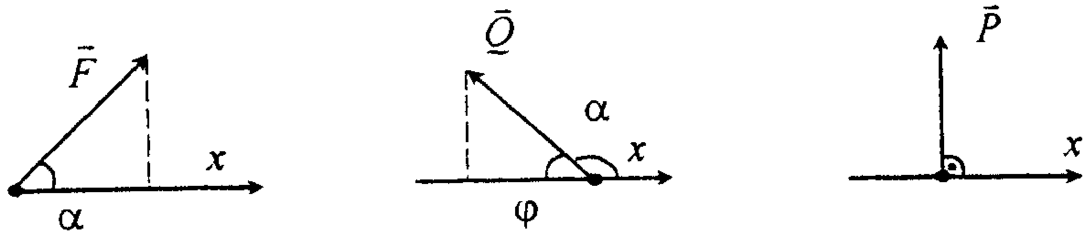


Рис. 2.3

$$F_x = F\cos\alpha; \quad Q_x = Q\cos\alpha = -\mathrm{Q}\cos\varphi; \quad P_x = 0.$$

Проекцией силы $\vec{F}$ *на плоскость* Оxy называется вектор $\vec{F}_{xy}$, заключенный между проекциями начала и конца вектора силы $\vec{F}$ на эту плоскость (рис. 2.4).

Таким образом, в отличие от проекции силы на ось проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим модулем, но и направлением в плоскости Оxy. Модулю $F_x = F\cos\varphi$, где φ - угол между направлением силы $\vec{F}$ и её проекции $\vec{F}_{xy}$.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой расположена эта ось, а затем эту проекцию спроектировать на данную ось. Например, в случае,

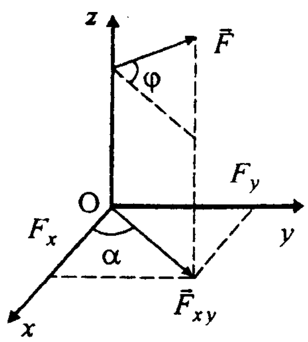


Рис. 2.4

изображенном на рис. 2.4:

$$F_x = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\varphi\cos\alpha,$$
$$F_x = F_{xy}\sin\alpha = F\cos\varphi\sin\alpha.$$

Из курса векторной алгебры известно, что проекция суммы векторов на произвольную ось равна сумме проекций на ту же ось слагаемых векторов. Поместим начало прямоугольной системы координат в точку пересечения линий действия сил (см. рис.2.1), проектируя соотношение (2.1) на оси xyz, получим:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}; \\ R_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}; \\ R_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекции силы $\vec{F}_k$ на указанные оси, а R_x, R_y, R_z - проекции равнодействующей на те же оси.

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.

Используя выражения (2.2), можно найти модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{kz})^2}.$$

а её направление в системе координат Oxy определим по направляющим косинусам вектора

$$\vec{R}: \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{i}}) = R_x / R; \quad \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{j}}) = R_y / R; \quad \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{k}}) = R_z / R.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил

Ранее было установлено, что система сходящихся сил эквивалентна одной равнодействующей силе $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim R.$ Отсюда следует, что

для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая их равнялась нулю:

$$\vec{R} = 0. \qquad (2.3)$$

Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что *силовой многоугольник замкнут* (рис. 2.5).

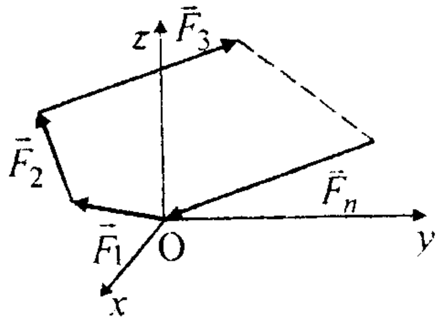


Рис.2.5

Проектируя равенство (2.3) на оси *x,y,z,* получим скалярные равенства:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0.$$

Принимая во внимание равенства (2.2), получаем аналитические условия равновесия системы сходящихся сил:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0, \end{aligned}\right\}$$

(2.2)

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей.

Для частного случая плоской системы сходящихся сил, расположенных, например, в плоскости О*xy*, третье уравнение (2.4) выполняется тождественно.

При решении задач часто пользуются *теоремой о трех параллельных си-лах.*

Теорема. Если под действием трех сил тело находится в равновесии и линии действия двух сил пересекаются, то все силы лежат в одной плоскости, и их линии действия пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть на тело действует система трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, причем линии действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ пересекаются в точке А (рис.2.6).

Согласно следствию из аксиомы III силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можно перенести в точку А, а по аксиоме IV их можно заменить одной силой $\vec{R}_1$, причем $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Таким образом, заданная система сил приведена к двум силам $\vec{R}_1$ и $\vec{F}_3$. По условию теоремы тело находится в равновесии, следовательно, силы $\vec{F}_3$ и $\vec{R}_1$ должны иметь общую линию действия, отсюда следует, что сила $\vec{F}_3$ расположена в той же плоскости, что и силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, и линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Теория моментов сил.

Для решения задачи приведения произвольной системы сил к простейшему виду и задачи о равновесии произвольной системы сил прежде необходимо познакомиться с такими важными понятиями статики, как момент силы относительно точки, момент силы относительно оси, момент пары сил.

Момент силы относительно точки

Рассмотрим твердое тело, в точке *A* которого приложена сила $\vec{F}$ (рис.3.1). Проведем из произвольной точки О в точку *A* радиус-вектор $\vec{r}$.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно точки* О называется вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, равный векторному произведению радиуса - вектора $\vec{r}$ точки приложения силы относительно точки О на вектор силы $\vec{F}$

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.1}$$

Из определения векторного произведения следует, что

вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через выбранную точку О и линию действия силы $\vec{F}$, в ту сторону, откуда мы видим, что сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг точки О против часовой стрелки.

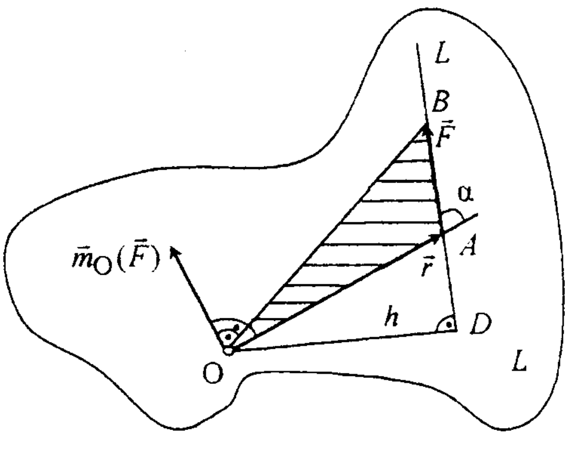


Рис. 3.1

Модуль вектора $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ равен модулю векторного произведения (3.1), т.е. произведению модулей $\vec{F}$ и $\vec{r}$ на синус угла между этими векторами

$$m_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = F\ r \sin(\vec{r} \,\widehat{,}\, \vec{F}) \tag{3.2}$$

За угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{r}$, условно приложенными в одной точке, например *A* (см. рис. 3.1), принимается угол α, не превышающий π.

Проведем прямую *LL*, на которой лежит вектор силы $\vec{F}$ (линию дейст- вия силы), и опустим из точки О на эту прямую перпендикуляр О*D*.

Длина перпендикуляра, равная кратчайшему расстоянию от точки О до линии действия силы $\vec{F}$, называется *плечом силы* $\vec{F}$ *относительно точки* О:

$$h = OD = r \sin \alpha .$$

С учетом этого из формулы (3.2) следует, что
модуль момента силы относительно точки **равен произведению модуля силы на плечо силы относительно этой точки**

$$m_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = F\ h.$$

Если $F \neq 0$, то $m_{\mathrm{O}}(F) = 0$ только при $h = 0$, т.е. когда линия действия силы проходит через центр момента О. Момент силы измеряется в Н·м.

Таким образом, по формуле (3.1) однозначно определяются модуль и направление вектора момента силы относительно точки, однако линия действия вектора $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ не определена. Так как модуль момента силы относительно точки О зависит от положения точки О, то для одновременного определения величины момента силы относительно точки О и плоскости, в которой эта точка и сила $\vec{F}$ расположены, будем рассматривать вектор $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ приложенным в точке О, называемой *центром момента.*

В случае, когда на тело действует система сил, расположенных в одной плоскости, векторы моментов сил относительно точки, расположенной в этой же плоскости, параллельны и могут быть направлены перпендикулярно плоскости в ту или иную сторону, что позволяет складывать их между собой алгебраически.

Алгебраический момент силы относительно точки определяется как скалярная величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятому со знаком плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг точки против часовой стрелки, и минус - если по часовой стрелке относительно этой точки

$$m_O(\vec{F}) = \pm F\ h. \tag{3.3}$$

Для случая, изображенного на рис. 3.2

$$m_O(\vec{F}_1) = -F_1\ h_1;$$
$$m_O(\vec{F}_2) = F_2\ h_2;$$
$$m_O(\vec{F}_3) = 0.$$

Если совместить с точкой О (центром момента) начало прямоугольной системы координат О*xyz*, осям которой соответствуют векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то вектор момента силы относительно точки О можно представить в виде суммы его составляющих по осям выбранной системы координат:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_{Ox}(\vec{F})\vec{i} + m_{Oy}(\vec{F})\vec{j} + m_{Oz}(\vec{F})\vec{k}, \tag{3.4}$$

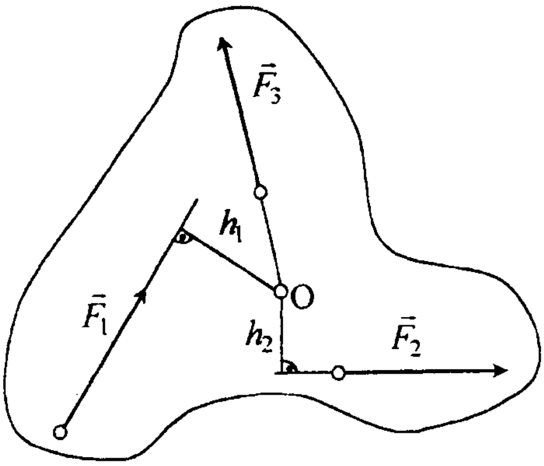


Рис.3.2

где $m_{Ox}(\vec{F}),\ m_{Oy}(\vec{F}),\ m_{Oz}(\vec{F})$) - проекции вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ на оси координат.

Пусть *x, y, z* - координаты точки приложения силы, равные проекциям радиуса' вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси, а F_x, F_y, F_z - проекции вектора силы на те же оси, тогда формулу (3.1) для момента силы относительно точки О можно записать в виде определителя, раскрыв который по элементам первой строки получим

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \tag{3.5}$$
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

Приравнивая правые части (3.4) и (3.5), заметим, что проекции вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ на оси координат с началом в точке О будут равны коэффициентам при единичных векторах в правой части равенства (3.5):

$$m_{Ox}(\vec{F}) = yF_x - zF_y; \quad m_{Ox}(\vec{F}) = zF_x - xF_z;$$
$$m_{Ox}(\vec{F}) = xF_y - yF_x \tag{3.6}$$

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\vec{F}$. Выберем ось z и на ней произвольную точку О (рис. 3.3).

Проведем через точку О плоскость Оxy, перпендикулярную оси z, и спроектируем силу $\vec{F}$ на эту плоскость. Получим вектор силы $\vec{F}_{xy}$, начало

A_1 и конец B_1 которого совпадают с проекциями начала A и конца B силы $\vec{F}$ на эту плоскость.

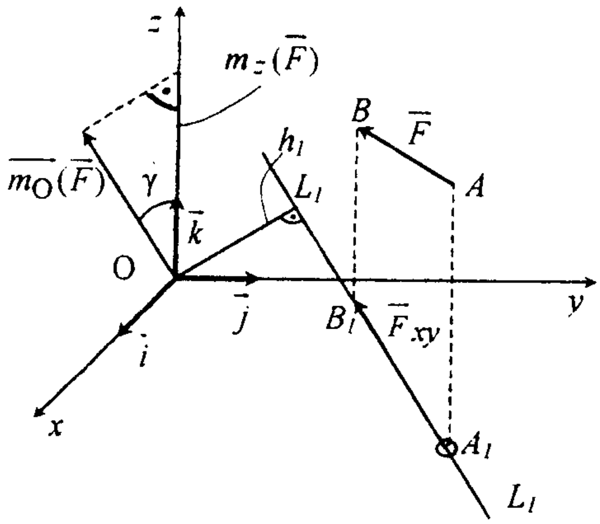


Рис. 3. 3

Моментом силы относительно оси называется момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с плоскостью. Он определяется как скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси на плечо проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Обозначим $m_z(\vec{F})$ - момент силы $\vec{F}$ относительно оси z, проходящей через точку О, тогда в соответствии с определением и формулой (3.3)

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h_1 \qquad (3.7)$$

где F_{xy} - модуль проекции силы $\vec{F}$ на плоскость Оxy, перпендикулярную оси z; h_1 - плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О пересечения оси z с плоскостью Оxy.

Условимся *знак плюс* присваивать в случае, когда, наблюдая с положительного направления оси, мы видим, что сила стремится вращать тело вокруг оси против часовой стрелки, и *знак минус* - если по часовой стрелке.

Очевидно, что при вычислении момента силы относительно оси плоскость, перпендикулярную оси z, можно проводить через любую точку на оси, так как величины, входящие в правую часть равенства (3.7), при этом не изменяются.

Момент силы относительно оси удобно вычислять, придерживаясь следующей последовательности действий:

- выбрать на оси произвольную точку и провести через нее плоскость, перпендикулярную оси;
- спроектировать силу на эту плоскость и вычислить модуль проекции силы;
- опустить перпендикуляр из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы и найти его длину;
- вычислить момент силы относительно оси по формуле (3.7) и определить его знак.

Из формулы (3.7) следует, что *момент сипы относительно оси равен нулю* либо в случае, когда сила параллельна оси (так как $F_{xy} = 0$), либо, когда линия действия силы пересекает ось (так как $h_1 = 0$). Другими словами момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось находятся в одной плоскости.

Момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О можно вычислить и по фор- муле (3.5), положив в ней $z = 0$ и $F_z = 0$ (см. рис. 3.3). Так как координаты x и y точки A_1, в которой приложена сила $\vec{F}_{xy}$, равны соответствующим координатам точки A приложения силы $\vec{F}$, а проекции силы $\vec{F}_{xy}$ на оси x и y - проекциям F_x и F_y силы $\vec{F}$, то

$$\vec{m}_{Ox}(\vec{F}_{xy}) = (xF_y - yF_x)\,\vec{k}. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что вектор $\vec{m}_{O}(\vec{F}_{xy})$ направлен так же, как вектор $\vec{k}$, т.е. по оси z. Следовательно, величина момента силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О равна проекции вектора $\vec{m}_{O}(\vec{F}_{xy})$ на ось z, а согласно (3.6) равна проекции вектора момента силы $\vec{F}$ относительно точки О на ту же ось;

$$m_{O}(\vec{F}_{xy}) = m_{Oz}(\vec{F}_{xy}) = m_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

Отсюда с учетом выражения (3.7) следует еще одно определение момента силы относительно оси:

момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно любой точки на оси.

Таким образом, момент силы $\vec{F}$ относительно оси z, проведенной через точку О,

$$m_z(\vec{F}) = m_{\text{O}}(\vec{F}_{xy}) = m_{\text{O}z}(\vec{F}) = m_{\text{O}z}(\vec{F})\cos\gamma\,,$$

где $m_{\text{O}}(\vec{F})$ - модуль вектора момента силы $\vec{F}$ относительно точки O; γ-угол между вектором $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$ и положительным направлением оси (см. рис.3.3).

