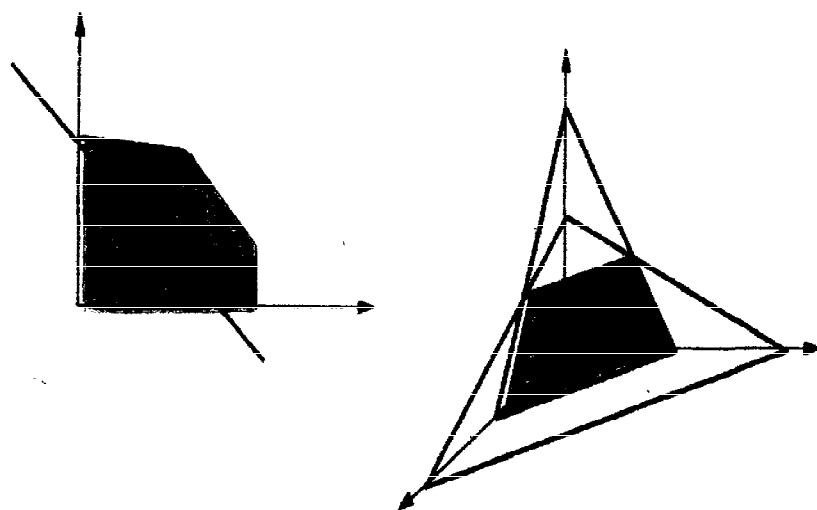
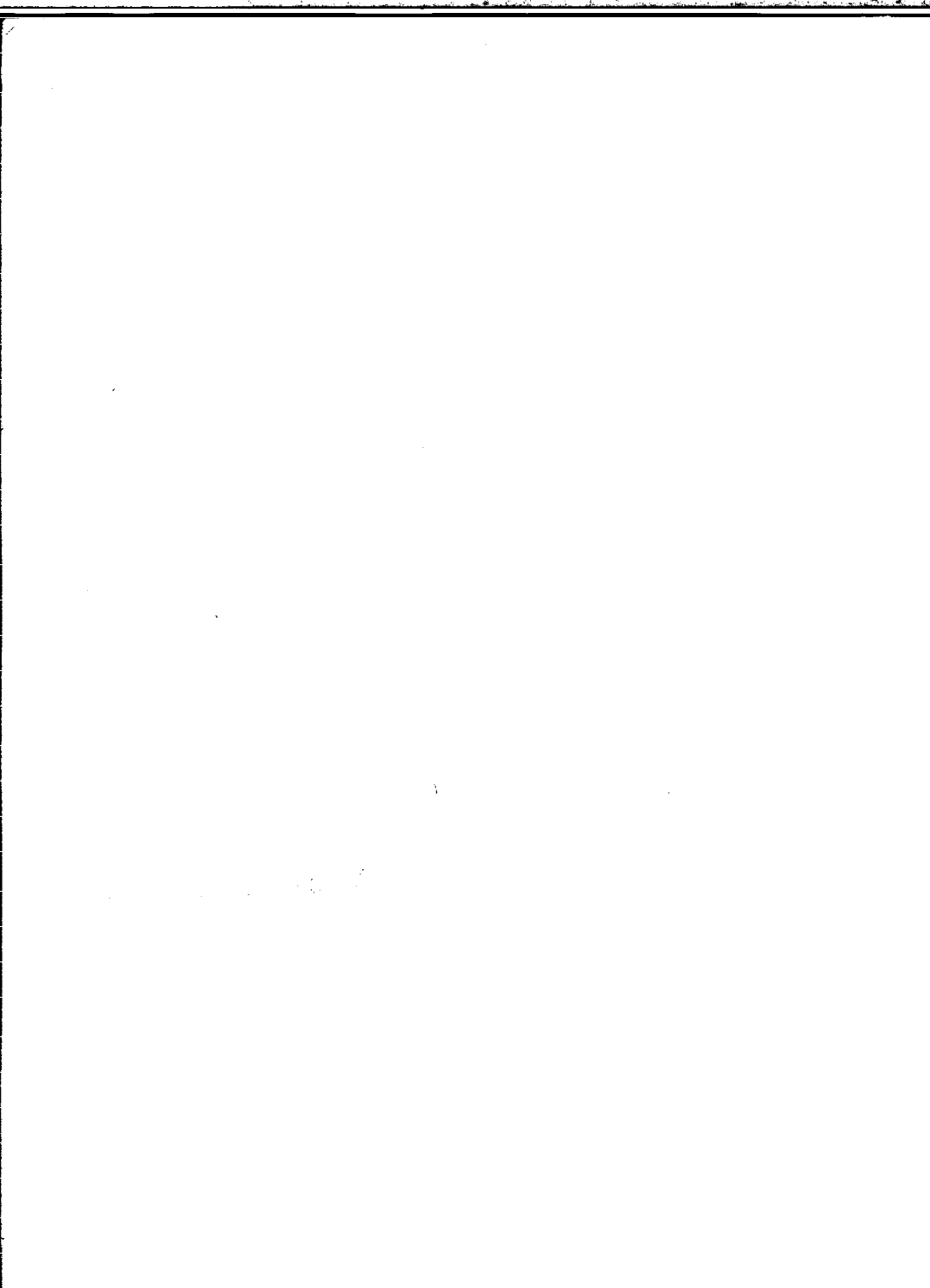


М.С. БЕСПАЛОВ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ



Владимир 1999



Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Владимирский государственный университет

М.С.БЕСПАЛОВ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Курс лекций и задания типового расчета

Владимир 1999

УДК 519.852
Б 53

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и методики преподавания математики Владимирского государственного педагогического университета, профессор

Ю.А. Алхутюв

Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики Владимирского государственного университета, профессор

К.В. Валиков

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Беспалов М.С.

Б 53 Линейное программирование: Курс лекций и задания
 типового расчета / Владим. гос. ун-т. Владимир, 1999. 32 с.
ISBN 5-89368-119-3

Курс лекций по линейному программированию содержит основные методы решения задач линейного программирования: геометрический и симплекс-метод. Предложены индивидуальные задания типового расчета по линейному программированию.

Курс лекций предназначен для студентов специальностей: 0608 – экономика и управление (по отраслям), 0611 – менеджмент, 0615 – маркетинг. Пособие может быть полезно студентам специальности 0102 – прикладная математика.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр. 6 назв.

УДК 519.852
Б 53

ISBN 5-89368-119-3

© Владимирский
государственный
университет, 1999

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие составлено на основе курса лекций по линейному программированию, который читался студентам экономических специальностей университета. Выбор материала, о котором можно судить по оглавлению, во многом определялся требованиями простоты, доступности и наглядности изложения, поэтому доказательства довольно сложного симплекс-метода опущены. Приведено лишь геометрическое обоснование метода.

Подробно изложен алгоритм симплекс-метода, причем реализация алгоритма симплекс-метода существенно отличается от его реализации в задачниках по линейному программированию. Если составление и анализ таблицы симплекс-метода, описанный в существующих книгах, представляет трудность даже для преподавателей, то аналогичные вычисления по предложенному в данном пособии алгоритму выполнялись практически всеми студентами, обучающимися по специальности 0608 в нашем университете, самостоятельно.

