Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

М. А. Комаров

Линейные разностные уравнения и их приложения

Владимир 2012

УДК 517.5

Рецензент:
Доктор физико-математических наук, профессор
кафедры функционального анализа и его приложений
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. И. Данченко

Печатается в авторской редакции

М. А. Комаров
К 63 Линейные разностные уравнения и их приложения / ВлГУ. Владимир. 42 с.

В пособии рассматривается элементарная теория линейных разностных уравнений и её приложения к некоторым задачам вычислительной математики. Содержатся задания для самостоятельного решения. Предназначено для изучающих дисциплины „Численные методы“, „Дифференциальные и разностные уравнения“. Может быть полезно при изучении таких дисциплин, как „Уравнения математической физики“ и „Теория разностных схем“.

Библиогр. 10 назв. УДК 517.5
ISBN ?

Предисловие

В пособии рассматривается элементарная теория линейных разностных уравнений и некоторые типичные задачи вычислительной математики, при решении которых возникают такие уравнения. Отметим, что разностные уравнения имеют и самостоятельный интерес: ряд моделей в биологии, экономике и других науках формулируются непосредственно в терминах разностных уравнений (*модели с дискретным временем*).

Пособие предназначено, в первую очередь, для изучающих дисциплины „Численные методы“ и „Дифференциальные и разностные уравнения“, а также может быть полезно при изучении таких дисциплин, как „Уравнения математической физики“ и „Теория разностных схем“. Предполагается, что читатель знает (в объёме, предусмотренном для инженерных специальностей вузов) линейную алгебру, математический анализ и дифференциальные уравнения.

Пособие состоит из трёх частей. Первая часть посвящена изложению основных понятий и методов теории линейных разностных уравнений. Теоретический материал к первой части (если не брать в расчёт отсутствие доказательств теорем) представляет собой краткий курс лекций по разностным уравнениям, читавшийся автором в 2011–2012 гг. студентам специальности „Информационные технологии“ в рамках общего курса дифференциальных уравнений. Подробное изложение этой теории, в том числе доказательства теорем, можно найти, например, в книгах [1, 2].

Вторая часть посвящена численным методам алгебры и анализа, а третья – приближённому интегрированию дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Нашей целью было лишь дать обзор некоторых типичных задач, приводящих к разностным уравнениям, поэтому представленный здесь перечень приложений не претендует на полноту. Подробное изложение этих и других численных методов можно найти в книгах [3], [4], [5].

В каждой части пособия нумерация параграфов своя (так, §2.2 – второй параграф второй части). Нумерация формул, определений и теорем сквозная.

Пособие содержит индивидуальные задания практически по всем рассмотренным темам. Задания к первой части выполняются как стандартный типовой расчёт, рассчитанный на 30 вариантов; примеры решения аналогичных задач приводятся в теоретической части. Задания, приведённые во второй и третьей частях, предназначены для выполнения на компьютере и, следовательно, могут рассматриваться как задания к лабораторным работам. При их выполнении будут полезны такие компьютерные системы, как Maple, MatLAB, MathCAD.

Автор признателен аспирантам кафедры функционального анализа и его приложений ВлГУ А.Е.Додонову и А.С.Платову за помощь в подготовке вариантов индивидуальных заданий.

Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009 – 2013 годы“ (грант № 14.B37.21.0369).

Часть 1. Линейные разностные уравнения

Рассматриваются основные понятия и методы теории разностных уравнений (называемых иначе уравнениями в конечных разностях или рекуррентными). Такие уравнения возникают, например, при моделировании процессов с дискретным временем и при численном интегрировании дифференциальных уравнений. Типичный случай появления разностных уравнений в задачах численного анализа рассматривается в §1.1. Основное внимание (§§1.3–1.7) уделяется важному классу линейных разностных уравнений. Подчёркивается, что теория линейных разностных уравнений является точным аналогом теории линейных дифференциальных уравнений. В §1.8 собраны типовые задачи.

§1.1. Пример: метод ломаных Эйлера

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается (локально, вблизи точки x_0) существование и единственность решения $v = v(x)$ задачи Коши

$$v' = f(x, v), \quad v(x_0) = v_0, \tag{1}$$

где f – непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, однако, аналитическое выражение решения удаётся найти лишь для узкого класса функций f, поэтому были разработаны методы приближённого построения решения.

Простейший метод, называемый (*явным*) *методом Эйлера*, основан на том, что значение функции $f(x, v)$ задаёт угол наклона касательной к интегральной кривой уравнения задачи (1) в точке (x, v).

Допустим, что требуется вычислить приближённо значение решения $v(x)$ задачи (1) в некоторой точке $x_0 + b$, такой что решение продолжается на весь отрезок $[x_0, x_0 + b]$, $b > 0$. Выберем натуральное число n и определим шаг вычислений как $h := b/n$. Из точки (x_0, v_0) на шаг h проведём отрезок прямой с угловым коэффициентом $f(x_0, v_0)$. Из конечной точки $(x_1, v_1) = (x_0 + h, v_0 + f(x_0, v_0)h)$ этого отрезка на шаг h проведём отрезок прямой с угловым коэффициентом $f(x_1, v_1)$ и так далее. В итоге получим n-звенную ломаную, ордината которой в точке $x_0 + b$ и считается приближением к точному значению $v(x_0 + b)$.

Построим вычислительную схему. Разобьём отрезок $[x_0, x_0+b]$ на n равных частей точками

$$x_s = x_0 + s \cdot h, \qquad s = \overline{0, n}.$$

Положим $y(x_0) = v_0$ и при $s = 1, 2, \ldots, n$ определим последовательно функцию $y = y(x)$ на отрезке $[x_{s-1}, x_s]$ как ординату касательной в точке $(x_{s-1}, y(x_{s-1}))$ к интегральной кривой задачи Коши $\{w' = f(x, w),\ w(x_{s-1}) = y(x_{s-1})\}$, а именно:

$$y(x) := w(x_{s-1}) + w'(x_{s-1})(x - x_{s-1}) = y(x_{s-1}) + f(x_{s-1}, y(x_{s-1}))(x - x_{s-1}), \quad x \in [x_{s-1}, x_s].$$

В частности,

$$y(x_s) = y(x_{s-1}) + f(x_{s-1}, y(x_{s-1}))h, \qquad s = \overline{1, n}. \tag{2}$$

При $s = n$ мы получим искомое приближение к $v(x_0 + b) = v(x_n)$:

$$v(x_n) \approx y(x_n) = y(x_{n-1}) + f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))h.$$

Известно [3], что при $h \to 0$ (при $n \to \infty$) последовательность ломаных сходится к интегральной кривой $v(x)$, в частности, $y(x_n) \to v(x_n)$.

Перепишем формулу (2) в виде

$$y(x_0 + (s+1)h) - y(x_0 + s \cdot h) = f(x_s, y(x_s))h. \qquad (3)$$

Выражение $\Delta_h y(x_s) := y(x_0 + (s+1)h) - y(x_0 + s \cdot h)$ называют *конечной разностью первого порядка* функции $y(x)$ в точке $x_s = x_0 + s \cdot h$, а само уравнение (3) есть пример *уравнения в конечных разностях* (первого порядка).

Замечание 1. Разностное уравнение (3) можно рассматривать (см. часть 3) как результат аппроксимации производной v' разностным отношением $(v(t+h) - v(t))/h$. Другие способы аппроксимации приводят к другим разностным схемам, в том числе, более эффективным, чем метод Эйлера, в котором для достижения хорошей точности приходится брать очень малый шаг h.

Замечание 2. Вычисления имеют смысл, если решение продолжается из точки x_0 до точки, в которой требуется найти его величину. Непродолжаемость может возникать и в очень простых задачах, что показывает следующий пример.

Пример. Пусть требуется вычислить в точке $x = 2$ значение решения задачи Коши

$$v' = v^2, \quad v(0) = 1.$$

Непосредственное интегрирование доставляет аналитическое решение $v(x) = (1-x)^{-1}$. Очевидно, это решение терпит разрыв в точке $x = 1$ и, следовательно, непродолжаемо из точки $x = 0$ в точку $x = 2$. Вычисления по схеме метода ломаных Эйлера заведомо не приведут к верному значению $v(2) = -1$. $\square$

Полезно следующее достаточное условие продолжаемости: если правая часть уравнения $v' = f(x, v)$ в области $a < x < b$, $|v| < \infty$ (a, b не обязательно конечны) непрерывна и удовлетворяет неравенству $|f(x, v)| \le A(x)|v| + B(x)$ с некоторыми непрерывными функциями A и B, то всякое решение можно продолжить на весь интервал $a < x < b$. В частности, все решения линейного уравнения с непрерывными коэффициентами продолжаются на всю числовую прямую. В предыдущем примере это достаточное условие не выполнено.

§1.2. Разностные уравнения: основные понятия

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена для всех значений x вида $x_s = a + s \cdot h$, где a, h – фиксированные вещественные числа, $h \ne 0$ – *шаг*, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Выражение

$$\Delta_h f(x_s) := f(a + (s+1)h) - f(a + s \cdot h) \equiv f(x_s + h) - f(x_s)$$

называется *конечной разностью первого порядка* функции $f(x)$ в точке x_s. По индукции, определяются конечные разности любого натурального порядка в точке $x = x_s$:

$$\begin{aligned}
&\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),\\
&\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x) \equiv \Delta_h(\Delta_h f(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta_h^k f(x) = \Delta_h^{k-1} f(x+h) - \Delta_h^{k-1} f(x) \equiv \Delta_h^{k-1}(\Delta_h f(x))
\end{aligned}$$

и т.д. (величина $\Delta_h^k f(x)$ называется иначе *k-й конечной разностью*).

Замечание 1. Поскольку a и h фиксированы, то величина $f(x_s)$ зависит только от индекса s; введём для соответствующей функции обозначение $u(s) = f(x_s)$. Имеем

$$\Delta_h f(x_s) = f(a+(s+1)h) - f(a+s\cdot h) = u(s+1) - u(s) = \Delta_1 u(s), \quad s = 0, 1, 2, ...$$

Аналогично, $\Delta_h^k f(x_s) = \Delta_1^k u(s)$. Единичный шаг обычно не указывают, полагая $\Delta_1 \equiv \Delta$. Всюду далее мы будем рассматривать разности именно в такой форме: $\Delta^k u(s)$.

Замечание 2. Разности можно представить через значения функции по формуле

$$\Delta^p u(s) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} C_p^m \cdot u(s+m), \qquad C_p^m = \frac{p!}{m!(p-m)!}. \tag{4}$$

Предлагается проверить, исходя из определения, справедливость этой формулы при малых p :

$$\begin{aligned} \Delta u(s) = &\quad u(s+1) - u(s), \\ \Delta^2 u(s) = &\quad u(s+2) - 2u(s+1) + u(s), \\ \Delta^3 u(s) = &\quad u(s+3) - 3u(s+2) + 3u(s+1) - u(s). \end{aligned}$$

Определение 2. *Разностным уравнением* называется соотношение

$$F(s, u(s), \Delta u(s), \ldots, \Delta^k u(s)) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

в котором F – заданная, а u – искомая функции. *Решением* уравнения (5) называется функция $u(s)$, обращающая его в тождество при всех s. *Порядок* уравнения (5) равен разнице между максимальным и минимальным среди аргументов $s+j$ значений $u(s+j)$, явно входящих в уравнение после замены разностей $\Delta u(s), \ldots, \Delta^k u(s)$ их выражениями через $u(s), \ldots, u(s+k)$ по формуле (4). В частности, *порядок равен k*, если после такой замены уравнение (5) явно содержит как $u(s+k)$, так и $u(s)$.

Пример. *Определим порядок разностного уравнения*

$$\Delta^3 u(s) - 3\Delta u(s) - Cu(s) = 0$$

в зависимости от значения числового параметра C.

Заменив $\Delta u(s)$ и $\Delta^3 u(s)$ на их выражения по формуле (4), после преобразований придём к уравнению

$$u(s+3) - 3u(s+2) + (2-C)u(s) = 0$$

При $C \neq 2$ это уравнение явно содержит 3 значения функции: $u(s+3)$, $u(s+2)$ и $u(s)$ с аргументами $s+3$, $s+2$ и s соответственно. Разница между максимальным и минимальным аргументами равна $(s+3) - s = 3$, поэтому *при $C \neq 2$ порядок уравнения равен* 3.

Напротив, в случае $C = 2$ уравнение принимает вид

$$u(s+3) - 3u(s+2) = 0.$$

Видим, что явно входят в уравнение лишь два значения функции, $u(s+3)$ и $u(s+2)$, с аргументами $s+3$ и $s+2$ соответственно. Разница между последними равна 1, поэтому *при $C = 2$ порядок уравнения равен* 1. Вводя новый индекс $t = s + 2$, представим это уравнение порядка 1 в стандартном виде:

$$u(t+1) = 3u(t). \qquad \square$$

Задача Коши. При условии разрешимости относительно $u(s+k)$, разностное уравнение порядка k можно представить в виде

$$u(s+k) = G(s, u(s), u(s+1), \dots, u(s+k-1)). \tag{6}$$

Фиксируем *начальную точку* $s_0 = 0, 1, 2, \dots$ (без нарушения общности, можно считать $s_0 = 0$). Если функция $G(s, y_1, y_2, \dots, y_k)$ определена при всех значениях s вида

$$s = s_0 + p, \qquad p = 0, 1, 2, \dots,$$

и при любых $y_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, k}$, то значение $u(s+k)$ и вообще все значения $u(s+k+p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$, однозначно определяются по уравнению (6) заданием при $s = s_0$ *начальных значений* (*начальных условий*)

$$\left.\begin{array}{rl} u_0 = & u(s_0), \\ u_1 = & u(s_0+1), \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ u_{k-1} = & u(s_0+k-1). \end{array}\right\} \tag{7}$$

Тем самым, *общее решение* разностного уравнения порядка k зависит от k произвольных постоянных:

$$u(s) = g(s, C_0, C_1, \dots, C_{k-1}), \qquad s = s_0, s_0+1, \dots.$$

Решение, получающееся из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным*. Задача отыскания решения $u(s)$, $s = s_0, s_0+1, \dots$, уравнения (6), удовлетворяющего начальным условиям (7), называется *задачей Коши*.

§1.3. Последовательные подстановки. Линейные уравнения первого порядка

Задав начальные значения $u(s_0) = u_0$, $u(s_0+1) = u_1$, …, $u(s_0+k-1) = u_{k-1}$, мы рекуррентно по формуле (6) вычисляем все остальные элементы последовательности $\{u_m\}$. Не нарушая общности, будем считать $s_0 = 0$; тогда

$$\begin{array}{rl} & u(j) = u_j, \quad j = \overline{0, k-1}, \\ u(k) = & G(0, u_0, u_1, \dots, u_{k-2}, u_{k-1}), \\ u(k+1) = & G(1, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u(k)) = \\ & = G(1, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, G(0, u_0, u_1, \dots, u_{k-2}, u_{k-1})) \end{array}$$

и так далее. Такой метод решения задачи Коши носит название *последовательных подстановок* и применим к произвольным разностным уравнениям, хотя и трудоёмок при вычислении $u(k+p)$ с большими p. В §2.1 этот процесс будет применён к приближённому вычислению корней алгебраического многочлена. Здесь мы получим с помощью метода последовательных подстановок формулу общего решения так называемого линейного разностного уравнения 1-го порядка.

