Типовые задачи

для практических занятий и самостоятельной работы
по курсам «Страхование и актуарные расчеты», «Актуарная математика»

I. *Экономика страхования.*

1.1. Пусть лицо, принимающее решение (*ЛПР*), имеет текущий капитал w = 10 000. Пусть u(0) = - 1; u(10000) = 0. Предположим, что оно сталкивается с финансовыми потерями X с вероятностью 0,5 и остается с прежним уровнем капитала с такой же вероятностью. Обозначим через G максимальную сумму, которую лицо готово заплатить за полное страхование от потерь. Значения X и G представлены в таблице.

X	10 000	6 000	3 300
G	6 000	3 300	1 700

Определить значение функции полезности в трех точках.

1.2.Игра состоит в подбрасывании монеты до тех пор, пока не появится орел, вероятность появления которого в каждом испытании равна 0,5. N - число испытаний до первого появления орла. Найти:

a) Распределение N.
b) *EN; VarN.*
c) Если при выпадении орла выплачивается вознаграждение $X = 2^N$. то найти *EX.*
d) Если функция полезности $u(w)= \ln w$, то найти ожидаемую полезность от этой игры *EU(x).*

1.3. Пусть функция полезности *ЛПР* $u(w) = K \log w$, $K > 0$. *ЛПР* имеет капитал $w > 1$ и сталкивается со случайными потерями X, которые имеют равномерное распределение на [0, 1]. Используя соотношение $u(w - G) = Eu(w-X)$, показать, что максимальная премия, которую ЛПР готово заплатить за полное страхование.

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^w}.$$

1.4. Используя аппроксимации для функции полезности

$$u(w-\pi_{\max}) \approx u(w-\mu) + (\mu - \pi_{\max}) \cdot u'(w-\mu)$$

$$u\left(w-X\right) \approx u(w-\mu) + (\mu - X) \cdot u'(w-\mu) + \frac{1}{2}\left(\mu - X\right)^2 \cdot u''(w-\mu)$$

a). Показать справедливость следующей аппроксимации для G:

$$\pi_{\max} \approx \mu - \frac{1}{2}\frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)} \cdot \sigma^2, \text{ где } \mu = EX, \ \sigma^2 = \mathrm{Var}X;$$

b). Показать, что при $u(w) = K\log w$, $\pi_{\max} \approx \mu + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{(w-\mu)}$.

1.5. *ЛПР* имеет функцию полезности $u(w) = - e^{\alpha w}$ и несет случайные потери X, размер которых имеет распределение χ_n^2. При 0 < a < 0,5 получить выражение для G и доказать, что G > n - μ.

1.6. Показать, что если $u'' > 0$, то $G > \mu = EX$.

1.7. Небольшая страховая компания с капиталом 100 у. е. считает, что некоторый риск X имеет распределение

$$P(X = 0) = P(X=51) = 0{,}5.$$

Какую максимальную премию G она должна заплатить перестраховщику, чтобы покрыть 100 % этих потерь X? Предположить, что функция полезности страховщика имеет вид $U(w) = \ln w$.

1.8. Компания, занимающаяся перестрахованием, с капиталом 650 у. е. и такой же функцией полезности рассматривает возможность принятия на себя этого риска. Какую максимальную сумму H она могла бы допустить как премию для перестрахования 100 % потерь?

1.9. Медицинская страховка предлагается группе людей. По этой страховке выплачивается *B у. е.* всякий раз, когда члены этой группы попадают в госпиталь. Эта группа неоднородна (по числу попаданий в госпиталь) и может быть разделена на подгруппы, причем в i - й подгруппе n_i – членов $\sum_{i=1}^{r} n_i = n.$ Для i - й подгруппы каждый человек обращается в госпиталь случайное число x_i, раз, которое имеет распределение Пуассона с параметром λ_i, $i = 1...r$. Количества попаданий в госпиталь для различных членов группы независимы.

a). Показать, что ожидаемый суммарный иск равен

$$B \cdot \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i = B \cdot n \cdot \overline{\lambda},\ где\ \overline{\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i.$$

b). Показать, что число обращений в госпиталь для всей группы имеет распределение Пуассона с параметром $n \cdot \overline{\lambda}$.