В конце пособия приведены индивидуальные задания типового расчета по линейному программированию.

В курсе лекций подчеркивается экономический характер решаемых задач. В частности, дана экономическая трактовка двойственной задачи.

В курс лекций не включена транспортная задача по следующим причинам. Ее можно решить методами, описанными в пособии. Транспортная задача рассматривается в курсе экономико-математических методов и поэтому не включена в довольно насыщенную рабочую программу по высшей математике. Метод решения транспортной задачи приведен в учебном пособии С.А.Максимова "Математическое моделирование".

Данный курс лекций можно считать вводным в математическое программирование, поэтому он может быть полезен не только студентам экономических специальностей, но и студентам специальности 0102 - прикладная математика.

Новый подход в реализации симплекс-метода можно предложить в качестве усовершенствования методики преподавания данного раздела высшей математики.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из необходимых условий развития экономики как науки является использование точных методов количественного анализа, активное применение математики. Этому способствует широкое внедрение вычислительной техники в экономические исследования и планирование. Особое место занимают методы оптимального планирования, которые составляют сущность математического программирования.

В математическом программировании можно выделить три основные составные части: линейное, нелинейное и динамическое программирование, которые относятся к численным методам отыскания оптимального решения управляемых процессов. Математическое программирование является частью курса оптимального управления, который наряду с методами вычислений и дискретной математикой составляет основу специальных курсов для студентов специальности прикладная математика.

По-видимому, впервые постановка задачи линейного программирования в виде предложения по составлению оптимального плана перевозок, минимизирующего "суммовый километраж", встречается в работе советского экономиста А.Н.Толстого в 1930 г. В 1931 г. венгерский математик В.Эгервари предложил метод решения задачи линейного программирования, который получил название венгерского метода.

В 1939 г. перед двадцатипятилетним профессором Ленинградского университета Л.В.Канторовичем была поставлена задача: как наилучшим образом распределить работу восьми станков фанерного треста при условии, что известна производительность каждого станка по каждому из пяти видов обрабатываемых материалов? С решения этой задачи методом разрешающих множителей началось систематическое исследование задач линейного программирования и разработка общих методов решения этих задач.

В 1949 г. Л.В.Канторович и М.К.Гавурич разработали метод потенциалов для решения транспортной задачи, которую в 1941 г. поставил Хичкок.

В это же время повышенный интерес к задачам линейного программирования стали проявлять зарубежные и прежде всего американские ученые. Методы линейного программирования применялись и одновременно развивались во время второй мировой войны для планирования военных операций. В 1938 г. в США был введен термин "исследование операций" в качестве характеристики рода деятельности особой исследовательской

группы, выполняющей работы по анализу военных систем. Этот анализ являлся основой для принятия командованием соответствующих решений. В дальнейшем "исследование операций" стало одним из основных специальных математических курсов в военных училищах.

Основной метод решения задач линейного программирования, симплексный метод, был опубликован в 1949 г. Дж. Данцигом. Выделим работу, опубликованную в 1951 г. Куном и Таккером, в которой приведены необходимые и достаточные условия оптимальности нелинейных задач.

Следующим крупным этапом в развитии математического программирования явился переход к отысканию оптимального решения многоэтапных задач. Задачи, где основные ограничения меняются при переходе к следующему этапу, являются задачами динамического программирования. Динамическое программирование, как самостоятельная дисциплина, сформировалась в пятидесятые годы уходящего века. Большой вклад в ее развитие внес американский математик Р. Беллман. Дальнейшее развитие этих результатов в основном американскими учеными под руководством Р. Беллмана и группой советских математиков, возглавляемых академиком Л. С. Понтрягиным, составляют основу математической теории оптимальных управляемых процессов.

Исследование операций развивалось не только как чисто математическая дисциплина. С пятидесятих годов для исследования обоснования решений сложных проблем политического, социального, военного, экономического, научного и технического характера стала применяться совокупность методологических средств, получивших название системный анализ. Системный анализ базируется на ряде прикладных математических дисциплин. Когда в задаче системного анализа имеется одна четко выраженная цель, степень достижения которой можно оценить на основе одного критерия, используются методы математического программирования.

Таким образом, мы отметили сколь широкое распространение получили идеи, лежащие в основе линейного программирования, отправной точкой для которых послужило решение простой экономической задачи. Признанием заслуг академиков Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова и профессора В. В. Новожилова явилось присуждение им в 1965 г. Ленинской премии. В 1975 г. совместно с американским ученым Т. Купмансом Л. В. Канторович получил Нобелевскую премию за вклад в теорию оптимизации распределения ресурсов.

1. Построение математической модели простейших экономических задач

Рассмотрим следующую простейшую задачу.

Задача 1. Для производства 1 кг продукции можно использовать первую технологию, когда перерабатывается 3 кг сырья А и 3 кг сырья В, или вторую - перерабатывается 5 кг сырья А и 1 кг сырья В. Составить план позволяющий выпустить максимум продукции, если в наличии есть 30 кг сырья А и 18 кг сырья В. Условие этой задачи удобнее изобразить с помощью следующей матрицы затрат, добавив к ней столбец ресурсов и строчку, соответствующую плану выпуска продукции:

сырье	технология		ресурсы
	первая	вторая	
А	3	5	30
В	3	1	18
план	x	y	

Перейдем к математической модели данной задачи.

Предложенный план предполагает выпуск x кг товара, изготовленного по первой технологии, y кг - по второй технологии, и соответствует производству $(x + y)$ кг готовой продукции. Требуется найти максимум функции $f(x, y) = x + y$ при ограничениях на ресурсы. При данном плане выпуска используется $(3x + 5y)$ кг сырья А и $(3x + y)$ кг сырья В. Запишем ограничения на ресурсы $3x + 5y \leq 30$ и $3x + y \leq 18$. Добавим естественные ограничения неотрицательности экономических показателей плана $x \geq 0$, $y \geq 0$ и получим формулировку данной задачи линейного программирования

$$f(x, y) = x + y \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 30, \\ 3x + y \leq 18, \end{cases} \quad (2)$$

$$x, y \geq 0, \quad (3)$$

которая читается так: найти максимум целевой функции $x + y$ при указанных ограничениях.

Немного изменив условия исходной задачи, получим другую задачу.

Задача 2. Пусть цена 1 кг товара, изготовленного по первой технологии - 2 рубля, а изготовленного по второй - 1 рубль. Составить план выпуска продукции, дающей наибольшую стоимость товара.

Матрица затрат будет следующей:

сырье	технология		ресурсы
	первая	вторая	
А	3	5	30
В	3	1	18
цена	2	1	
план	x	y	

Ей соответствует следующая задача линейного программирования:

$$f(x, y) = 2x + y \mapsto \max,$$

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 30, \\ 3x + y \leq 18, \end{cases}$$

$$x, y \geq 0.$$

Изменилась только целевая функция.

Задача 3. Составить план выпуска товара в задаче 2 при условии, что сырье В должно быть полностью израсходовано.