Аналогично для моментов силы $\vec{F}$ относительно осей x и y с началом в точке O запишем

$$m_z(\vec{F}) = m_{\text{O}x}(\vec{F}), \quad m_y(\vec{F}) = m_{\text{O}y}(\vec{F})\,.$$

Тогда, воспользовавшись формулами (3.6), можно записать моменты силы относительно осей координат в виде

$$\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y; \\ m_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z; \\ m_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Модуль момента силы $\vec{F}$ относительно начала координат O

$$m_{\text{O}}(\vec{F}) = \sqrt{m_x^2(\vec{F}) + m_y^2(\vec{F}) + m_z^2(\vec{F})}\,. \tag{3.10}$$

Углы, составляемые вектором $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$ с положительными направлениями осей координат x, y, z (или единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ этих осей), определяются по направляющим косинусам вектора $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$:

$$\cos[\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F}) \,\hat{,}\, \vec{i}\,] = \frac{m_x(\vec{F})}{m_{\text{O}}(\vec{F})}; \quad \cos[\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F}) \,\hat{,}\, \vec{j}\,] = \frac{m_y(\vec{F})}{m_{\text{O}}(\vec{F})};$$

$$\cos[\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F}) \,\hat{,}\, \vec{k}\,] = \frac{m_z(\vec{F})}{m_{\text{O}}(\vec{F})}.$$

Пример. В точке *A* прямоугольного параллелепипеда со сторонами *a, b, c* приложена сила $\vec{F}$, направленная по диагонали *AD* передней грани (рис.3.4). Определить модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Совместим с точкой O начало прямоугольной системы координат O*xyz* и вычислим сначала моменты силы $\vec{F}$ относительно осей координат. Для этого воспользуемся формулой (3.7) и рекомендованной последовательно- стью действий. Выбираем на оси x произвольную точку O_1 и проводим через нее плоскость $ABDO_1$, перпендикулярную оси x. Проектируем силу $\vec{F}$ на эту плоскость и вычисляем модуль проекции силы. В данном случае проекция силы $\vec{F}$ на плоскость $ABDO_1$ (или на любую параллельную плоскость, например O*yz*) равна самой силе $\vec{F}_{yz} = \vec{F}$, а ее модуль модулю, силы $F_{yz} = F$. Опускаем из точки O_1 пересечения оси x с плоскостью $ABDO_1$ перпендикуляр на линию действия проекции силы $\vec{F}$ на плоскость $ABDO_1$, которая в нашем случае совпадает с линией действия силы $\vec{F}$, и находим длину этого перпендикуляра $h_1 = c\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

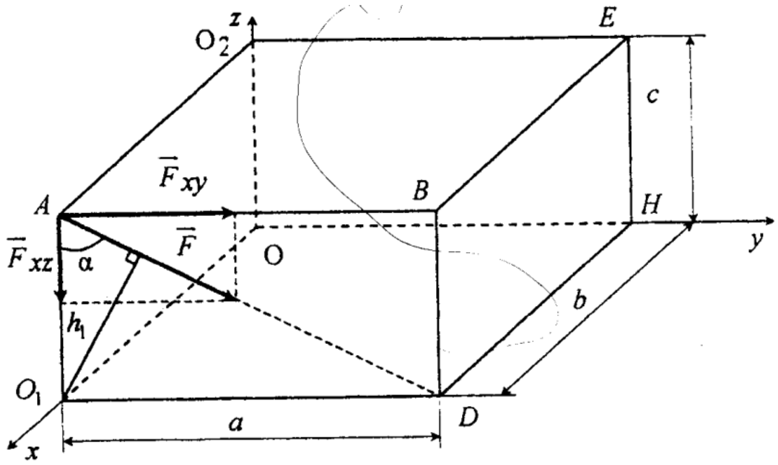


Рис. 3.4

Вычисляем момент силы $\vec{F}$ относительно оси x по формуле (3.7) и устанавливаем, что момент имеет знак минус, так как с положительного направления оси x мы увидим, как сила $\vec{F}$ стремится вращать параллелепипед вокруг оси x по часовой стрелке

$$m_x(\vec{F}) = -F\,h_1 = -F\,c\sin\alpha.$$

Аналогично вычисляем моменты силы $\vec{F}$ относительно осей y и z как взятые с соответствующим знаком моменты проекций силы на плоскости AO_1OO_2 $(\vec{F}_{xz})$ и $ABEO_2$ $(\vec{F}_{xy})$ соответственно перпендикулярные осям y и z относительно точек пересечения О и O_2 этих плоскостей с осями y и z

$$m_x(\vec{F}) = -F_{xz}\,b = F\,\cos\alpha\,b;$$
$$m_z(\vec{F}) = -F_{xy}\,b = F\,\sin\alpha\,b.$$

Тот же результат получим, используя формулы (3.9). Координаты точки A приложения силы $\vec{F}$

$$x = b;\quad y = 0;\quad z = c.$$

Проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси:

$$F_x = 0;\quad F_y = F\sin\alpha;\quad F_z = -F\cos\alpha.$$

После подстановки этих значений в формулы (3.9) находим

$$m_x(\vec F) = yF_z - zF_y = -cF\sin\alpha;$$

$$m_y(\vec F) = zF_x - xF_z = bF\cos\alpha;$$

$$m_z(\vec F) = xF_y - yF_x = bF\sin\alpha.$$

По формуле (3.10) модуль момента силы $\vec F$ относительно точки О равен

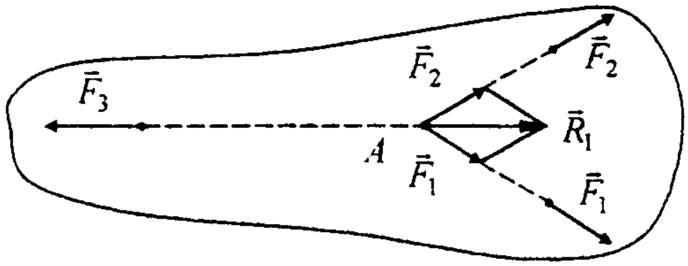


Рис.2.6

$$m_O(\vec F) = \sqrt{m_x^2(\vec F) + m_y^2(\vec F) + m_z^2(\vec F)} =$$

$$= \sqrt{F^2c^2\sin^2\alpha + F^2b^2\cos^2\alpha + F^2b^2\sin^2\alpha} =$$

$$= F\sqrt{c^2\sin^2\alpha + b^2} = F\sqrt{\frac{a^2c^2}{a^2+c^2} + b^2}.$$

Лекция №3

План лекции

Теория моментов пар сил. Понятие о паре сил. Момент пара сил как вектор. Теорема об эквивалентности пар сил. Свойства пар сил. Сложение пар сил, расположенных в пространстве и на плоскости. Условия равновесия системы пар сил в пространстве и на плоскости.

Система произвольно расположенных сил. Приведение сил к центру. Теорема Пуансо. Главный вектор и главный момент системы сил, их вычисление. Аналитические условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, произвольной плоской системы сил и системы параллельных сил.

Основная часть лекции

Сложение двух параллельных сил. Пара сил.

Рассмотрим систему двух параллельных сил, приложенных в точках A и B твердого тела и направленных в одну сторону (рис.3.5).Можно показать, что равнодействующая такой системы сил параллельна силам и направлена в ту же сторону, а ее модуль равен сумме модулей этих сил.

Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, т.е.

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

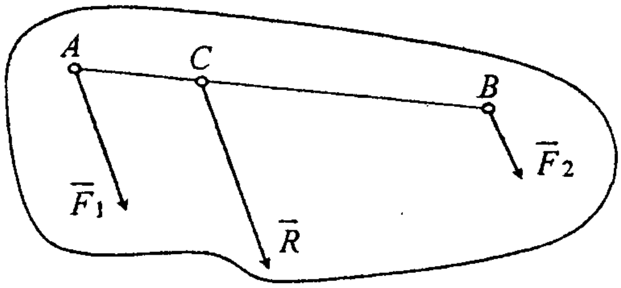


Рис.3.5

Если же к телу приложены две параллельные, противоположно направленные и не равные по модулю силы, например $F_1 > F_2$ (рис. 3.6), то их равнодействующая параллельна силам и направлена в сторону большей силы, а модуль равнодействующей равен разности модулей этих сил. Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, т.е.

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Учитывая, что $BC = AB + AC$, из последней пропорции получим:

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \tag{3.11}$$

Предположим теперь, что модули параллельных и противоположно направленных сил равны: $F_1 = F_2$. Модуль равнодействующей этой системы сил $R = F_1 - F_2 = 0$, а линия действия равнодействующей согласно (3.11) бесконечно удалена от линий действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Очевидно, что такая система сил не может быть заменена одной силой и в то же время не является уравновешенной, так как силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не направлены по одной прямой. Поэтому ее рассматривают как самостоятельный силовой фактор и называют парой сил или просто парой, обозначая ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) (рис. 3.7).

Парой называется совокупность двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил , не лежащих на одной прямой. Наряду с силой пара является таким силовым фактором, упростить который нельзя. Плоскость, в которой расположены силы пары, называется *плоскостью действия пары,* а расстояние между линиями действия сил пары - *плечом d пары.*

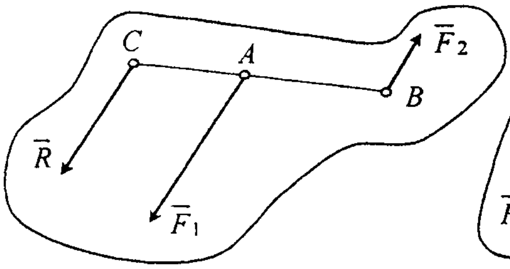


Рис. 3.6

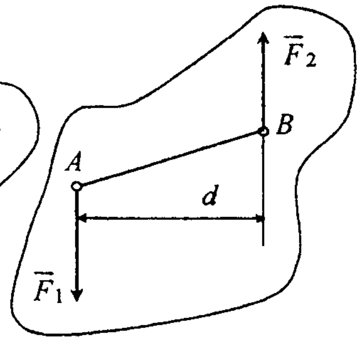


Рис. 3.7

Теорема о сумме моментов сил пары. Момент пары

Для того чтобы оценить интенсивность воздействия пары $(\vec{F}, \vec{F}')$ на твердое тело, вычислим сумму моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки O пространства (рис. 3.8).

Теорема. Сумма моментов сил, составляющих пару, относительно точки не зависит от выбора точки и равна моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

Доказательство. Проведем из точки O радиусы-векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ точек приложения сил пары, а из точки B радиус-вектор $\vec{r}$ точки A. В соответствии с определением момента силы относительно точки

$$\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} \quad \text{и} \quad \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}') = \vec{r}_B \times \vec{F}'.$$

Тогда сумма моментов сил пары относительно точки O равна

$$\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) + \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}') = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'.$$

Так как $\vec{F}' = -\vec{F}$, то $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) + \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}') = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}.$

Учитывая, что $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$, окончательно получим

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r} \times \vec{F}.$$

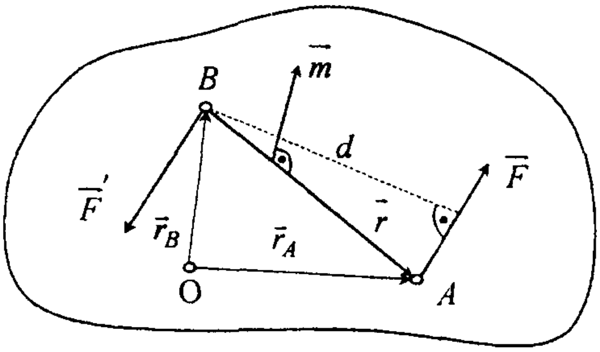


Рис. 3. 8

Моментом пары называется вектор $\vec{m}$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ точки приложения одной из сил пары относительно точки приложения другой на вектор силы:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{m} = \vec{r}\,' \times \vec{F}\,'$$

где $\vec{r}\,' = \overline{AB}$ на рис. 3.8 не показан.

Момент пары относительно любой точки равен моменту $\vec{m}$ этой пары.

Из определения векторного произведения следует, что вектор $\vec{m}$ направлен перпендикулярно плоскости действия пары (см. рис. 3.8) в ту сторону, откуда мы видим, что пара стремится вращать тело против хода часовой стрелки, а его модуль равен произведению модуля одной из сил пары на плечо *d* пары

$$m = F\, r \sin(\vec{r} \wedge \vec{F}) = F\, d.$$

Вектор момента пары ($\vec{m}$) полностью характеризует действие пары на твердое тело, так как направление вектора $\vec{m}$ определяет плоскость действия пары и направление, в котором пара стремится вращать тело, а модуль вектора $\vec{m}$ определяет интенсивность воздействия пары на тело.

Из определения момента пары следует, что вектор $\vec{m}$ может быть проведен перпендикулярно плоскости действия пары через любую точку этой плоскости, т.е. линия действия вектора момента пары не определена. Такие векторы называются свободными векторами. Таким образом, **вектор момента пары $\vec{m}$ свободный вектор.**

С учетом этого, не доказывая другие известные теоремы о парах, сформулируем почти очевидные свойства пар.

Свойства пар

1. Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

2. Не изменяя действия пары на твердое тело, её можно переносить в плоскости действия пары и в параллельную ей плоскость в пределах этого тела. Это следует непосредственно из определения момента пары как свободного вектора, который параллельно самому себе можно переносить в любую точку тела.

3. Пары эквивалентны, если их моменты векторно равны

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1) \sim (\vec{F}_2, \vec{F}_2), \text{ если } \vec{m}_1 = \vec{m}_2.$$

Это очевидно, так как, не изменяя состояния свободного твердого тела, действующую на него пару $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$ можно заменить парой $(\vec{F}_2, \vec{F}_2)$, которая при условии $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$ имеет ту же (или параллельную ей) плоскость действия и стремится вращать тело в ту же сторону, с той же интенсивностью, как и пара $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что не изменяя действие пары на твердое тело, можно поворачивать пару в плоскости ее действия на произвольный угол, а также менять одновременно плечо и силы пары, оставляя неизменным момент пары.

4. Произвольная система пар эквивалентна одной паре с моментом, равным векторной сумме моментов пар системы:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n.$$

Действительно, векторы моментов произвольной системы пар составляют произвольную систему свободных векторов $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_n)$. Перенося каждый из этих векторов параллельно самому себе в произвольную точку тела (рис.3.9), получим эквивалентную систему сходящихся векторов. Складывая последовательно каждую пару векторов по правилу параллелограмма, найдем результирующий вектор $\vec{m} = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{m}_k$

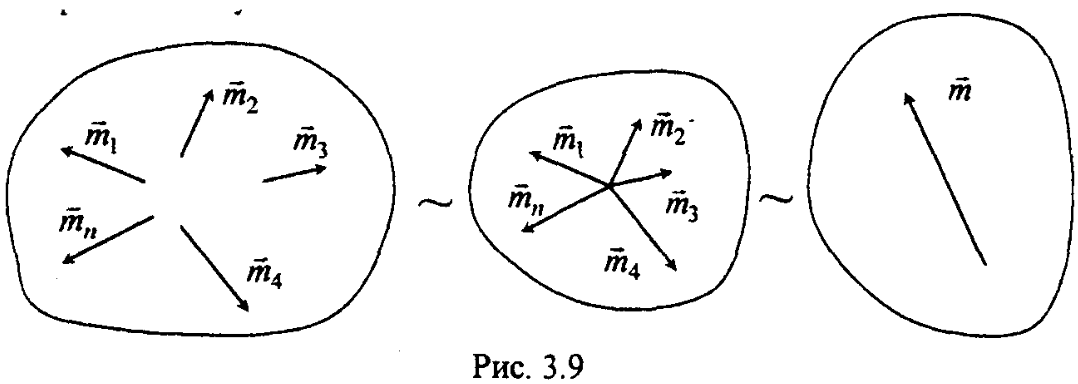


Рис. 3.9

5. Для равновесия твердого тела под действием произвольной системы пар необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма моментов пар системы равнялась нулю.

Это следует из предыдущего. Так как произвольная система пар эквивалентна одной паре с моментом $\vec{m}$, полностью определяющим действие результирующей пары на твердое тело, то условия, при которых эта пара эквивалентна нулю, сводятся к одному векторному равенству

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k = 0.$$

Проектируя последнее векторное равенство на оси прямоугольной системы координат, запишем условия равновесия произвольной системы пар в виде трех скалярных равенств

$$\sum_{k=1}^{n} m_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_{kz} = 0,$$

где m_{kx}, m_{ky}, m_{kz} - проекции вектора момента k - й пары соответственно на оси *x, y, z*.

Когда пары расположены в одной плоскости, векторы моментов пар, направленные перпендикулярно этой плоскости в ту или другую сторону, оказываются параллельными. В этом случае моменты пар можно складывать алгебраически.

Алгебраический момент пары вычисляется как произведение модуля одной из сил пары на плечо пары, взятое со знаком плюс, если мы видим, что пара стремится вращать тело против часовой стрелки, и минус, если по часовой стрелке $m = \pm Fd$.

Пару сил часто изображают дуговой стрелкой соответствующего направления, расположенной в плоскости пары (рис.3.10).

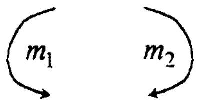


Рис. 3.10

Тогда из пп. 4 и 5, очевидно следуют пп. 6 и 7.

6. Система пар, расположенных в одной плоскости, эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов пар системы:

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

7. Для равновесия твердого тела под действием системы пар, расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю:

Произвольная система сил

Приведение силы к точке

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу $\vec{F}$ (рис. 5.1) перенести в какую-нибудь точку *O*, не расположенную на линии действия.

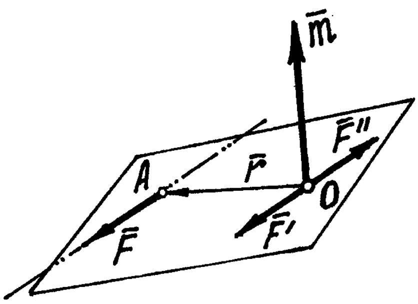


Рис. 5.1

Приложим к этой точке две уравновешивающиеся силы $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельные силе $\vec{F}$ и равные ей по величине, $F' = F'' = F$.

В результате получим силу $\vec{F}'$, равную силе $\vec{F}$ и приложенную к точке *O*. То есть мы как бы перенесли заданную силу $\vec{F}$ из точки *A* в точку *O*, но при этом появилась пара, образованная силами $\vec{F}$ и $\vec{F}''$. Момент этой пары $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0(\vec{F})$, равен моменту заданной силы $\vec{F}$ относительно точки *O*.

Процесс замены силы $\vec{F}$ равной ей силой $\vec{F}'$, приложенной к точке O, и парой называется приведением этой силы к точке O.

Точка *O* называется точкой приведения; сила $\vec{F}'$, приложенная к точке приведения, - приведенной силой. Появившаяся пара – присоединенной парой.

Сложение сил, произвольно расположенных в пространстве

Пусть дана система, состоящая из нескольких произвольно расположенных сил (на рис. 5.2 показаны три силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$). Требуется сложить эти силы и посмотреть, что в результате получится.