1.10. Доказать, что премия P при страховании превышения потерь определяется равенством

$$P = \int_d^\infty (x-d) f(x) dx = \int_d^\infty (1 - F(x)) dx,$$ где X- случайные потери, $EX = \infty$.

1.11. Пусть случайная величина потерь X имеет плотность распределения вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 \cdot e^{-0{,}1x}, & x \ge 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти:

a) EX, $VarX$.

b) Показать, что суммы выплат по страховке при потерях X функции $I(x) = 0{,}5x$ и

$$I_d(x) = \begin{cases} 0, & x \le 10 \ln 2. \\ x - 10 \ln 2, & x > 10 \ln 2. \end{cases}$$

являются подходящими с нетто-премией, равной 5.

1.12. Случайная величина потерь X имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01, & 0 \le x \le 100. \\ 0, & x < 0,\ \ x > 100. \end{cases}$$

Найти:

a) *EX;VarX.*

b) Рассмотреть пропорциональное страхование $I_1(x) = kx$; $k \in]0;1[$, и страховние превышения потерь

$$I_2(x) = \begin{cases} 0, & x \le d. \\ x - d, & x > d. \end{cases}$$

Определить *k* и *d* в каждом случае такими, чтобы нетто-премия *P* была равна 12,5.

c). Показать, что

$$Var\{X - I_1(x)\} > Var\{X - I_2(x)\}.$$

1.13. Доказать, что для премии *P* и страховки *I(x)* дисперсия

$$Var\{X - I(x)\} = E\{(X - I(x) - \mu + P)^2\}$$

минимальна, когда $I(x) =- I_{d^*}\{x\}$, где d^* является решением уравнения

$$P - \int_d^\infty (x-d) f(x) dx = 0, \ a$$

$$I_{d^*}(x) = \begin{cases} 0, & x \le d^*. \\ x - d^*, & x > d^*. \end{cases}$$

II. ***Индивидуальные модели риска.***

2.1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины иска *X* при вероятности предъявления иска $p = 0{,}05$. Размер иска *B* имеет равномерное распределение на отрезке [0;20].

2.2. Пусть *X* - число появлений решки при пяти бросаниях правильной монеты. После того, как брошены монеты, бросаются *X* игральных костей. Пусть *Y*- сумма очков, выпавших на всех игральных костях. Найти *EY*; *VarY.*

2.3. Пусть *X* - число очков, выпавших при бросании игральной кости, а Y - число решек, появившихся при бросании X монет. Найти *EY; VarY.*

2.4. Пусть *X*- число выпавших очков при бросании одной игральной кости. Пусть *Y*- сумма очков, полученных при бросании X костей. Найти *EY*; *VarY.*

2.5. Вероятность пожара в определенной структуре за данный период равна 0,02. Если случается пожар, то ущерб структуре оказывается равномерно распределенным на интервале (0,a). Вычислить среднее и дисперсию ущерба за указанный период.

2.6. Используя процесс получения свертки, найти функцию распределения $F_k(x)$ для $x = 0,1,...,9$, где $S = X_1 + X_2 + X_3$. а независимые случайные величины $X_к$ имеют дискретное распределение вероятностей, приведенное ниже.

X	$P(X_1=x)$	$P(X_2=x)$	$P(X_3=x)$
0	0,6	0,7	0,6
1	0,0	0,2	0,0
2	0,3	0,1	0,0
3	0,0	0,0	0,4
4	0,1	0,0	0,0

2.7. Пусть X_i, $I = 1,2,3$ независимые, одинаково распределенные случайные величины с функциями распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0.\\ x, & 0\le x\le 1.\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $S = X_1 + X_2 + X_3$, а также:

a) ES;

b) $VarS$;

c) P(S < 0,5), P(S < l,5), P{S < l,0).

2.8. Пусть X_1, X_2, X_3 - независимые, экспоненциально распределенные случайные величины с математическим ожиданием $EX_i = i$, i= 1,2,3. Найти плотность распределения $S = X_1 + X_2 + X_3$.

2.9. Используя центральную предельную теорему (ЦПТ), вычислить b, c, d для данного a, если

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ge n\mu + a\sqrt{n}\sigma\right) \approx c + b\cdot\Phi(d),$$

где X_i - независимые, одинаково распределенные случайные величины, а $\mu = EX_i$, $\sigma^2 = DX_i > 0$.

Вычислить вероятности из 2.7.3, используя аппроксимации из 1.