Получим следующую задачу линейного программирования:

$$f(x, y) = 2x + y \mapsto \max,$$

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 30, \\ 3x + y = 18, \end{cases}$$

$$x, y \geq 0.$$

2. Постановка задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) может быть сформулирована в стандартном виде (ЗЛПСВ): найти максимум (или минимум) линейной формы при линейных ограничениях в виде неравенств:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \mapsto \max, \quad (4)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \end{cases} \quad (5)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (6)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точка n -мерного пространства, которую назовем планом ЗЛП. Функция n переменных $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ – целевая функция, а вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции.

Задача вычисления минимума целевой функции $f(x)$ при ограничениях (5,6) эквивалентна задаче вида (4)-(6) вычисления максимума целевой функции $-f(x)$ (то есть значения коэффициентов целевой функции меняются на противоположные). Аналогично, если при построении системы ограничений в виде неравенств встретится неравенство вида $\geq$, то, изменив все знаки слагаемых левой и правой частей неравенства на противоположные, получим неравенства вида (5). Ограничения (5) можно записать в матричном виде $AX \leq B$, где A – матрица затрат, B – столбец заданных ресурсов, X – столбец неизвестных, составляющих план ЗЛП:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Отметим, что задача нахождения максимума линейной функции $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d$ эквивалентна задаче по вычислению максимума линейной формы $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ при тех же ограничениях.

Требования неотрицательности значений плана называют основными ограничениями, так как они обусловлены экономическим характером задач и присутствуют в большинстве практических задач.

Если для целевой функции использовать обозначения в виде скалярного произведения c вектора коэффициентов целевой функции $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ и вектор-плана $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то ЗЛПСВ (4)-(6) короче записывается так:

$$\begin{aligned} c x &\mapsto \max, \\ A X &\geq B, \\ X &\leq 0. \end{aligned}$$

Канонической формой задачи линейного программирования (КФЗЛП) называется задача:

$$\begin{aligned} cx &\mapsto \max, \\ AX &= B, \\ X &\leq 0, \end{aligned}$$

то есть задача вычисления максимума линейной формы при ограничениях в виде равенств (что соответствует требованию полного использования ресурсов) и основных ограничений. В развернутом виде берется запись (4)-(6) и в условиях (5) неравенства меняются на равенства.

Кроме ЗЛПСВ и КФЗЛП существуют смешанные ЗЛП, где встречаются ограничения как в виде равенств, так и в виде неравенств. В некоторых случаях требования неотрицательности значений плана отсутствуют или накладываются не на все переменные. Такую задачу также можно решать графически, но ее мы не будем называть ЗЛП.

3. Переход от стандартного вида задачи линейного программирования к канонической форме и наоборот

От ЗЛПСВ легко перейти к КФЗЛП методом введения фиктивных переменных. Например, задача (1)-(3) сводится к задаче:

$$\begin{aligned} x + y &\mapsto \max, \\ \begin{cases} 3x + 5y + x_1 &= 30, \\ 3x + y + x_2 &= 18, \end{cases} \\ x, y, x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

путем добавления неотрицательных формальных переменных x_1, x_2 . Для любого плана (x, y, x_1, x_2) , удовлетворяющего данной системе ограничений, верны условия (2) с теми же x, y . И наоборот, для любого плана, удовлетворяющего условию (2), найдутся неотрицательные x_1, x_2 , дополняющие левые части ограничений (2) до равенств.

Обратный переход от КФЗЛП к ЗЛПСВ также всегда можно осуществить. Приведем систему ограничений к следующему виду с помощью

элементарных преобразований метода Гаусса-Жордана:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & + y_2 & = b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n & & + y_k & = b_k, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, y_i \geq 0.$$

Здесь базисные переменные переобозначены буквами y , а свободные — буквами x . Отбросим переменные y , заменим равенства на неравенства и изменим целевую функцию, подставив в нее значения y_i из указанных уравнений. Получим эквивалентную ЗЛПСВ.

4. Графический метод решения задачи линейного программирования на плоскости

Рассмотрим задачу (1)-(3) подробно. Изобразим на плоскости множество U , удовлетворяющее системе неравенств. Это четырехугольник $OBAC$, где $O(0,0)$, $B(6,0)$, $C(0,6)$. Проведем на плоскости линии уровня целевой функции $f(x,y)$: $x+y=4$ и $x+y=9$. Числа 4 и 9 взяли произвольно.

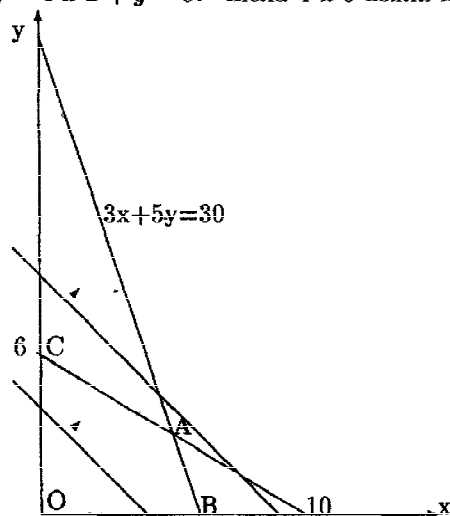


Рис.1 Многогранник допустимых планов — четырехугольник $OBAC$

Графики линий уровня параллельны. Первый график пересекает область U , а второй не пересекает. Идея геометрического метода состоит в том,

что параллельным переносом линии уровня в направлении оптимизации целевой функции (в данном примере от первого графика ко второму, так как при этом максимизируем значение целевой функции), которое отмечено на рис.1 стрелкой, находят крайнее положение линии уровня целевой функции. В данной задаче крайнее (оптимальное) положение линии уровня проходит через точку пересечения граничных прямых области U : $3x + 5y = 30$ и $3x + y = 18$. Решая систему уравнений, находим точку пересечения прямых – $A(5, 3)$. Значение целевой функции в точке A равно $5+3=8$ кг.

Ответ. При данных ограничениях наибольший объем выпускаемой продукции равен 8 кг и реализуется с помощью плана выпуска 5 кг по первой технологии и 3 кг по второй.

Замечание. Если в задаче (1)-(3) заменить целевую функцию на функцию $f(x, y) = 3x + y$, то в качестве оптимального плана можно брать любую точку отрезка $[A, B]$, где $B(6; 0)$.

Итак, для решения графически ЗЛПСВ с двумя неизвестными на плоскости необходимо, во-первых, изобразить на плоскости множество U , удовлетворяющее условиям (5,6), которое называется множеством допустимых планов. Во-вторых, рисуют линию уровня целевой функции, пересекающую множество допустимых планов, и параллельно передвигают ее в направлении оптимизации до граничного положения, которое соответствует решению данной ЗЛП.

5. Определения и обозначения. Геометрия n -мерного пространства

Аналогичный метод решения может быть использован и в общем случае ЗЛП для n переменных. Начнем с формулировки основных понятий

Напомним, что множество U называется *множеством допустимых планов*, если оно содержит все точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного пространства, координаты которых удовлетворяют системе ограничений (5,6).