Приведем все силы к произвольно выбранной точке *O*, центру приведения. Получим систему приведенных сил, приложенных к точке *O*, равных заданным силам: $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$, $\vec{F}_2' = \vec{F}_2$, $\vec{F}_3' = \vec{F}_3$, и систему присоединенных пар, моменты которых равны векторам моментов заданных сил относительно центра приведения *O*: $\vec{m}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1)$, $\vec{m}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2)$, $\vec{m}_3 = \vec{M}_O(\vec{F}_3)$

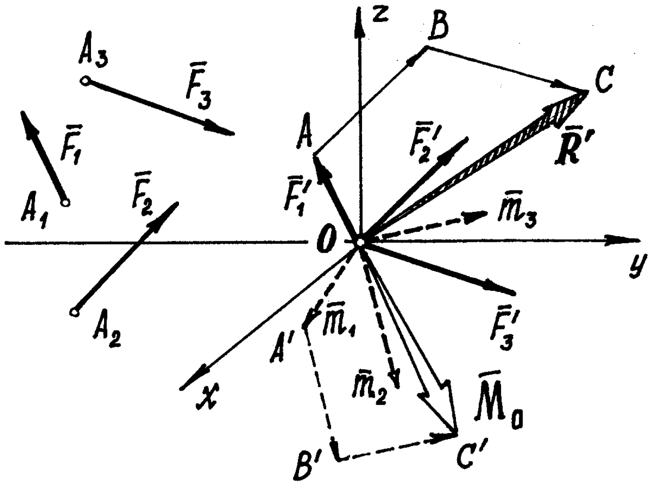


Рис. 5.2

(на рис. 5.2 самих пар нет, показаны только векторы их моментов).

Сложив первую систему, систему сходящихся приведенных сил, например, построением многоугольника сил *OABC,* получим их равнодействующую $\vec{R}'$, которая равна векторной сумме этих приведенных сил, а значит, и заданных сил, потому что они векторно равны,

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_i{}' = \sum \vec{F}_i \, . \qquad (5.1)$$

А сложив систему пар, например, построением многоугольника их векторов моментов $OA'B'C'$, получим пару, момент которой $\vec{M}_0$ равен векторной сумме моментов присоединенных пар или сумме моментов заданных сил относительно центра приведения

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) \, . \qquad (5.2)$$

Сила $\vec{R}'$, равная векторной сумме заданных сил, называется *главным вектором* этих сил. Приложена эта сила к центру приведения.

Момент $\vec{M}_O$, равный векторной сумме моментов заданных сил относительно центра приведения, называется *главным моментом* этих сил относительно центра приведения.

Главный вектор $\vec{R}'$ можно найти так же, как находили ранее равнодействующую сходящихся сил (см. II, §2, формула (2.2)).

Проекции его на оси (см. рис. 5.2):

$$R'_x = \sum X'_i = \sum X_i \, ; \quad R'_y = \sum Y'_i = \sum Y_i \, ; \quad R'_z = \sum Z'_i = \sum Z_i \, .$$

Поэтому модуль главного вектора

$$R' = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2} \, . \qquad (5.3)$$

Направление вектора $\vec{R}'$ определяется с помощью направляющих косинусов: $\cos\alpha = \dfrac{R'_x}{R'}$, $\cos\beta = \dfrac{R'_y}{R'}$, $\cos\gamma = \dfrac{R'_z}{R'}$, где α, β, γ – углы между вектором $\vec{R}'$ и направлениями осей *x, y, z*.

Так как векторы моментов присоединенных пар также образуют систему сходящихся векторов, то и главный момент M_O находим аналогичным способом

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \, , \qquad (5.4)$$

где M_x, M_y, M_z – проекции вектора $\vec{M}_O$ на оси. Проектируя его на оси, получим, принимая во внимание, что проекция вектора момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, есть момент относительно оси (3.4),

$$M_x = \sum[\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_x = \sum M_x(\vec{F}_i),$$
$$M_y = \sum[\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_y = \sum M_y(\vec{F}_i), \qquad (5.5)$$
$$M_z = \sum[\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z = \sum M_z(\vec{F}_i).$$

Эти проекции M_x, M_y, M_z вектора главного момента $\vec{M}_O$ на оси, равные алгебраическим суммам моментов заданных сил относительно осей, проходящих через центр приведения, называются главными моментами сил относительно соответствующих осей.

Модуль главного момента $\vec{M}_O$ находится по (5.4) или, с учетом (5.5),

$$M_O = \sqrt{[\sum M_x(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_y(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_z(\vec{F}_i)]^2}. \qquad (5.6)$$

Направление этого вектора можно найти с помощью направляющих косинусов:

$$\cos\alpha_1 = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos\beta_1 = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{M_z}{M_O}, \qquad (5.7)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы между вектором $\vec{M}_O$ и направлениями осей *x, y, z*.

Итак, при сложении сил, произвольно расположенных в пространстве, в общем случае получается сила $\vec{R}'$, приложенная к центру приведения, и пара с моментом $\vec{M}_O$.

Два важных замечания. Первое, – главный вектор $\vec{R}'$ не является равнодействующей $\vec{R}$ заданных сил, так как он не может один заменить действие всех сил, а только вместе с парой.

Второе – главный вектор $\vec{R}'$ как векторная сумма заданных сил не зависит от положения центра приведения. А главный момент $\vec{M}_O$ зависит, так как моменты заданных сил относительно центра приведения изменятся, если этот центр будет в другом месте.

Лекция №4

План лекции

Система произвольно расположенных сил. Возможные случаи приведения произвольной системы сил к центру. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Сосредоточенные и распределенные силы. Равновесие сочлененной системы тел. Статически определимые и статически неопределимые системы.

Кинематика точки. Введение в кинематику. Задачи кинематики. Кинематика точки. Способы задания движения точки. Уравнения траектории точки. Определение скорости при векторном, координатном и способах задания движения точки.

Основная часть лекции

Конечно, возможны различные результаты сложения сил.

1. Может оказаться, что главный момент относительно выбранного центра приведения *O* окажется равным нулю $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0$, а главный вектор $\vec{R}' \neq 0$.

Это значит, что в результате сложения получится только сила, равная главному вектору. И она, эта сила, в данном частном случае является равнодействующей $\vec{R}$ всей системы сил. Линия действия равнодействующей будет проходить через этот центр приведения.

В этом частном случае имеет место очень важная и полезная теорема – *теорема Вариньона*.

Пусть на тело действует несколько сил $\vec{F}_i$ $(i = 1, 2\ldots, n)$ и у них существует равнодействующая $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$, приложенная к центру приведения O (рис. 5.3).

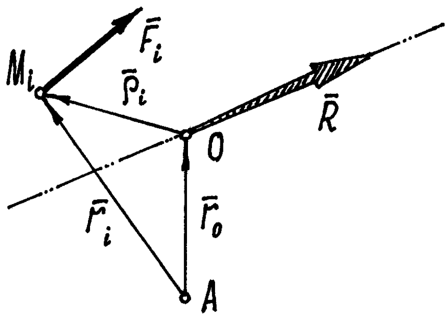


Рис. 5.3

Покажем радиусы-векторы, проведенные из некоторой точки *A*: $\vec{r}_O$ – радиус-вектор точки приложения равнодействующей; $\vec{r}_i$ – точек M_i, точек приложения сил $\vec{F}_i$, где $i = 1, 2\ldots, n$. И добавим векторы $\vec{\rho}_i$, соединяющие точку *O* с точками M_i.

Момент сил $\vec{F}_i$ относительно точки *A*: $\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. А так как $\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{\rho}_i$, то $\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_O \times \vec{F}_i + \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_O \times \vec{F}_i + \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Сумма моментов всех действующих сил $\vec{F}_i$ относительно точки *A* $\sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum(\vec{r}_O \times \vec{F}_i) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$. Но $\sum(\vec{r}_O \times \vec{F}_i) = \vec{r}_O \times \sum \vec{F}_i = \vec{r}_O \times \vec{R}_i =$ $= \vec{M}_A(\vec{R})$. А сумма $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O$, равна главному моменту сил относительно точки

O, который в этом частном случае равен нулю. Поэтому $\sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{M}_A(\vec{R})$.

Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент равнодействующей относительно любой точки A равен векторной сумме моментов всех сил относительно этой точки

$$\vec{M}_A(\vec{R}) = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i). \tag{5.8}$$

Следствие. Если спроектировать это векторное равенство на какую-нибудь ось, например z, проходящую через точку A, то, имея в виду доказанный ранее результат (3.4), получим теорему Вариньона в другой форме.

Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент ее относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этой оси

$$M_z(\vec{R}) = \sum M_z(\vec{F}_i) \tag{5.9}$$

2. Возможен и другой случай, при котором, наоборот, главный вектор равен нулю ($\vec{R}'$ = 0), а главный момент относительно данного центра O не равен нулю ($\vec{M}_O \neq 0$). Это означает, что в результате сложения сил получится только пара с моментом $\vec{M}_O$.

А так как момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары (IV, §2), то в этом случае, когда $\vec{R}'$ = 0, главный момент не зависит от выбора центра приведения. Относительно любой точки O он будет одинаков и равен $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

3. И, наконец, может оказаться, что и главный вектор $\vec{R}'$, и главный момент $\vec{M}_O$ равны нулю. В этом случае силы уравновешиваются, а тело под действием этих сил находится в равновесии.

А так как $R' = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}$ и главный момент $M_O = \sqrt{[\sum M_x(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_y(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_z(\vec{F}_i)]^2}$, (5.3) и (5.6), то для равновесия тела необходимо выполнение шести условий:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum Z_i &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \sum M_x(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum M_y(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum M_z(\vec{F}_i) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Эти условия называются уравнениями равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве.

В частности, если силы расположены в одной плоскости, то, направив оси так, чтобы ось z стала перпендикулярна этой плоскости, третье уравнение $\sum Z_i = 0$, четвертое $\sum M_x(\vec{F_i}) = 0$ и пятое $\sum M_y(\vec{F_i}) = 0$ обратятся в тождества, а в шестом – моменты сил относительно оси z будут равны моментам относительно точки O, точки пересечения оси и плоскости.

Останутся только три уравнения из шести:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \\ &\sum Y_i = 0; \\ &\sum M_0(\vec{F_i}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

Так как в системе уравнений (5.10) уравнения моментов удовлетворяются относительно любой оси, то таких уравнений моментов можно составить больше трех, хоть все шесть.

Точно так же в системе уравнений (5.11) для плоской системы сил можно составить и два, и три уравнения моментов. Поэтому возможны три варианта:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0, \\ &\sum Y_i = 0, \\ &\sum M_{Ai} = 0. \end{aligned}\right\}\mathrm{I} \qquad \left.\begin{aligned} &\sum X_i = 0, \\ &\sum M_{Ai} = 0, \\ &\sum M_{Bi} = 0. \end{aligned}\right\}\mathrm{II} \qquad \left.\begin{aligned} &\sum M_{Ai} = 0, \\ &\sum M_{Bi} = 0, \\ &\sum M_{Ci} = 0. \end{aligned}\right\}\mathrm{III} \qquad (5.12)$$

Правда, имеются ограничения на выбор точек и осей. Например, при использовании II варианта точки A и B не должны лежать на прямой, перпендикулярной оси; а в III варианте – точки A, B и C не должны располагаться на одной прямой.

<u>Пример 5.1. </u> Рама AB (рис. 5.4) удерживается в равновесии шарниром A и стержнем BC. На краю рамы находится груз весом P. Определим реакции шарнира и усилие в стержне.

Порядок решения задач остается прежним (см. пример 2.2).

Рассматриваем равновесие рамы вместе с грузом.

Строим расчетную схему, изобразив раму свободным телом и показав все

силы, действующие на нее: реакции связей и вес груза $\vec{P}$.

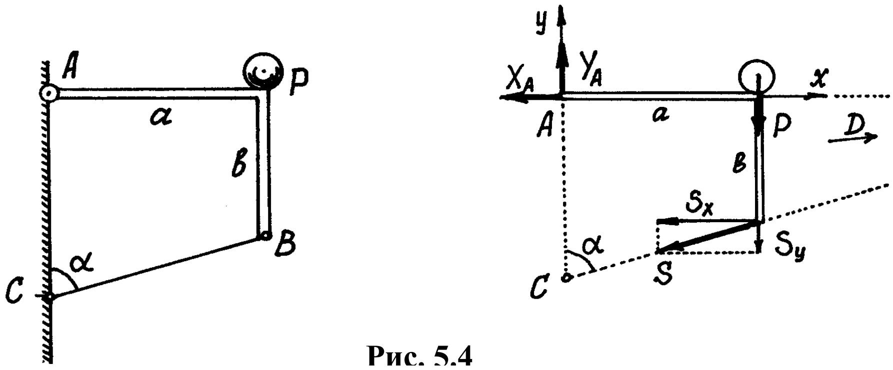


Рис. 5.4

Эти силы образуют систему сил, произвольно расположенных на плоскости.

Каким вариантом уравнений (5.12) нужно воспользоваться? Желательно составить такие уравнения, чтобы в них было по одной неизвестной силе. Поэтому попробуем воспользоваться III вариантом, составляя уравнения моментов относительно трех точек, точек пересечения линий действия *неизвестных* сил.

В нашей задаче это точка *A*, где приложены неизвестные $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$; точка *C*, где пересекаются линии действия неизвестных сил $\vec{Y}_A$ и $\vec{S}$; точка *D* – точка пересечения линий действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{S}$. Но, поскольку расстояния до точки *D* находятся не очень просто, воспользуемся II вариантом, составив уравнение проекций сил на ось *y* (на ось *x* проектировать нельзя, т.к. она перпендикулярна прямой *AC*).

И прежде чем составлять уравнения, сделаем еще одно полезное замечание. Если на расчетной схеме имеется сила, расположенная так, что плечо ее находится непросто, то при определении момента рекомендуется предварительно разложить вектор этой силы на две, более удобно направленные. В данной задаче разложим силу $\vec{S}$ на две: $\vec{S}_x$ и $\vec{S}_y$ (см. рис. 5.4) такие, что модули их $S_x = S\sin\alpha,\quad S_y = S\cos\alpha.$

Составляем уравнения: $\sum Y_i = 0; \qquad Y_A - P - S\cos\alpha = 0;$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -Pa - S_y a - S_x b = 0;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; \quad X_A \cdot AC - Pa = 0.$$

Из второго уравнения находим $S = -P\dfrac{a}{a\cos\alpha + b\sin\alpha}$. Из третьего уравнения

$$X_A = P\frac{a}{AC} = P\frac{a}{b + a\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Теперь из первого уравнения получим $Y_A = P + S\cos\alpha = P\left(1 - \dfrac{a}{a\cos\alpha + b\sin\alpha}\right).$

Распределённые силы

Ранее мы рассматривали действие на тело лишь сосредоточенных сил, сил приложенных к одной точке. Но можно привести ряд примеров, когда силы распределяются по всему объёму тела, по площади или по длине. Кстати, вес тела, сила тяжести, это тоже распределённая сила, распределённая по объёму тела, потому что на каждую точку его действует сила, её вес. А при решении задач мы вес тела показываем в виде сосредоточенной силы $\vec{P}$, равнодействующей всех сил, приложенной к центру тяжести.

Можно встретить силы распределённые по плоскости, по поверхности (например, снег, лежащий на крыше; давление газа или жидкости на поверхность сосуда). И силы, которые распределяются по линии.

Все эти распределённые силы характеризуются их интенсивностью – силой q, действующей на единицу объёма, площади или длины тела. Размерность интенсивности - $Н \cdot м^{-3}$, $Н \cdot м^{-2}$, $Н \cdot м^{-1}$, соответственно.

Действие таких сил на тело заменяем одной силой $\vec{Q}$, равнодействующей этих распределённых сил.

Выделим на расстоянии x участок линии длиной dx. На этом участке на тело действует элементарная сила $dQ = q \cdot dx$.

И, интегрируя по всей длине $AB = l$, получим

равнодействующую $Q = \int_0^l dQ = \int_0^l q\,dx.$ Значит,

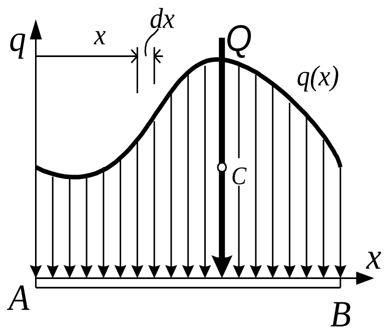


Рис.6.8

величина равнодействующей равна площади заключённой между линией $q = q(x)$ и осью x.

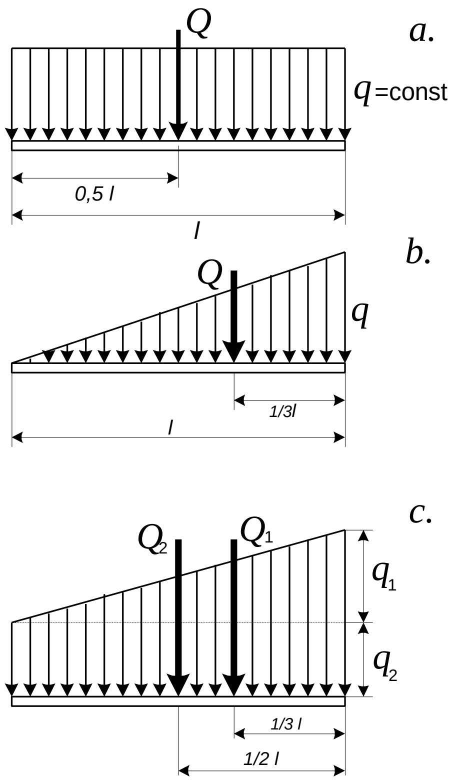
Точку приложения силы $\vec{Q}$ или, лучше, линию действия её, можно найти с помощью теоремы Вариньона (5.8).