Определение 3. *Линейным разностным уравнением порядка* 1 называется уравнение вида

$$\Delta u(s) + P(s)u(s) = Q(s) \quad \Longleftrightarrow \quad u(s+1) = [1 - P(s)]u(s) + Q(s), \quad P(s) \not\equiv 1.$$

Это уравнение *однородно*, если $Q(s) \equiv 0$, и *неоднородно* – в противном случае.

Так, геометрическая и арифметическая прогрессии задаются линейными разностными уравнениями первого порядка – однородным $u(s+1) = q \cdot u(s)$ и неоднородным $u(s+1) = u(s) + d$ соответственно.

Рассмотрим однородное уравнение $u(s+1) = [1 - P(s)]u(s)$. Заменяя в нём s на $0, 1, 2, \ldots, s-1$, придём к равенствам

$$\begin{array}{l} u(1) = [1 - P(0)]u(0), \\ u(2) = [1 - P(1)]u(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u(s) = [1 - P(s-1)]u(s-1), \end{array}$$

перемножая которые и сокращая на произведение $u(1)u(2)\ldots u(s-1)$ получим искомую формулу *общего решения линейного однородного разностного уравнения*:

$$u(s) = u(0) \cdot \prod_{t=0}^{s-1} [1 - P(t)], \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$

в которой величина $u(0)$ является произвольной постоянной (начальным значением).

Для построения общего решения неоднородного уравнения применяют аналог метода вариации или метода подстановки, известных из курса дифференциальных уравнений. Не воспроизводя соответствующие выкладки, предъявим результат: *общее решение линейного неоднородного разностного уравнения*

$$u(s+1) = [1 - P(s)]u(s) + Q(s)$$

имеет вид

$$u(s) = \left(\prod_{t=0}^{s-1} H(t) \right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{s-1} \frac{Q(p)}{\prod_{t=0}^{p} H(t)} + C \right), \quad s = 1, 2, 3, \ldots, \quad H(t) := 1 - P(t), \quad (8)$$

где C – произвольная постоянная.

Рассмотрим примеры использования формулы (8).

Пример [2]. *Решить уравнение*

$$u(s+1) = \left(\frac{s+2}{s+1} \right)^2 \cdot u(s) + \frac{2s+4}{s+3}.$$

Решение. Для данного уравнения при каждом $r = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$\prod_{t=0}^{r} H(t) = \prod_{t=0}^{r} \left(\frac{t+2}{t+1} \right)^2 = \left(\frac{2}{1} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdots \left(\frac{r+1}{r} \right)^2 \left(\frac{r+2}{r+1} \right)^2 = (r+2)^2.$$

Применим это соотношение в формуле (8):

$$u(s) = (s+1)^2 \cdot \left(\sum_{p=0}^{s-1} \frac{Q(p)}{(p+2)^2} + C \right) = (s+1)^2 \cdot \left(\sum_{p=0}^{s-1} \frac{2(p+2)}{(p+3)(p+2)^2} + C \right) =$$

$$= (s+1)^2 \cdot \left(2 \sum_{p=0}^{s-1} \frac{1}{(p+3)(p+2)} + C \right) = (s+1)^2 \cdot \left(2 \sum_{p=0}^{s-1} \left(\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} \right) + C \right) =$$

$$= (s+1)^2 \cdot \left(2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s+2} \right) + C \right) = (s+1)^2 \cdot \left(\frac{s}{s+2} + C \right).$$

Ответ: $u(s) = (s+1)^2 \cdot (s(s+2)^{-1} + C)$. □

Пример [6]. *Проверить, что решение уравнения*

$$u(s+1) = H(s)u(s) + Q(s), \quad H(n) = -Q(n), \quad s < n,$$

удовлетворяющее начальному условию $u(n) = 1$*, имеет вид*

$$u(s) = -\sum_{p=s}^{n} \frac{Q(p)}{\prod_{t=s}^{p} H(t)}. \tag{9}$$

Решение. Положим в (8) $s = n$ и выразим C (учитывая условие $u(n) = 1$):

$$C = \frac{1}{\prod_{t=0}^{n-1} H(t)} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{Q(p)}{\prod_{t=0}^{p} H(t)}.$$

Подставив это выражение в (8) вместо C, после очевидных упрощений получим

$$u(s) = \frac{1}{\prod_{t=s}^{n-1} H(t)} - \sum_{p=s}^{n-1} \frac{Q(p)}{\prod_{t=s}^{p} H(t)}.$$

Отсюда и из условия $H(n) = -Q(n)$ легко следует формула (9). □

Предлагается выполнить следующее аналогичное упражнение [6]: *проверить, что решение уравнения*

$$u(s+1) = H(s)u(s) + Q(s), \quad s < n,$$

удовлетворяющее начальному условию $u(n) = 0$*, имеет вид*

$$u(s) = -\sum_{p=s}^{n-1} \frac{Q(p)}{\prod_{t=s}^{p} H(t)}.$$

§1.4. Свойства решений линейных разностных уравнений

Определение 4. Уравнение вида

$$\Delta^k u(s) + b_1(s)\Delta^{k-1}u(s) + \ldots + b_{k-1}(s)\Delta u(s) + b_k(s)u(s) = Q(s), \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *линейным разностным уравнением порядка* k, если после преобразования разностей по формуле (4) оно принимает вид

$$u(s+k) + a_1(s)u(s+k-1) + \ldots + a_k(s)u(s) = Q(s), \quad a_k(s) \not\equiv 0.$$

Это уравнение называется *однородным*, если $Q(s) \equiv 0$, и *неоднородным* – в противном случае.

Очевидно, что ввиду неравенства $a_k(s) \not\equiv 0$ определение линейного уравнения порядка k согласовано с общим определением порядка разностного уравнения, данным в §1.2.

Замечание. Здесь и далее тождество между функциями индекса s понимается как их совпадение при всех значениях s из заданного в контексте подмножества целых чисел. К примеру, в этом смысле имеет место тождество $\sin(\pi s) \equiv 0$, раз функции $\sin(\pi s)$ и 0 совпадают при всех целых s, хотя, разумеется, для *непрерывного* аргумента s такого тождества нет. В частности, *константами* мы будем считать функции, принимающие постоянное значение в целых точках, но не обязательно постоянные относительно непрерывно меняющегося аргумента s. Далее мы не будем оговаривать это особо.

Сформулируем свойства решений *однородного уравнения порядка* k :

$$Lu(s) := u(s+k) + a_1(s)u(s+k-1) + \ldots + a_k(s)u(s) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Они вполне аналогичны свойствам линейного однородного дифференциального уравнения.

Теорема 1. *Если* $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_m(s)$ *– решения уравнения* (10)*, то их линейная комбинация с постоянными коэффициентами* $C_1, C_2, \ldots, C_m$*,*

$$C_1u_1(s) + C_2u_2(s) + \ldots + C_mu_m(s),$$

тоже является решением этого уравнения.

Теорема 2. *Если* $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_k(s)$ *– решения уравнения* (10)*, причём определитель*

$$D[u_1, \ldots, u_k] := \begin{vmatrix} u_1(0) & u_1(1) & \ldots & u_1(k-1) \\ u_2(0) & u_2(1) & \ldots & u_2(k-1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ u_k(0) & u_k(1) & \ldots & u_k(k-1) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то общее решение уравнения (10) *имеет вид*

$$C_1u_1(s) + C_2u_2(s) + \ldots + C_ku_k(s),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *– произвольные постоянные.*

Определение 5. Набор $u_1(s), \ldots, u_k(s)$ частных решений уравнения (10), для которых

$$D[u_1, \ldots, u_k] \neq 0,$$

называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Аналогия с дифференциальными уравнениями наблюдается и в случае неоднородных линейных разностных уравнений.

Теорема 3. *Общее решение неоднородного уравнения* $Lu(s) = Q(s)$, $Q(s) \not\equiv 0$, *представляется в виде суммы любого его частного решения* $u^*(s)$ *и общего решения уравнения* (10)*:*

$$u(s) = u^*(s) + C_1 u_1(s) + C_2 u_2(s) + \ldots + C_k u_k(s).$$

§1.5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение порядка k с постоянными вещественными коэффициентами:

$$u(s+k) + a_1 u(s+k-1) + \ldots + a_k u(s) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots; \quad a_j = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad a_k \neq 0. \tag{11}$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде

$$u(s) = \lambda^s, \quad \lambda = \text{const} \neq 0.$$

Легко видеть, что функция такого вида есть решение уравнения (11) в том и только том случае, когда λ есть корень *характеристического уравнения*

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \tag{12}$$

Действительно, эта функция обладает свойством $u(s+p) = \lambda^p u(s)$, поэтому левая часть уравнения (11) принимает вид $(\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_k) u(s)$, откуда, с учётом неравенства $u(s) = \lambda^s \neq 0$, следует наше утверждение.

Заметим, что каждое такое решение ввиду тождества $u(s+1) = \lambda u(s)$ определяет геометрическую прогрессию со знаменателем λ. Таким образом, среди всех числовых последовательностей, элементы которых удовлетворяют уравнению вида (11) (такие последовательности называются *возвратными* или *рекуррентными*), нас в первую очередь интересуют геометрические прогрессии.

По основной теореме алгебры, уравнение (12) имеет ровно k (комплексных) корней с учётом кратностей, причём из-за вещественности его коэффициентов каждому комплексному корню $\lambda = \rho(\cos w + i \sin w)$, $\rho \sin w \neq 0$, соответствует сопряжённый корень $\overline{\lambda} = \rho(\cos w - i \sin w)$ той же кратности (в отличие от теории дифференциальных уравнений, здесь предпочтительнее тригонометрическая форма записи комплексных чисел). Сформулируем

Правило построения фундаментальной системы решений:

в фундаментальной системе решений уравнения (11) *с постоянными вещественными коэффициентами каждому вещественному корню* λ *кратности* m *характеристического уравнения* (12) *соответствуют* m *частных решений*

$$\lambda^s, \ s\lambda^s, \ldots, s^{m-1}\lambda^s,$$

а каждой паре комплексно сопряжённых корней $\rho \cdot (\cos w + i \sin w)$, $\rho \cdot (\cos w - i \sin w)$, $\rho \sin w \neq 0$, *кратностей* m *уравнения* (12) *соответствуют* $2m$ *частных решений*

$$\begin{array}{llll} \rho^s \cdot \cos(ws), & s \cdot \rho^s \cdot \cos(ws), & \ldots, & s^{m-1} \cdot \rho^s \cdot \cos(ws), \\ \rho^s \cdot \sin(ws), & s \cdot \rho^s \cdot \sin(ws), & \ldots, & s^{m-1} \cdot \rho^s \cdot \sin(ws). \end{array}$$

Напомним, что по теореме 2, общее решение уравнения (11) является линейной комбинацией решений фундаментальной системы.

Пример. Разностному уравнению $f(s+2) = f(s+1) + f(s)$ соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1$ с корнями $(1 \pm \sqrt{5})/2$, поэтому общее решение имеет вид

$$f(s) = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^s + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^s,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. □

Пример. *Числами Фибоначчи* называются элементы последовательности

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots,$$

задаваемой рекуррентной формулой

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_1 = u_2 = 1.$$

Очевидно, эта последовательность является решением задачи Коши для разностного уравнения из предыдущего примера с начальным условием $f(1) = f(2) = 1$. Определяя значения произвольных постоянных C_1, C_2 в формуле общего решения из начальных условий, находим представление произвольного числа Фибоначчи:

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right]. \qquad \square$$

Пример [1]. *Решим задачу Коши для однородного уравнения четвёртого порядка*

$$\begin{cases} f(s+4) + 2f(s+3) + 3f(s+2) + 2f(s+1) + f(s) = 0, \\ f(0) = f(1) = f(3) = 0, \quad f(2) = -1. \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$0 = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 \equiv (\lambda^2 + \lambda + 1)^2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_2 = \lambda_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Запишем корни в тригонометрической форме. Очевидно, модули всех корней равны 1. Далее, из уравнений $\cos w = -1/2$, $\sin w = \sqrt{3}/2$ находим $w = 2\pi/3$. Таким образом,

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \qquad \lambda_2 = \lambda_4 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Составляем общее решение на основании сформулированного правила, учитывая, что корни имеют кратность 2:

$$f(s) = (C_1 + C_2 s) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}s\right) + (C_3 + C_4 s) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}s\right).$$

Определяем постоянные C_j, $j = \overline{1,4}$, из начальных условий:

$$C_1 = C_2 = 0, \qquad C_3 = -C_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Подставляем найденные значения в формулу общего решения и приходим к искомому решению задачи Коши:

$$f(s) = \frac{2(s-1)}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} s\right). \qquad \square$$

Можно рассматривать и обратную задачу – восстановления уравнения по известной фундаментальной системе решений.

Пример. *Построим линейное однородное разностное уравнение* (*минимально возможного порядка*) *с постоянными вещественными коэффициентами, частными решениями которого являются функции* $f_1(s) = (s-1)3^s$ *и* $f_2(s) = \sin(s+1)$.

Решения $f_1(s)$ и $f_2(s) \equiv (\sin s)(\cos 1) + (\cos s)(\sin 1)$, очевидно, линейно независимы. Согласно теореме о фундаментальной системе решений линейного однородного уравнения с постоянными вещественными коэффициентами, функция вида $(a+b\cdot s)3^s$ (соответственно, $a \cdot \sin s + b \cdot \cos s$), где a и b – константы, является решением такого уравнения тогда и только тогда, когда $\lambda = 3$ (соответственно, $\lambda = \cos 1 \pm i \sin 1 = e^{\pm i}$) – корень кратности ≥ 2 (соответственно, пара комплексно сопряжённых корней кратности ≥ 1) характеристического уравнения. Таким образом, подходящим уравнением минимально возможного порядка выступает уравнение порядка 4 с характеристическим уравнением $(\lambda-3)^2(\lambda^2 - 2\cos 1\lambda + 1) = 0$. Раскрыв скобки в левой части,

$$\lambda^4 - (6 + 2\cos 1)\lambda^3 + (10 + 12\cos 1)\lambda^2 - (6 + 18\cos 1)\lambda + 9,$$

восстановим искомое разностное уравнение:

$$u(s+4) - (6+2\cos 1)u(s+3) + (10+12\cos 1)u(s+2) - (6+18\cos 1)u(s+1) + 9u(s) = 0. \quad \square$$

§1.6. Метод подбора частного решения

Рассмотрим линейное неоднородное разностное уравнение порядка k,

$$u(s+k) + a_1 u(s+k-1) + \ldots + a_k u(s) = Q(s), \quad s = 0, 1, 2, \ldots; \quad a_j = \mathrm{const} \in \mathbb{R}, \quad a_k \neq 0, \tag{13}$$

с постоянными вещественными коэффициентами и *квазимногочленом* в правой части:

$$Q(s) = |\lambda|^s \cdot (P(s)\cos sw + H(s)\sin sw) \not\equiv 0,$$

где $P(s)$, $H(s)$ – заданные многочлены степени не выше n с вещественными коэффициентами, $|\lambda|, w = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$. Имеет место следующий

Метод подбора частного решения:

если число $\lambda = |\lambda|(\cos w + i \sin w)$ *есть* m*-кратный корень характеристического уравнения* (12), *то частное решение* $u^*(s)$ *уравнения* (13) *можно найти в виде*

$$s^m \cdot |\lambda|^s \cdot (\widetilde{P}(s)\cos sw + \widetilde{H}(s)\sin sw), \tag{14}$$

где $\widetilde{P}(s)$, $\widetilde{H}(s)$ – многочлены степени не выше n с неопределёнными коэффициентами.