2.10. Компания по страхованию от пожаров страхует 160 структур(объектов). Контракты на различные суммы распределены следующим образом.

b_k	10 000	20 000	30 000	50 000	100 000
n_k	80	35	25	15	5

Вероятность появления 1-го пожара в год каждой структуре равна 0,04. Вероятность появления более одного пожара в год одной структуре равна 0. Пожары на различных объектах - события независимые. Предположим, что условное распределение размера иска при условии, что пожар случился, является равномерным на отрезке $[0,b_k]$. Пусть N - число исков, а S - суммарный иск за этот год.

a) Найти среднее и дисперсию N.

b) Найти среднее и дисперсию S.

c) Какая нагрузка безопасности должна быть использована компанией, чтобы она собрала сумму, равную 99 %-ному квантилю распределения S?

Указание: использовать нормальную аппроксимацию.

2.11. Найти вероятность того, что суммарный иск из примера 2.10 превысит 8 250 000, если порог удержания:

1)30 000; 2) 50 000.

2.12. Найти оптимальный порог удержания из 30 000 и 50 000 для предыдущей задачи.

2.13. Рассмотрим портфель из 32 страховок с вероятностью иска p = 1/6. Величина иска для каждой страховки имеет следующую плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1.\\ 0, & |y|\ge 1.\end{cases}$$

Обозначим через S суммарный иск. Найти $P(S > 4)$, используя нормальную аппроксимацию.

III. *Распределение времени жизни и таблицы смертности*.

3.1. Определим функцию $z(w) = \exp\left(-\int_x^{x+w} \mu_y dy\right)$. В терминах *z(w)* указать вероятность того, что (*x*) умрет в промежутке между *n* и *m,* причем *x < n < m.*

а) *z(m - x) - z(n - x);*

b) z(n + m - x) - z(n - x);

с) *z(n - x) - z(m - x);*

d) *z(n- x)- z{n +m- x);*

е) *z(n) - z(m).*

3.2. Имеется 50 000 новорожденных, причем $I_x\mu_x$ - *const,* 0 < *x* < *w*. Известно, что $\frac{\partial^6}{\partial x^6}\mu_x = \frac{45}{8}$, при *x* = 58. Найти ожидаемое число выживших в возрасте 42.

а) 15 000; b) 16 000; с) 17 000; d) 18 000; е) 19 000.

3.3. Если $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{e_x}+1\right)=1$ для всех *x,* найти ${}_{10}p_x$

а) e^{12}; b) e^{-30}; с) e^{-60}; d) e^{-6}; е) недостаточно информации.

3.4. Пусть функция выживания $s(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^6$, $x \geq 0$. Найти среднюю продолжительность жизни для лица возраста 41 год.

а) 14; b)18,5; с) 20; d)40; е)42.

3.5. Пусть $l_x = 1000 - 2x$, $0 < x < 500$. Найти дисперсию суммарного числа лет будущего времени жизни в возрасте 497.

а) 0,2; b) 3/4; с) 2/9: d) 5/3; е) 2.

3.6. Пусть $\mu_x = 2/(100-x)$, $0 < x < 100$. Найти m_{95}.

100 — *x*

а)0,2; b)0,25;с) 2/9; d) 18/41;е) 27/61.

3.7. Пусть s(x) = 1- x/200, 0 < *x* < 200. Найти $e_{50:\overline{10}|}$.

а) 5; b) 5,5; с) 9; d) 28/3; с) 29/3.

3.8. Пусть $\mu_x = 1/(4+x)$, $x > 0$. Какова вероятность того, что возраст смерти новорожденного больше 5?

а)1/6; b) 2/7, с) 3/8; d) 4/9; е) 0,5.

3.9. Интенсивность смертности определяется формулой

$$\mu_x = \frac{3}{110-x} + \frac{2}{150-x}, \qquad 0 \leq x < 110.$$

Найти ${}_{70}p_{10}$.

а) 0,0234; b) 0,00675; с) 0,015; d) 0,0209; е) 0,225.

3.10. Если $E[T|T<1] = 3/4$ для (7), причем $l_7 = 70$ и $q_7 = 0,2$, найти m_7.

а) 4/19; b) 0,25; с) 5/16; d) 0,75; е) 5/19.