План x^* называется *оптимальным планом*, если $x^* \in U$ и (для задачи максимизации целевой функции) $f(x^*) = \max_{x \in U} f(x)$ или (для задачи минимизации целевой функции) $f(x^*) = \min_{x \in U} f(x)$.

Решить ЗЛП – значит оптимизировать целевую функцию, что можно понимать двояко

Первая постановка задачи: найти какой-либо оптимальный план x^* или установить, что его нет.

с помощью линейных ограничений в виде равенств или нестрогих неравенств, то это множество замкнутое.

Утверждение 1. *Множество допустимых планов задачи линейного программирования является множеством, у которого конечное число угловых точек.*

Данное утверждение доказывается методом математической индукции по числу ограничений задачи линейного программирования.

Определение 8. Многогранником в n -мерном пространстве называется замкнутое, выпуклое множество с конечным числом вершин.

Утверждение 2. *Множество U допустимых планов ЗЛП является многогранником.*

Определение 9. Множество U в n -мерном пространстве называется ограниченным, если существует n -мерный шар такой, что множество U целиком содержится в этом шаре.

Утверждение 3. *Если множество U допустимых планов замкнутое, выпуклое, ограниченное (то есть U – ограниченный многогранник), то оптимальный план существует. Если же множество допустимых планов не ограничено, то оптимальных планов может не существовать.*

Доказательство утверждения опирается на графический метод решения, который описан ранее. К его реализации в n -мерном пространстве переходим сейчас.

Множество точек линии уровня $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = A$ целевой функции $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ есть плоскость в трехмерном пространстве, то есть при любом A линия уровня целевой функции $f(x)$ задает пространство точек размерности 2 в пространстве размерности 3. Аналогично в n -мерном пространстве.

Определение 10. Множество точек n -мерного пространства, которое удовлетворяет линейному уравнению, называется гиперплоскостью в n -мерном пространстве, (это пространство точек размерности $(n - 1)$).

Гиперплоскость разбивает n -мерное пространство на 2 полупространства, каждое из которых задается соответствующим линейным неравенством (где в линейном уравнении гиперплоскости заменили знак $=$ на знак $\leq$ или $\geq$). Сама гиперплоскость является границей для этих замкнутых полупространств и входит в каждое из них. В частности, гиперплоскость и полупространство – это многогранники без вершин. Отсюда, согласно следующему утверждению 4, вытекает доказательство утверждения 2.

Утверждение 4. *Пересечение двух многогранников – многогранник.*

Доказательство утверждения состоит из доказательства трех лемм.

Лемма 1. *Пересечение замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Пусть U_1 и U_2 замкнуты. Тогда для любого $x \in U_1 \cap U_2$ существуют $S_{R_1}(x)$ и $S_{R_2}(x)$ такие, что $S_{R_1}(x) \subset U_1$, $S_{R_2}(x) \subset U_2$. Если $R = \min(R_1, R_2)$, то $S_R(x) \subset U_1 \cap U_2$.

Лемма 2. *Пересечение выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство. Пусть U_1 и U_2 выпуклы. Возьмем две произвольные точки x и y из $U_1 \cap U_2$. Так как $x, y \in U_1$, то $[x, y] \subset U_1$. Так как $x, y \in U_2$, то $[x, y] \subset U_2$. Следовательно, $[x, y] \subset U_1 \cap U_2$.

Лемма 3. *Множество n -мерного пространства, заданное конечным числом линейных уравнений и неравенств, имеет конечное число вершин.*

Доказательство. Каждая вершина x многогранника U обладает следующим свойством. Если отрезок $[x, y]$, лежащий в U , продолжить за точку x , то все точки продолжения не принадлежат U . Это означает, что для точек продолжения отрезка какие-то неравенства системы ограничений не справедливы, а для точки x они обращаются в равенство. Причем, набор таких неравенств системы ограничений для каждой угловой точки свой. Это доказывается методом от противного для отрезка с концами в этих точках. Так как в задаче линейного программирования конечное число ограничений, то из них можно выбрать лишь конечное число подмножеств системы ограничений. Следовательно, и возможное число вершин конечно.

Обобщением понятия отрезка служит понятие выпуклой линейной оболочки точек пространства. Простейшее обобщение – это линейная оболочка трех точек или треугольник. Треугольником в n -мерном пространстве с вершинами в точках x, y, z называется множество точек v таких, что $v = ax + by + cz$, где $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 1$, a, b, c – числа. Понятие выпуклой линейной оболочки нескольких точек вводится аналогично.

Утверждение 5. *Любой ограниченный многогранник есть выпуклая линейная оболочка своих вершин.*

Доказательство данного утверждения, которое называется также теоремой представления [1], приводить не будем. Отметим, однако, что в нем широко используется следующее свойство линейности линейной формы.

Лемма 4. *Если $f(x)$ – линейная форма в R^n (то есть $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$), то $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ для любых $a, b \in R$, $x, y \in R^n$.*

Доказательство. Будем считать $f(x)$ целевой функцией и воспользуемся векторной записью целевой функции $f(x) = (\vec{c}, \vec{x})$ как скалярное произведение вектора $\vec{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ – коэффициентов целевой функции и вектора

$\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – радиус-вектора точки $x \in R^n$. В этих обозначениях радиус-вектор точки $ax + by$ равен $a\vec{x} + b\vec{y}$. Отсюда $f(ax + by) = (\vec{c}, a\vec{x} + b\vec{y})$, что по свойствам скалярного произведения равно $a(\vec{c}, \vec{x}) + b(\vec{c}, \vec{y})$. Следовательно, $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$.

6. Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Геометрический метод решения задачи линейного программирования в n -мерном пространстве совпадает с графическим методом, рассмотренным ранее. Построим или представим построение множества допустимых планов U в n -мерном пространстве. Построим линию уровня целевой функции $f(x) = C$, пересекающую множество U . Отметим, что линией уровня в n -мерном пространстве служит гиперплоскость. Параллельным переносом будем смещать данную гиперплоскость в сторону оптимизации целевой функции. Граничное положение гиперплоскости дает нам оптимальное значение целевой функции, а пересечение граничного положения гиперплоскости с множеством допустимых планов дает множество оптимальных планов.

Единственным, но существенным, недостатком данного метода является то, что его сложно реализовать или представить, если число измерений больше трех. Данный метод позволяет получить формулировку основного свойства множества оптимальных планов: *множество оптимальных планов является многогранником*. Это следует из утверждения 4, так как граничное положение гиперплоскости и множество U — многогранники. Отметим, что сформулированное утверждение является следствием также следующей теоремы.

Теорема. Если x^* – оптимальный план, то или x^* – угловая точка (вершина) множества допустимых планов U , или существуют точки $x, y \in U$ такие, что $x^* \in (x, y)$ (то есть x^* – внутренняя точка отрезка) и весь отрезок $[x, y]$ принадлежит множеству оптимальных планов.