Коэффициенты многочленов $\widetilde{P}(s)$, $\widetilde{H}(s)$ определяются подстановкой выражения (14) вместо $u(s)$ в уравнение (13); после этого, общее решение уравнения (13) записывается в виде, указанном в теореме 3.

Замечание 1. Если λ – вещественное число, т.е. $Q(s) = \lambda^s \cdot P(s)$, то частное решение следует искать в виде $s^m \cdot \lambda^s \cdot \widetilde{P}(s)$, где по-прежнему m есть кратность числа λ как корня характеристического уравнения.

Замечание 2. Если неоднородность $Q(s)$ есть сумма нескольких квазимногочленов $Q_1(s), \ldots, Q_p(s)$ (с разными λ), то для каждого $j = \overline{1,p}$ нужно подобрать частное решение уравнения

$$u(s+k) + a_1 u(s+k-1) + \ldots + a_k u(s) = Q_j(s),$$

и сумма найденных функций доставит частное решение исходного уравнения. (Это правило называется *принципом суперпозиции решений* или *принципом наложения решений*.)

Пример. *Решим линейное неоднородное уравнение $f(s+2) = f(s+1) + f(s) + s + 2^s$ второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Неоднородность $Q(s) = s + 2^s$ является суммой двух разных квазимногочленов:

$$\begin{array}{lll} Q_1(s) = s \equiv 1^s \cdot s & \Longrightarrow & \lambda_1 = 1,\ P_1(s) = s,\ \deg P_1(s) = 1\,; \\ Q_2(s) = 2^s \equiv 2^s \cdot 1 & \Longrightarrow & \lambda_2 = 2,\ P_2(s) = 1,\ \deg P_2(s) = 0 \end{array}$$

(символом $\deg P$ принято обозначать степень многочлена P), поэтому используем принцип суперпозиции. Заметим, что числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ не являются корнями характеристического уравнения $\lambda^2 = \lambda + 1$, а потому имеют кратность $m = 0$ как корни этого уравнения.

Из сказанного следует, что частные решения уравнений

$$f(s+2) = f(s+1) + f(s) + s, \quad f(s+2) = f(s+1) + f(s) + 2^s$$

имеют вид, соответственно,

$$A_0 + A_1 s, \quad A \cdot 2^s$$

(с некоторыми константами A_0, A_1, A). Подставив выражение $A_0 + A_1 s$ вместо $f(s)$ в первое уравнение, придём к тождеству

$$A_0 + A_1(s+2) = A_0 + A_1(s+1) + A_0 + A_1 s + s.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой частях тождества, получим $A_0 = A_1 = -1$. Аналогично, подставив выражение $A \cdot 2^s$ вместо $f(s)$ во второе уравнение, получим $A = 1$. Сумма найденных функций есть частное решение исходного уравнения:

$$f^*(s) = 2^s - 1 - s.$$

Воспользуемся теперь результатом примера предыдущего параграфа, где было найдено общее решение однородного уравнения $f(s+2) = f(s+1) + f(s)$, и напишем общее решение исходного неоднородного:

$$f(s) = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^s + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^s + 2^s - 1 - s,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. □

§1.7. Понятие о линейных системах разностных уравнений

Определение 5. *Нормальной линейной системой* (*порядка* n) *разностных уравнений* называется система вида

$$U(s+1) = A(s)U(s) + F(s), \quad A(s) = (a_{i,j}(s))_{i,j=1}^n, \quad \det A(s) \neq 0 \quad (\forall\ s = 0, 1, 2, \dots), \tag{15}$$

где $A(s)$ – заданная матрица коэффициентов системы, $F(s) = (f_1(s), \dots, f_n(s))^T$ – заданный вектор-столбец свободных членов системы, $U(s) = (u_1(s), \dots, u_n(s))^T$ – вектор-столбец неизвестных $u_j(s)$.

Система (15) называется *однородной*, если $F(s) = 0$ для всех $s = 0, 1, 2, \dots$, и *неоднородной* – в противном случае. *Решением* системы (15) называется вектор-функция, которая при каждом $s = 0, 1, 2, \dots$ определена и удовлетворяет системе (15).

Задача Коши, состоящая в отыскании решения U системы (15), удовлетворяющего условию $U(0) = U_0$, где U_0 – заданный числовой n-мерный вектор, однозначно разрешима. Как и в случае скалярного разностного уравнения, решение задачи Коши для системы можно найти последовательными подстановками: $U(1) = A(0)U_0 + F(0)$, $U(2) = A(1)U(1) + F(1) = A(1)A(0)U_0 + A(1)F(0) + F(1)$ и т.д.

По аналогии со случаем скалярного уравнения, для системы определяются понятия общего и частного решений. Доказывается, что общее решение неоднородной системы (15) есть сумма любого её частного решения и общего решения соответствующей однородной системы $U(s+1) = A(s)U(s)$. Вводится понятие фундаментальной системы решений однородной системы. Доказывается, что общее решение однородной системы $U(s+1) = AU(s)$ с постоянной невырожденной матрицей A, собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ которой, к примеру, вещественные попарно различные, можно представить в виде $U(s) = C_1\lambda_1^s h_1 + \ldots + C_n\lambda_n^s h_n$, где h_j – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу λ_j. Обосновывается и метод подбора частного решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами и специальной правой частью $F(s)$.

Для изложения примера решения системы ограничимся тем замечанием, что нормальную линейную систему порядка n можно свести к линейному уравнению порядка n (и наоборот) и для построения решения воспользоваться ранее изложенными методами.

Пример. *Методом сведения к уравнению решим линейную неоднородную систему второго порядка с постоянными коэффициентами:*

$$\begin{cases} x(s+1) = 2x(s) - y(s) + 2^s, \\ y(s+1) = x(s) - y(s) - 1 - s. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $y(s+2) = x(s+1) - y(s+1) - 2 - s$. Заменив здесь $x(s+1)$ на его выражение из первого уравнения, получим

$$y(s+2) = 2x(s) - y(s) + 2^s - y(s+1) - 2 - s.$$

В этом равенстве заменим $x(s)$ на его выражение из второго уравнения:

$$y(s+2) = 2[y(s+1)+y(s)+1+s] - y(s) - y(s+1) + 2^s - 2 - s = y(s+1) + y(s) + s + 2^s.$$

Тем самым, мы свели исходную систему к уравнению второго порядка

$$y(s+2) - y(s+1) - y(s) = s + 2^s.$$

Общее решение последнего было найдено в предыдущем параграфе:

$$y(s) = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^s + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^s + 2^s - 1 - s,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Зная $y(s)$, легко найти функцию $x(s)$ из второго уравнения системы:

$$x(s) = y(s+1) + y(s) + 1 + s = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s+1} + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s+1} + 2^{s+1} - 2 - s +$$

$$+ C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^s + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^s + 2^s =$$

$$= C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^s \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^s \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 3 \cdot 2^s - 2 - s. \qquad \square$$

§1.8. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти общий элемент возвратной последовательности

$$u_{n+2} = (3N^2 + 4N - 3)u_{n+1} - 2(N^4 + 3N^3 - 3N + 1)u_n,$$

где $N = 1, 2, \ldots$ – номер варианта. Подобрать начальные значения u_1, u_2 так, чтобы для соответствующей последовательности $\{u_n\}$ предел $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n$ был равен одному из корней характеристического уравнения.

Задача 2. Решить линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка

$$u(s+1) = \left(\frac{s+5N+1}{s+5N}\right)^{2N} \cdot u(s) + \frac{(s+5N+1)^{2N-1}}{s+5N+2},$$

где $N = 1, 2, \ldots$ – номер варианта. (Применить формулу (8).)

Задача 3. Решить линейное однородное разностное уравнение. (Можно подбирать целочисленные корни характеристического уравнения, основываясь на известном утверждении, что такие корни являются делителями свободного коэффициента многочлена с целочисленными коэффициентами.)

1) $u(s+4) - 7u(s+3) + 22u(s+2) - 32u(s+1) + 16u(s) = 0.$
2) $u(s+4) - 4u(s+3) + 7u(s+2) - 6u(s+1) + 2u(s) = 0.$
3) $u(s+4) - 7u(s+3) + 13u(s+2) + 3u(s+1) - 18u(s) = 0.$
4) $u(s+4) - 13u(s+3) + 62u(s+2) - 128u(s+1) + 96u(s) = 0.$
5) $u(s+4) - 11u(s+3) + 29u(s+2) + 35u(s+1) - 150u(s) = 0.$
6) $u(s+4) - 9u(s+2) - 4u(s+1) + 12u(s) = 0.$
7) $u(s+4) - 6u(s+3) + 9u(s+2) + 4u(s+1) - 12u(s) = 0.$
8) $u(s+4) - 9u(s+3) + 30u(s+2) - 44u(s+1) + 24u(s) = 0.$
9) $u(s+4) - 6u(s+3) - 7u(s+2) + 96u(s+1) - 144u(s) = 0.$
10) $u(s+4) + u(s+3) - 28u(s+2) - 16u(s+1) + 192u(s) = 0.$
11) $u(s+4) - 6u(s+3) - 17u(s+2) + 150u(s+1) - 200u(s) = 0.$
12) $u(s+4) - u(s+3) - 23u(s+2) - 3u(s+1) + 90u(s) = 0.$
13) $u(s+4) - 9u(s+3) + 21u(s+2) + u(s+1) - 30u(s) = 0.$
14) $u(s+4) - 6u(s+3) - 17u(s+2) + 150u(s+1) + 192u(s) = 0.$
15) $u(s+4) - 7u(s+3) + 5u(s+2) + 31u(s+1) - 30u(s) = 0.$
16) $u(s+4) - 10u(s+3) + 36u(s+2) - 54u(s+1) + 27u(s) = 0.$
17) $u(s+4) - 10u(s+3) - u(s+2) + 250u(s+1) - 600u(s) = 0.$
18) $u(s+4) + 18u(s+3) + 87u(s+2) + 238u(s+1) + 490u(s) = 0.$
19) $u(s+4) - 10u(s+3) + 16u(s+2) + 90u(s+1) - 225u(s) = 0.$
20) $u(s+4) - u(s+3) - 21u(s+2) + 9u(s+1) + 108u(s) = 0.$
21) $u(s+4) - 9u(s+3) + 14u(s+2) + 36u(s+1) - 72u(s) = 0.$
22) $u(s+4) - 8u(s+3) + 23u(s+2) - 28u(s+1) + 12u(s) = 0.$
23) $u(s+4) - 3u(s+3) - 21u(s+2) + 83u(s+1) - 60u(s) = 0.$
24) $u(s+4) - 50u(s+2) - 625u(s) = 0.$
25) $u(s+4) - 9u(s+3) + 18u(s+2) + 4u(s+1) - 24u(s) = 0.$
26) $u(s+4) - 13u(s+3) + 62u(s+2) - 128u(s+1) + 96u(s) = 0.$
27) $u(s+4) + 10u(s+3) + 22u(s+2) + 2u(s+1) - 35u(s) = 0.$
28) $u(s+4) + 5u(s+3) - 6u(s+2) - 32u(s+1) + 32u(s) = 0.$
29) $u(s+4) - 4u(s+3) - 22u(s+2) + 100u(s+1) - 75u(s) = 0.$
30) $u(s+4) - 6u(s+3) + u(s+2) + 24u(s+1) + 16u(s) = 0.$

Задача 4. Решить задачу Коши для уравнения первого порядка

$$u(s+1) + Nu(s) = (N+1)^{2s} + e^{Ns+1}\cos(Ns+\pi), \qquad u(0) = e/N,$$

применив метод подбора; $N = 1, 2, \ldots$ – номер варианта.

Задача 5. Определить порядок разностного уравнения, преобразовав конечные разности $\Delta^k u(s)$ по формуле (4).