Момент равнодействующей $M_A(Q) = Q{\cdot}x_c$, а сумма моментов элементарных сил dQ относительно той же точки A равна $\sum M_A(d\vec{Q}) = \int\limits_0^l dQ \cdot x.$ Приравняв их, получим $x_c = \frac{\int\limits_0^l dQ \cdot x}{Q}$, но по аналогичной формуле (6.4) определяется координата центра тяжести рассматриваемой площади. Значит, точка приложения силы $\vec{Q}$ к телу и линия действия её определяются центром тяжести этой площади.

Если распределение нагрузки определяется линейным законом, модуль равнодействующей $\vec{Q}$ и линия действия её находится довольно просто (рис.6.9,*a* и *b*).

А при распределении по закону трапеции (рис.6.9,*c*) её нужно разделить на треугольник и прямоугольник и находить соответственно две силы $Q_1 = \frac{1}{2}q_1 l$ è $Q_2 = q_2 l.$

Если сила распределена не по прямой линии, то равнодействующая находится немного сложнее.



Например, при давлении жидкости или газа на внутреннюю стенку трубы в каком-нибудь её сечении.

Найдём равнодействующую такой распределённой силы на часть стенки трубы, которая определена дугой с углом 2α (см. рис.6.10).

На участок дуги, определяемый углом $d\varphi$, действует элементарная сила $dQ = q{\cdot}dl = q{\cdot}R{\cdot}d\varphi$, где R– радиус дуги.

А на всю

дугу действует равнодействующая Q, равная сумме проекций всех элементарных сил на вертикальную ось симметрии, то есть

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ \cdot \cos\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} qR\cos\varphi \cdot d\varphi =$$

$$= qR\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2qR\sin\alpha.$$

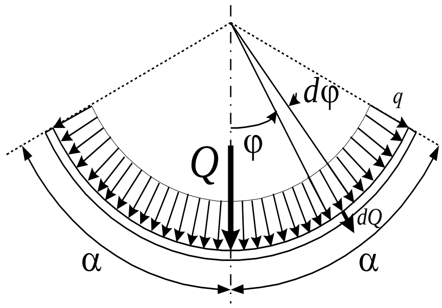


Рис. 6.10

Так на половину трубы действует сила (при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$), равная $Q = 2qR$.

Кинематики точки

Способы задания движения точки

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются механические движения материальных точек и тел с чисто геометрической точки зрения вне зависимости от действующих на них сил.

В кинематике решаются *две основные задачи*:

1. Установление математических способов задания движения точек и тел.

2. Определение по заданному закону движение всех основных кинематических характеристик таких, как траектория движения, скорость и ускорение точки, угловые скорости и угловые ускорения тел.

При движении тела его точки в общем случае могут двигаться по различным траекториям, например, при качении колеса по прямому рельсу центр колеса движется по прямой линии, а точки обода по циклоидам. Поэтому изучение этого раздела начнем с изучения движения точки, т.е. с кинематики точки.

Задать движение точки означает найти способ определения ее положения в пространстве в любой момент времени. К основным способам задания движения относятся: естественный, координатный и векторный.

Естественный способ задания движения точки. Чтобы определить положение точки естественным способом, должны быть известны (рис.8.1):

а) траектория движения точки М (линия, которую описывает в пространстве точка при своем движении);

б) начало отсчета криволинейной координаты S - точка О;

в) направление положительного отсчета криволинейной координаты (указывается стрелкой или знаком "+", "-");

г) закон изменения криволинейной координаты в зависимости от времени S = S (t).

В начале движения при t =0 точка М может находиться не в начале от-счета О, а на некотором расстоянии S_0 от него. Это положение точки M_0 будем называть начальным положением точки.

Отсюда следует, что S не пройденное расстояние точкой за время t , а расстояние от точки М до начала отсчета О .

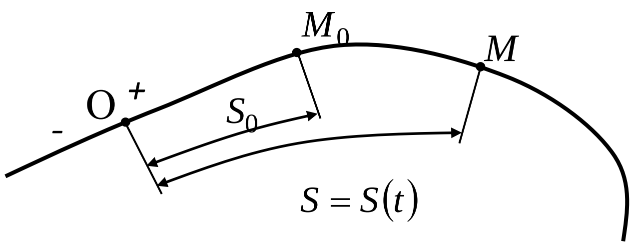


Рис. 8.1.

Пример. Точка движется по прямой линии по закону $S = 2t^2 - 3$(см).

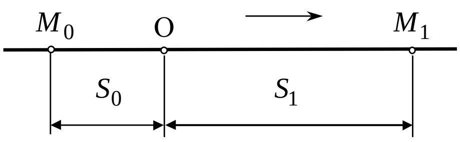


Рис.8.2

Определить положение точки через 2 с после начала движения.

Выбрав начало отсчета в точке О и положив в законе движения t =0, найдем расстояние $S_0 = -3$ см, определяющее начальное положение точки M_0 (рис. 8.2.). Через две секунды $S_1 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$ см и точка будет находиться в положении M_1 .

Очевидно, что за 2 с точка пройдет расстояние в 8 см.

Координатный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве можно определить с

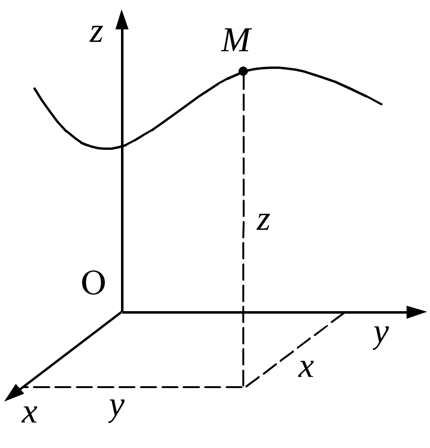


Рис. 8.3

помощью декартовой системы координат O*xyz* (рис.8.3). При движении точки ее координаты будут меняться. Если известны законы изменения координат

$$x = x(t);$$
$$y = y(t); \qquad (8.1)$$
$$z = z(t).$$

то можно в любой момент времени опре-делить положение точки.

Уравнения (8.1) называются уравне-ниями движения точки в декартовых ко-ординатах.

Если точка движется в плоскости или по прямой линии, то при соответствующем выборе координатной системы, ее движение может быть задано в первом случае двумя уравнениями, во втором - одним.

Уравнения (8.1) представляют собой одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме. Исключив из них параметр t (время), можно найти уравнение траектории в координатной форме.

Пример. Найти траекторию движения точки, если ее движение описывается уравнениями:

$$x = 3t^2 + 2;$$
$$y = 6t^2,$$

где *x, y* - выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Определим траекторию движения точки. Из второго уравнения находим $t^2 = \frac{y}{6}$. Подставив это значение в первое уравнение, получим

$$x = \frac{1}{2}y + 2 \qquad \text{или} \qquad 2x - y = 4.$$

Это уравнение прямой линии (рис.8.4).

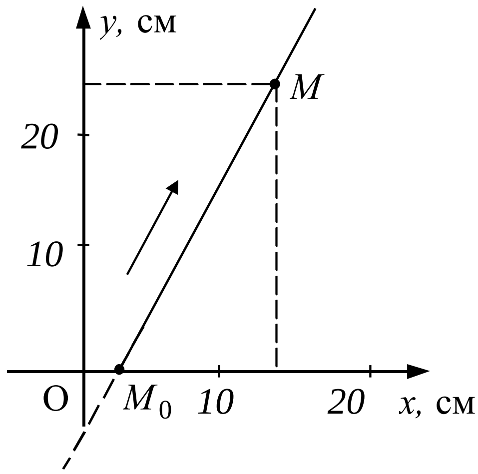


Рис. 8.4

При t =0 точка имеет координаты x_0=2, y_0=0. Из уравнения движения видно, что с течением времени координаты точки увеличиваются. Следовательно, точка движется вверх по прямой M_0M. Например, через две секунды точка будет иметь координаты x_2=14, y_2=24.

Векторный способ задания движения точки. Если провести вектор из некоторой неподвижной точки O в точку M (рис.8.5), то данный вектор будет определять положение точки M.

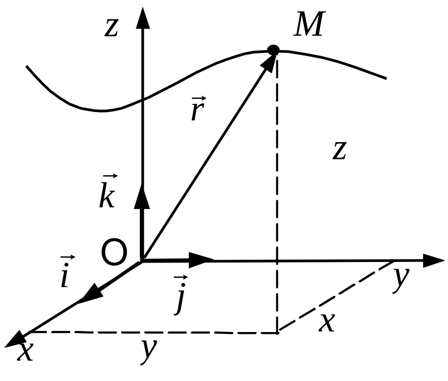


Рис. 8.5

Закон изменения этого вектора является векторным уравнением движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

При движении точки радиус-вектор будет менять свою величину (длину) и направление. Конец радиуса-вектора будет описывать некоторую кривую (траекторию точки М), которая называется годографом этого вектора.

Если начало декартовой системы координат O*xyz* поместить в точку О, то радиус-вектор

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где x(t), y(t), z(t) координаты точки М.

Эта формула устанавливает связь между координатным и векторным способами задания движения.

Лекция №5

План лекции

Определение скорости при векторном, координатном и способах задания движения точки. Скорость точки при естественном способе задания движения. Ускорение точки при векторном и координатном способах задания движения. Естественные оси координат Вектор кривизны, радиус кривизны траектории. Ускорение при естественном способе задания движения точки

Основная часть лекции

Скорость точки

Определение скорости точки при векторном способе задания движения.

Пусть точка движется по закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис.8.6). В момент t она находится в положении М, определяемом радиусом-вектором $\vec{r}$. Через время Δt точка займет положение М$_1$ и будет иметь радиус-вектор $\vec{r}_1$.

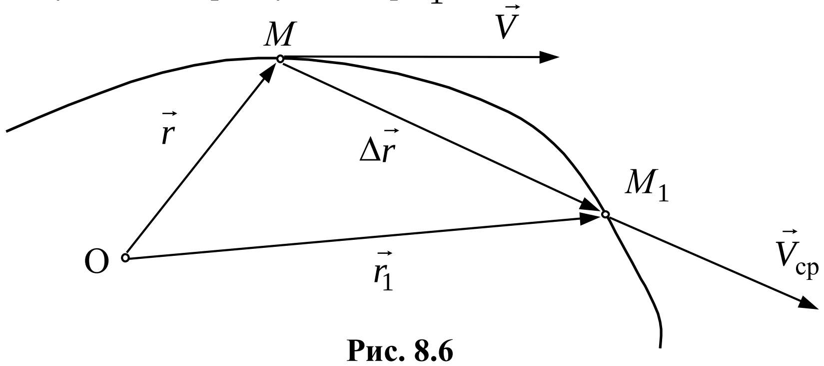


Рис. 8.6

Тогда средняя скорость точки М $\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{r}$ - приращение радиуса-вектора за промежуток времени. Δt Вектор средней скорости направлен так же, как вектор $\Delta\vec{r}$ (см. рис. 8.6).

Если $\Delta t \to 0$, то средняя скорость $\vec{V}_{\text{ср}}$ будет стремиться к скорости точки в момент времени t. В пределе будем иметь

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Скорость точки в данный момент времени равна производной от радиуса-вектора этой точки по времени.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так как предельным направлением вектора $\Delta\vec{r}$ является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Так как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \qquad (8.2)$$

Вектор скорости, как и всякий вектор, можно разложить на составляющие по осям координат

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}. \qquad (8.3)$$

Сравнивая (8.2) и (8.3), замечаем, что *проекции скорости точки на координатные оси.*

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Зная проекции скорости точки на оси, можно определить ее модуль и направление по формулам

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{V}; \quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{V}; \quad \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{V},$$

где α, β, γ - углы между вектором скорости и положительными направлениями осей соответственно *x, y, z*.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Пусть за время Δt радиус-вектор точки получил приращение $\Delta\vec{r}$, а криволинейная координата приращение ΔS. Тогда $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Умножив и разделив правую часть на ΔS, разобьем предел на два предела:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{r}}{dS}.$$

Модуль вектора $d\vec{r}/dS$ равен единице как предел отношения длины бесконечно малой хорды к длине стягиваемой ею дуги. Поскольку предельное положение хорды совпадает с направлением касательной к кривой в данной точке, то вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau}_0$ представляет собой единичный вектор касательный к кривой в данной точке, направленный в сторону положительного отсчета координаты S.

Следовательно, *вектор скорости точки*

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}_0 = \dot{S}\vec{\tau}_0 = V_\tau \vec{\tau}_0, \tag{8.4}$$

где $\dot{S} = V_\tau$ - *проекция вектора скорости точки на касательную ось к ее траектории*.

Вектор скорости, как было установлено ранее, направляется по касательной к траектории движения. На ось τ он проектируется в натуральную величину, поэтому дальше индекс τ будем опускать, т. е. будет считать, что $V_\tau = V$.

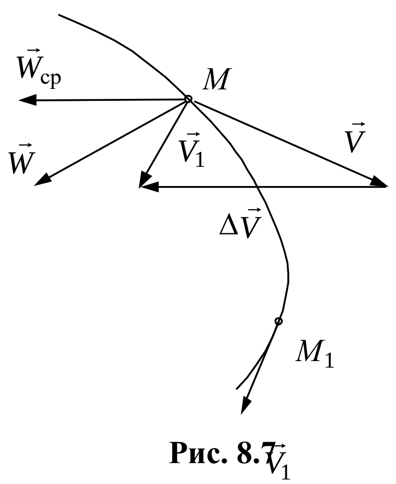


Рис. 8.7

Ускорение точки

Определение ускорения точки при векторном способе задания движения

Пусть в момент t скорость точки равна $\vec{V}$, а при $t + \Delta t$ стала равной $\vec{V}_1$. Изменение скорости за время Δt будет $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Тогда среднее ускорение $\vec{W}_{ср} = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$. Как видно из этой формулы, вектор $\vec{W}_{\text{ср}}$ направляется так же, как вектор $\Delta\vec{V}$ (рис.8.7).

Ускорение точки в момент t находим как предельное значение $\vec{W}_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{W}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.5)$$

Ускорение точки есть первая производная по времени от вектора скорости или вторая производная от радиуса-вектора точки.

Определение ускорения точки при координатном способе задания движения

Так как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то

$$\vec{W} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{W} = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}.$$

Сравнивая последние два равенства, замечаем:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \; W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \; W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z},$$

т. е. *проекции ускорения точки на оси координат* равны вторым производным по времени от соответствующих уравнений движения.

Если известны проекции вектора ускорения, можно найти его модуль:

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

и направление

$$\cos\alpha = \frac{\ddot{x}}{W}; \; \cos\beta = \frac{\ddot{y}}{W}; \; \cos\gamma = \frac{\ddot{z}}{W},$$

где α, β, γ - углы между вектором ускорения $\vec{W}$ и положительными направлениями осей x,y,z соответственно.

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 3t, \; y = -4t^2 + 10$, где x, y - выражены в сантиметрах, а t - в секундах. Определить ускорение точки. Исключив время

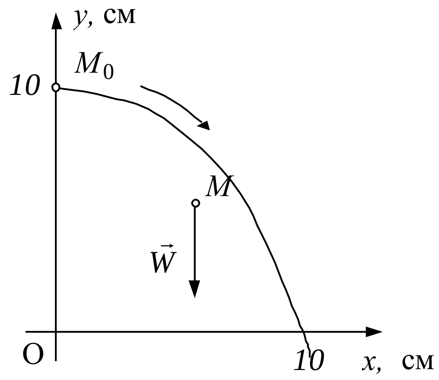


Рис. 8.8

t, получим уравнение траектории: $y=-\frac{4}{9}x^2+10$. Это уравнение параболы (рис.8.8).

Находим проекции вектора ускорения на оси

$$W_x=\ddot{x}=0,\ W_y=\ddot{y}=-8 \text{ см/с}^2.$$

Тогда модуль ускорения W=8 см/с^2. Так как проекция вектора ускорения на ось x равна нулю, а на ось y отрицательна, то $\vec{W}$ направлен вертикально вниз.

Определение ускорения точки при естественном способе задания движения.

Прежде чем приступить к определению ускорения, познакомимся с некоторыми понятиями из дифференциальной геометрии.

Естественная система координат

Пусть имеется некоторая пространственная кривая (рис.8.9).

Возьмем на этой кривой две близкие точки М и M_1. Проведем в этих точках касательные τ и τ_1. Через касательную τ проведем плоскость, параллельную касательной τ_1.

Если точку M_1 приближать к точке М, плоскость, оставаясь параллельной касательной τ_1, будет поворачиваться вокруг τ. И в момент, когда точка M_1 совпадает с точкой М, плоскость займет определенное положение I. Плоскость I называется *соприкасающейся плоскостью* кривой в точке М. Если кривая плоская, то вся кривая будет лежать в соприкасающейся плоскости.

Проведем, затем, плоскость II через точку М, перпендикулярную касательной τ. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью*. Линия пересечения соприка-сающейся плоскости и нормальной плоскости называется *главной нормалью* кривой в точке М. Обозначим ее n. Нормаль, перпендикулярная главной нормали n и касательной τ, называется *бинормалью* b.

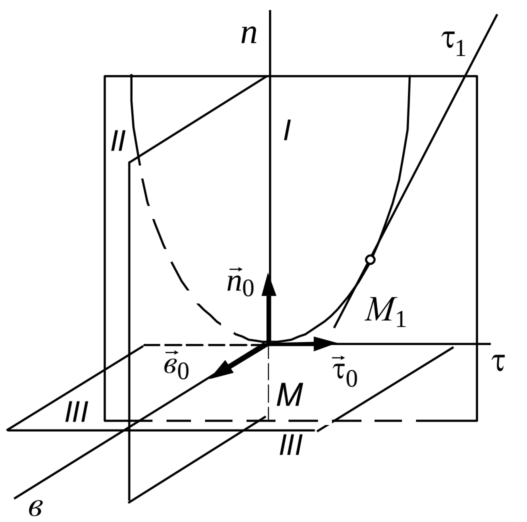


Рис. 8.9

Плоскость III, проведенная через b и τ, является *касательной плоскостью* к кривой в точке М.