Доказательство. Естественно, что $x^* \in U$, то есть является допустимым планом. Если x^* не вершина, то существует отрезок $[x, y] \subset U$ такой, что x^* – внутренняя точка отрезка, то есть $x^* = tx + (1-t)y$, где $0 < t < 1$. Для определенности рассмотрим задачу минимизации $f(x)$. Для нее имеем $f(x) \geq f(x^*)$ и $f(y) \geq f(x^*)$. Предположим, что хотя бы на одном конце отрезка целевая функция не достигает минимума, допустим $f(x) > f(x^*)$. По лемме 4 имеем $f(x^*) = tf(x) + (1-t)f(y)$. Вычтем из данного равенства

очевидное равенство $f(x^*) \doteq tf(x^*) + (1-t)f(x^*)$. Получим $t(f(x) - f(x^*)) + (1-t)(f(y) - f(x^*)) = 0$. Так как первое слагаемое положительно, а второе неотрицательно, то пришли к противоречию с предположением, что $f(x) > f(x^*)$. Тем самым доказано, что $f(x) = f(y) = f(x^*)$. Отсюда по лемме 4 следует, что и для любой внутренней точки отрезка x, y значение целевой функции в ней равно значению на концах отрезка.

Можно брать разные отрезки, удовлетворяющие теореме, и продолжать их до границы множества U . Точки этих отрезков, в том числе и граничные, также можно брать за исходные точки в теореме. Таким образом расширяя выпуклую линейную комбинацию оптимальных планов, можно получить все множество U^* . Правда в случае, когда множество U^* неограниченно, упомянутые отрезки продолжают также неограниченно до лучей. Однако, в любом случае этот процесс позволяет получить U^* в виде многогранника. Если к тому же этот многогранник ограниченный, то множество оптимальных планов, согласно утверждению 5, является выпуклой линейной оболочкой своих вершин.

Утверждение 6. Если множество оптимальных планов ограничено, то оно является выпуклой линейной оболочкой некоторых угловых точек множества допустимых планов.

Покажем, что вершины множества оптимальных планов U^* являются также вершинами множества U допустимых планов, то есть соответствуют опорным планам задачи линейного программирования. Пусть x_0 — вершина U^* , не являющаяся вершиной U . Тогда найдется отрезок $[x, y] \in U$, для которого x_0 является внутренней точкой и который пересекается с множеством U^* по единственной точке x_0 . Это означает, что в остальных точках отрезка значение целевой функции отлично от $f(x_0)$. По свойству линейности целевой функции на этом отрезке с одной стороны от точки x_0 значение целевой функции больше $f(x_0)$, а с другой меньше. Это противоречит условию оптимальности плана x_0 . Значит предположение было не верно.

Вывод. Множество оптимальных планов имеет один из следующих видов: пустое множество — $\emptyset$; точка — x^* ; отрезок $[x, y]$; треугольник, многоугольник (плоская фигура); пирамида или любой другой обычный многогранник в трехмерном пространстве и так далее. Перечисленные множества — выпуклая линейная оболочка своих вершин и они являются частным случаем введенного нами понятия многогранник. При этом вершины данного многогранника являются также вершинами многогранника допустимых планов, которым соответствуют опорные планы ЗЛП.

Следовательно, можно предложить другую реализацию геометрического метода решения ЗЛП – метод перебора: вычислить все опорные планы (то есть найти все вершины) многогранника допустимых планов и сравнить значения целевой функции в этих точках.

7. Симплекс-метод

Как отмечалось ранее, оптимальный план следует искать среди опорных планов. Хотя для любой задачи линейного программирования опорных планов конечное число, перебрать все опорные планы бывает очень сложно. Разработаны методы направленного перебора опорных планов, существенно сокращающие время поиска оптимального плана. Наиболее известным методом направленного перебора опорных планов является симплекс-метод.

При реализации этого метода мы от выбранного опорного плана по ребру многогранника допустимых планов переходим к соседнему опорному плану в сторону оптимизации целевой функции. Как правило на каждом шаге есть несколько ребер, по которым мы можем сместиться в сторону оптимизации. Начальный опорный план также выбирается случайно, поэтому при решении одной и той же задачи линейного программирования симплекс-методом могут встретиться различные последовательности опорных планов и найденные оптимальные планы могут различаться, если их существует для данной задачи более одного.

В основе симплекс-метода лежит метод Гаусса-Жордана решения системы линейных уравнений. Если геометрический метод удобнее применять для ЗЛПСВ, то симплекс-метод применяется для канонической формы ЗЛП.

В общем случае существенные трудности вызывает поиск начального опорного плана. При переходе от ЗЛПСВ к КФЗЛП начальный опорный план (точка начала координат) получается автоматически.

Обычно число уравнений в системе ограничений КФЗЛП меньше числа неизвестных. Будем также считать, что ранг матрицы системы ограничений равен числу строк этой матрицы, то есть среди ограничений нет лишних уравнений. В противном случае при проведении преобразований метода Гаусса возникает строка нулей. Это не столь существенно для реализации алгоритма, но сразу удлиняет описание алгоритма.

Приведем описание алгоритма симплекс-метода в предположениях, что начальный опорный план найден и для случая максимизации целевой функции.

цательны. Этим и объясняется сложность поиска начального опорного плана. Переход к следующей симплекс-таблице производится с учетом основного требования неотрицательности свободных членов.

Например, следующей системе ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

соответствует опорный план $x^0 = (0, 3, 1, 0, 6)$, так как расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Второй, третий и пятый столбцы – базисные. Значит x_2, x_3, x_5 – базисные переменные. Если положить для свободных переменных $x_1 = x_4 = 0$, то базисные переменные сразу вычисляются из соответствующих уравнений.

Вернемся к описанию нашего алгоритма и составим начальную таблицу симплекс-метода

1	i_2	i_m	i_1	n	С.С.Ч.	ВСП.СТ.
a_{11} ... 0 ... 0 ... 1	a_{1n}	b_1	c_{i_1}			
a_{21} ... 1 ... 0 ... 0	a_{2n}	b_2	c_{i_2}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
a_{m1} ... 0 ... 1 ... 0	a_{mn}	b_m	c_{i_m}			
$c:$ c_1 ... c_{i_2} ... c_{i_m} ... c_{i_1} c_n	0					
$\delta:$						

Первая строка этой таблицы информационная (ее часто вообще не приводят), в ней отметили номера переменных и наименования двух последних столбцов: С.С.Ч. – столбец свободных членов, ВСП.СТ. – вспомогательный столбец. В дальнейшем в информационной строке будем помечать базисные столбцы знаком *. Основную часть занимает расширенная матрица системы. В ней мы в данном случае указали конкретный вид трех из базисных столбцов. Под основной матрицей располагаются строка коэффициентов целевой функции – $c:$ и строка оценок – $\delta:$.

Заполнение таблицы осуществляется в следующем порядке:

Рассмотрим задачу:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \mapsto \max,$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Опорному плану $x^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ соответствует такой вид матрицы системы ограничений, что какие-то m столбцов имеют вид различных единичных столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть это столбцы с номерами $i_1, i_2, \dots, i_m$. Хотя порядок чисел $i_1, i_2, \dots, i_m$ совершенно произвольный, считаем, что i_k -ый столбец имеет такой вид, где единица стоит на k -ом месте. Столбцы с выделенными номерами (то есть такого вида) называются базисными, им соответствуют базисные переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$. Остальные переменные свободные. Значения базисных переменных в опорном плане, соответствующем данной матрице ограничений, легко вычисляются:

$$x_{i_1}^o = b_1, x_{i_2}^o = b_2, \dots, x_{i_m}^o = b_m.$$

Все остальные координаты опорного плана (свободные переменные) равны нулю.