1) $\Delta^4 u(s) + 14\Delta^3 u(s) - 24\Delta u(s) - 11u(s) = s.$
2) $2\Delta^4 u(s) - 13\Delta^3 u(s) + 15\Delta u(s) = s + 1.$
3) $3\Delta^4 u(s) + 12\Delta^3 u(s) + 15\Delta u(s) + 24u(s) = s - 3.$

4) $4\Delta^4 u(s) - 11\Delta^3 u(s) + 15\Delta u(s) = s.$
5) $5\Delta^4 u(s) + 10\Delta^3 u(s) - \Delta^2 u(s) - 2\Delta u(s) + 4u(s) = 0.$
6) $6\Delta^4 u(s) - 9\Delta^3 u(s) + \Delta^2 u(s) + 14\Delta u(s) - 2u(s) = 4s.$
7) $7\Delta^4 u(s) + 8\Delta^3 u(s) - \Delta^2 u(s) + 14\Delta u(s) + 16u(s) = 5s - 1.$
8) $8\Delta^4 u(s) - 7\Delta^3 u(s) + 2\Delta^2 u(s) + 13\Delta u(s) - 4u(s) = -2s.$
9) $9\Delta^4 u(s) + 6\Delta^3 u(s) - 2\Delta^2 u(s) + 13\Delta u(s) + 12u(s) = -s.$
10) $10\Delta^4 u(s) - 5\Delta^3 u(s) + 2\Delta^2 u(s) + 54\Delta u(s) + 37u(s) = s.$
11) $11\Delta^4 u(s) + 4\Delta^3 u(s) - 3\Delta^2 u(s) + 11\Delta u(s) + 7u(s) = 4s + 1.$
12) $12\Delta^4 u(s) - 3\Delta^3 u(s) + 3\Delta^2 u(s) + 10\Delta u(s) - 8u(s) = -2s.$
13) $13\Delta^4 u(s) + 2\Delta^3 u(s) - 3\Delta^2 u(s) + 8\Delta u(s) = s.$
14) $14\Delta^4 u(s) - \Delta^3 u(s) + 3\Delta^2 u(s) + 6\Delta u(s) - 12u(s) = -s - 5.$
15) $15\Delta^4 u(s) - 4\Delta^2 u(s) + 52\Delta u(s) + 41u(s) = 4s.$
16) $16\Delta^4 u(s) + \Delta^3 u(s) + 4\Delta^2 u(s) + 6\Delta u(s) - 13u(s) = 0.$
17) $17\Delta^4 u(s) - 2\Delta^3 u(s) - 4\Delta^2 u(s) + 9\Delta u(s) - 6u(s) = s - 7.$
18) $18\Delta^4 u(s) + 3\Delta^3 u(s) + 5\Delta^2 u(s) + 10\Delta u(s) - 10u(s) = -s + 1.$
19) $19\Delta^4 u(s) - 4\Delta^3 u(s) - 5\Delta^2 u(s) + 12\Delta u(s) - 6u(s) = 1.$
20) $20\Delta^4 u(s) + 5\Delta^3 u(s) + 5\Delta^2 u(s) + 80\Delta u(s) + 60u(s) = s.$
21) $21\Delta^4 u(s) - 6\Delta^3 u(s) - 5\Delta^2 u(s) + 15\Delta u(s) - 7u(s) = -s - 3.$
22) $22\Delta^4 u(s) + 7\Delta^3 u(s) + 6\Delta^2 u(s) + 17\Delta u(s) - 4u(s) = 5s + 6.$
23) $23\Delta^4 u(s) - 8\Delta^3 u(s) - 6\Delta^2 u(s) + 18\Delta u(s) - 7u(s) = s + 9.$
24) $24\Delta^4 u(s) + 9\Delta^3 u(s) + 6\Delta^2 u(s) + 19\Delta u(s) - 2u(s) = -1.$
25) $25\Delta^4 u(s) - 10\Delta^3 u(s) - 6\Delta^2 u(s) + 108\Delta u(s) + 79u(s) = 0.$
26) $26\Delta^4 u(s) + 11\Delta^3 u(s) + 7\Delta^2 u(s) + 22\Delta u(s) = s + 1.$
27) $27\Delta^4 u(s) - 12\Delta^3 u(s) - 7\Delta^2 u(s) + 23\Delta u(s) - 9u(s) = 2s + 15.$
28) $28\Delta^4 u(s) + 13\Delta^3 u(s) + 7\Delta^2 u(s) + 24\Delta u(s) + 2u(s) = 11.$
29) $29\Delta^4 u(s) - 14\Delta^3 u(s) - 7\Delta^2 u(s) + 25\Delta u(s) - 11u(s) = s.$
30) $30\Delta^4 u(s) + 15\Delta^3 u(s) + 8\Delta^2 u(s) + 106\Delta u(s) + 83u(s) = 0.$

Задача 6. Решить задачу Коши для линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью; при построении решения использовать метод подбора.

1) $y(s+2) - 9y(s+1) + 20y(s) = \cos s - 2^s, \quad y(1) = y(2) = 0.$
2) $y(s+2) - 10y(s+1) + 26y(s) = -2\sin 3s - 2\cdot 3^s, \quad y(0) = y(1) = 0.$
3) $y(s+2) - 5y(s+1) + 4y(s) = 2\cos 3s - 5^s, \quad y(2) = y(3) = 0.$
4) $y(s+2) - 2y(s+1) + 10y(s) = 2^{s+2} + 3\sin s, \quad y(1) = y(2) = 0.$
5) $y(s+2) - y(s+1) - 2y(s) = 5\cdot 3^s - \sin 4s, \quad y(0) = y(1) = 0.$
6) $y(s+2) + 10y(s+1) + 26y(s) = 12\cdot 4^s - 15\cos 2s, \quad y(2) = y(3) = 0.$
7) $y(s+2) - 6y(s+1) + 5y(s) = 4\cdot 6^s + 4\sin 2s, \quad y(1) = y(2) = 0.$
8) $y(s+2) - 2y(s+1) + 5y(s) = 2\cdot 5^s + 16\cos 3s, \quad y(0) = y(1) = 0.$
9) $y(s+2) - 4y(s+1) + 3y(s) = 10\cdot 12^s + 4\cos 2s, \quad y(2) = y(3) = 0.$
10) $y(s+2) + 2y(s+1) + 2y(s) = 10\cdot 14^s + 10\sin 3s, \quad y(1) = y(2) = 0.$
11) $y(s+2) - 7y(s+1) + 12y(s) = 4\cdot 6^s + 3\cos 2s, \quad y(0) = y(1) = 0.$
12) $y(s+2) - 4y(s+1) + 8y(s) = 12\cos 7s - 2\cdot 4^s, \quad y(2) = y(3) = 0.$
13) $y(s+2) + 4y(s+1) + 3y(s) = 27\cdot 7^s + 4\cos 2s, \quad y(1) = y(2) = 0.$
14) $y(s+2) - 6y(s+1) + 25y(s) = 4\cdot 9^s + 5\sin 3s, \quad y(0) = y(1) = 0.$

15) $y(s+2)+y(s+1)-42y(s)=20\cdot 4^s+8\sin s, \quad y(2)=y(3)=0.$
16) $y(s+2)-6y(s+1)+58y(s)=78\sin 3s-3\cdot 4^s, \quad y(1)=y(2)=0.$
17) $y(s+2)-9y(s+1)-10y(s)=8^s+18\sin 3s, \quad y(0)=y(1)=0.$
18) $y(s+2)-18y(s+1)+85y(s)=-4\cos 7s-2\cdot 8^s, \quad y(2)=y(3)=0.$
19) $y(s+2)+3y(s+1)-18y(s)=80\cdot 11^s+28\cos 2s, \quad y(1)=y(2)=0.$
20) $y(s+2)+3y(s)=36\cdot 7^s-5\cos s, \quad y(0)=y(1)=0.$
21) $y(s+2)+13y(s+1)+22y(s)=24\cdot 3^s+27\cos 10s, \quad y(2)=y(3)=0.$
22) $y(s+2)-12y(s+1)+37y(s)=\cos s-2\cdot 4^s, \quad y(1)=y(2)=0.$
23) $y(s+2)+14y(s+1)+48y(s)=17\cdot 7^s-40\sin 3s, \quad y(0)=y(1)=0.$
24) $y(s+2)+12y(s+1)+122y(s)=96\cdot 2^s+8\sin 2s, \quad y(2)=y(3)=0.$
25) $y(s+2)-14y(s+1)+45y(s)=5\cos 2s-18\cdot 4^s, \quad y(1)=y(2)=0.$
26) $y(s+2)-6y(s+1)+20y(s)=4\cdot 8^s-42\cos s, \quad y(0)=y(1)=0.$
27) $y(s+2)-6y(s+1)+2y(s)=4\cdot 5^s+6\sin s, \quad y(2)=y(3)=0.$
28) $y(s+2)-18y(s+1)+82y(s)=-6\sin s-15\cdot 4^s, \quad y(1)=y(2)=0.$
29) $y(s+2)+14y(s+1)+42y(s)=91\cdot 3^s-2\sin 2s, \quad y(0)=y(1)=0.$
30) $y(s+2)-8y(s+1)+19y(s)=4\sin 4s-21\cdot 2^s, \quad y(2)=y(3)=0.$

Задача 7. Построить линейное однородное разностное уравнение (минимально возможного порядка) с постоянными вещественными коэффициентами, имеющее указанные частные решения.

1) $(-5)^s, \quad 7^s, \quad 5^s, \quad 4^s\sin\frac{7\pi s}{4}.$
2) $3^s, \quad s4^s, \quad 2^s\cos\frac{\pi s}{3}, \quad 2^s\sin\frac{\pi s}{3}.$
3) $6^s, \quad 2^s\cos\frac{\pi s}{3}, \quad s2^s\sin\frac{\pi s}{3}.$
4) $2^s, \quad (-7)^s, \quad (-6)^s, \quad 6^s\cos\frac{\pi s}{3}.$
5) $(-1)^s \quad 4^s, \quad s4^s, \quad 6^s\cos\frac{11\pi s}{6}, \quad 6^s\sin\frac{11\pi s}{6}.$
6) $5^s, \quad 2^s\cos\frac{11\pi s}{6}, \quad 2^s\sin\frac{11\pi s}{6}, \quad s2^s\cos\frac{11\pi s}{6}, \quad s2^s\sin\frac{11\pi s}{6}.$
7) $(-5)^s, \quad 6^s, \quad 3^s, \quad 4^s\cos\frac{\pi s}{4}, \quad 4^s\sin\frac{\pi s}{4}.$
8) $2^s, \quad 4^s, \quad s4^s, \quad 2^s\cos\frac{\pi s}{4}, \quad 2^s\sin\frac{\pi s}{4}.$
9) $(-1)^s, \quad (s+1)10^s\cos\frac{\pi s}{4}.$
10) $(-3)^s, \quad 6^s, \quad (-4)^s, \quad 4^s\cos\frac{5\pi s}{3}.$
11) $7^s, \quad (2s-5)3^s, \quad 4^s\cos\frac{\pi s}{3}, \quad 4^s\sin\frac{\pi s}{3}.$
12) $5\cdot 3^s, \quad (10s+1)\cdot 12^s\cos\frac{5\pi s}{3}, \quad s12^s\sin\frac{5\pi s}{3}.$
13) $2\cdot 4^s, \quad 3\cdot 5^s, \quad 4\cdot 3^s, \quad 6^s\sin\frac{11\pi s}{6}.$
14) $(-1)^s, \quad 3^s, \quad 5s3^s, \quad 4\cdot 6^s\cos\frac{\pi s}{3}+6^s\sin\frac{\pi s}{3}.$
15) $(-1)^s, \quad 10^s\cdot\left(\cos\frac{\pi s}{3}+5s\cdot\sin\frac{\pi s}{3}\right).$
16) $(-7)^s, \quad 4^s+5\cdot 2^s, \quad 2^s\cos\frac{\pi s}{3}-2^s\sin\frac{\pi s}{3}.$
17) $3^s-2^s-s2^s, \quad 2^s\cos\frac{\pi s}{6}.$
18) $8^s, \quad (1-2s)2^s\sin\frac{\pi s}{4}.$
19) $3^{s+1}, \quad 2^{s+2}+(-1)^s, \quad 4^s\cos\frac{\pi s}{6}, \quad 4^s\sin\frac{\pi s}{6}.$
20) $(-3)^s, \quad 5^s, \quad s5^s, \quad 12^s\cos\frac{11\pi(s+1)}{6}.$
21) $2^s, \quad s10^s\cos\frac{\pi(s+1)}{6}+10^s\sin\frac{\pi(s-1)}{6}.$
22) $(-3)^s, \quad 2^s, \quad (-1)^s, \quad 6^s\cos\frac{\pi s}{4}, \quad 6^s\sin\frac{\pi s}{4}.$
23) $5^s+s2^s, \quad 2^s, \quad 6^s\cos\frac{\pi(s+5)}{4}, \quad 6^s\sin\frac{\pi(s-3)}{4}.$
24) $3^s, \quad 8^{s+1}\cos\frac{\pi(s-7)}{4}-s8^s\sin\frac{\pi(s+11)}{4}.$

25) $(-8)^{s-5}, \quad 4^s + (-2)^s, \quad 2^s \sin \frac{\pi(s+7)}{4}.$
26) $5^s, \quad (1-s)(1/7)^{1-s}, \quad 4^{s-2} \cos \frac{\pi s}{4} + 5 \cdot 4^{s+3} \sin \frac{\pi s}{4}.$
27) $11^s, \quad 4^s \cos \frac{\pi s}{4} + 5(s-1)4^s \sin \frac{\pi(s-6)}{4}.$
28) $(-1)^s, \quad 6^s - 3 \cdot 2^s, \quad 2^s \cos \frac{\pi s}{6}.$
29) $(-5)^s, \quad s2^{2s-1}, \quad 4^s \cos \frac{7\pi s}{4}, \quad 4^s \sin \frac{7\pi s}{4}.$
30) $(-8)^s \cdot \left(1 + \cos \frac{7\pi s}{4} - 5s \cdot \sin \frac{7\pi s}{4}\right).$

Задача 8. Решить линейную однородную систему 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

1) $\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) + y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + 4y(t). \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) - y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) - 4y(t). \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) + y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) - 2y(t). \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) - 3y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + y(t). \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(t+1) = -x(t) - 5y(t), \\ y(t+1) = x(t) + y(t). \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) + 2y(t), \\ y(t+1) = -2x(t) + y(t). \end{cases}$

7) $\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) + y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + 2y(t). \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x(t+1) = -3x(t) + 2y(t), \\ y(t+1) = 4x(t) - y(t). \end{cases}$

9) $\begin{cases} x(t+1) = -5x(t) + 3y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + 5y(t). \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) + 3y(t), \\ y(t+1) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$

11) $\begin{cases} x(t+1) = -x(t) - 3y(t), \\ y(t+1) = -2x(t) + y(t). \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) + 3y(t), \\ y(t+1) = -3x(t) + y(t). \end{cases}$

13) $\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) + 2y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + 2y(t). \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x(t+1) = -4x(t) + 2y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) - y(t). \end{cases}$

15) $\begin{cases} x(t+1) = -5x(t) + 3y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + 3y(t). \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) - 3y(t), \\ y(t+1) = 2x(t) + y(t). \end{cases}$

17) $\begin{cases} x(t+1) = -x(t) - 3y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + 2y(t). \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x(t+1) = -2x(t) - 6y(t), \\ y(t+1) = x(t) + 6y(t). \end{cases}$

19) $\begin{cases} x(t+1) = -3x(t) + 6y(t), \\ y(t+1) = 5x(t) - 2y(t). \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x(t+1) = -3x(t) + 6y(t), \\ y(t+1) = 2x(t) - 2y(t). \end{cases}$

21) $\begin{cases} x(t+1) = -2x(t) + 6y(t), \\ y(t+1) = 2x(t) + 6y(t). \end{cases}$ 22) $\begin{cases} x(t+1) = 3x(t) - 2y(t), \\ y(t+1) = 4x(t) - y(t). \end{cases}$

23) $\begin{cases} x(t+1) = x(t) + 4y(t), \\ y(t+1) = -4x(t) + y(t). \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x(t+1) = -3x(t) - 6y(t), \\ y(t+1) = x(t) + 3y(t). \end{cases}$

25) $\begin{cases} x(t+1) = -5x(t) - 6y(t), \\ y(t+1) = 4x(t) + 6y(t). \end{cases}$ 26) $\begin{cases} x(t+1) = -3x(t) + 2y(t), \\ y(t+1) = 2x(t) - 3y(t). \end{cases}$

27) $\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) + 3y(t), \\ y(t+1) = 3x(t) + 2y(t). \end{cases}$ 28) $\begin{cases} x(t+1) = -5x(t) + 2y(t), \\ y(t+1) = 2x(t) + y(t). \end{cases}$

29) $\begin{cases} x(t+1) = -x(t) - 3y(t), \\ y(t+1) = 2x(t) + y(t). \end{cases}$ 30) $\begin{cases} x(t+1) = 3x(t) - 2y(t), \\ y(t+1) = -4x(t) - y(t). \end{cases}$

Задача 9. Решить линейную неоднородную систему второго порядка методом сведения к уравнению.