3.11. Пусть $f(x) = 1/20\sqrt{100-x}$, $0 \leq x < 100$. Найти вероятность того, что (69,75) умрет в течение следующих 10 лет.

а) 1/5; b) 5/11; с) 2/11; d) 1; е) 3/5.

3.12. Предполагаем, что μ_x = *const*, а ожидаемое время жизни (x) равно 2 годам. Найти квантиль уровня 0,75 для распределения *T*.

a) ln2; b) 2ln2; c) 31n2; d) 4ln2; e) 5ln2.

3.13. Пусть $S(x) = e^{-2x}, x>0$. $A = EX$, $B = med_x$, $C = mod_x$, $D = Var\{X\}$.

Найти соотношение в виде совместных неравенств между данными величинами.

3.14. Известно, что $_{1/k}q_x = 2/(1+4k)$, $k > 100$. Найти μ_x.

a) 0,01; b) 1/8; c) 0,25; d) 0,5; e) не может быть определена.

3.15. Пусть $s(x) = e^{-ax}, x > 0$. Найти средний возраст смерти для всех лиц, имеющих теперь возраст *a*.

a) 1/a; b) 2/a; c) (1+a)/a; d) $(1+a^2)/a$; e) $1+a^x$.

3.16. Если $l_x = (100-x)^n$, $0 \le x \le 100$, Найти $\frac{d}{dx}\ln e_x$.

a) 1/(100-x); b) 2/(100-x); c) n/(100-x); d) 1/(x-100); e) 2/(x-100).

3.17. Если $\int_{10}^{\infty} {}_t p_{50} dt = 15; \int_0^{\infty} {}_t p_{60} dt = 20,$ найти $_{10}p_x$.

a) 0,25; b) 0,5; c) 0,75; d) 1; e) недостаточно информации.

3.18. Если $\mu_x = 1$, для всех x, найти *ES*, где S - дробная часть будущего времени жизни.

a) (e-2)/(e-1); b) (e-1)/(e-2); c) $(e-2)^2/(e-1)^2$; d) $(e-1)^2/(e-2)^2$; e) 1.

3.19. Пусть $\mu_x = x/(100-x^2)$, $0 < x < 10$. Найти значение функции распределения будущего времени жизни F(6).

a) 0,2; b) 0,4; c) 0,5; d) 0,6; e) 0,8.

3.20. Функция выживания $S(x) = e^{-0,2x} - e^{0,4x}$, $x > 5\ln2$. Найти моду распределения смертей в группе выживания, которая сейчас имеет возраст 5ln2.

a) 5ln2; b) 6ln2; c) 8ln2; d) 10ln2; e) 12ln2.

3.21. Дано, что $_np_{20} = e20/5/2^n$; $n=1,2,3,4$. Найти e_{24}.

a) 17; b) 33; c) 50; d) 65; e) 75.

3.22. Гипотеза Балдуччи имеет место между возрастами 30 и 31. Известно, что $q_{30} = 0,1$.

Если $_{\frac{1}{n}}q_{30\frac{1}{2}} = \frac{1}{39}$, то чему равно n?

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6.

3.23. Найти $_9q_{15}$, если $\mu_x = 1/(2+2x)$, $x \ge 0$.

a) 0,2; b) 0,4; c) 0,5; d) 0,6; e) 8.

3.24. Дана следующая таблица:

X	63	64	65
e_x	9,5	9,0	8,5

Найти вероятность того, что (63) не доживет до 65 лет.

a) 1/20; b) 2/21; c) 0,1; d) 0,2; e) 13/70.

3.25. Пусть μ_x = *const* на $0 < x < 20$ и соответствует закону Муавра при $x > 20$, причем μ_x непрерывна. Также известно, что $e_{30} = 20$, ln2 = 0,7; ln3 = 1,1. Найти 25 %-ный процентиль распределения времени жизни *X*.

a) 10; b) 15; c) 25; d) 40; e) 51.

3.26. Известно, что $e_x = 5$ для $x = 0,1,2,...$ Найти *VarK* для (30), если *K*- целая часть будущего времени жизни.

a) 5; b) 15; c) 25; d) 30; e)35.

3.27. Дано, что ${}_tp_x = 1 - 0{,}6t + 0{,}12t^2 - 0{,}008t^3$, $0 \le t \le$. Найти μ_{x+3}.

a) 0,5; b) 0,75; c) 1; d) 1,25; e) 1,5.