Таким образом, мы получим систему осей τ, *n*, *b*, которая называется естественной системой координат, где $\vec{\tau}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0$ ее орты.

Кривизна и радиус кривизны линии

Если точка М движется по кривой, то эти оси также будут двигаться вместе с точкой, меняя свое направление в пространстве.

Введем еще одно понятие - понятие о кривизне и радиусе кривизны линии. Возьмем на кривой две близкие точки М и M_1. (рис.8.10) и проведем в этих точках касательные τ и τ_1. Угол между этими касательными называется *углом смежности* $\Delta\varphi$.
Предел этого отношения при $\Delta\sigma \to 0$ называется *кривизной линии в точке* М:

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0} K_{\text{ср}} = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}.$$

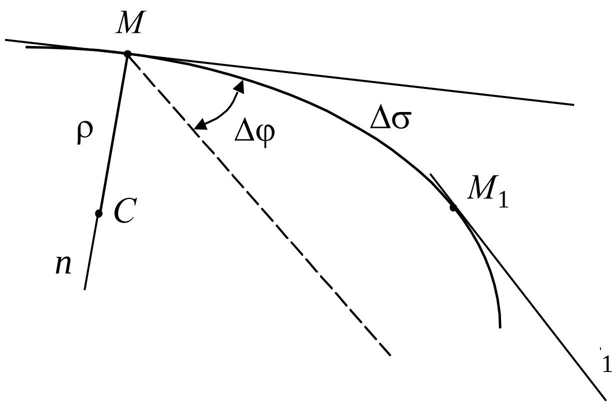


Рис. 8.10

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны линии в точке* М $\rho = \dfrac{1}{K}$.

Если отложить ρ из точки М по главной нормали в сторону вогнутости линии, получим точку С, которая называется *центром кривизны*.

Теперь можно приступить к определению ускорения точки. Пусть точка М движется по некоторой пространственной линии и имеет скорость $\vec{V}$ (рис.8.11).

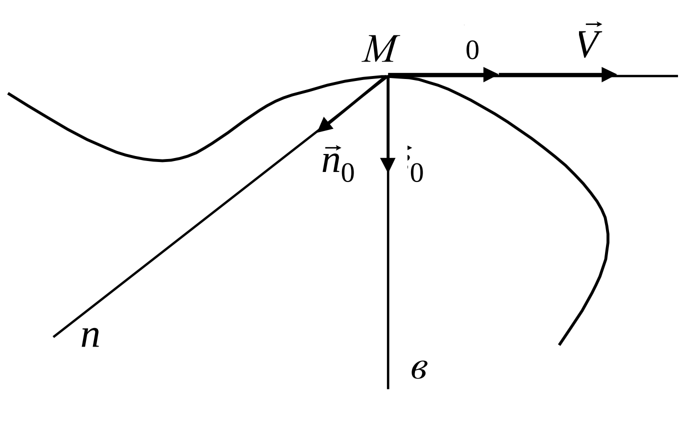


Рис. 8.11

Подставим выражение вектора скорости (8.4) в формулу (8.5):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{\tau}_0) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}_0 + V\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} \ .$$

Очевидно, ускорение состоит из двух составляющих. Первая составляющая направлена вдоль касательной τ в сторону возрастания координаты S при

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\dot{S}}{dt} = \ddot{S} > 0$$

и в противоположную сторону при $\ddot{S} < 0$. Чтобы определить модуль и направление второго слагаемого, рассмотрим производную $\frac{d\vec{\tau}_0}{dt}$. Поскольку $\vec{\tau}_0$ является вектором с постоянным модулем, то его производная по времени представляет собой вектор, перпендикулярный $\vec{\tau}_0$ и равный:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{n}_0 ,$$

где $\vec{n}_0$ - единичный вектор главной нормали к траектории точки.

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{dS}{dt} K = \frac{\dot{S}}{\rho}, \text{ то } \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{\dot{S}}{\rho}\vec{n}_0 = \frac{V}{\rho}\vec{n}_0 .$$

Таким образом, ускорение точки

$$\vec{W} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}_0 + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}_0 .$$

Итак, ускорение точки состоит из двух составляющих. Одна составляющая направлена по касательной к траектории и называется *касательным ускорением*. Его проекция на ось τ

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} .$$

Вторая составляющая направлена по главной нормали в сторону вогнутости траектории, называется *нормальным ускорением*, а его модуль

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} .$$

При естественном способе задания движения ускорение точки находим как векторную сумму двух взаимно перпендикулярных векторов касательного и нормального ускорений

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n.$$

Модуль ускорения $W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$.

Частные случаи:

- точка движется по прямой линии с переменной скоростью.

Ускорение точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} \neq 0; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0; \quad \vec{W} = \vec{W}_\tau;$$

- точка движется по кривой с постоянной по величине скоростью.

Ускорение точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = 0; \ \mathrm{W}_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0; \ \vec{W} = \vec{W}_n.$$

В первом случае скорость точки изменялась только по величине, и ее ускорение равно касательному ускорению. Во втором случае скорость точки менялась по направлению, и ускорение равно нормальному ускорению. Поэтому касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине, а нормальное - по направлению.

Пример. $S = t^2 - 5t + 10$ м. Определить ускорение точки при t_1=2с и t_2=3с (рис.8.12).

Скорость точки $V = \dfrac{dS}{dt} = 2t - 5$. При t_1 =2с V_1= -1м/с При t_2 =3с V_2=1м/с. Следовательно, при t_1 =2с скорость точки направлена по касательной в сторону отрицательных значений криволинейных координат, а при t_2=3с - в сторону положительных значений координат.

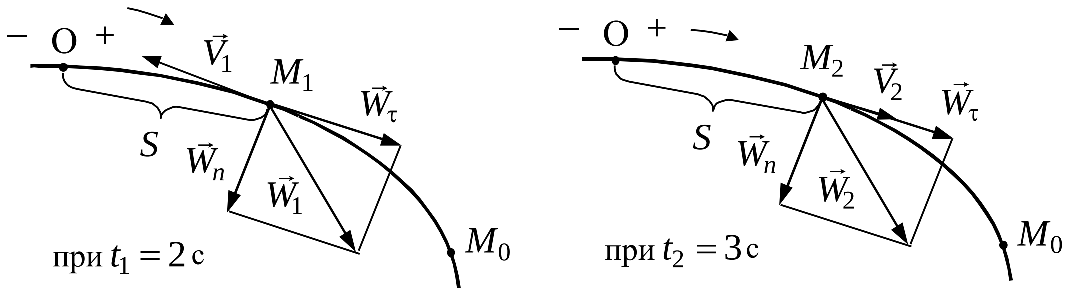


Рис. 8.12

Величина касательного ускорения точки $W_\tau = \dfrac{dV}{dt}$=2 м/с (постоянная, не зависит от времени). Так как $W_\tau > 0$, вектор $\vec{W}_\tau$ направлен по касательной в сторону положительного направления оси τ.

Нормальное ускорение:

$$\text{при } t_1=2\text{с } W_n=\frac{V_1^2}{R}=0{,}2 \text{ м/с}^2; \text{ при } t_2=3\text{с } W_n=\frac{V_2^2}{R}=0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Так как составляющие равны по модулю, то ускорения точки в заданные моменты времени будут равны

$$W_1=W_2=\sqrt{W_\tau^2+W_n^2}\cong 2 \text{ м/с}.$$

При $t_1=2$с направление касательного ускорения противоположно скорости, а при $t_2=3$с оба вектора имеют одинаковое направление. Следовательно, в момент $t_1=2$с движение точки замедленное, в момент $t_2=3$с – ускоренное.

Лекция №6

План лекции

Простейшие виды движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Уравнения вращения. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной оси. Векторные выражения скорости, касательного и нормального ускорения точки вращающегося тела.

Основная часть лекции

Простейшие виды движения твердого тела

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращательное.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным *называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во время движения параллельной своему начальному положению.*

Пусть твердое тело движется поступательно относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$. Свяжем жестко с телом подвижную систему координат *Axyz*. Пусть $\vec{r}_A$ - радиус-вектор точки A, $\vec{r}_B$ - радиус-вектор точки B, а $\vec{\rho}$ - радиус-вектор, определяющий положение точки B в подвижной системе координат (рис.9.1).

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и оно движется поступательно, то $\vec{\rho} = const$. Из рисунка следует

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho} \tag{9.1}$$

Пусть в момент времени t тело занимало положение I, а в момент $(t + \Delta t)$ - положение II. Тогда $\Delta\vec{r}_A$ будет вектором перемещения точки A, а $\Delta\vec{r}_B$ - вектором перемещения точки B за промежуток времени Δt.

Поскольку $\vec{\rho} = \overrightarrow{const}$, то отрезки A_0B_0 и AB равны и параллельны и, следовательно, фигура A_0B_0BA - параллелограмм. Таким образом, $\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$.

Из равенства (9. 1.) и условия постоянства вектора $\vec{\rho}$ следует, что

траектории всех точек тела, движущегося поступательно, одинаковы.

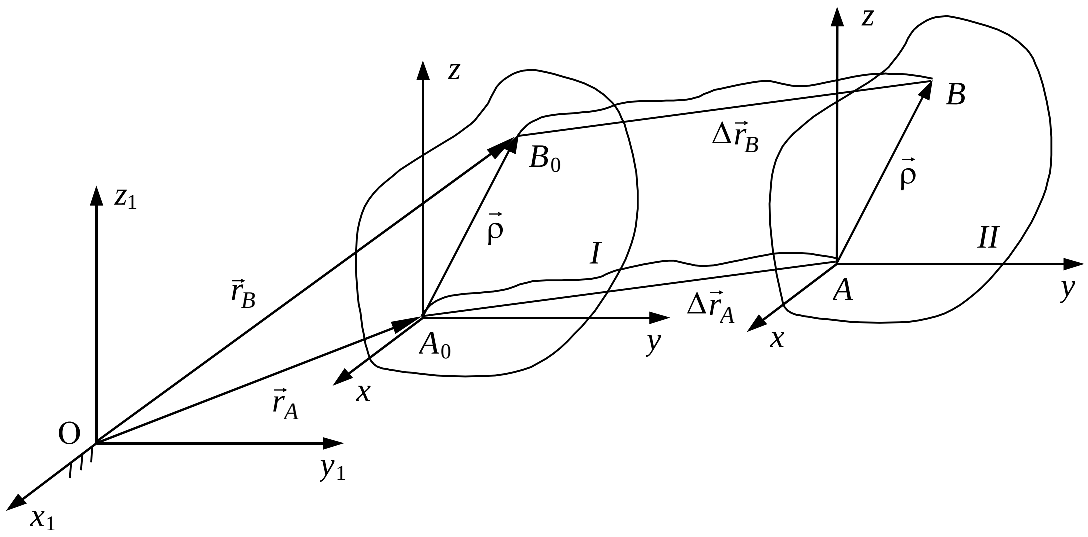


Рис. 9.1

Заметим, что траекториями поступательно движущегося тела могут быть самые разнообразные кривые. Например, кузов автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямые линии. А спарник AB (рис. 9.2) при вращении OA и O_1B $(OA = O_1B)$ также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному положению). Точки же спарника движутся при этом по окружностям относительно неподвижной системы отсчета.

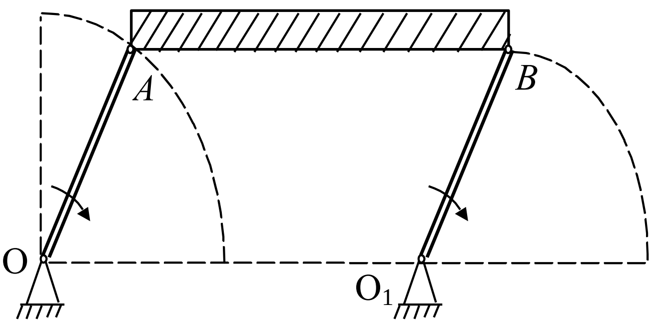


Рис. 9.2

Так как две произвольные точки тела за время Δt имеют геометрически равные перемещения, то

при поступательном движении все точки тела имеют в данный момент времени равные скорости и ускорения

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B, \quad \vec{W}_A = \vec{W}_B.$$

Поэтому для изучения поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение одной (любой) его точки (например центра тяжести C). В соответствии с этим уравнения

$$x_C = x_C(t);$$
$$y_C = y_C(t);$$
$$z_C = z_C(t)$$

будут характеризовать не только движение точки C, но и движение тела в целом.

Вращательное движение твердого тела

Вращательным называется движение твердого тела, при котором во все время движения остаются неподвижными все его точки, расположенные на некоторой прямой, называемой осью вращения. Каждая точка вращающегося тела, кроме точек, расположенных на оси вращения, движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения и имеющей центр на оси.

Положение вращающегося тела может быть определено взятым с соответствующим знаком углом φ между двумя полуплоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых I - неподвижна, другая II, жестко связана с телом (рис. 9.3). Для определения знака φ совмещают с осью вращения координатную ось A_z и считают, что $\varphi > 0$, если для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси A_z угол φ виден отложенным от неподвижной полуплоскости против часовой стрелки.

Движение, вращающегося вокруг неподвижной оси тела в любой момент времени t определяется уравнением

$$\varphi = \varphi(t),$$

которое называется уравнением вращения. Угол поворота измеряется в радианах: $1 рад = 57^{\circ}17'44''$.

Главными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость и угловое ускорение.

Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угол φ изменится на величину $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. *Средняя угловая скорость* тела за данный про-межуток времени $\omega_{ср} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Предел, к которому стремится $\omega_{ср}$ при Δt, стремящемся к нулю, называется угловой скоростью тела в данный момент времени t, или просто *угловой скоростью*.

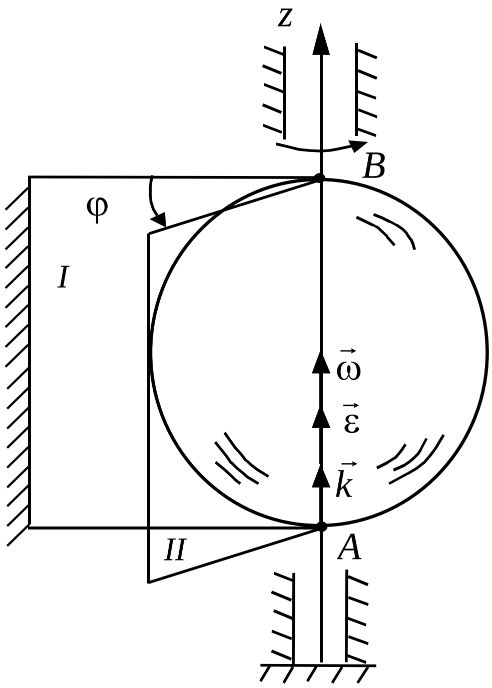


Рис. 9.3

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Знак угловой скорости определяется знаком приращения $\Delta\varphi$, если $\Delta\varphi > 0$, то $\omega > 0$, и наоборот.

Поскольку угол φ измеряется в радианах, а время в секундах, то единица измерения угловой скорости радиан в секунду (рад/с).

В технических расчетах часто вместо угловой скорости пользуются понятием числа оборотов в минуту n. Зависимость между ω и n определяется формулой $\omega = \dfrac{2\pi n}{60} = \dfrac{\pi n}{30}$.

Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Величина $\varepsilon_{cp} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется *средним угловым ускорением* за промежуток времени Δt. Предел, к которому стремится ε_{cp} при Δt, стремящемся к нулю, называется *угловым ускорением* в данный момент времени t, или просто угловым ускорением. $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$. Единица измерения углового ускорения радиан на секунду в квадрате. Если $\Delta\omega > 0$, то $\varepsilon > 0$, если $\Delta\omega < 0$, то $\varepsilon < 0$. В том случае, когда знаки угловой скорости ω и углового ускорения ε совпадают ($\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} > 0$), вращательное движение является ускоренным, а когда противоположны ($\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} < 0$) - замедленным.

Вектором угловой скорости твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, будем называть вектор, равный производной угла поворота тела по времени и направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k} = \omega\,\vec{k}.$$

Вектором углового ускорения будем называть вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k} = \varepsilon\,\vec{k}.$$

Из формулы видно, что вектор $\vec{\varepsilon}$ расположен как и вектор $\vec{\omega}$ на оси вращения. Величины ω и ε представляют проекции векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ на ось Oz.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Как уже раньше отмечалось, траекторией любой точки M вращающегося тела (кроме точек, расположенных на оси вращения) является дуга окружности, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Радиус этой окружности равен расстоянию точки до оси вращения $O_1M = R$ (рис. 9.4)

Если отсчитывать дуговую координату S точки M от ее начального положения M_0 в направлении возрастания угла φ, то закон движения точки M по дуге окружности радиуса R будет иметь вид

$$S(t) = R \cdot \varphi(t).$$

В этом случае проекция вектора скорости на касательную определяется по формуле $V = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R\varphi) = R\dfrac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi};\quad \vec{V} = R\dot{\varphi}\,\vec{\tau}.$ Величина скорости точки V определяется по формуле $V = \omega R.$

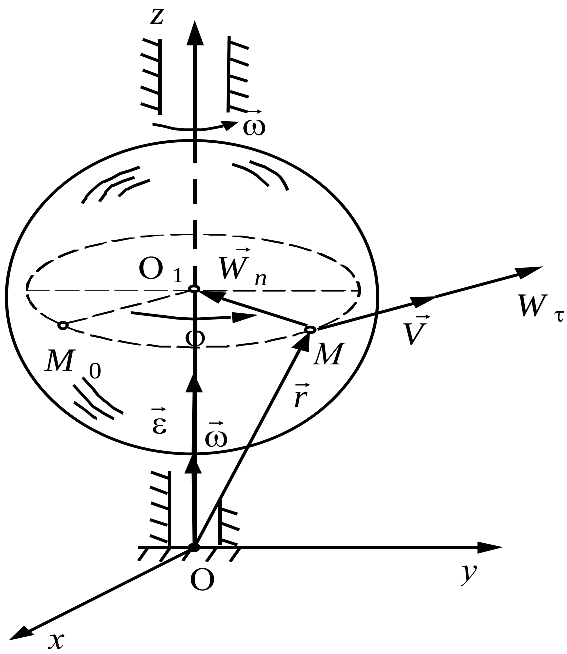


Рис. 9.4

Найдем касательное, нормальное и абсолютное ускорения точки M. Как известно из кинематики, точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\ddot{\varphi} = \varepsilon R; \quad \vec{W}_\tau = R\ddot{\varphi}\vec{\tau};$$

$$W_n = \frac{V^2}{R} = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2; \qquad \vec{W}_n = \dot{\varphi}^2 R\vec{n};$$

$$\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau .$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории в сторону вектора скорости $\vec{V}$, если движение ускоренное, и в противоположную, если замедленное. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения.