1) $\begin{cases} x(s+1) = 3x(s) - 2y(s) + \cos s + s, \\ y(s+1) = x(s) + 6y(s) + 2^s. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(s+1) = 5x(s) + y(s) + 2\sin 3s + 2s, \\ y(s+1) = -x(s) + 5y(s) + 3^s. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(s+1) = 6x(s) - 5y(s) + \cos 3s + 3s - 2, \\ y(s+1) = 2x(s) - y(s) + 5^s. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x(s+1) = -2x(s) - 6y(s) + 3\cos s + 7s, \\ y(s+1) = 3x(s) + 4y(s) + 2^s. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(s+1) = -2x(s) + 4y(s) + \sin 4s - 3s - 5, \\ y(s+1) = -x(s) + 3y(s) + 3^s. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x(s+1) = -8x(s) + 2y(s) + 3\cos 2s + s - 1, \\ y(s+1) = -5x(s) - 2y(s) + 4^s. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x(s+1) = 2x(s) + 3y(s) + 4\sin 2s - 3s, \\ y(s+1) = x(s) + 4y(s) + 6^s. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x(s+1) = 3x(s) - y(s) + 2\cos 3s - 4s + 3, \\ y(s+1) = 8x(s) - y(s) + 5^s. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x(s+1) = 2x(s) + y(s) + 4\cos 2s + s - 5, \\ y(s+1) = x(s) + 2y(s) + 12^s. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x(s+1) = 4x(s) - 13y(s) + 5\sin 3s - s, \\ y(s+1) = 2x(s) - 6y(s) + 14^s. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x(s+1) = 2x(s) - 2y(s) + 3\cos 2s + s - 2, \\ y(s+1) = x(s) + 5y(s) + 6^s. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x(s+1) = 6x(s) - 5y(s) + 3\cos 7s - 2s - 1, \\ y(s+1) = 4x(s) - 2y(s) + 4^s. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x(s+1) = -2x(s) + y(s) + 4\cos 2s + 6s, \\ y(s+1) = x(s) - 2y(s) + 3 \cdot 7^s. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x(s+1) = 5x(s) - 4y(s) + \sin 3s + s, \\ y(s+1) = 5x(s) + y(s) + 9^s. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x(s+1) = -6x(s) + 3y(s) + 2\sin s - 3, \\ y(s+1) = 4x(s) + 5y(s) + 2 \cdot 4^s. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x(s+1) = 7x(s) - 5y(s) + 6\sin 2s + 3s + 4, \\ y(s+1) = 13x(s) - y(s) + 4^s. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x(s+1) = 7x(s) + 4y(s) + 3\sin 3s + 4s, \\ y(s+1) = 6x(s) + 2y(s) + 8^s. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x(s+1) = 10x(s) + 5y(s) + 4\cos 7s + 3s - 2, \\ y(s+1) = -x(s) + 8y(s) + 8^s. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x(s+1) = -5x(s) + 2y(s) + 7\cos 2s - s, \\ y(s+1) = 4x(s) + 2y(s) + 5 \cdot 11^s. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x(s+1) = -2x(s) + 7y(s) + 5\cos s + 2s + 1, \\ y(s+1) = -x(s) + 2y(s) + 4 \cdot 7^s. \end{cases}$

21) $\begin{cases} x(s+1) = -5x(s) + 6y(s) + 9\cos 10s - 1, \\ y(s+1) = 3x(s) - 8y(s) + 3^{s+1}. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x(s+1) = 6x(s) - y(s) + \cos s - 3s, \\ y(s+1) = x(s) + 6y(s) + 4^s. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x(s+1) = -10x(s) + y(s) + 5\sin 3s - 1, \\ y(s+1) = -8x(s) - 4y(s) + 7^s. \end{cases}$

24) $\begin{cases} x(s+1) = -10x(s) - y(s) + 4\sin 2s + 9s, \\ y(s+1) = 2x(s) - 12y(s) + 8 \cdot 2^s. \end{cases}$

25) $\begin{cases} x(s+1) = 10x(s) - y(s) + \cos 2s + 3s - 11, \\ y(s+1) = 5x(s) + 4y(s) + 3 \cdot 4^s. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x(s+1) = 4x(s) + 2y(s) + 7\cos s - 2, \\ y(s+1) = -6x(s) + 2y(s) + 8^s. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x(s+1) = 4x(s) + 2y(s) + 2\sin s + 8s, \\ y(s+1) = 3x(s) + 2y(s) + 4 \cdot 5^s. \end{cases}$

28) $\begin{cases} x(s+1) = 9x(s) + y(s) + 6\sin s + 1, \\ y(s+1) = -x(s) + 9y(s) + 3 \cdot 4^s. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x(s+1) = -10x(s) + y(s) + \sin 2s - 3s - 15, \\ y(s+1) = -2x(s) - 4y(s) + 7 \cdot 3^s. \end{cases}$

30) $\begin{cases} x(s+1) = 5x(s) - 2y(s) + 2\sin 4s - 2s - 3, \\ y(s+1) = 2x(s) + 3y(s) + 7 \cdot 2^s. \end{cases}$

Часть 2. Приложения к задачам алгебры и анализа

В параграфе 2.1 изложен метод Бернулли приближённого нахождения корней многочленов, демонстрирующий идею метода итераций. В параграфе 2.2 изложен метод прогонки решения ленточных систем алгебраических уравнений, который служит важным инструментом при решении задачи сплайн-интерполяции (см. параграф 2.3) и при решении ряда краевых задач для дифференциальных уравнений (см. часть 3). Параграф 2.4 посвящён сравнительно новому направлению теории приближения – наипростейшим дробям.

§2.1. Приближение корней многочленов по методу Бернулли

Проблема нахождения корней многочленов возникает во многих разделах самой математики и в различных её приложениях. Одним из наиболее простых методов приближённого решения алгебраического уравнения

$$P_n(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad a_0a_n \neq 0 \tag{16}$$

(коэффициенты a_k мы считаем вещественными), является метод И.Бернулли (см., например, [4]), называемый также методом моментов. Он позволяет найти *доминирующий* (т.е. наибольший по модулю) корень, а также несколько корней, ближайших к нему по модулю. Похожая идея лежит в основе степенного метода решения частичной проблемы собственных значений матриц (см., например, [3]).

Сделаем два замечания об отыскании остальных корней.

1. Тривиальный случай наличия корня $x = 0$ уравнения (16) исключён условием $a_n \neq 0$, в частности, корень с минимальным модулем отличен от нуля. Для нахождения такого корня нужно сделать замену $y = x^{-1}$ и к полученному уравнению $a_0 + a_1y + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + a_ny^n = 0$ вида (16) применить метод Бернулли.

2. Если найден некоторый корень $x = a$ многочлена P_n, то можно понизить степень уравнения, используя теорему Безу, и применить метод Бернулли к полученному таким образом новому уравнению. При делении, однако, быстро растёт погрешность округления. К меньшим ошибкам приводит избавление от корня с минимальным модулем.

Изложим схему метода Бернулли (точнее, его видоизменения, предложенного Хильдебрандом). Преобразуем уравнение (16) к виду

$$x^n = p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n, \qquad p_j := -a_j/a_0, \quad p_n \neq 0, \tag{17}$$

и построим числовую последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ по рекуррентной формуле

$$u_{n+k} = p_1u_{n+k-1} + \ldots + p_{n-1}u_{k+1} + p_nu_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{18}$$

полагая в ней при $k = 1, 2, \ldots, n$

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{n-1} = 0, \quad u_n = k.$$

(Заметим, что (18) есть линейное разностное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами, а последовательность чисел u_k является возвратной начиная с некоторого k). Доказывается, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни уравнения (17), то

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = u_{n+k}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

В зависимости от типа доминирующих корней уравнения (17), может представиться один и только один из 4-х случаев:

1) уравнение имеет один (возможно, кратный) доминирующий корень, необходимо вещественный;

2) уравнение имеет два вещественных (возможно, кратных) доминирующих корня, разных по знаку;

3) уравнение имеет пару комплексных (возможно, кратных) сопряжённых доминирующих корня;

4) уравнение имеет три или более различных между собой доминирующих корня (два из них необходимо комплексно сопряжённые).

В последнем случае непосредственное вычисление корней по методу Бернулли невозможно, тогда как каждый из первых трёх случаев может быть распознан (и вычислены доминирующие корни) по виду последовательности чисел u_k. Ограничимся изучением первого случая.

Итак, пусть единственный доминирующий корень x_1 уравнения (17) – вещественный и имеет кратность s; пусть, для определённости, $x_1 = x_2 = \ldots = x_s$. Тогда, по формуле (19),

$$u_{n+k} = sx_1^k \left[1 + \frac{1}{s} \left(\frac{x_{s+1}}{x_1} \right)^k + \ldots + \frac{1}{s} \left(\frac{x_n}{x_1} \right)^k \right].$$

По условию, модуль любого из корней $x_{s+1}, \ldots, x_n$ меньше модуля корня x_1, следовательно, при больших k имеет место эквивалентность $u_{n+k} \sim sx_1^k$. Приходим к равенству

$$\lim_{k\to\infty} U_k = x_1, \qquad U_k := \frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}}.$$

Это равенство является характеристическим для случая 1), т.к. в остальных трёх случаях последовательность чисел U_k расходится. Таким образом, в случае указанной сходимости, приближённо полагают

$$x_1 \approx U_k,$$

где k достаточно велико. Заданная точность может считаться достигнутой, когда для чисел U_k стабилизировалось соответствующее количество значащих цифр.

Достоинством метода Бернулли является простота работы по нему. Заметим, что относительная погрешность убывает не медленнее, чем некоторая геометрическая прогрессия. В частности, если максимум $\max\{|x_{s+1}|, \ldots, |x_n|\}$ мало отличается от модуля $|x_1|$, то процесс сходится медленно, и метод Бернулли выгоднее использовать для получения некоторого приближения к корню, которое затем уточняется быстросходящимися методами, например, методом Ньютона.

Замечание. Если имеет место случай 1), то кратность доминирующего корня можно найти, исходя из эквивалентности $u_{n+k} \sim sx_1^k$, как предел $s = \lim_{k\to\infty}(u_{n+k}/x_1^k)$. Используя квадратные скобки для обозначения целой части числа, при больших k полагаем

$$s = \left[\frac{u_{n+k}}{x_1^k} \right].$$

Задание для самостоятельного решения. *С помощью метода Бернулли найти 50-е приближение к доминирующему корню многочлена*

$$P(x) = 25x^5 - (235+25N)x^4 - (309+15N)x^3 + (1651+159N)x^2 - (616+61N)x + 6N + 84,$$

где $N = 1, 2, \dots$ – номер варианта, и оценить кратность корня. То же сделать для корня с минимальным модулем. Локализовать с точностью $\varepsilon = 0.01$ тот из этих двух корней, кратность которого равна 1, стандартным методом дихотомии.

§2.2. Метод прогонки

Метод прогонки относится к прямым (точным) методам решения систем линейных алгебраических уравнений, т.е. позволяет за конечное число шагов получить точное решение в предположении, что ошибки округления отсутствуют. Метод представляет собой модификацию метода Гаусса на случай квадратной системы с матрицей, где все ненулевые элементы расположены на трёх диагоналях – главной и соседних сверху и снизу (такие матрицы называют *трёхдиагональными* или *ленточными*). Соответствующая система имеет вид

$$a_k x_{k-1} + b_k x_k + c_k x_{k+1} = r_k, \qquad k = \overline{1, n}, \qquad a_1 = c_n = 0, \tag{20}$$

где a_k, b_k, c_k, r_k – заданные коэффициенты, а x_k – неизвестные величины. К решению ленточных систем сводится решение ряда задач интерполяции функций (см. §2.3), краевых задач для дифференциальных уравнений (см. части 3 и 4) и других.

Легко видеть, что уравнение (20) представляет собой линейное разностное уравнение[1] порядка 2 относительно неизвестной $u(s) := x_s$ с переменными коэффициентами. Будем решать систему последовательным исключением неизвестных. При этом, можем считать $b_1 \neq 0$, т.к. в противном случае система или несовместна ($c_1 = 0 \neq r_1$), или заведомо нет единственности решения ($c_1 = r_1 = 0$), или порядок системы может быть понижен на 1 исключением неизвестного x_2 ($c_1 \neq 0$, $x_2 = r_1/c_1$).

Итак, из первого уравнения выражаем x_1:

$$x_1 = \delta_1 x_2 + \lambda_1, \qquad \delta_1 := -\frac{c_1}{b_1}, \quad \lambda_1 := \frac{r_1}{b_1},$$

и подставляем найденное выражение вместо x_1 во второе уравнение. После этого, во втором уравнении остаются лишь две неизвестные (x_2 и x_3), и оно может быть приведено к виду $x_2 = \delta_2 x_3 + \lambda_2$ с некоторыми δ_2, λ_2. Действуя аналогично, в результате этого прямого хода мы получим треугольную систему уравнений вида

$$x_k = \delta_k x_{k+1} + \lambda_k, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad x_n = \lambda_n, \tag{21}$$

где коэффициенты δ_k, λ_k рассчитываются по рекуррентным формулам

$$\Delta_1 = b_1, \quad \delta_1 = -\frac{c_1}{\Delta_1}, \quad \lambda_1 = \frac{r_1}{\Delta_1};$$

[1] Мы считаем, что числа c_k, равно как и числа a_k, не все нулевые. В противном случае порядок уравнения меньше двух.

$$\Delta_k = a_k\delta_{k-1} + b_k, \quad \delta_k = -\frac{c_k}{\Delta_k}, \quad \lambda_k = \frac{r_k - a_k\lambda_{k-1}}{\Delta_k}, \quad k = \overline{2, n-1};$$

$$\Delta_n = a_n\delta_{n-1} + b_n, \quad \delta_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{r_n - a_n\lambda_{n-1}}{\Delta_n}.$$

Обратный ход в прогонке аналогичен обратному ходу метода Гаусса. Используя найденные значения прогоночных коэффициентов, последовательно вычисляем неизвестные $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ по формулам (21).

Для применения метода нужно, чтобы при вычислениях не возникало деление на нуль, и чтобы рост погрешностей округления не был быстрым (это важно при решении систем больших размерностей). Эти требования отражаются в следующих терминах: прогонка называется *корректной*, если все знаменатели Δ_k отличны от нуля, и *устойчивой*, если все $|\delta_k| < 1$.