3.28. Известно, что $l_x = 100 - 15x - 6x^2 + x^3$, $0 \le x \le 15$. Из 100 новорожденных определить, каким является максимальное число ожидаемых смертей внутри одногодичного интервала.

a) 26; b) 26.25; c) 26,5; d) 26,75; e) 27.

3.29. Пусть $\mu_x = 3/(200-2x)$, $0<x<100$. Найти ${}_{28|11}q_{36}$.

a) 91/512; b) 8/27; c) 11/36; d) 27/64; e) 4/5.

3.30. Известно, что $l_x = (k+x)^{-3}$, $x \ge 10$ и ожидаемый возраст смерти для (40) равен 63 годам. Найти k.

a) 4; b) 0; c) 3; d) 6; e)23.

3.31. Дано, что $l_x\mu_x = 0{,}01$, $0 \le x \le w$, ${}_5p_{25} = 12/13$. Найти e_{31}.

a) 29; b) 29,5; c) 30; d) 30,5; e) 31.

3.32. Пусть $\mu_x = 0{,}5x$, $x > 0$. Найти квантиль уровня 0,75 для распрелеления *X*.

a) ln2; b) 2ln2; c) $\sqrt{\ln 2}$; d) $\sqrt{2\ln 2}$; e) $2\sqrt{2\ln 2}$.

3.33. Если $R(x,t) = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}\,{}_tp_x}{\frac{\partial}{\partial t}\,{}_tp_x}$, то какие из следующих утверждений верны:

1) если T экспоненциально распределено, то $R(x, t) > 0$;

2) если T экспоненциально распределено, *то* $R(x,t) < 0$;

3) если T равномерно распределено, то $R(x,t) > 0$.

a) 1; b) 2; c) 3; d) 1 и 2; e) 2 и 3.

IV. *Страхование жизни.*

4.1. Предполагая, что $\delta = 0$, $\int_0^\infty l_{x+t}\,dt = 100$, $l_x = 200$, найти $\int_0^\infty {}_{m|}\bar{A}_x\,dm$.

a) 0,46; b) 0.48; c) 0,50; d) 0,52; e) 0,54.

4.2. Для лица (95) вероятность умереть в следующие 5 лет определяются следующим образом:

${}_kq_{95} = 0{,}14 + 0{,}03k$; $k = 0,1,2,3,4$; $\delta_t = 1/(1+t)$.

Найти разовую нетто-премию для страхования жизни, выплачивающего 10 000$ в конце года смерти.

a) 2 600; b) 2 620; c) 2 640; d) 2 660; e) 2680.

4.3. Известно, что $\ln {}_tp_x = -0{,}04$, $t \ge 0$, $\delta = 0{,}06$. Найти $\bar{A}_{x:\bar{0}|}$.

a) 0,25; b) 0,37; c) 0,38; d) 0,50; e) 0,62.

4.4. Пусть величина

$$Z = \begin{cases} 0; & 0 \le T \le 5. \\ v^T; & 5 \le T \le 25. \\ 0; & T > 25. \end{cases}$$

При этом $\delta = 0{,}06$, а $\mu_x = 0{,}04$ при всех *x*. Найти med_Z.

a) 0; b) 0,18; c) 0,36; d) 0,54; e)0,7.

4.5. Рассмотрим срочное двадцатилетнее страхование с $\mu_x = 0{,}01$. $\delta = 0{,}08$. Найти 90 %-ный квантиль для распределения настоящей стоимости выплат, если иски выплачиваются в момент смерти.

a) $(0{,}8)^8$; b) $(0{,}8)^9$; c) $(0{,}9)^8$; d) $(0{,}9)^9$; e) ни один из перечисленных.

4.6. Дано l_x = 100- x, $^2\bar{A}^1_{20:\overline{30}|} = K$. Найти $\bar{A}_{40}$.

a) 3K/8; b*) K; c) 2K; d)8K/3*; e) ни один из вышеперечисленных.

4.7. Пусть $_{10}p_{20} = 0{,}75$, $v^{10} = 0{,}6$. Найти $^2\bar{A}^1_{20:\overline{10}|}$.

a) 0,24; b) 0,27; c) 0,30; d) 0,33; e) 0,36.