Модуль абсолютного ускорения точки M будет равен

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R + \varepsilon^2 R^2};$$
$$W = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Векторные выражения скорости и ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной оси

Докажем, что скорость $\vec{V}$ любой точки M (рис.9.5) можно представить как векторное произведение

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (9.2)$$

Модуль векторного произведения равен $V = \omega r \sin\alpha$, а $r\sin\alpha = R$ и $V = \omega R$. Направление скорости $\vec{V}$ совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$ (см. рис.9.5).

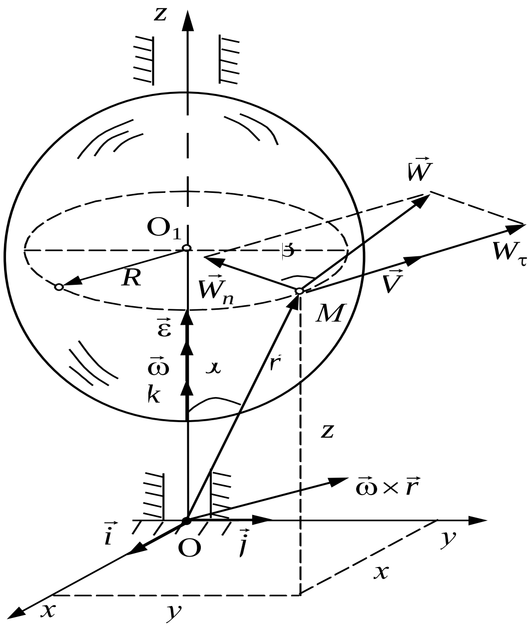


Рис. 9.5

Так как $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ и вектор $\vec{r}$ изменяется со временем только по направлению, то $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Пусть ось Oz в системе O*xyz* совпадает с осью вращения, тогда имеем

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

или $V_x = -\omega_z y, \quad V_y = \omega_z x, \quad V_z = 0.$

Последние равенства дают проекции вектора скорости точки $M(x, y, z)$ вращающегося твердого тела на выбранные оси координат.

Выражение для абсолютного ускорения $\vec{W}$ можно получить, дифференцируя равенство (9.2):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так, как

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V};$$

то

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки и будет совпадать по направлению с вектором скорости, если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ сонаправлены, и противоположен $\vec{V}$, если $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ направлены в противоположные стороны. Эта составляющая ускорения называется вектором касательного ускорения, т.е. $\vec{W}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$. Величина этого ускорения равна

$$W_\tau = \varepsilon R.$$

Векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{V}$ представляет собой вектор, расположенный в плоскости, перпендикулярной оси вращения и направленный по радиусу R от точки M к точке O_1, т.е. по нормали к траектории. Величина этого ускорения равна $W_n = \omega V \sin 90^o = \omega V = \omega^2 R$. Вектор $\vec{W}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}$ как по величине, так и по направлению выражает собой нормальное ускорение. Учитывая, что $\vec{W}_n \perp \vec{W}_\tau$, модуль абсолютного ускорения точки M будет

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Направление $\vec{W}$ определяется углом β

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{W_\tau}{W_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}.$$

Лекция №7

План лекции

Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение плоскопараллельного движения твердого тела. Движение плоской фигуры ее плоскости. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Уравнения движения плоской фигуры. Теорема о скорости точек плоской фигуры. Свойства скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой. Мгновенный центр скоростей. Способы определения положения мгновенного центра скоростей плоской фигуры. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Основная часть лекции

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Уравнения плоскопараллельного движения

Среди разнообразных движений твердого тела одним из самым распространенным в технике является движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной (реальной или воображаемой) плоскости. Такой вид движения в механике называется *плоскопараллельным*, или *плоским*. Простейшим примером является перемещение книги по поверхности стола: все точки тела (книги) движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости (крышке стола).

Проанализируем произвольное плоскопараллельное движение твердого тела, определим его особенности и установим основные расчетные формулы. Пусть все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости Oxy (рис. 10.1,а).

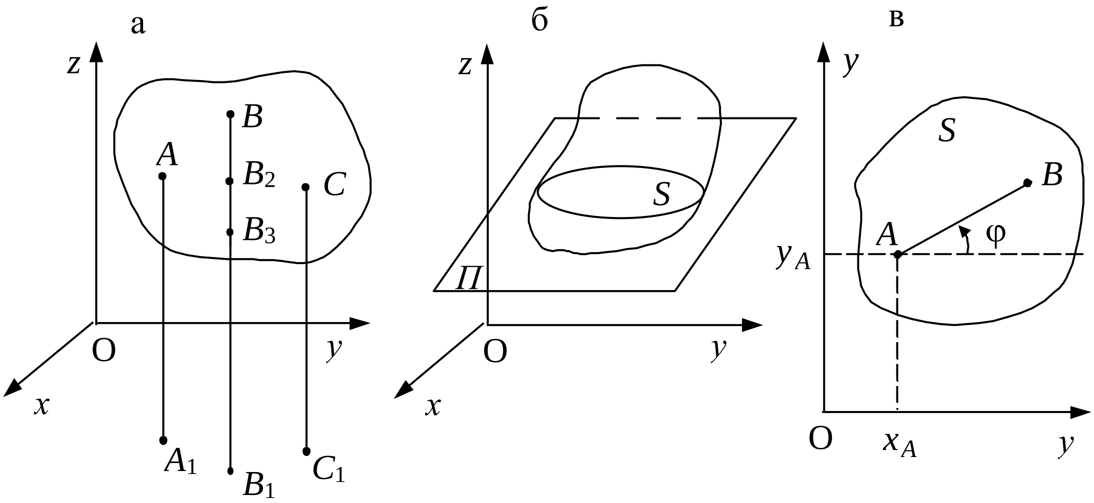


Рис. 10.1

Тогда, согласно определению, расстояния от произвольных точек тела A, B, C до плоскости Оxy остаются во все время движения неизменными: $AA_1 = \text{const}, BB_1 = \text{const}, CC_1 = \text{const}$. Это говорит о том, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 движутся поступательно, и точки тела, расположенные на одном перпендикуляре к плоскости Оxy (точки B_1, B_2, B_3), будут описывать одинаковые траектории, иметь одинаковые скорости и ускорения. Следовательно, задачу изучения движения тела в трехмерном пространстве можно заменить задачей исследования движения плоской фигуры S, полученной в результате сечения тела плоскостью $\Pi \parallel \text{О}xy$, в ее плоскости Π (рис. 10.1,б). По известному движению этой фигуры можно будет судить о движении твердого тела в целом. Далее положение плоской фигуры в ее плоскости определяется положением двух любых ее точек или прямой, принадлежащей этой фигуре. Поэтому положение плоской фигуры относительно опорной системы координат Оxy однозначно определяется заданием трех величин координат x_A, y_A точки A и угла φ (рис. 10.1,в). Следовательно, функциональные зависимости

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t)$$

являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела. Так как число уравнений три, то в общем случае тело имеет три степени свободы. В частных случаях тело, участвующее в плоскопараллельном движении, может иметь две или одну степени свободы.

Распределение скоростей при плоскопараллельном движении

Пусть $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ радиусы-векторы произвольных точек плоской фигуры A и B, проведенные из некоторого центра О. Из рис. 10.2, а следует, что $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$. Продифференцировав это равенство во времени, запишем $d\vec{r}_B / dt = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$. Здесь $\dot{\vec{r}}_B = \vec{V}_B$ - скорость точки B, $\dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A$ - скорость точки A и $\dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{V}_{BA}$. Поскольку $|\vec{r}_{BA}| = \text{const}$, то $\dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{BA}$.

Вектор $\vec{V}_{BA}$ называется вращательной скоростью точки B вокруг точки A, которую будем считать полюсом, а $\vec{\omega}_A$ - угловая скорость этого вращательного движения. В силу определения плоскопараллельного движения векторы $\vec{V}_B, \vec{V}_A$ и $\vec{V}_{BA}$ лежат в плоскости движущейся плоской фигуры, а $\vec{\omega}_A$ перпендикулярен этой плоскости. Выберем три произвольные точки плоской фигуры A, B и C (рис. 10.2,б). В силу полученного выше векторного равенства имеем $\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{CA}$. Аналогично, приняв за полюс точку B, пишем $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{CB}$ или $\vec{V}_c = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{CB}$. Учитывая, что $\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{CB}$ и вычитая из предпоследнего равенства последнее, имеем $\left(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B\right) \times \vec{r}_{CB} = 0$. Очевидно, что уравнению удовлетворяет только условие $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$. Последовательно присоединяя к трем рассматриваемым точкам другие, получим, что это условие распространяется на любые точки плоской фигуры $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}_C = \ldots = \vec{\omega}$. Следовательно, $\vec{\omega}$ является угловой скоростью плоской фигуры.

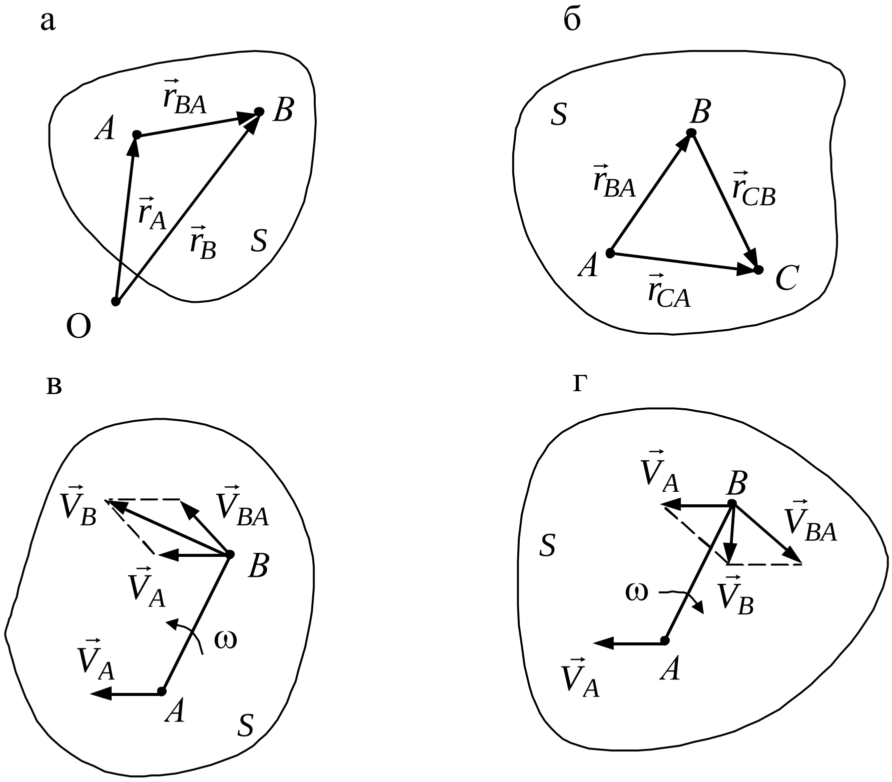


Рис. 10.2

Итак, *формула распределения скоростей* точек твердого тела для точек плоской фигуры A и B имеет вид

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \tag{10.1}$$

Вращательная скорость точки B вокруг полюса перпендикулярна $\overrightarrow{AB}$ и ее модуль равен $V_{BA} = \omega AB$. На рис. 10.2, в, г показано как, зная скорость точки A и угловую скорость ω, можно найти скорость точки B.

> Скорость любой точки плоской фигуры равна векторной сумме скорости полюса и скорости исследуемой точки при вращении фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через полюс.

Таким образом, плоскопараллельное движение можно рассматривать как наложение двух движений: поступательного, зависящего от выбора полюса, и вращательного, в котором угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Свойства скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой:

- проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой (рис. 10.3,а);
- концы векторов скоростей прямолинейного отрезка расположены на одной прямой (рис. 10.3,б);
- если известна скорость одной точки плоской фигуры, то можно построить годограф возможных скоростей другой точки (рис.10,в), которые полезны для изучения плоскопараллельного движения.

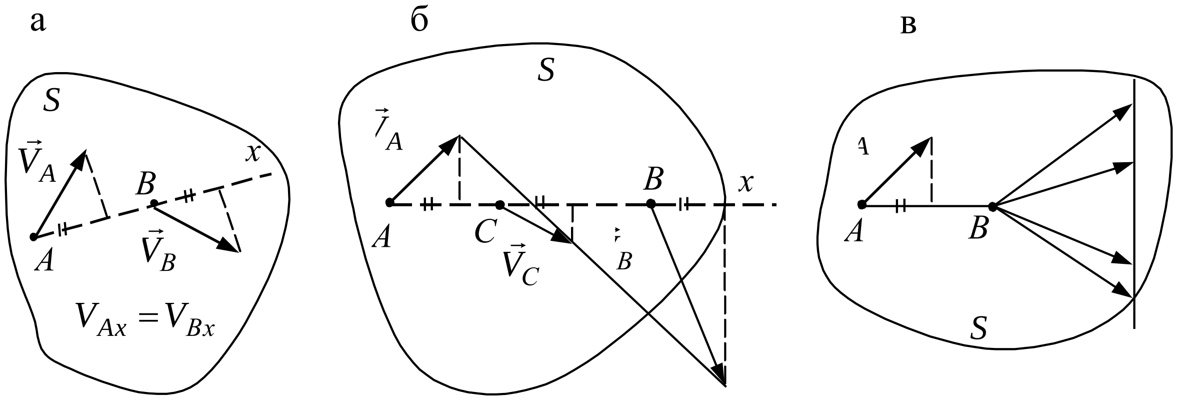


Рис. 10.3

Мгновенный центр скоростей

Значительного упрощения в понимании картины распределения скоростей при плоскопараллельном движении твердого тела можно получить, если в качестве полюса выбрать точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется движущаяся точка, проходящая в каждый момент времени через точку тела (плоской фигуры), скорость которой в этот момент равна нулю.

> *Теорема*. Во всяком непоступательном движении плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент существует точка, скорость которой в этот момент обращается в нуль и эта точка будет единственной.

Доказательство. Пусть в некоторый момент времени $\vec{\omega}$ - угловая скорость плоской фигуры, а $\vec{V}_A$ - скорость ее точки, которую считаем известной (рис. 10.4, а).

Выполним геометрическое построение: из точки A проведем прямую AL в направление вектора $\vec{V}_A$ и повернем ее на угол $\pi/2$ в сторону вращения плоской фигуры. На полученном луче отложим отрезок $AC_V = V_A/\omega$. Для точки C_V будем иметь $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + \vec{V}_{C_V A}$ Вектор $\vec{V}_{C_V A}$ направлен противоположно $\vec{V}_A$. Его модуль равен $V_{C_V A} = \omega \cdot AC_V$. Следовательно, $\vec{V}_{C_V A} = -\vec{V}_A$ и $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A - \vec{V}_A = 0$, т.е. точка C_V является МЦС. Совершенно очевидно, что эта точка единственная. Действительно, если, например, точка C также мгновенный центр скоростей, то приняв ее за полюс, получим скорость точки C_V $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CC_V} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CC_V} \neq 0$, что противоречит доказанному выше.