Замечание. В КФЗЛП всегда присутствуют основные неравенства $x_i \geq 0$, которые носят экономический характер. Если в матрице системы ограничений уже выделен полный набор базисных столбцов, то базисные переменные примут значения свободных членов соответствующих уравнений. По этой причине в системе ограничений, для которых заполняется начальная симплекс-таблица, все свободные члены должны быть неотри-

Пункт 1. Записывается расширенная матрица системы.

Пункт 2. Записывается строка коэффициентов целевой функции.

Пункт 3. Отмечаются базисные столбцы.

Пункт 4. Заполняется вспомогательный столбец коэффициентами целевой функции, соответствующими данному выбору базисных столбцов.

Пункт 5. Записываются числа 0 и -1 в продолжении строки коэффициентов под столбцами С.С.Ч. и ВСП.СТ.

Пункт 6. Вычисляется строка оценок δ и значение целевой функции.

Поясним последние три пункта

В четвертом пункте для каждого базисного столбца коэффициент целевой функции, стоящий в этом столбце, поднимается до единицы и выносится вправо в вспомогательный столбец.

Числа 0 и -1 в пятом пункте придуманы для удобства и единообразия алгоритма, именно этим данный алгоритм выгодно отличается от реализаций его в других учебниках.

Результаты вычисления оценок по шестому пункту в таблице пока не приведены. Оценки для столбца вычисляются также, как вычисляется скалярное произведение двух векторов – берется сумма произведений соответствующих координат. В качестве перемножаемых векторов берем вспомогательный столбец и тот расширенный (то есть длиной $m+1$) столбец, для которого считаем оценку. При перемножении векторов, соответствующих столбцам С.С.Ч. и ВСП.СТ, получаем значение целевой функции на данном опорном плане

Например, для задачи

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 4x_5 \mapsto \max,$$

при условии

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

имеем первую симплекс-таблицу

	*	*		*		С.С.Ч.	ВСП.СТ.
	2	1	0	-6	0	3	1
	3	0	0	2	1	6	4
	2	0	1	1	0	1	0
c:	2	1	0	3	4	0	-1
b:	12	0	0	-1	0	27	

Составление симплекс-таблицы – это подготовительная работа симплекс-метода. Шаг симплекс-метода состоит в анализе симплекс-таблицы и переходе к следующей симплекс-таблице.

Сформулируем пункты одного шага алгоритма симплекс-метода.

1. Выбираем отрицательную оценку. Пусть j – номер столбца, для которого $\delta < 0$. Если отрицательную оценку не удаётся найти, (то есть $\delta_j \geq 0$ для всех j), то соответствующий опорный план оптимален.

2. Выбираем все положительные элементы основной матрицы j -ого столбца: $a_{i_1j}, \dots, a_{i_kj}$. Если $a_{ij} \leq 0$ для всех i , то оптимального плана не существует.

3. Выбираем разрешающий элемент a_{ij} .

4. Совершаем преобразования метода Гаусса-Жордана относительно разрешающего элемента.

5. Дополняем полученную таблицу до следующей симплекс-таблицы.

Замечание. Если в исходной ЗЛП требуется найти минимум целевой функции, а не максимум, то знаки неравенств в первом пункте надо поменять на противоположные, то есть ищем положительную оценку и считаем план оптимальным, если таковых нет. Остальные пункты алгоритма для задачи минимизации остаются без изменения.

Пояснения к алгоритму.

Первый пункт. Если есть несколько отрицательных оценок, то выберем любую из них. Этот выбор влияет на то, как быстро придем к оптимальному плану.

Второй пункт. Если в j -ом столбце всего один положительный элемент матрицы, то он и будет разрешающим элементом.

Третий пункт. Для всех элементов, выбранных в пункте 2, найдем соответствующие свободные члены $-b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}$ и вычислим отношения b_s/a_{sj} , где s пробегает значения $i_1, \dots, i_k$. Тот номер s , для которого данное отношение минимально, назовем i . Элемент a_{ij} будет разрешающим, то есть i находится из условия

$$\frac{b_i}{a_{ij}} = \min_{1 \leq t \leq k} \frac{b_{i_t}}{a_{i_t j}}.$$

Подобный выбор разрешающего элемента обеспечивает неотрицательность свободных членов в следующей симплекс-таблице.

Четвертый пункт. Делаем следующие преобразования метода Гаусса для строк расширенной матрицы системы (включая свободные члены). Сначала поделим i -ую строку (где стоит разрешающий элемент) на число равное a_{ij} (разрешающему элементу). Удобно полученную расширенную матрицу выписать отдельно и обвести разрешающий элемент равный 1. Теперь сделаем нулем остальные элементы j -ого столбца добавляя к каждой из строк (далее обозначенную как $г$ -ую строку) i -ую строку умноженную на число (равное $-a_{гj}$ в данных обозначениях). В приведенном ниже примере указаны соответствующие преобразования, где номер строки обозначен жирной цифрой в скобках.

Пятый пункт подробно описан при составлении начальной симплекс-таблицы (пункты 2-6 подготовительной работы).

После выполнения пятого пункта снова переходим к выполнению первого пункта, но уже для следующей симплекс-таблицы. Отметим, что в следующей симплекс-таблице значение целевой функции изменяется только в сторону оптимизации. Окончание работы возможно только в пунктах 1 и 2. Алгоритм не может работать бесконечно, так как он перебирает вершины многогранника допустимых планов, а их конечное число. Однако надо избегать закликивания, которое возможно лишь при неизменившейся целевой функции и при возврате к ранее встречавшейся симплекс-таблице.

Продолжим по этому алгоритму пример, для которого ранее составлена симплекс-таблица.

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 2 & 1 & 0 & -6 & 0 & 3 & (1) + 6(3) & 14 & 1 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & (2) - 2(3) & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & \rightarrow & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Получим вторую симплекс-таблицу:

	*				C.C.Ч.		B.C.P.C.T.	
	14	1	6	0	0	9	1	
	-1	0	-2	0	1	4	4	
	2	0	1	1	0	1	3	
c:	2	1	0	3	4	0	-1	
b:	14	0	1	0	0	28		

Во второй симплекс-таблице все оценки неотрицательны. Значит эта таблица соответствует оптимальному плану. Выпишем этот план $x^* = (0, 9, 0, 1, 4)$ и оптимальное значение целевой функции $f_{\max} = 28$.

также точки, далекие от оптимального плана соответствующей нецелочисленной задачи $x = (41/11, 13/11)$.