4.8. Предположим, что выполняется закон Муавра с $w = 120$. При этом $\delta = 0{,}1$. Найти *VarZ,* где *Z* - настоящая стоимость полного страхования для лица (20) с выплатой 1 у. е. в момент смерти.

a) 0,005; b) 0,01; c) 0,04; d) 0,05; e) 0,067.

4.9. Пусть

$$Z = \begin{cases} 0; & 0 \le T \le 5. \\ v^T; & 5 \le T \le 20. \quad \mu_x = 0{,}025;\ \delta = 0{,}05. \\ 0; & T > 20. \end{cases}$$

Найти значения $f_Z(0{,}64)$ и $f_Z(0{,}25)$.

a) (5/8, 1); b) (5/8, 0); c) (0, 0); d) (0, 1); e)(1, 1).

4.10. Пусть

$$Z = \begin{cases} v^T; & 0 \le T \le n. \\ 0; & T > n. \end{cases}$$

и при этом $med_z = 1/32$, $\mu = 0{,}011$. Найти δ.

a) 0,0022; b) 0,011; c) $(0{,}011)^5$; d) 0,055; e) 0,5.

4.11. Пусть (5) покупает страховку с функцией

$$Z = \begin{cases} 0; & 0 \le T \le 5. \\ v^T; & 5 \le T \le m+5. \\ 0; & T > m+5. \end{cases}$$

Выполняется закон Муавра с $w = 25$. Также известно, что $\delta = 0{,}05$, $v^5 = 0{,}779$, $EZ = 0{,}306$. Найти *m* с точностью до ближайшего целого.

a) 5; b) 6; c) 8; d) 10; e) 15.

4.12. Пусть выполняется закон Муавра. Известно, что $e_{20} = 20$, $i = 0{,}04$, *ln*l,04 = 0,0392.

Найти $\dfrac{^2A_{40}}{^2\bar{A}_{40}}$.

a) 0,5; b) 0,924; c) 0,943; d) 0,916; e) 0,981.

4.13. Известно, что $Z = v^T$, $T \ge 0$, $x = 40$, $\delta = 0{,}04$, $s(x) = (100\text{-}x)/100$, $0 \le x \le 100$.

Процентиль уровня *α* для величины Z равен $e^{-0{,}36}$. Найти *α*.

a) 9; b) 15; c) 50; d)85; e)91.

4.14. Дано, что $\mu_x = \delta = 0{,}05$. Найти $(\bar{I}\bar{A})^1_{30:\overline{10}|}$.

a)5; b) 5e -< 5; c) 0,5; d) 0,6; e) 0,7.

4.15. Дано.что *d= 1/11*, $\mu_x = const$. Найти p_x, если $^2A_x = 10/13$.

a) 0,3; b)0,4; c) 0,5; d) 0,6; e)0,7.

4.16. Найти A_4, если известно следующее: $A_3 = 0,75$, i = 0,1.

X	2	3	4	5
l_x	65	50	32	27

a) 0,73; b) 0,74; c) 0,75; d) 0,76; e) 0,77.

4.17. Страховщик продает 5-летнее срочное страхование на сумму 10$ каждому из 100 лиц возраста 50. Иск оплачивается в момент смерти. Найти требуемую страховую нагрузку как процент к разовой нетто-премии, если страховщик хочет быть уверен на 84 % в наличии достаточных фондов(использовать нормальное распределение). Также известно, что ${}^2\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}|} = 1/8$, $\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}|} = 1/4$.

a) 5 %; b) 10 %; c) 15 %; d) 20 %; e) 25 %.

4.18. Полис, но которому выплачивается 50 000$ в момент смерти предлагается лицу (25). Известно, что 90 %-ный процентиль распределения настоящей стоимости иска равен 40 123$. Предполагаем закон Муавра с $w = 75$. Найти предполагаемую процентную ставку i.

a) 0,035; b) 0,04; c) 0,045; d) 0,05; e) 0,055.

4.19. Близнецы возраста 40 покупают страховки, разовые нетто - премии которых выражаются премиями: $100(I^{(12)}A)_{40}$ и $100(IA)_{40}$ соответственно. Каждый умирает в возрасте 63,70. Каково превышение иска по случаю смерти первого брага над вторым?

a) -5$; b) -3,33$; c) 0$: d) 3,33$; e) 5$.