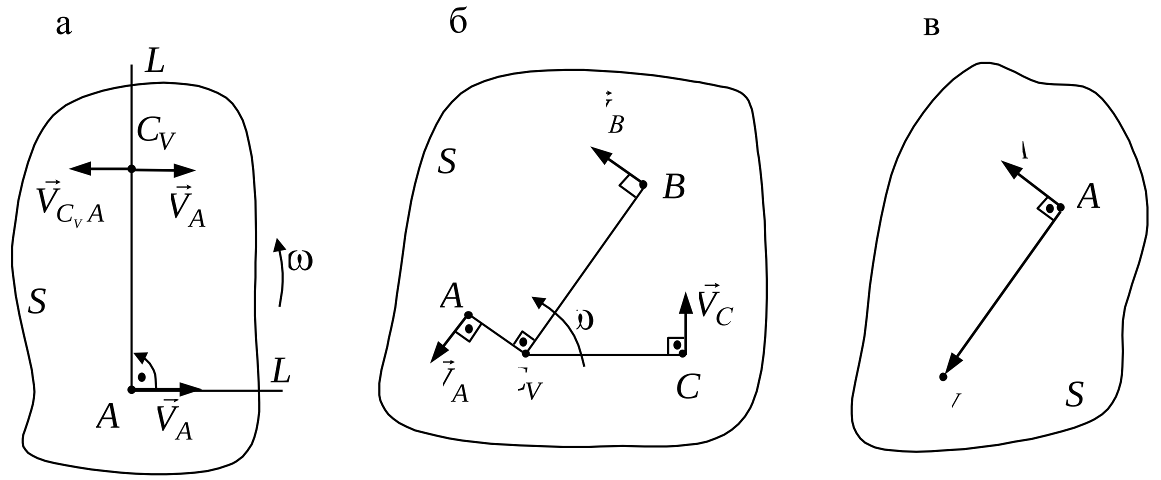
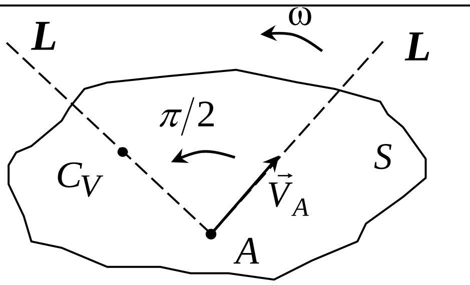
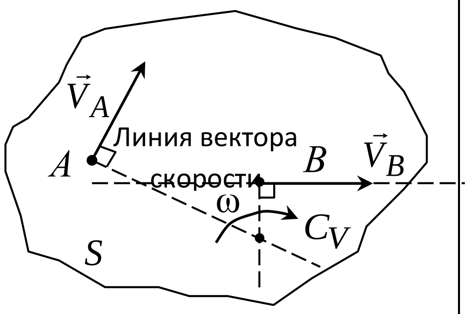


Рис. 10.4

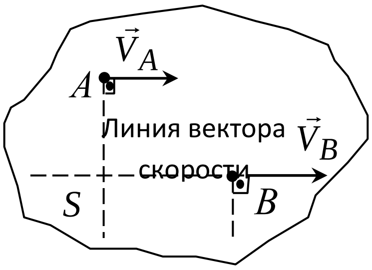
Теперь, принимая за полюс МЦС, будем иметь для любых точек плоской фигуры $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Отсюда следует, что распределение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении в каждый момент точно такое же, как и при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет прямая, проходящая через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения, которая называется *мгновенной осью вращения тела* (рис. 10.4, б). Другими словами, в каждый момент времени движение представляет собой вращение вокруг мгновенной оси. Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему эту точку с МЦС, и направлена в сторону вращения фигуры. Можно показать, что радиус-вектор точки C_V, проведенный из полюса A, определяется по формуле $\vec{r}_{AC_V} = \vec{\omega} \times \vec{V}_A \big/ \omega^2$ (рис. 10.4,в).

Различные способы определения положения мгновенного центра скоростей показаны в табл. 1.

Таблица 1

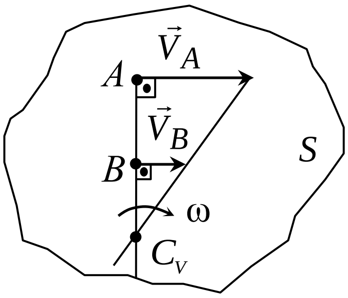
Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
Величина, и направле-ние скоростей какой – либо точки плоской фигуры и угловая скорость		$AC_V = \dfrac{V_A}{\omega}$
Величина и направление скорости одной точки и линии вектора скорости другой точки плоской фигуры $\|\|$ – $\vec{V}_A$ $\vec{V}_B$		$\dfrac{V_A}{AC_V} = \dfrac{V_B}{BC_V} = \omega$

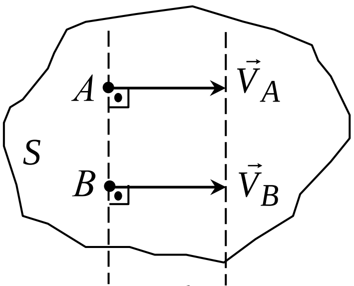
Продолжение табл. 1

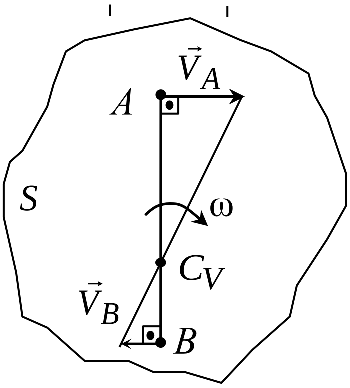
<table>
<tr><th>Известные параметры</th><th>Способы нахождения МЦС</th><th>Расчетная формула</th></tr>
<tr><td>– $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$</td><td>
</td><td>$V_A = V_B, \quad \omega = 0$</td></tr>
<tr><td>Величины и направления скоростей двух точек плоской фигуры, точки расположены на прямой, перпендикулярной скоростям

скорости направлены в одну сторону и неравны

скорости направлены в одну сторону и равны

скорости направлены в разные сторо-ны</td><td>

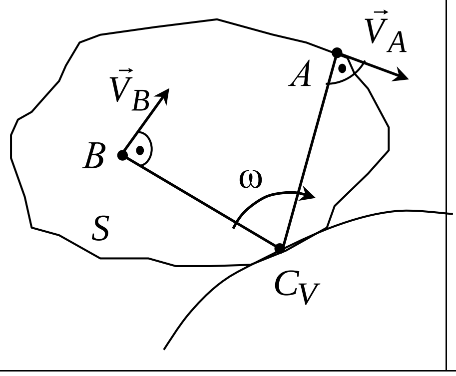



</td><td>$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$$
$$\omega = \frac{V_A - V_B}{AB}$$

$$\omega = 0$$

$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$$
$$\omega = \frac{V_A + V_B}{AB}$$</td></tr>
</table>

Окончание табл. 1

Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
Плоская фигура катит-ся без проскальзывания по неподвижной поверхности		$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$

Геометрическое место последовательных положений МЦС относительно неподвижной системы координат называется *неподвижной центроидой*, а относительно системы координат, жестко связанной с телом, - *подвижной центроидой*. Можно показать, что при движении тела подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения.

Лекция №8

План лекции

Плоскопараллельное движение твердого тела Определение ускорений точек плоской фигуры. Теорема об ускорении точек плоской фигуры. Аналитический способ определения ускорений точек плоской фигуры. Мгновенный центр ускорений. Способы определения мгновенного центра ускорений. Определение ускорения точек с помощью мгновенного центра ускорений.

Основная часть лекции

Распределение ускорений при плоскопараллельном движении

Для определения ускорения произвольной точки плоской фигуры воспользуемся полученным выше выражением скорости точки B $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ и найдем ускорение точки B как производную по времени от скорости $\vec{V}_B$

$$\vec{W}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{\mathrm{dt}} \times \vec{r}_{BA}.$$

Вводя обозначения, последнее равенство можно переписать так:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{Bp} + \vec{W}_{BA}^{oc} \ ,$$

где $\quad \vec{W}_A = d\vec{V}_A / dt$ - ускорение полюса,

$\vec{W}_{BA}^{Bp} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}$ - вращательное ускорение точки B,

$\vec{W}_{BA}^{oc} = \vec{\omega} \times \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}\right)$ - осестремительное (или центростремительное) ускорение точки B.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно векторной сумме трех ускорений: ускорения полюса, осестремительного и вращательного ускорений исследуемой точки при вращении плоской фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через полюс.

В силу определения плоскопараллельного движения $\vec{\omega} \perp \vec{r}_{BA}$ и $\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}_{BA}$. Поэтому все векторы $\vec{W}_B, \vec{W}_A, \vec{W}_{BA}^{Bp}$ и $\vec{W}_{BA}^{oc}$ лежат в плоскости движущейся фигуры. На рис.10.5 показано геометрическое построение вектора $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}$, где $\vec{W}_{BA} = \vec{W}_{BA}^{Bp} + \vec{W}_{BA}^{oc}$.

Вращательное ускорение $\vec{W}_{BA}^{Bp} \perp \overrightarrow{AB}$, его величина $W_{BA}^{Bp} = \varepsilon\, AB$. Осест-ремительное ускорение $\vec{W}_{BA}^{oc}$ направлено по AB от точки B к точке A, его модуль $W_{BA}^{oc} = \omega^2 AB$. Очевидно, что

$$W_{BA} = \sqrt{\left(W_{BA}^{Bp}\right)^2 + \left(W_{BA}^{oc}\right)^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \ .$$

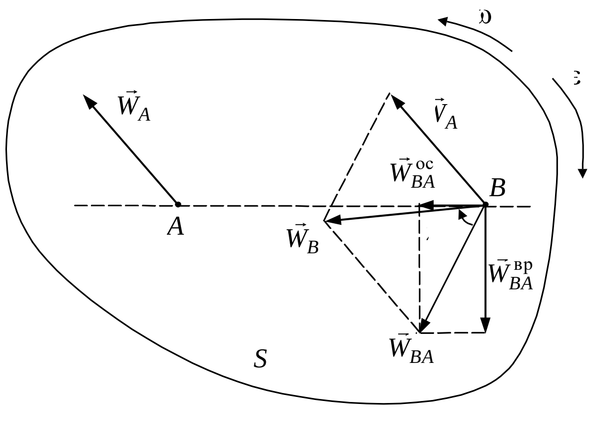


Рис. 10.5

Мгновенный центр ускорений

Введем в рассмотрение угол α, образованный $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{W}_{BA}$ и откладываемый от вектора $\vec{W}_{BA}$ в направлении углового ускорения. Из рис. 10.5 видно, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{W_{BA}^{Bp}}{W_{BA}^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad 0 \le \alpha \le \pi/2$$

угол не зависит от выбора полюса и в каждый момент времени он одинаков для всех точек фигуры. Далее введем понятие мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений (МЦУ) называется движущаяся точка, проходящая в каждый момент времени через точку тела (плоской фигуры), ускорение которой в этот момент равно нулю.

> *Теорема.* При плоскопараллельном движении тела в случае, когда $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не равны одновременно нулю, в каждый момент времени можно найти точку плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю и эта точка будет единственной.

Доказательство. Пусть $\vec{W}_A$ - ускорение одной из точек плоской фигуры (рис. 10.6, а).

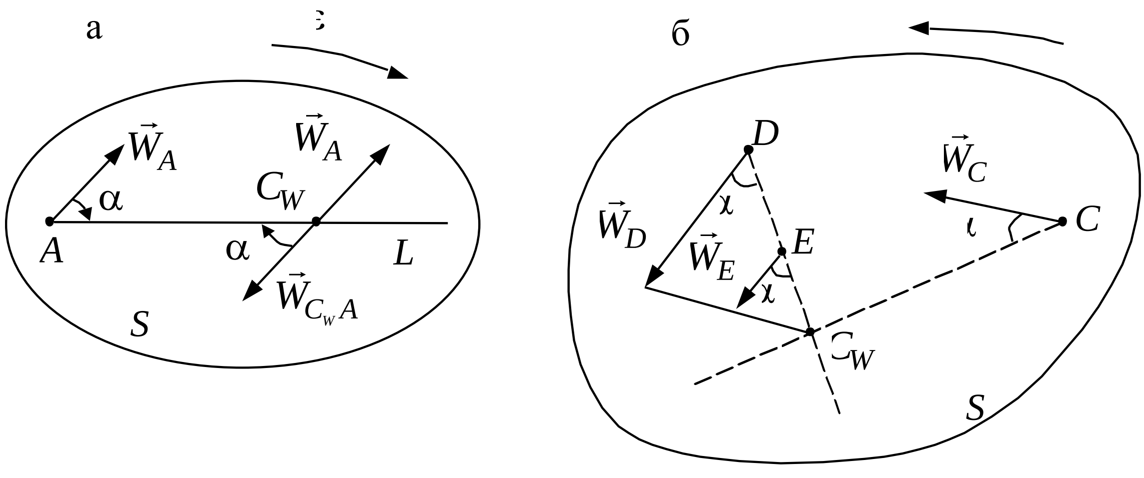


Рис. 10.6

Проведем через точку A полупрямую AL под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\,\varepsilon/\omega^2$, отсчитываемым от $\vec{W}_A$ в направлении углового ускорения. Далее отложим на AL отрезок $AC_W = W_A \big/ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Найдем ускорение точки C_W. Выбрав за полюс точку A, запишем $\vec{W}_{C_W} = \vec{W}_A + \vec{W}_{C_W A}$.

Поскольку $W_{C_W A} = C_W A\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_A$, а векторы $\vec{W}_A, \vec{W}_{C_W A}$ составляют с AL одинаковый угол, равный α, то $\vec{W}_{C_W A} = -\vec{W}_A$ и, следовательно, $\vec{W}_{C_W} = 0$.

Вычислим теперь ускорение произвольной точки, приняв $\vec{W}_{C_W}$ за полюс. Так как, $\vec{W}_{C_W} = 0$ то

$$\vec{W}_C = \vec{W}_{CC_W}; \quad W_C = C_W C\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\vec{W}_D = \vec{W}_{DC_W}; \quad W_D = C_W D\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\vec{W}_E = \vec{W}_{EC_W}; \quad W_E = C_W E\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

а направления ускорений определяются углом $\alpha = \operatorname{arctg} \varepsilon / \omega^2$ (рис. 10.6, б). Таким образом, если в качестве полюса принять мгновенный центр скоростей, то ускорение любой точки тела найдется по тому же правилу, что и ускорение точки при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет прямая, перпендикулярная плоскости движения и проходящая через МЦУ. Следовательно, зная положение МЦУ и ускорение какой-нибудь одной точки плоской фигуры, можно построить векторы ускорений всех ее точек.Основные способы определения положения МЦУ показаны в табл. 2.

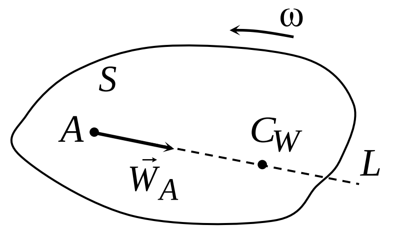
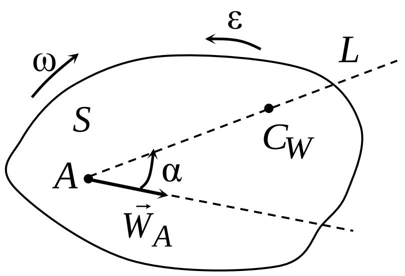
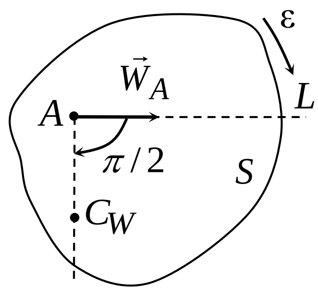
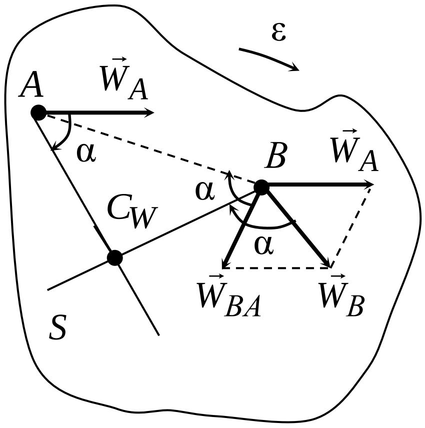
Некоторые кинематические свойства мгновенных центров скоростей и ускорений

Не следует смешивать понятия мгновенных центров скоростей и ускорений - это, вообще говоря, разные точки. Также надо различать скорость $\vec{V}^*_{C_V}$ и ускорение $\vec{W}^*_{C_W}$ движение МЦС и скорость $\vec{V}_{C_V}$ и ускорение $\vec{W}_{C_W}$ точки плоской фигуры (как известно $V_{C_V} = 0$), с которой в данный момент времени совпадает мгновенный центр. Аналогичные рассуждения имеют место и для МЦУ. Найдем скорость, с которой МЦС движется относительно опорной системы координат.

Для этого продифференцируем по времени векторное равенство $\vec{r}_{C_V} = \vec{r}_A + \vec{r}_{C_V A} = \vec{r}_A + \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{V}_A}{\omega^2}$ (рис. 10.7). В результате получим

$$\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + \frac{\vec{\omega} \times \vec{W}_A - \vec{\varepsilon} \times \vec{V}_A}{\omega^2} . \qquad (10.2)$$

Таблица 2

Известные параметры	Способы нахождения МЦУ	Расчетная формула
Величина, и направление ускорения какой либо точки плоской фигуры и ее угловая скорость и угловое ускорение $-\ \varepsilon \neq 0,\ \ \omega \neq 0$ $-\ \varepsilon \neq 0,\ \ \omega = 0$ $-\ \varepsilon = 0,\ \ \omega \neq 0$	  	$AC_W = \dfrac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ $\alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ $AC_W = \dfrac{W_A}{\varepsilon}$ $AC_W = \dfrac{W_A}{\omega^2}$
Величины и направления ускорений двух точек плоской фигуры		$\dfrac{W_A}{AC_W} = \dfrac{W_B}{BC_W}$

Пользуясь произволом в выборе точки A, предположим, что в некоторый момент времени точка A плоской фигуры совпадает с МЦС. Тогда

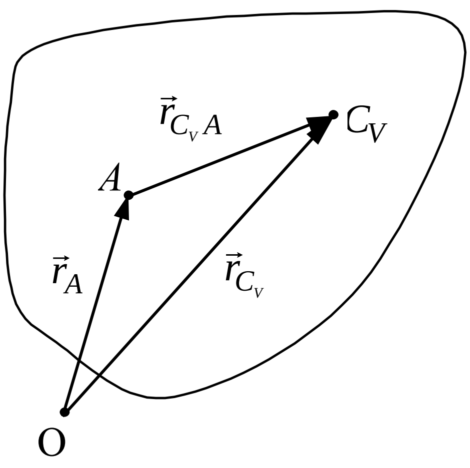


Рис. 10.7

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{C_V} = 0,\ \vec{W}_A = \vec{W}_{C_V}$$ и

$$\vec{V}^{*}_{C_V} = \vec{\omega} \times \vec{W}_{C_V} \Big/ \omega^2$$ или

$\vec{W}_{C_V} = \vec{V}^{*}_{C_V} \times \vec{\omega}$. Последняя формула определяет величину и направление ускорения точки плоской фигуры, которая в данный момент времени является МЦС. Интересно отметить, что $\vec{W}_{C_V}$ не зависит от углового ускорения плоской фигуры. Вновь вернемся к формуле (10.2) и положим, что точка A совпадает с МЦУ. В силу $\vec{V}_A = \vec{V}_{C_W}$, $\vec{W}_A = \vec{W}_{C_W} = 0$ пишем $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_{C_W} - \vec{\varepsilon} \times \vec{V}_{C_W} \Big/ \omega^2$ или

$$\vec{V}_{C_W} = \frac{\omega^2 \left\lfloor \omega^2 \vec{V}^{*}_{C_V} + \vec{\varepsilon} \times \vec{V}^{*}_{C_V} \right\rfloor}{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Если $\varepsilon = 0\ (\omega \neq 0)$ то $\vec{V}_{C_W} = \vec{V}^{*}_{C_V}$. Следовательно, при равномерном вращении скорость той точки плоской фигуры, которая в данный момент времени совпадает с МЦУ, векторно равна скорости движения МЦС.