Простым достаточным условием корректности и устойчивости оказывается диагональное преобладание в матрице системы.

Теорема 4. *Прогонка корректна и устойчива, если для системы* (20) *выполняются неравенства* $a_k c_k \neq 0$ *при* $k = \overline{2, n-1}$ *и* $|b_k| > |a_k| + |c_k|$ *при* $k = \overline{1, n}$.

Замечание. Попутно может быть найден и определитель матрицы A системы (20) по формуле $\det A = \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \ldots \cdot \Delta_n$. В частности, отсюда следует, что $\det A \neq 0$ при выполнении условий теоремы и, тем самым, система однозначно разрешима. Вычисления по методу прогонки требуют лишь $O(n)$ операций (тогда как в общем виде метод Гаусса требует $O(n^3)$ операций).

§2.3. Сплайн-интерполяция полиномами

Напомним постановку задачи интерполяции скалярной функции.

Говорят, что функция h *интерполирует* функцию f на $[a, b]$, если $h(x_k) = f(x_k)$ в заданных точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ этого отрезка (называемых *узлами интерполяции*). В частности, если функция h выбирается среди многочленов (полиномов), то говорят о задаче *полиномиальной интерполяции.* Легко проверить, что для любой $(n+1)$-узловой таблицы $(x_k, f(x_k))$ с попарно различными узлами существует единственный интерполирующий многочлен P_n степени не выше n. При этом, если функция f достаточно гладкая, то с увеличением числа узлов точность приближения интерполяционным многочленом возрастает (т.е. убывает величина $\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)|$).

С другой стороны, если нет оснований считать f достаточно гладкой, то рост степени интерполирующего многочлена, вообще говоря, не повысит точность приближения. В таком случае, имеет смысл применить *кусочно-полиномиальную* интерполяцию или, что то же, *сплайн-интерполяцию.* Если взять при этом достаточно много частичных отрезков, то можно добиться заданной точности. Дадим определение сплайна (см., например, [3]).

Пусть на заданном отрезке $[a, b]$ выбраны точки $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. *Сплайном порядка* m называется функция класса $C^l[a, b]$, $l \leq m$, являющаяся на каждом подотрезке $[x_{k-1}, x_k]$ многочленом степени не выше m. Разность $d := m - l$ называется *дефектом* сплайна, а точки x_k – *узлами* сплайна.

Например, непрерывная на $[a, b]$ ломаная с прямолинейными звеньями, соединяющая все точки $(x_k, f(x_k))$, есть интерполирующий сплайн порядка 1 дефекта

1 (*кусочно-линейная* интерполяция). Между тем, интерес представляет построение сплайнов порядка гладкости $l \geq 1$, т.е. с дефектом $d \leq m-1$. Определим наиболее широко применяемый так называемый естественный сплайн третьего порядка (естественный кубический сплайн).

Пусть узлы сплайна,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

одновременно служат узлами интерполяци функции f, заданной своими значениями $f_k := f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$. *Естественным кубическим сплайном* для функции f называется дважды дифференцируемая на $[a,b]$ функция вида

$$g(x) := \{g_k(x) := a_k + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^n,$$

интерполирующая таблицу (x_k, f_k) и удовлетворяющая краевым условиям

$$g''(a) = g''(b) = 0.$$

По определению, естественный кубический сплайн имеет дефект $d = 1 = 3-2$, а его коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k определяются из $4n$ соотношений:

1) $g(x_k) = f_k$, $k = \overline{0,n}$ (условие интерполяции);

2) $g_k(x_k) = g_{k+1}(x_k)$, $g_k'(x_k) = g_{k+1}'(x_k)$, $g_k''(x_k) = g_{k+1}''(x_k)$, $k = \overline{1,n-1}$ (условие C^2-гладкой стыковки звеньев сплайна);

3) $g_1''(a) = g_n''(b) = 0$ (краевые условия).

Преобразовав эти соотношения, получим следующие формулы, где $k = \overline{1,n}$, и для краткости обозначено $h_k := x_k - x_{k-1} > 0$:

$$a_k = f_k, \qquad d_k = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k}, \qquad b_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} + \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k-1}), \tag{22}$$

а коэффициенты c_k удовлетворяют следующему линейному разностному уравнению порядка 2 с переменными коэффициентами:

$$h_{k-1}c_{k-2} + 2(h_{k-1}+h_k)c_{k-1} + h_k c_k = 3\frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} - 3\frac{f_{k-1} - f_{k-2}}{h_{k-1}}, \quad k = \overline{2,n}, \quad c_0 = c_n = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) ввиду очевидного ($2|h_{k-1}+h_k| > |h_{k-1}|+|h_k|$) диагонального преобладания в соответствующей матрице имеет единственное решение; это решение можно найти методом прогонки, причём диагональным преобладанием обеспечивается корректность и устойчивость прогонки (см. §2.2). Итак, справедлива

Теорема 5. *Естественный сплайн определяется единственным образом.*

Вычислительный алгоритм устойчив и эффективен (требует $O(n)$ операций; см. §2.2).

Расчётные формулы упрощаются в случае равноотстоящих узлов $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$. Так, уравнение (23) примет вид

$$c_{k-2} + 4c_{k-1} + c_k = 3\frac{f_k - 2f_{k-1} - f_{k-2}}{h}, \quad k = \overline{2,n}, \quad c_0 = c_n = 0.$$

Более того, в этом случае доказывается, что если функция f имеет непрерывную 4-ю производную на $[a, b]$, то для всех n и всех $x \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|f(x) - g(x)| \leq Ch^4$$

при некоторой постоянной C, не зависящей от шага h.

Задание для самостоятельного решения. *Составить таблицу значений функции $f(x)$ по равноотстоящим узлам $x_k = -1 + kh$, $k = 0, 1, ..., n$, отрезка $[-1, 1]$ с шагом $h = 2/n$. Построить естественный кубический сплайн $g(x)$ по этой таблице, построить в общей системе координат графики функций f, g на отрезке $[-1, 1]$ и вычислить фактическую погрешность*

$$\varepsilon = \max_{x \in [-1,1]} |g(x) - f(x)|$$

приближения функции сплайном.

Если $\varepsilon \leq 0.1$, то вычислить приближённо значения функций f, f' в точке $t = 2/9$ по формулам $f(t) \approx g(t)$, $f'(t) \approx g'(t)$. Если же $\varepsilon > 0.1$, то проделать те же построения, увеличив n в два раза. В качестве начального значения n взять $n = 10$.

1) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x + 2\cos x.$
2) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 8x - \sin x.$
3) $f(x) = x^4 + x^3 - 13x + 3\cos x.$
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7x - 12\sin x.$
5) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 15x - \cos x.$
6) $f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 + 3x - 7\sin x.$
7) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 4x^2 - \cos x.$
8) $f(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 9x - 2\sin x.$
9) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + \cos x.$
10) $f(x) = x^4 - x^3 + 13x^2 - 5x - 4\sin x.$
11) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x + 5\cos x.$
12) $f(x) = x^4 - 6x^3 + x + 3\sin x.$
13) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 9x - 6\cos x.$
14) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 11x^2 - x + 5\sin x.$
15) $f(x) = x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x + 2\cos x.$
16) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 14\sin x.$
17) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 12x + 6x + 4\cos x.$
18) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 4x - 4\sin x.$
19) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 15x + 8\cos x.$
20) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 3x - 6\sin x.$
21) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 13x + \cos x.$
22) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 11\sin x.$
23) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 13x + 7\cos x.$
24) $f(x) = x^4 + x^3 + 9x^2 - 5x + 8\sin x.$
25) $f(x) = x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 7x + 3\cos x.$
26) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 15x - \sin x.$
27) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 11\cos x.$
28) $f(x) = x^4 + x^3 - 15x^2 + 9x + 7\sin x.$

29) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12x + 3\cos x$.

30) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 - x - 8\sin x$.

§2.4. Интерполяция наипростейшими дробями

2.4.1. Постановка задачи. *Наипростейшей дробью* (н.д.) *порядка* $n = 0, 1, 2, \ldots$ называется сумма вида

$$R_n(z) := \frac{1}{z - w_1} + \frac{1}{z - w_2} + \ldots + \frac{1}{z - w_n},$$

где $w_1, \ldots, w_n$ – заданные комплексные числа (среди них могут быть одинаковые), называемые *полюсами* дроби; дробь нулевого порядка $R_0(z) \equiv 0$. Таким образом, н.д. – это специального вида рациональная функция (комплексного) переменного z. Рассмотрим многочлен

$$Q_n(z) := z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \ldots + q_0 \equiv (z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_n)$$

степени n (его коэффициенты q_j выражаются через величины w_j по формулам Виета $q_{n-j} = (-1)^j\sigma_j(w_1, \ldots, w_n)$, где элементарные симметрические многочлены σ_j определены ниже в пункте 2.4.2). Легко видеть, что дробь R_n является логарифмической производной этого многочлена:

$$R_n(z) = (\ln Q_n(z))' = (Q_n(z))'/Q_n(z).$$

Ясно, что н.д. R_n вещественнозначна в том и только том случае, когда вещественнозначным является порождающий её многочлен $Q_n(x)$ (т.е. все его нули либо вещественные, либо комплексно сопряжённые одинаковой кратности).

Начало активному изучению задачи аппроксимации (приближения) функций наипростейшими дробями было положено в 1999 году в работе В.И. Данченко и Д.Я. Данченко, где была доказана принципиальная возможность сколь угодно точного приближения аналитических функций суммами вида $R_n(z)$ при больших n. Позднее для н.д. был выявлен ряд аппроксимативных свойств, не присущих многочленам (что объясняется нелинейностью н.д.). Отметим, что каждое слагаемое вида $(z - w_j)^{-1}$ можно рассматривать как точечный источник, поэтому задача приближения н.д. может быть истолкована как задача о размещении точечных источников одинаковой интенсивности в такой конфигурации, чтобы в сумме получалось заданное плоское векторное поле.

Одним из способов приближения является *интерполяция* (см. также §2.3). Задача интерполяции функции f по узлам $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ наипростейшей дробью

$$R_n(z) = (\ln Q_n(z))', \qquad Q_n(z) := z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \ldots + q_0,$$

порядка n заключается в отыскании коэффициентов q_j многочлена Q_n (иными словами, полюсов w_j дроби R_n), таких что

$$R_n(z_k) = y_k, \quad k = \overline{1, n} \quad (y_k := f(z_k)).$$

Заменив R_n на $(Q_n)'/Q_n$ и преобразовав полученные равенства $(Q_n)'(z_k) = y_k Q_n(z_k)$, мы придём к системе линейных уравнений относительно коэффициентов q_j:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1 z_1 - 1 & y_1 z_1^2 - 2z_1 & \dots & (y_1 z_1 - n + 1) z_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_n z_n - 1 & y_n z_n^2 - 2z_n & \dots & (y_n z_n - n + 1) z_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n - y_1 z_1) z_1^{n-1} \\ \vdots \\ (n - y_n z_n) z_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{24}$$

(далее называем эту систему *интерполяционной*).

В [9] было подмечено, что на решении системы (24) при некоторых k возможны равенства $Q_n(z_k) = 0$. Тогда, очевидно, узел z_k – полюс дроби R_n, и интерполяции в нём нет. Будем говорить о разрешимости интерполяционной системы (24), оставляя в стороне возможное обращение Q_n в нуль в одном из узлов на решении этой системы; такая интерполяция в [9] была названа *обобщённой*, а узлы, оказывающиеся полюсами решения задачи обобщённой интерполяции, – *особыми*. Построены примеры, показывающие, что решение задачи обобщённой интерполяции не всегда существует, а в случае существования может оказаться неединственным.

2.4.2. Подход к решению. Явные выражения коэффициентов q_j усмотреть непосредственно из решения системы (24) затруднительно. Следуя работе [6], мы изложим схему метода построения явных формул в задаче обобщённой интерполяции произвольных *рациональных* функций, основанную на переходе к разностному уравнению; случай *кратных* узлов не исключается. Отметим, что любую n-узловую таблицу можно интерполировать рациональной функцией (например, многочленом степени $\le n - 1$), поэтому метод применим к интерполяции таблиц.

Фиксируем отличную от наипростейшей дроби порядка n рациональную функцию f/g, где f, g – многочлены, не равные тождественно нулю:

$$f(x) := f_m x^m + f_{m-1} x^{m-1} + \ldots + f_1 x + f_0, \quad f_m \neq 0,$$

$$g(x) := g_r x^r + g_{r-1} x^{r-1} + \ldots + g_1 x + g_0, \quad g_r \neq 0.$$

Каким бы ни был определённый выше многочлен Q_n, числитель

$$\Delta := (Q_n)' g - f Q_n$$

разности $(Q_n)'/Q_n - f/g$ есть многочлен степени $M \le \max\{n - 1 + r; n + m\}$, причём строгое неравенство $M < \max\{n - 1 + r; n + m\}$ наблюдается в том и только том случае, когда одновременно $r - 1 = m$, $ng_r = f_m$. Но при всех достаточно больших n последнее равенство не выполняется, поэтому далее будем считать

$$M = \max\{n - 1 + r; n + m\}$$

($M \ge n$). Старший коэффициент многочлена Δ обозначим через γ; он равен либо $-f_m$, либо ng_r, либо $ng_r - f_m$ (в частности, не зависит от коэффициентов многочлена Q_n).

Пусть $\hat{z} := \{z_1, \ldots, z_M\}$ – некоторый набор комплексных чисел (не обязательно различных). Будем искать многочлен Q_n из тождества

$$\Delta(z) \equiv \gamma \cdot \prod\nolimits_{k=1}^{M} (z - z_k) \equiv \gamma \cdot \sum\nolimits_{k=0}^{M} (-1)^{M-k} \sigma_{M-k}(\hat{z}) z^k, \tag{25}$$

где $\sigma_s(\hat{z})$, $s=\overline{0,M}$, – элементарные симметрические многочлены:

$$\sigma_k(t_1,\ldots,t_p)=\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le p} t_{j_1}t_{j_2}\ldots t_{j_k}, \qquad k=\overline{1,p}, \qquad \sigma_0\equiv 1.$$

Приравняв в левой и правой частях (25) коэффициенты при одинаковых степенях z, придём к системе из M алгебраических уравнений, связывающих n коэффициентов q_j и M точек z_j, линейной относительно q_j. Набор $z_1,\ldots,z_n$ назовём *допустимым*, если эта система разрешима (пусть даже неоднозначно) относительно q_j и остальных $M-n$ точек z_j. Исключив из неё неизвестные q_j, придём к системе из $M-n$ уравнений, связывающих только $z_{n+1},\ldots,z_M$ и $z_1,\ldots,z_n$ (далее будем называть их *уравнениями связи*). Выразив отсюда параметры $z_{n+1},\ldots,z_M$ через $z_1,\ldots,z_n$ (в случае допустимости набора последних) и подставив их в ранее найденные выражения для q_j, получим многочлен Q_n, зависящий лишь от n параметров $z_1,\ldots,z_n$.