4.20. Пусть $q_x = 1/(80-x)$; x = 0,1,…,79 , $\bar{A}^{1}_{49:\bar{5}|} = 1/32$, i = 1. Найти $e_{20:\bar{n}|}$.

a) 4,10; b) 4,50; c) 4,70; d) 4,75; e) 4,79.

4.21. Пусть $v^t = {}_tp_x$, $t \geq 0$, $10000\,{}_{15|}A_x = 1157$. Найти δ.

a) 0,04849; b) 0,04879; c) 0,04909; d) 0,04939; e) 0,05.

V. ***Аннуитеты жизни.***

5.1. Дано, что $\mu_{x+t} = \mu$, $t \geq 0$. Что верно:

$$1)\ \bar{A}_x < \frac{i}{\delta} A_x;\quad 2)\ A_x = \frac{q_x}{q_x + i};\quad 3)\ \frac{a_x}{\ddot{a}_x} = {}_1E_x\ ?$$

a) только 1); b) только 2); c) только 3); d) 2) и 3); e)все.

5.2. Дано, что $\mu_{x+t} = \mu$ постоянна, $t \geq 0$, $A_x = 2a_x$. Найти μ.

a) 1; b) 2; c) 3; d) ln3; e) мало информации.

5.3. Известно, что $\mu = 0,03$, $\delta = 0,09$. Что верно:

1) $E\bar{a}_{\bar{T}} = 25/3$; 2) $Var\,\bar{a}_{\bar{T}} = 9,92$; 3) $P(2\bar{a}_{\bar{T}} - \bar{a}_x < 0) = 0,855$.

a) 1); b) 1) и 3); c) 1) и 2); d) 2) и 3); e) все.

5.4. Найти ожидаемое значение величины Y для (25) с точностью до 0,05, если

$$S(x) = (100-x)/100,\ x \in [0,100];\ i = 0,05;$$

$$Y = \begin{cases} a_{\bar{k}|},\ k = 0,1,2,...,5. \\ a_{\bar{5}|},\ k = 6,7,8... \end{cases}$$

a) 3,85; b)3,95; c) 4,05; d)4,15 e)4,25.

5.5. В предположении, что $\mu = 0,02$ и $\delta = 0,04$, найти вероятность того, что ${}_{10|}a_{20}$ будет недостаточно, чтобы обеспечить отсроченный пожизненный аннуитет 1$ в год, начинающийся в возрасте 30.

a) 0,5; b) 0,55; c) 0,67; d) 0,65; e) 0,7.

5.6. Найти P($\bar{a}_{\overline{T}} > \bar{a}_x$), если $\mu_x = 0{,}02$, для всех x и $\delta = 0{,}1$.

a) $1/5^6$; b) $1/5^{1/6}$; c) $1/6^5$; d) $1/6^{1/5}$; e) мало информации.

5.7. Непрерывный аннуитет жизни с платежом 10$ в год продается ста страхуемым. Найти минимальную необходимую сумму в начальном фонде, чтобы продавец аннуитета был с вероятностью 0,95 уверен, что все платежи будут сделаны по графику. Известно, что $\mu = 0{,}04$ и $\delta = 0{,}06$. Использовать нормальную аппроксимацию.

5.8. Даны две величины

$$Y_1 = \begin{cases} a_{\overline{k}|}, \; k = 0, n-1. \\ 0, \; k = n, n+1, \dots \end{cases} \qquad Y_2 = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, \; k = 0, n-1. \\ 0, \; k = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Найти $EY_2 - EY_1$.

a) ${}_nq_x$; b) ${}_np_x$; c) ${}_{n-1|}q_x$; d) ${}_{n-1}p_x$; e) 1.

5.9. Найти *EY), если* $Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$. Выбрать из следующих трех вариантов:

I. $Y = {}^2a_x$.

II. $\frac{1}{d}\left(2\ddot{a}_x - (2-d)^2\ddot{a}_x\right)$

III. $\frac{2}{d}\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x$.

a) I; b) II; c) III; d) I и II; e) I и III.

5.10. Найти $\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|}$, если ${}^2A_X = 0{,}035$, $A_x = 0{,}08$, ${}^2\ddot{a}_x = 2{,}679$.

a) 0,89; b)0,91; c)0,93; d)0,95; e)0,97.