Лекция№9

План лекции

Сложное движение точки. Относительное, переносное и абсолютное движение точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Ускорение Кориолиса, причина его появления. Модуль и направление ускорения Кориолиса. Частный случай поступательного переносного движения.

Основная часть лекции.

Сложное движение точки

1. Абсолютное, относительное и переносное движения точки

Довольно часто встречается движение точки, состоящее из нескольких движений. Вот два наглядных примера.

Первый. Наблюдатель, стоящий на высоком берегу реки, смотрит на прямолинейно движущийся теплоход, на верхней палубе которого по окружности ходит пассажир (рис. 10.1). Наблюдатель же видит довольно сложную «загогулину» (пунктирная линия) как результат сложения прямолинейного движения и движения по окружности.

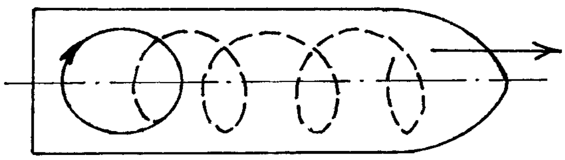


Рис. 10.1

Второй пример. Стержень вращается в плоскости вокруг оси O, а по нему движется колечко M (рис. 10.2). Неподвижный наблюдатель увидит движение колечка по спирали.

Эти движения имеют соответствующие названия: абсолютное, относительное и переносное.

Абсолютным движением называется движение точки, которое видит неподвижный наблюдатель («загогулина» и спираль в наших примерах).

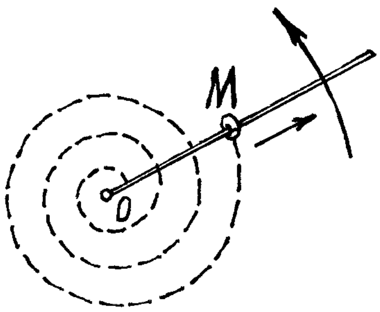


Рис. 10.2

Относительным движением – движение точки, которое увидел бы наблюдатель, двигаясь вместе со средой (с теплоходом и со стержнем). В наших примерах – это движение пассажира по окружности на палубе теплохода и прямолинейное скольжение колечка по стержню.

Переносное движение – это движение среды, по которой движется точка (прямолинейное движение теплохода и вращение стержня).

При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того чтобы неподвижный наблюдатель увидел относительное движение точки, надо остановить переносное движение. Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае при определении переносного движения точки обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того, в какой момент будет остановлено относительное движение, от того, где точка находится на среде в этот момент. Так как, вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять *переносное движение точки как абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.*

Так, переносное движение пассажира – это движение той точки палубы, на которой находится пассажир. И в примере с колечком – это движение той точки стержня, где находится колечко в данный момент (движение по окружности радиусом OM).

Ещё несколько определений.

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки ($\vec{v}, \vec{W}$) будем называть скорость и ускорение при абсолютном движении.

Относительной скоростью и относительным ускорением ($\vec{v}_r, \vec{W}_r$) – скорость и ускорение точки в относительном движении. *Переносная скорость и переносное ускорение точки* ($\vec{v}_e, \vec{W}_e$) – это абсолютная скорость и абсолютное ускорение той точки среды, с которой совпадает движущаяся точка в данный момент времени. Все эти движения можно попробовать определить с помощью координат и векторным способом.

На рис.10.3 показаны неподвижные оси x, y, z и движущиеся оси $x_1; y_1; z_1$.

Конечно, абсолютное движение точки M определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Относительное движение – в движущихся осях уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t)\,, \\ y_1 &= y_1(t)\,, \\ z_1 &= z_1(t)\,. \end{aligned}\right\}$$

(10.2)

Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще.

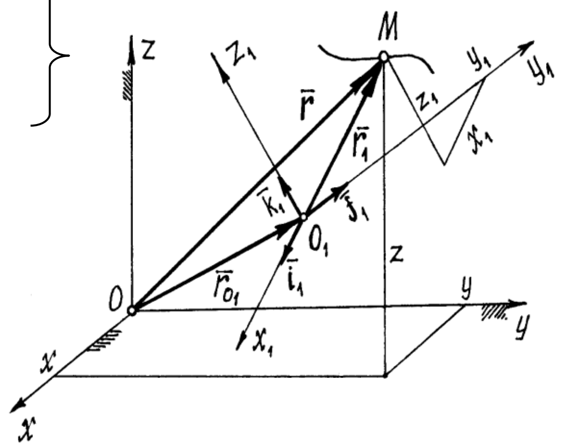


Рис.10.3

Так как, по определению, переносное движение точки M – это движение относительно неподвижных осей той точки системы $O_1x_1y_1z_1$, с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки подвижной системы движутся по-разному.

Абсолютное движение точки M определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а относительное движение радиусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$. Радиус-вектор $\vec{r}_{O_1}$ определяет движение начала подвижных осей O_1 (но не переносное движение точки M!).

2. Определение абсолютной скорости точки

Абсолютная скорость точки $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Но $\vec{r} = \vec{r}_{O_1} + \vec{r}_1$ (см. рис. 10.3),

где $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$, а $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – орты подвижных осей. Поэтому

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) =$$

$$= \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt} \qquad (10.3)$$

(орты $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ – переменные, так как направление их меняется, функции времени *t*).

Используя метод остановки, с помощью выражения (10.3) можно определить относительную скорость точки и переносную. Действительно, остановив переносное движение, движение осей x_1, y_1, z_1, то есть, положив $\vec{r}_{O_1} = \text{const}, \quad \vec{i}_1 = \text{const}, \quad \vec{j}_1 = \text{const}, \quad \vec{k}_1 = \text{const}$, из уравнения (10.3) получим

$$\vec{v}_r = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 . \qquad (10.4)$$

А остановив относительное движение точки *M* ($x_1 = \text{const}, y_1 = \text{const}$, $z_1 = \text{const}$), получим её переносную скорость

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt} .$$

Поэтому из формулы (10.3) следует, что абсолютная скорость точки есть векторная сумма двух скоростей – переносной и относительной

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r . \qquad (10.5)$$

Пример 10.1. Колечко *M* движется по вращающемуся стержню так, что $OM = s = 3t^2$ (см) и $\varphi = 2t$ (рад) (рис. 10.4).

Ранее было установлено, что траектория относительного движения – прямая линия, совпадающая со стержнем, и движение это определяется уравнением $s = s(t)$. Траектория точки *M* при переносном движении в момент времени *t* – окружность радиусом $OM = s$. Поэтому относительная скорость

$v_r = \dot{s} = 6t$ см $\cdot$ с$^{-1}$ и направлена по касательной к траектории вдоль стержня (см. рис. 10.4). Переносная

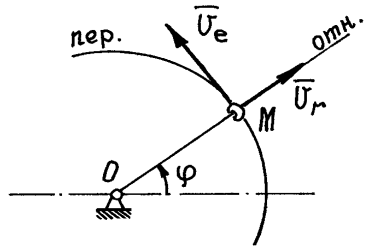


Рис. 10.4

скорость колечка, как при вращении вокруг оси, $v_e = OM \cdot \omega = s\dot{\varphi} = 3t^2 \cdot 2 = 6t^2 \text{ ñì} \cdot \text{ñ}^{-1}$.

Направлен вектор этой скорости по касательной к траектории точки при переносном движении, перпендикулярно стержню. Абсолютная скорость колечка $\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$. Модуль ее, так как $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$,

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 6t\sqrt{1+t^2} \text{ ñì} \cdot \text{ñ}^{-1}.$$

Определение абсолютного ускорения точки. Ускорение Кориолиса

Ускорение точки – первая производная по времени от вектора скорости. Поэтому абсолютное ускорение, используя формулу (10.3):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{O_1}}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right) +$$

$$+ x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}. \qquad (10.6)$$

Воспользовавшись правилом остановки, можем найти относительное и переносное ускорения точки.

Положив в (10.6) $\vec{r}_{O_1} = \text{const},\ \vec{i}_1 = \text{const},\ \vec{j}_1 = \text{const},\ \vec{k}_1 = \text{const}$, получим относительное ускорение

$$\vec{W}_r = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1. \qquad (10.7)$$

При $x_1 = \text{const},\ y_1 = \text{const},\ z_1 = \text{const}$ получим переносное ускорение

$$\vec{W}_e = \frac{d^2\vec{r}_{O_1}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}.$$

Поэтому из формулы (10.6) следует, что абсолютное ускорение состоит не из двух, а из трех ускорений:

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c. \qquad (10.8)$$

Дополнительное ускорение $\vec{W}_c$ называется ускорением Кориолиса (по имени ученого, впервые обнаружившего это ускорение), оно равно

$$\vec{W}_{\tilde{n}} = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right). \qquad (10.9)$$

Это дополнительное ускорение появилось из-за того, что переносная скорость зависит от относительного движения, от положения точки на среде, а относительная скорость изменяется за счет переносного движения.

Проще всего определить ускорение Кориолиса в двух частных случаях.

1. Переносное движение – поступательное движение (система подвижных осей $O_1x_1y_1z_1$ перемещается поступательно).

Так как подвижные оси при таком движении не поворачиваются, то орты $\vec{i}_1 = \text{const}$, $\vec{j}_1 = \text{const}$, $\vec{k}_1 = \text{const}$. И тогда по (10.9) ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 0$, а абсолютное ускорение станет суммой лишь двух ускорений

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r.$$

Это понятно, так как переносная скорость точки не будет зависеть от относительного движения, а переносное движение не изменяет направление вектора относительной скорости.

2. Переносное движение – вращение вокруг неподвижной оси.

Пусть подвижная система осей $O_1x_1y_1z_1$ вращается вокруг неподвижной оси ξ с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$. (рис. 10.5).

Представим орты осей как радиусы-векторы точек, расположенных на их концах. Тогда производные от орт по времени можно рассматривать как скорости этих точек.

Например, скорость точки A на конце вектора $\vec{j}_1$

$\vec{v}_A = \dfrac{d\vec{j}_1}{dt}$. Но так как модуль ее $v_A = \omega_e a = \omega_e \cdot j_1 \sin\beta$, а вектор скорости $\vec{v}_A$ направлен перпендикулярно $\vec{\omega}_e$ и $\vec{j}_1$ в сторону вращения, то $\vec{v}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$ (см.9.1).

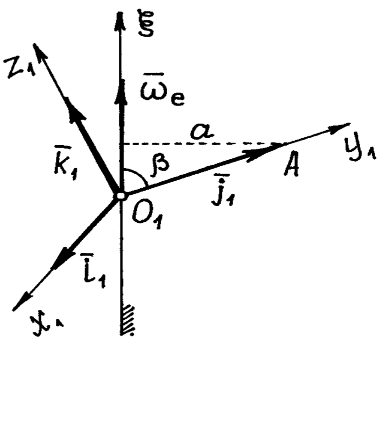


Рис. 10.5

Поэтому $\dfrac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$, аналогично: $\dfrac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1$, и $\dfrac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1$. (10.10)

По (10.9) ускорение Кориолиса

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 \right).$$

И, учитывая (10.4), получим

$$\vec{W}_{\tilde{n}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \qquad (10.11)$$

Ускорение Кориолиса есть удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного движения на вектор относительной скорости точки.

Величина его

$$W_c = 2\omega_e v_r \sin\alpha, \qquad (10.12)$$

где α – острый угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$.

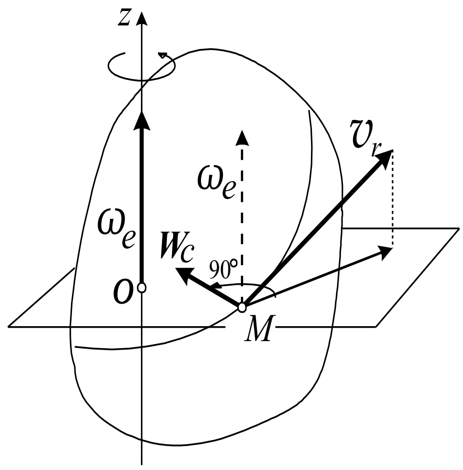


Рис. 10.6

Замечание. Можно доказать, что этот результат верен при любом переносном движении, не только при вращении вокруг неподвижной оси.

Пример 10.2. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z. По поверхности его движется точка *M* (рис. 10.6). Конечно, скорость этого движения точки – относительная скорость $\vec{v}_r$, а скорость вращения тела – угловая скорость переносного движения $\vec{\omega}_e$.

Ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ направлено перпендикулярно этим двум векторам по правилу направления вектора векторного произведения так, как показано на рис. 10.6.

Нетрудно сформулировать более удобное правило определения направления вектора $\vec{W}_c$: *нужно спроектировать вектор относительной скорости* $\vec{v}_r$ *на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения и затем повернуть эту проекцию на 90 градусов в плоскости по направлению переносного вращения. Конечное положение проекции вектора* $\vec{v}_r$ *укажет направление кориолисова ускорения.* Это правило было предложено Н.Е. Жуковским.

Пример 10.3. Вернемся к примеру 10.1. Найдем абсолютное ускорение колечка *M*

$$\vec{W}_M = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_{\tilde{n}}. \qquad (10.13)$$

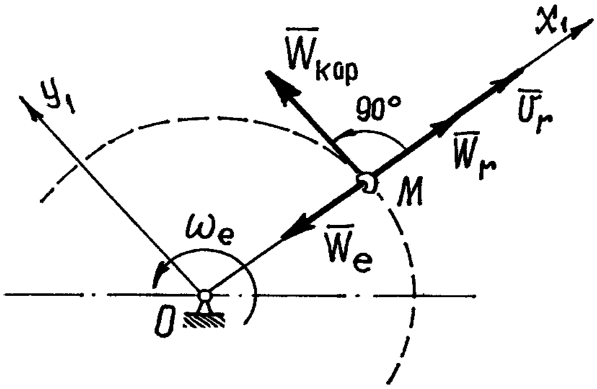
Переносное ускорение при движении колечка по окружности радиусом $OM = s$: $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n + \vec{W}_e^\tau$, где $W_e^n = s \cdot \omega_e^2 = 12t^2\ \tilde{n}\grave{\i} \cdot \tilde{n}^{-2}$, а

$W_e^\tau = s\varepsilon_e = s \cdot \ddot{\varphi} = 0$.

Значит $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n$ (рис.10.7). Относительное ускорение $W_r = \ddot{s} = 6\ \text{см} \cdot \text{с}^{-2}$.
Ускорение Кориолиса

$$W_{\tilde{n}} = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 6t = 24t\ \text{см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Вектор $\vec{W}_c$ направлен перпендикулярно стержню в сторону вращения (по правилу Жуковского).



Величину абсолютного ускорения колечка M найдем с помощью проекций на подвижные оси x_1 и y_1. Проектируя равенство (10.13) на оси, получим:

Рис. 10.7

$$W_{x_1} = W_r - W_e = 6 - 12t^{-2} = 6(1 - 2t^{-2}), \quad W_{y1} = W_c = 24t.$$

Тогда $W_M = \sqrt{(W_{x_1})^2 + (W_{y_1})^2} = 6\sqrt{(1 - 2t^2)^2 + 16t^2}\ \text{ñì} \cdot \text{ñ}^{-2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Лекционный курс теоретической механики изложен в достаточном объёме, однако, часть тем рекомендована для самостоятельного изучения согласно отведенным часам учебного плана.

Изучение лекционного курса теоретической механики позволит студенту самостоятельно выполнить расчетно-графическую и курсовую работу, а также лабораторные работы, решить рекомендованные задачи. Полученные знания теоретической механики необходимы для усвоения материала последующих дисциплин: сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика и др. Приобретенные знания закон, принципов и методов теоретической механики позволят выпускнику в своей профессиональной деятельности уверенно решать поставленные перед ним технические задачи.

Решение любой задачи механики складывается из двух этапов: этапа построения математической модели и этапа ее решения одним из математических методов. Поэтому при изучении теоретической механики исключительную роль играет математика, в частности такие ее разделы, как векторная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, дифференциальное и интегральное счисление.

Методами теоретической механики решается большой круг задач из различных областей науки и техники, причем диапазон исследований постоянно расширяется.