Таким образом, задача обобщённой интерполяции функции f/g по узлам $z_1,\ldots,z_n$ разрешима (возможно, неединственным образом), если и только если узлы $z_1,\ldots,z_n$ образуют допустимый набор (для обычной интерполяции нужно ещё $Q_n(z_k)\neq 0$, $k=\overline{1,n}$).

Замечание. Нетрудно видеть, что система $M-n$ уравнений связи линейна относительно $\sigma_k(\hat{z})$, $k=\overline{1,M}$, причём каждая из функций $\sigma_k(\hat{z})$ линейно выражается через многочлены $\sigma_k(b)$, $b:=\{z_{n+1},\ldots,z_M\}$, $k=\overline{1,M-n}$. Исключив последние из системы, придём к набору тождеств $\sigma_k(b)=c_k$, $k=\overline{1,M-n}$. Отсюда и из теоремы Виета найдём $z_{n+1},\ldots,z_M$ как корни уравнения

$$\lambda^{M-n}-c_1\lambda^{M-n-1}+c_2\lambda^{M-n-2}-\ldots+(-1)^{M-n}c_{M-n}=0.$$

2.4.3. Построение явных формул. Нетрудно видеть, что тождество (25) приводит к линейному разностному уравнению

$$K_s=\gamma\cdot(-1)^{M-s}\sigma_{M-s}(\hat{z}), \qquad K_s=K_s(q_0,\ldots,q_{n-1}), \quad \gamma\neq 0, \quad s=\overline{0,M-1}, \tag{26}$$

относительно неизвестных коэффициентов $q_0,\ldots,q_{n-1}$, где левая часть

$$K_s:=(s+1)q_{s+1}g_0+sq_sg_1+\ldots+(s+1-r)q_{s+1-r}g_r-(f_0q_s+f_1q_{s-1}+\ldots+f_mq_{s-m})$$

есть коэффициент многочлена Δ при z^s; считаем $q_n=1$, $q_j=0$ при $j<0$ и $j>n$. В следующем утверждении перечислены все рациональные функции f/g, для которых уравнение (26) при всех достаточно больших n имеет 1-й порядок и, тем самым, возможно получить его решение $q_0,\ldots,q_{n-1}$ в явном виде по известной формуле (см. §1.3).

Предложение. *Подкласс рациональных функций, для которых интерполяционная н.д. порядка n определяется при всех $n\ge n_0$ линейным разностным уравнением порядка 1, исчерпывается функциями вида*

$$F(z)=\frac{a_1z+a_0}{(b_2z+b_1)z}, \qquad |a_1|+|a_0|\neq 0, \quad |b_2|+|b_1|\neq 0.$$

При этом, имеет место один и только один из пяти различных случаев:

(a) $a_0 = b_2 = 0 \neq (a_1 b_1) \Longrightarrow F(z) \equiv \mathrm{const} \neq 0$;

(b) $a_0 = 0 \neq a_1 \Longrightarrow F(z) = \frac{1}{Az+B}, \quad A \neq 0$;

(c) $a_1 = 0 \neq (a_0 b_2) \Longrightarrow F(z) = \frac{1}{Az^2+Bz}, \quad A \neq 0$;

(d) $b_2 = 0 \neq (b_1 a_0) \Longrightarrow F(z) = \frac{Az+B}{z}, \quad (AB) \neq 0$;

(e) $(b_2 a_1 a_0) \neq 0 \Longrightarrow F(z) = \frac{Az+B}{z^2+Cz}, \quad (AB) \neq 0$.

Замечание. Если дробь $R_n(z)$ интерполирует функцию $f(z)$ по узлам z_k, то дробь $R_n(z-a)$ интерполирует функцию $f(z-a)$ по узлам $z_k + a$, тем самым, легко найти явные интерполяционные формулы и для функций более общего вида

$$\frac{1}{(Az+B)(z-a)}, \quad \frac{Az+B}{z-a}, \quad \frac{Az+B}{(z+C)(z-a)}.$$

Построим в явном виде решение задачи обобщённой интерполяции функций вида $(Az+B)^{-1}$ (в частности, при $A=0$ будет охвачен случай (a) интерполяции констант, ранее разбиравшийся в [8]). Построения в остальных случаях, указанных в предложении, аналогичны (хотя и труднее). Через ξ мы будем обозначать набор из n узлов интерполяции, $\xi := \{z_1, \dots, z_n\}$.

Отметим, что задача интерполяции функции $(Az+B)^{-1}$ наипростейшими дробями нетривиальна, если $A \neq 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, т.к. в противном случае, функция $1/(Az+B) \equiv m/(z+mB)$ является наипростейшей дробью порядка m.

Теорема 6. *Каким бы ни был набор ξ узлов интерполяции, интерполяционная система для функции вида $1/(Ax+B)$, $A \neq 1/m$ $(m \in \mathbb{N})$, имеет единственное решение*

$$q_s = (1-nA) \cdot \sum_{p=s}^{n} \frac{(-1)^{n-p} \sigma_{n-p}(\xi)}{\prod_{t=s}^{p}(1-tA)} \cdot \frac{p!}{s!} \cdot B^{p-s}, \quad s = \overline{0, n-1}.$$

Доказательство. Полагая в тождестве (25) $f(x) \equiv 1$, $g(x) = Ax + B$, $\gamma = nA - 1$ ($\neq 0$ по условию), приходим к системе из n уравнений с n неизвестными q_j:

$$\begin{array}{rcccr}
nB & + & q_{n-1}[(n-1)A-1] & = & -(nA-1)\sigma_1(\xi), \\
(n-1)q_{n-1}B & + & q_{n-2}[(n-2)A-1] & = & (nA-1)\sigma_2(\xi), \\
\dots\dots\dots\dots & ... & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & ... & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
2q_2B & + & q_1[A-1] & = & (-1)^{n-1}(nA-1)\sigma_{n-1}(\xi), \\
q_1B & - & q_1 & = & (-1)^n(nA-1)\sigma_n(\xi).
\end{array}$$

Видим, что неизвестная q_s есть решение $u(s)$ линейного разностного уравнения первого порядка $(s+1)u(s+1)B + u(s)(sA-1) = (-1)^{n-s}(nA-1)\sigma_{n-s}(\xi)$ или, что то же,

$$u(s+1) + u(s) \cdot \frac{(sA-1)}{(s+1)B} = \frac{(-1)^{n-s}(nA-1)\sigma_{n-s}(\xi)}{(s+1)B},$$

с начальным условием $u(n) = 1$, причём применима формула (9) (см. §1.3). Отсюда находим заявленное выражение для q_s. $\square$

При $A = 0$ полученный результат доставляет решение задачи обобщённой интерполяции комплексной константы $c = B^{-1}$ (см. также [8]), а именно: *какими бы ни был набор ξ узлов интерполяции, интерполяционная система для константы $c \neq 0$ имеет единственное решение*

$$q_s = \sum_{p=s}^{n} (-1)^{n-p} \sigma_{n-p}(\xi) \frac{p!}{s!} \cdot c^{s-p}, \quad s = \overline{0, n-1}.$$

В работе [8] была получена оценка погрешности интерполяции наипростейшими дробями малых вещественных констант по *чебышёвской системе узлов*

$$z_k := \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = \overline{1, n}.$$

Напомним, что эта система является набором корней классического *многочлена Чебышёва*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

и в некотором смысле наилучшая при интерполяции многочленами. Заметим, кстати, что многочлены Чебышёва можно задать как решение разностной задачи Коши (с параметром x)

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Решая линейное уравнение этой задачи методом, изложенным в части 1 настоящего пособия, и применяя начальные условия, приходим к другой форме записи этих многочленов:

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Приведём упомянутую оценку (демонстрирующую высокую скорость приближения).

Теорема 7 [8]. *При интерполяции на отрезке $[-1, 1]$ константы $c \in (0, 15/31)$ по чебышёвской системе из n узлов имеем*

$$\max_{x \in [-1,1]} |c - R_n(x)| \leq \frac{c}{2^{2n-1} n!} \cdot \frac{1-c}{1-2c}, \quad n \geq 2. \tag{27}$$

Задания для самостоятельного решения.

1. *Интерполировать вещественную константу $c = (N+2)^{-1}$, где N – номер варианта, наипростейшей дробью по чебышёвской системе узлов при $n = 10$. Оценить погрешность приближения на отрезке $[-1, 1]$ по формуле (27) и фактическую.*

2. *Интерполировать гиперболу $f(x) = N \cdot (x + N + 1)^{-1}$, где N – номер варианта, по $n = 10$ равноотстоящим узлам $x_j = -1 + 2(j-1)/(n-1)$, $j = \overline{1, n}$, отрезка $[-1, 1]$. Оценить фактическую погрешность приближения на отрезке $[-1, 1]$.*

Часть 3. Приближённое решение дифференциальных уравнений

Рассматривается разностный подход к построению приближённого решения краевых задач для дифференциальных уравнений и объясняются основные связанные с ним понятия. В параграфах 3.1 и 3.2 речь идёт об обыкновенных дифференциальных уравнениях, а в параграфе 3.3 – об уравнении теплопроводности.

§3.1. Задача Коши

Вернёмся к поставленному в §1.1 вопросу о построении численного решения задачи Коши

$$v' = f(x, v), \quad v(x_0) = v_0, \tag{1}$$

где $f \in C^1$. Снова будем предполагать продолжаемость интегральной кривой от начальной точки x_0 до точки $x_0 + b$ ($b > 0$), в которой требуется вычислить значение решения $v = v(x)$ задачи (1).

Разностный подход к построению вычислительной схемы состоит в следующем:

1) уравнение рассматривается в узлах *сетки* $\{x_k\}$, т.е. некоторого конечного подмножества точек отрезка $[x_0, x_0 + b]$;

2) задача нахождения функции $v(x)$ непрерывного аргумента x подменяется задачей построения *сеточной* (т.е. дискретной, определённой лишь в узлах сетки) функции $y_k = y(x_k)$, такой что в каждом узле $y_k \approx v(x_k)$;

3) дифференциальный оператор заменяется разностным (т.е. значение производной v' аппроксимируется через значения сеточной функции y в ближайших узлах), в результате чего получается разностное уравнение относительно значений сеточной функции y_k. Из начального или краевых условий для дифференциального уравнения следует начальное или краевые условия для соответствующего разностного уравнения.

Реализуем этот подход применительно к задаче (1). Введём на отрезке $[x_0, x_0 + b]$ равномерную сетку с шагом $h = b/n$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$x_k = x_0 + k \cdot h, \qquad k = \overline{0, n},$$

и применим к левой части получаемого в узле x_k из уравнения (1) равенства

$$v'(x_k) = f(x_k, v(x_k))$$

простейшие аппроксимации первого порядка относительно шага:

$$v'(x) = \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + O(h), \tag{28}$$

$$v'(x) = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} + O(h). \tag{29}$$

Отбрасывая последние слагаемые в равенствах (28), (29) и заменяя значения точного решения v на значения сеточной функции y_s, приходим, соответственно, к разностным схемам *явного* и *неявного методов Эйлера* (первая из которых и была получена в §1.1 из геометрических соображений):

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0, n-1}; \tag{30}$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{31}$$

где значение $y_0 := v_0$ известно. Вычисления по явной схеме, очевидно, не вызывают затруднений, тогда как применение неявной требует для нахождения очередного значения сеточной функции решения скалярного уравнения (вообще говоря, нелинейного).

Поскольку начальное условие аппроксимировано точно, то порядок аппроксимации задачи (1) каждой из двух схем равен 1 (т.е. порядку аппроксимации производной).

Говорят, что разностное решение *сходится* к точному, если разностная схема

1) *аппроксимирует* уравнение (т.е. всё точнее приближает уравнение с уменьшением шага) и

2) *устойчива* (т.е. непрерывно зависит от входных данных). Последнее означает, что ошибка, допущенная при вычислении очередного значения сеточной функции, не возрастёт при переходе к следующему значению.

Как было отмечено выше, обе схемы (30), (31) имеют порядок аппроксимации $O(h)$. Однако, лишь неявная схема *безусловно* (т.е. независимо от величины h) устойчива, тогда как для устойчивости явной приходится брать достаточно малый шаг h. (Исследование устойчивости разностных схем обычно проводят на так называемом *модельном* уравнении; в случае схем решения задачи (1) берут модельное уравнение $v' = pv$, где $p = \mathrm{const}$.)

Для оценки точности найденного приближённого решения на практике используют правило Рунге (см. следующий параграф).

Существует множество разностных схем решения задачи Коши, обеспечивающих высокий порядок аппроксимации. Наиболее употребителен так называемый метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности (см., например, [3]). Мы не будем останавливаться на изложении этого и других высокоточных методов, т.к. они, вообще говоря, приводят к разностным уравнениям, нелинейным даже в случае линейной по v правой части $f(x, v)$ уравнения (1).

§3.2. Краевые задачи

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения состоит в отыскании такого его решения, которое (в отличие от начальной задачи) удовлетворяет условиям, поставленным при двух или более значениях независимого переменного (такие условия называют *краевыми*). Краевая задача называется *линейной*, если изучаемое дифференциальное уравнение линейно, а краевые условия линейны относительно значений искомой функции и её производных. Решение краевой задачи, даже линейной, может не существовать, а в случае существования не обязательно единственно.

Мы будем рассматривать так называемую *первую краевую задачу*:

$$\begin{cases} v'' + p(x)v' + q(x)v = f(x), \quad x \in [a, b], \\ v(a) = A, \quad v(b) = B. \end{cases} \tag{32}$$

Наряду со *второй* краевой задачей, где краевые условия имеют вид $v'(a) = A$, $v'(b) = B$, она представляет собой частный случай *смешанной* краевой задачи, где краевые условия таковы:

$$A_0 v(a) + A_1 v'(a) = A, \quad B_0 v(b) + B_1 v'(b) = B \qquad (|A_0| + |A_1| \neq 0,\ |B_0| + |B_1| \neq 0).$$

Особенность первой задачи в том, что её краевые условия при составлении разностной схемы аппроксимируются точно ввиду отсутствия в них производных искомой функции.

Введём на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку с шагом $h = (b-a)/n$:

$$x_k = a + k \cdot h, \qquad k = \overline{0, n},$$

и определим на ней сеточные функции, отвечающие коэффициентам уравнения:

$$p_k := p(x_k), \quad q_k := q(x_k), \quad f_k := f(x_k), \qquad k = \overline{0, n}.$$

Точное решение задачи (32) обозначим через $v(x)$, а приближённое – через $y(x)$; значения приближённого решения в узлах сетки будем обозначать через y_k.