5.11. Пусть $l_x = 10000 - x^2$, $0 < x < 100$, $i = 0{,}05$, $x = 40$.

Найти $\frac{1 + v\ddot{a}_x - (1+i)a_x}{A_x}$

a) l; b) 1,05; c) 1,95; d) 2; e) 2,05.

5.12. Найти *β(4)*, если $i = 0{,}08$.

a) 0; b) 0,378; c) 0,385; d) 0,425; e) невозможно определить

VI. ***Нетто-премии жизни.***

6.1. Известно, что выполняется следующее равенство:

$$\Phi \frac{\partial}{\partial x} \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_x.$$

Найти *Φ,* если $\delta = 0{,}1$ и $\bar{A}_x = 0{,}6$.

a) 16; b) 20; c) 24; d) 32; e) 64.

6.2. Найти дисперсию случайной величины потерь для контракта пожизненного страхования в размере 1$ с выплатой в конце года смерти в предположении, что $\mu = const$, $q = 0{,}01$, $i = 0{,}01$.

a) 0,03; b) 0,035; c) 0,04; d) 0.045; e) 0,05.

6.3. Упростить выражение $\dfrac{{}_mP_{x:\overline{m+n}|} - {}_mP_x}{P^1_{x:\overline{m}|}}$

a) $A_{x+m} - A_{x+m:\overline{n}|}$; b) $A_{x+m:\overline{n}|} - A_{x+m}$; c) $A_{x+n:\overline{m}|} - A_{x+n}$; d) $A_{x+m:\overline{n}|} - A_{x+n}$; e) ни один из предложенных.

6.4. Пусть ${}_{k|}q_x$ = 0,79*0,21^k, k = 0,1.2..., i = 0,1. Найти отношение стандартного отклонения потерь, связанного с годовой премией для контракта дискретного страхования к такой же величине для стандартного страхования. Предполагается страхование с единичной выплатой для лица (35).

a) 8,6; b) 8,9; c) 9,4; d) 9,7; e) 10,0

6.5. Найти P_0, согласно принципу эквивалентности, если ${}_{k|}q_o = k/10$, k = 0,1,2,3,4, i=0,05.

a) 0,09; b) 0,17; c) 0,19; d)0,22; e)0,25.

6.6. Известно, что $\ddot{a}_x^{(4)} = 10/9 \cdot \ddot{a}_x^{(12)}$, $P_x^{(4)} = 0{,}027$. Найти $P_x^{(12)}$.

a) 0,025; b) 0,03; c) 0,033; d) 0,035; e) 0,042.

6.7. Пусть A_x = 0,4 для целых x, i = 0,06. Найти с точностью до 1 000 дисперсию потерь при дискретном пожизненном страховании (30), выплачиваемом в конце года смерти, если ежегодная нетто-премия определяется по принципу эквивалентности.

a) 205 000; b) 210 000; c) 230 000; d) 235 000; e) 250 000.

6.8. Предполагаем, что $\mu_x = \mu$, i = l, и дисперсия величины потерь для дискретного пожизненного страхования на единицу равна 1/14. Найти сумму всех возможных значений, которые может принимать q_x.

a) 3/14; b) 3/7; c) 1/2; d) 13/14; e) 15/14.

6.9. Дано, что δ = 0,05, μ_x = 0,05 для всех x. Найти $P^{(2)}(\bar{A}_x)$.

6.10. Рассматривается величина

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \le T < 10. \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{10}|}, & 10 \le T < 30.. \\ \bar{a}_{\overline{30}|} - \bar{a}_{\overline{10}|}, & T \ge 30. \end{cases}$$

Известно, что EY = 2,8. Найти ежегодную нетто-премию, выплачиваемую для десятилетнего страхования дожития (30) на 1 000 с выплатой в момент смерти, если δ = 0,1, а $\bar{a}_{30:\overline{30}|} = 6{,}8$.

a) 140; b) 150; c) 160; d) 170; e) 180.

6.11. Пожизненная страховка с выплатой в момент смерти продается лицу (30). Премии определяются по принципу эквивалентности. Найти вероятность того, что страховщик не потерпит убытки, если μ = 0,05 и δ = 0,03.

a) ½; b) $(3/8)^{5/9}$; c) $(3/5)^{3/5}$; d) $(5/8)^{5/3}$; e) $(8/5)^{3/5}$.