Для целочисленной задачи линейного программирования в пространстве нарисовать множество допустимых планов сложнее, а грубая замена решения общей задачи на близлежащую целочисленную точку может дать неверный ответ. Здесь бывает полезно следующее соображение. Если коэффициенты целевой функции целые, то на оптимальном плане целочисленной задачи значение целевой функции тоже целое. Например, если для оптимального плана общей задачи $f(x^*) = 135,7$, а для некоторой целочисленной точки x_0 получили $f(x_0) = 135$, то x_0 и будет решением целочисленной задачи. Если же окажется, что $f(x_0) = 134$, то можно попытаться найти целочисленные решения системы, состоящей из уравнения $f(x) = 135$ и системы уравнений и неравенств системы ограничений общей ЗЛП.

Другой геометрический метод решения целочисленной задачи линейного программирования в пространстве (решение по сечениям) состоит в решении конечного числа целочисленных задач на плоскости, которые получаются при последовательной подстановке целых значений вместо одной из переменных (например, $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$).

В литературе встречаются другие способы решения целочисленных задач [4]. Особо отметим метод Гомори [1,5], использующий симплекс-метод.

9. Двойственная задача

Каждой ЗЛП можно поставить в соответствие другую ЗЛП. Если исходную задачу назовем прямой ЗЛП, то ей соответствует двойственная ЗЛП. Смысл двойственной задачи покажем на примере задачи (1)-(3), в котором изменим единицы измерения.

Задача. Для производства 1 литра товара по первой технологии требуется 3 кг сырья А и 3 г сырья В, а по второй технологии - 5 кг сырья А и 1 г сырья В. Цена 1 литра товара, изготовленного по первой технологии равна 2 руб., а по второй - 1 руб. Составить план дающий максимальную стоимость выпущенной продукции, если в запасе имеется 30 кг сырья А и 18 г сырья В.

Запишем матрицу затрат этой задачи с дополнительными столбцами и

строками

	технология		ресурсы	ценность сырья
	первая	вторая		
сырье А	3 кг/л	5 кг/л	30 кг	y_1 руб./кг
сырье В	3 г/л	1 г/л	18 г	y_2 руб./г
себестоимость	2 руб./л	1 руб./л		
план (л)	x_1	x_2		

Из данной таблицы получается прямая ЗЛП

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 \leq 18, \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

В прямой задаче требуется найти оптимальный план производства $x = (x_1, x_2)$, дающий максимальную стоимость производимого товара при заданных ограничениях на ресурсы.

Если считать процесс производства примитивным (то есть не учитывать производственные затраты), то себестоимость единицы товара определяется ценой сырья, затраченного на производство единицы товара. В более сложных моделях в матрицу затрат можно внести человекочасы затраченные на производство единицы продукции, амортизационные показатели и т.д.

Например, указанная в данной таблице цена (точнее себестоимость) 1 литра продукта произведенного по второй технологии, равна цене 5 кг сырья А и 1 г сырья В и при заданной цене сырья – y_1 руб./кг для А, y_2 руб./г для В – равняется $5y_1 + y_2$. Изменения вектора ценности сырья $y = (y_1, y_2)$ влияет на цену товара, а именно при тех же возможностях (неизменные технологии и запасы сырья) себестоимости товара при неправильном планировании могут быть выше. Неправильное планирование может проявиться в перерасходе ресурсов.

Отсюда получаем двойственную задачу ЗЛП

$$g(y) = 30y_1 + 18y_2 \rightarrow \min,$$

при условиях

$$\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 \geq 2, \\ 5y_1 + y_2 \geq 1, \end{cases} \quad y_1, y_2 \geq 0.$$

В двойственной задаче минимизируем стоимость имеющихся ресурсов, задавая распределение ценности сырья.

Итак, прямая задача линейного программирования

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \mapsto \max,$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \end{cases} \quad x_j \geq 0.$$

Двойственная (обратная) задача линейного программирования

$$g(y) = \sum_{i=1}^k b_i y_i \mapsto \min,$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{k1}y_k \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{k2}y_k \geq c_2, \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{kn}y_k \geq c_n, \end{cases} \quad y_i \geq 0.$$

Приведем сокращенную (матричную) запись прямой ЗЛП

$$cx \mapsto \max, \quad AX \leq B, \quad X \geq 0$$

и двойственной ЗЛП

$$by \mapsto \min, \quad A^t Y \geq C, \quad Y \geq 0.$$

Здесь маленькими буквами обозначены вектор-строки, а большими буквами — соответствующие вектор-столбцы, A^t есть транспонированная матрица A .

Издержки производства $\Delta = g(y) - f(x)$ характеризуют производственные потери в зависимости от производственной программы (плана) и от выбранных оценок ресурсов. Доказывается, что всегда $\Delta \geq 0$. При оптимальном выборе x и y имеем $\Delta = 0$.

Основная теорема двойственности [1,4] гласит, что оптимальному плану x^* прямой задачи линейного программирования соответствует оптимальный план y^* двойственной задачи и $f(x^*) = g(y^*)$.

Вторая теорема двойственности уточняет требования к оптимальным планам взаимно двойственных задач.

$$\begin{cases} \text{Если } y_i^* > 0, & \text{то } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i, \\ \text{если } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i, & \text{то } y_i^* = 0. \end{cases}$$

Данные условия можно интерпретировать так: если оценка y_i единицы ресурса i -го вида положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью; если же ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю.

$$\begin{cases} \text{Если } x_j^* > 0, & \text{то } \sum_{i=1}^k a_{ij}y_i^* = c_j, \\ \text{если } \sum_{i=1}^k a_{ij}y_i^* > c_j, & \text{то } x_j^* = 0. \end{cases}$$

Данные условия означают, что если j -ый способ используется в производстве, то он в оптимальных оценках не убыточен; если же j -ый способ убыточен, то он в производстве не используется.

10. М-метод

В данном параграфе рассмотрим один специальный прием, встречающийся при решении ЗЛП симплекс-методом. Как отмечали ранее, существенную трудность при решении ЗЛП симплекс-методом представляет выбор начального опорного плана. Так называемый М-метод позволяет легко найти начальный опорный план для произвольной КФЗЛП и для смешанной задачи линейного программирования.

При переходе от ЗЛПСВ к КФЗЛП вводили формальные переменные. Оказывается, формальные переменные можно вводить не только при переходе от неравенства к равенству, но и при переходе от одного равенства к другому. Если в левую часть равенства, которое встречается в ограничениях (5), добавить формальную переменную y , то можно получить эквивалентную ЗЛП, немного изменив целевую функцию. Если в исходной задаче ищется минимум целевой функции, то в новой задаче к целевой функции добавляют y умноженное на очень большое число, то есть добавляется My , где M — очень большое. Если же исходная задача на максимум, то такое выражение вычитают из целевой функции. Так как заранее невозможно сказать, каким следует взять это ну очень большое число M ,

то в записи целевой функции так и пишут $+My$ или $-My$. Отсюда и название данного метода. Если подобный переход нужно осуществить и со вторым уравнением системы (4), то вводят следующую формальную переменную и целевую функцию увеличивают (для задачи на максимум) или уменьшают (для задачи на минимум) на эту переменную, умноженную на N , где N также очень большое число.