Как было отмечено выше, краевые условия первой краевой задачи аппроксимируются точно:

$$y_0 := v(x_0) = v(a) = A, \qquad y_n := v(x_n) = v(b) = B. \tag{33}$$

Далее, в каждом *внутреннем* узле сетки $\{x_k\}$ воспользуемся конечноразностными аппроксимациями производных v' и v'' по симметричным формулам второго порядка точности:

$$v'(x_k) = \frac{v(x_{k+1}) - v(x_{k-1})}{2h} + O(h^2),$$

$$v''(x_k) = \frac{v(x_{k+1}) - 2v(x_k) + v(x_{k-1})}{h^2} + O(h^2).$$

Подставляя эти выражения в уравнение, отбрасывая слагаемые $O(h^2)$ и переходя к приближённым значениям $y_k \approx v(x_k)$, получим разностное уравнение

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Приводя подобные слагаемые, приходим к стандартному линейному разностному уравнению порядка 2 относительно неизвестного y_k с краевыми условиями (33):

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{h}{2} p_k\right) y_{k+1} - (2 - h^2 q_k) y_k + \left(1 - \frac{h}{2} p_k\right) y_{k-1} = h^2 f_k, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ y_0 = A, \quad y_n = B. \end{cases} \tag{34}$$

Соответствующая система алгебраических уравнений может быть эффективно решена *методом прогонки* (см. §2.2). Устойчивостью прогонки вполне определяется устойчивость построенной разностной схемы. Как известно (см. §2.2), достаточным условием устойчивости и корректности прогонки является диагональное преобладание матрицы соответствующей системы алгебраических уравнений. Легко видеть, что при естественном условии малости шага h диагональное преобладание

$$|2 - h^2 q_k| > \left|1 + \frac{h}{2} p_k\right| + \left|1 - \frac{h}{2} p_k\right|$$

может наблюдаться только при $q(x) < 0$. В этом случае, для диагонального преобладания при произвольном коэффициенте $p(x)$ нужно накладывать условие на шаг: $|hp_k| \leq 2$, $k = \overline{1, n-1}$.

Заметим, что по построению, исходная дифференциальная задача аппроксимирована с точностью $O(h^2)$. Таким образом, по основной теореме теории разностных схем (аппроксимация плюс устойчивость влечёт сходимость), верно утверждение:

если в дифференциальном уравнении задачи (32) *коэффициент* $q(x) < 0$ *на отрезке* $[a, b]$, *а шаг разностной схемы подчинён условию*

$$h \leq \frac{2}{\max_{x\in[a,b]} |p(x)|},$$

то решение разностного уравнения (34) *сходится при* $n \to \infty$ *к решению задачи* (32).

На практике для оценки погрешности приближения можно воспользоваться *правилом Рунге.* Оно состоит в следующем: пусть y_k – решение разностного уравнения, отвечающего сетке $x_k = a + k \cdot h$ с шагом h, а $\tilde{y}_j$ – решение разностного уравнения, отвечающего сетке $\tilde{x}_j = a + j \cdot h/2$ с шагом $h/2$ (очевидно, первая сетка есть подмножество второй: $x_k = \tilde{x}_{2k}$). Тогда в качестве оценки разности $v(x) - y(x)$ (где v – точное решение задачи (32)) приближённо берут величину

$$\delta_h := \frac{1}{3} \max_k |y_k - \tilde{y}_{2k}|.$$

Если для заданного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\delta_h < \varepsilon$, то заданная точность считается достигнутой. В противном случае вычисляют решение $\hat{y}_s$ разностного уравнения, отвечающего сетке $\hat{x}_s = a + s \cdot h/4$ с шагом $h/4$, сравнивают, по аналогии с предыдущим, решения $\tilde{y}_k$ и $\hat{y}_s$ в общих узлах соответствующих сеток и т.д.

Замечание. Если в краевых условиях присутствуют производные $y'(a)$ и $y'(b)$, то для них можно использовать следующие конечноразностные аппроксимации второго порядка:

$$y'(a) = \frac{-3y(a) + 4y(a+h) - y(a+2h)}{2h} + O(h^2),$$
$$y'(b) = \frac{y(b-2h) - 4y(b-h) + 3y(b)}{2h} + O(h^2).$$

Задание для самостоятельного решения. *Построить приближённое решение задачи* $v'' - N^2 v = N$, $v(0) = 1/N$, $v(1) = 1$ ($N = 1, 2, 3, \ldots$ *– номер варианта*), *с точностью* $\varepsilon = 0.01$, *достигнутой по правилу Рунге. Сравнить результат с точным решением задачи.*

§3.3. Уравнение теплопроводности

Для иллюстрации разностного подхода к решению уравнений в частных производных (уравнений математической физики) рассмотрим так называемую первую краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad x\in[0,l], \quad t\in[0,T], \quad a = \mathrm{const} > 0; & \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad\qquad\qquad\qquad (\textit{начальное условие}); & \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t) \qquad (\textit{граничные условия}). & \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Совокупность начального и граничных условий носит название *краевых условий.*

Задача допускает следующую физическую интерпретацию: решение $u(x,t)$ – это температура тонкого однородного стержня (расположенного вдоль отрезка $[0,l]$ оси Ox) в точке x в момент времени t при заданном начальном ($t = 0$) распределении температур $\varphi(x)$ и заданных температурных режимах $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ на левом и правом концах стержня соответственно, а также при возможном наличии внешних источников тепла, плотность которых описывается функцией $f(x,t)$.

Далее мы будем предполагать f,φ,μ_1,μ_2 гладкими функциями своих аргументов, а от краевых условий потребуем выполнения естественных условий согласованности:

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad \mu_2(0) = \varphi(l).$$

В теории уравнений математической физики доказывается, что при выполнении перечисленных условий задача (35) поставлена *корректно*, т.е.

1) имеет единственное решение, и

2) это решение устойчиво (непрерывно зависит от краевых условий).

При этом, решение оказывается гладкой функцией своих аргументов. Корректность постановки задачи даёт возможность строить пригодные численные методы её решения. Мы рассмотрим две простейшие (четырёхточечные) разностные схемы решения задачи (35).

Построение сетки. Зададим число I отрезков разбиения по x и число M отрезков разбиения по t. Вычислим соответствующие шаги по пространственной переменной и по времени: $h = l/I$, $\tau = T/M$. Введём равномерную сетку

$$\{(x_i,t_k):\ x_i = ih,\ i = 0,\ldots,I; \ \ t_k = k\tau,\ k = 0,\ldots,M\}.$$

Уравнение теплопроводности эволюционное (описывает процесс во времени), поэтому переменные x,t неравноправны. Говорят, что каждый шаг по времени определяет *временной слой*:

$$(x_0,t_k),\ (x_1,t_k),\ \ldots,\ (x_I,t_k).$$

Вычисления проводят по временным слоям. Узлы, лежащие на прямых $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$, называют *граничными*, а остальные узлы (кроме тех, которые лежат на прямой $t = T$) – *внутренними.* Введём обозначения для порождаемых сеточных функций:

$$u_i^k := u(x_i,t_k), \quad f_i^k := f(x_i,t_k).$$

Аппроксимация дифференциального уравнения разностной схемой.

Наша задача состоит в построении сеточной функции y_i^k такой, что $y_i^k \approx u_i^k$ во всех узлах сетки. При этом, в граничных узлах мы будем требовать точной аппроксимации: $y_i^k = u_i^k$; это возможно, т.к. краевые условия не содержат производных.

Явная схема. Возьмём за расчётную точку узел (x_i, t_k) и заменим в этой точке производные u_t, u_{xx} следующими разностными отношениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + O(\tau) = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + O(\tau),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h^2} + O(h^2) = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + O(h^2).$$

Отбрасывая слагаемые $O(\tau)$ и $O(h^2)$ и заменяя значения u_i^k точного решения на y_i^k, придём к разностной схеме

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = a^2 \cdot \frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{h^2} + f_i^k.$$

Вводя обозначение $r := \tau a^2/h^2$, после преобразований придём к следующей схеме расчёта сеточной функции y_i^k во внутренних узлах сетки:

$$\left.\begin{aligned} y_i^{k+1} = r y_{i+1}^k + (1-2r) y_i^k + r y_{i-1}^k + \tau f_i^k, \\ i = 1, \ldots, I-1, \quad k = 0, \ldots, M-1. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

При $k = 0$, $i = 0$ и $i = I$ мы полагаем, соответственно,

$$y_i^0 = \varphi(x_i), \quad y_0^k = \mu_1(t_k) \quad \text{и} \quad y_I^k = \mu_2(t_k)$$

(краевые условия аппроксимируем точно). Схема (A) называется *явной*, т.к. содержит лишь одну неизвестную y_i^{k+1} (значение со следующего временного слоя). Расчёт по этой схеме с учётом краевых условий не вызывает затруднений.

Мы видим, что схема (A) связывает 4 соседних узла с индексами $(i-1, k)$, (i, k), $(i+1, k)$ и $(i, k+1)$, и эти узлы расположены на двух временных слоях $t = t_i$ и $t = t_{i+1}$. Поэтому говорят, что явная схема (A) *двуслойная четырёхточечная*; совокупность соответствующих узлов называют *четырёхточечным шаблоном*.

Неявная схема. Если выбрать за расчётную точку узел (x_i, t_{k+1}) и аппроксимировать производные u_t, u_{xx} по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + O(\tau) = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + O(\tau),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2),$$

то мы придём к схеме

$$\left.\begin{aligned} r \cdot y_{i+1}^{k+1} - (1+2r) y_i^{k+1} + r \cdot y_{i-1}^{k+1} = -y_i^k - \tau f_i^{k+1}, \\ i = 1, \ldots, I-1, \quad k = 0, \ldots, M-1, \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

где $r = \tau a^2/h^2$. Краевые условия снова аппроксимируем точно:

$$y_i^0 = \varphi(x_i), \quad y_0^k = \mu_1(t_k), \quad y_I^k = \mu_2(t_k) \qquad (i = \overline{0, I},\ k = \overline{0, M}).$$

Схема (B) называется *неявной*, т.к. содержит три неизвестные величины: y_{i+1}^{k+1}, y_i^{k+1}, y_{i-1}^{k+1}.

Расчёт ведётся так. Нам известен нулевой слой. Для нахождения всех неизвестных

$$y_1^{k+1}, y_2^{k+1}, \ldots, y_{I-1}^{k+1}$$

на слое $t = t_{k+1}$ необходимо решить трёхдиагональную систему из $I-1$ линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} r \cdot y_{i+1}^{k+1} - (1+2r)y_i^{k+1} + r \cdot y_{i-1}^{k+1} = -y_i^k - \tau f_i^{k+1}, \\ i = 1, \ldots, I-1, \end{array}\right\}$$

где в силу граничных условий имеем $y_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1})$, $y_I^{k+1} = \mu_2(t_{k+1})$. Для решения этой системы следует применить метод прогонки (см. §2.2), причём прогонка корректна и устойчива ввиду очевидного диагонального преобладания в матрице системы.

Наконец, отметим, что неявная схема (B) тоже двуслойная четырёхточечная; соответствующий четырёхточечный шаблон образован узлами с индексами (i, k), $(i-1, k+1)$, $(i, k+1)$ и $(i+1, k+1)$.

Сравнение явной и неявной схем. Сходимость.

1) Обе схемы имеют порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$, т.е. аппроксимируют исходную задачу с первым порядком по τ и со вторым порядком по h. Краевые условия аппроксимированы точно.

2) Неявная схема (B) безусловно устойчива при любых τ и h (т.е. разностное решение непрерывно зависит от входных данных, и эта зависимость равномерна относительно шагов). Напротив, явная схема *условно устойчива*. Условием устойчивости выступает неравенство $r \leq 1/2$, эквивалентное ограничению

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

При невыполнении условия устойчивости ошибка нарастает при переходе от слоя к слою.

Таким образом, решение неявной схемы равномерно сходится к решению исходной краевой задачи при любом соотношении между шагами τ, h, а решение явной схемы – при выполнении условия устойчивости.

3) Ввиду данного условия устойчивости, шаг по времени при использовании явной схемы приходится брать очень малым по сравнению с шагом по пространственной переменной, поэтому число слоёв велико. С другой стороны, явная схема проще и требует меньше вычислений, чем неявная, при одинаковом числе слоёв.

Итак, неявная схема предпочтительнее, если требуется достаточно высокая точность вычислений.

Задание для самостоятельного решения. *Пусть* $N = 1, 2, 3, \ldots$ *– номер варианта. Построить явную и неявную схемы для задачи*

$$\left.\begin{array}{r} u_t = u_{xx} - Nx - 2(N+1)t, \\ u(x,0) = Nx^2 - 4N, \quad u(0,t) = -4N + 2Nt - (N+1)^2t^2, \quad u(2,t) = -(N+1)^2t^2 \end{array}\right\}$$

при $0 \leq t \leq 1$, *выбрав некоторые* τ, h, *такие что сетка содержит не менее* 10 *внутренних узлов. Вычислить приближённое решение по каждой из схем.*

Список литературы

[1] Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967.

[2] Романко В.К. Разностные уравнения: Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

[3] Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2002.

[4] Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. – М.: Госуд. изд-во физ.-мат. литературы, 1960.

[5] Самарский А.А. Теория разностных схем: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1977.

[6] Комаров М. А. *Интерполяция рациональных функций наипростейшими дробями* // Проблемы мат. анализа. – 2012. – Вып. 63. – С. 55–66.

[7] Данченко В. И., Кондакова Е. Н. *Чебышёвский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями* // Труды МИАН. – 2010. – Т. 270. – С. 86–96.

[8] Кондакова Е. Н. *Интерполяция наипростейшими дробями* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т.9, №2. – С. 30—37.

[9] Данченко В. И., Кондакова Е. Н. *Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями* // Труды МИАН. – 2012. – Т. 278. – С. 49–58.

[10] Евлюхин А.Б., Демидов К.В., Лексин А.Ю., Бухаров Н.Н. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине "Численные методы": Раздел "Дифференциальные и интегральные уравнения" – Владимир: ВлГУ, 2004.

Содержание

Предисловие 3

Часть 1. Линейные разностные уравнения 4

§1.1. Пример: метод ломаных Эйлера 4
§1.2. Разностные уравнения: основные понятия 5
§1.3. Последовательные подстановки. Линейные уравнения первого порядка . . . 7
§1.4. Свойства решений линейных разностных уравнений 9
§1.5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами 11
§1.6. Метод подбора частного решения 13
§1.7. Понятие о линейных системах разностных уравнений 15
§1.8. Задачи для самостоятельного решения 16

Часть 2. Приложения к задачам алгебры и анализа 23

§2.1. Приближение корней многочленов по методу Бернулли 23
§2.2. Метод прогонки 25
§2.3. Сплайн-интерполяция полиномами 26
§2.4. Интерполяция наипростейшими дробями 29

Часть 3. Приближённое решение дифференциальных уравнений 34

§3.1. Задача Коши 34
§3.2. Краевые задачи 35
§3.3. Уравнение теплопроводности 37

Список литературы 41