При этом получается начальный опорный план очень далекий от оптимального (то есть значение целевой функции на множестве допустимых планов можно существенно увеличить). И вообще, любой опорный план, в котором присутствуют таким образом добавленные формальные переменные, будет очень далек от оптимального за счет выбора чисел $M, N, \dots$. Если будет существовать оптимальный план новой задачи, то он не будет содержать таким образом добавленных формальных переменных. Значит, он будет также и оптимальным планом исходной задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу 3 (видоизменение задачи (1)-(3))

$$\begin{aligned} 2x + y &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 3x + 5y &\leq 30, \\ 3x + y &= 18, \end{cases} & \quad x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Введением формальных переменных x_1, x_2 получим эквивалентную ЗЛП

$$\begin{aligned} 2x + y - Mx_2 &\rightarrow \max, \\ \begin{cases} 3x + 5y + x_1 &= 30, \\ 3x + y + x_2 &= 18, \end{cases} & \quad x, y, x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Для нее получим первую симплекс-таблицу

			*	*	С.С.Ч.	ВСП.СТ.
	3	5	1	0	30	0
	3	1	0	1	18	$-M$
$c:$	2	1	0	$-M$	0	-1
$\delta:$	$-3M - 2$	$-M - 1$	0	0	$-18M$	

В первом столбце отрицательная оценка, поэтому будем искать разрешающий элемент в первом столбце. Сделав шаг симплекс-метода, получим

вторую симплекс-таблицу

	*		*		С.С.Ч.	ВСП.СТ.
	0	4	1	-1	12	0
	1	1/3	0	1/3	6	2
c :	2	1	0	-M	0	-1
δ :	0	-1/3	0	2/3 + M	12	

Теперь разрешающий элемент ищем во втором столбце

	*	*			С.С.Ч.	ВСП.СТ.
	0	1	1/4	-1/4	3	1
	1	0	-1/12	5/12	5	2
c :	2	1	0	-M	0	-1
δ :	0	0	1/12	7/12 + M	13	

Так как все оценки неотрицательны, то в качестве оптимального возьмем опорный план $x^* = (5, 3)$, соответствующий последней таблице. Заметим, что из этой таблицы получили $x = 5, y = 3, x_1 = 0, x_2 = 0$. Формальные переменные в ответ не вносим.

Ответ: $f_{\max} = 13$ при $x^* = (5, 3)$.

11. Задание типового расчета

Задание индивидуальное. Будет сформулирована одна задача, но с разными данными для разных вариантов.

Задача. Для удаленного поселка требуется быстро, методом панельного строительства, построить несколько домов. Предложены проекты строительства одно-, двух- и трехквартирных домов. По проекту требуется для строительства одноквартирного дома 8 блок-комнат, 12 панелей и 15 балок перекрытий; для двухквартирного – 12 блок-комнат, 15 панелей и 20 балок перекрытий; для трехквартирного – 20 блок-комнат, 25 панелей и 30 балок перекрытий. Осуществить строительство вызвались три организации, имеющие следующие запасы ресурсов: домостроительный комбинат (ДСК) имеет 70 блок-комнат, 100 панелей и 120 балок перекрытий; строительная организация (СО) имеет 80 блок-комнат, 110 панелей и 150 балок перекрытий; товарищество с ограниченной ответственностью (ТОО) имеет 90 блок-комнат, 120 панелей и 150 балок перекрытий.

В министерстве решили расселять в одноквартирный дом по 8 рабочих, в двухквартирный дом по 10 рабочих, а в трехквартирный дом по 15

рабочих. Стоимость строительства по оценкам проектировщиков составляет 30 млн.у.е. для одноквартирного дома, 40 млн.у.е. для двухквартирного дома и 70 млн.у.е. для трехквартирного дома. Рыночная цена данного жилья планируется следующая: 35 млн.у.е. для одноквартирного дома, 50 млн.у.е. для двухквартирного дома и 80 млн.у.е. для трехквартирного дома. Требуется найти максимум целевой функции $f(x)$, располагая ресурсами выбранных подрядчиков.

Выбор целевой функции и подрядчиков для 35 вариантов осуществляется из следующей таблицы. По горизонтали указан вид целевой функции, а по вертикали – выбранные подрядчики.

Таблица вариантов типового расчета.

	кол-во квартир	кол-во рабочих	стоим. квартир	рыночная цена	кол-во домов
ДСК	1	8	15	22	29
СО	2	9	16	23	30
ТОО	3	10	17	24	31
ДСК и СО	4	11	18	25	32
ДСК и ТОО	5	12	19	26	33
СО и ТОО	6	13	20	27	34
ДСК,СО,ТОО	7	14	21	28	35

Задание.

1. Составить математическую модель данной задачи. Для этого написать матрицу затрат с дополнительными строками и столбцами для выбранного варианта. Сформулировать задачу линейного программирования, допуская незавершенное строительство (то есть не накладывая условия целочисленности).

2. Решить задачу графически.

3. Решить задачу симплекс-методом.

4. Сформулировать соответствующую целочисленную задачу и решить ее графически.

5. Сформулировать задачу двойственную к начальной ЗЛП и решить ее графически.

6. Сформулировать нецелочисленную смешанную ЗЛП, добавив к первому пункту требование обязательного использования ресурса всех панелей в строительстве. Решить эту задачу симплекс методом, применяя М-метод.

Замечание. Задачи типового расчета будут проще, если в условиях (а именно, в распределении запасов ресурсов подрядчиков) заменить для ТОО 150 балок перекрытий на 170.

Библиографический список

1. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высш. шк., 1980.
2. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. М.: Высш. шк., 1967.
3. Галеев Э.М. Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М.: Мех.-мат. МГУ, 1996.
4. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова. М.:Высш. шк., 1987.
5. Сборник задач для втузов. Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / Под ред. А.В.Ефимова. М.:Высш. шк., 1990.
6. Максимов С.А. Математическое моделирование / Владим. гос. ун-т. Владимир, 1997.

О г л а в л е н и е

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Построение математической модели простейших экономических задач..	6
2. Постановка задачи линейного программирования	7
3. Переход от стандартного вида задачи линейного программирования к канонической форме и наоборот	9
4. Графический метод решения задачи линейного программирования на плоскости	10
5. Определения и обозначения. Геометрия n-мерного пространства.....	11
6. Геометрический метод решения задачи линейного программирования ..	15
7. Симплекс-метод	17
8. Целочисленная задача линейного программирования	23
9. Двойственная задача	24
10. М-метод	27
11. Задание типового расчета	29
Библиографический список	31

Учебное издание

БЕСПАЛОВ Михаил Сергеевич

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Курс лекций и задания типового расчета

Редактор Е.А. Амирсейидова

Корректор В.В. Гурова

Изд. лиц. № 020275 от 13.11.96. Подписано в печать 19.04.99.
Формат 60х84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Times.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 1,86. Уч.-изд.л. 1,98. Тираж 250 экз.
Заказ 462-99.

Владимирский государственный университет.

Подразделение оперативной полиграфии

Владимирского государственного университета.

Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии:
600026, Владимир, ул. Горького, 87.

