Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра высшей математики

П.Л. ИВАНКОВ   Ю.В. МУРАНОВ

# СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Владимир 1997

И 18
УДК 519.21 (075.8)
Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей: типовые расчеты/ П.Л.Иванков, Ю.В.Муранов — Владим. гос. ун-т, Владимир, 1997. 56 с. ISBN 5-89368-043-X

Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей содержит 300 задач по всем основным темам, изучаемым в курсах теории вероятностей в высших технических учебных заведениях. В каждом разделе имеется теоретическое введение с примерами решения задач.

Сборник предназначен для студентов технических и экономических специальностей вузов.

Разделы 1, 2, 6, 9, 10 написаны Иванковым П.Л., разделы 3, 4, 5, 7, 8 написаны Мурановым Ю.В.

Ил. 6. Табл. 3. Библиогр.: 12 назв.

Утверждено в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом Владимирского государственного университета.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук Алхутов Ю.А. и кафедра математического анализа (Владимирский государственный педагогический университет).

Учебное издание
ИВАНКОВ Павел Леонидович
МУРАНОВ Юрий Владимирович

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: ТИПОВЫЕ РАСЧЁТЫ
Редактор А.П. Володина

Изд.лиц. N 020275 от 13.11.96. Подписано в печать 13.10.97.
Формат 60×84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура *Роман*. Печать офсетная. Усл.печ.л. 3,25. Уч.-изд.л. 3,37. Тираж 300 экз. С–133.
Заказ 415-97
Владимирский государственный университет.
Подразделение оперативной полиграфии
Владимирского государственного университета.
Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии:
600026, Владимир, ул.Горького, 87.

ISBN 5-89368-043-X



## 1. Вычисление вероятностей в классической модели

Пусть рассматривается некоторый эксперимент со случайным исходом. Множество взаимоисключающих исходов такого эксперимента будем называть пространством элементарных событий, если всякий интересующий нас результат эксперимента может быть полностью описан с помощью элементов этого множества. Для решения задач, рассматриваемых в данном разделе, следует применить классическую модель: пространство элементарных событий конечно, и все элементарные события (случаи) равновероятны. В классической модели вероятность любого события $A$ равна отношению числа $M$ случаев, благоприятных для этого события, к общему числу $N$ всех случаев: $P(A) = M/N$. При нахождении чисел $M$ и $N$ часто оказываются полезными формулы для числа сочетаний, размещений и перестановок. Пусть имеется некоторое множество из $n$ элементов. Его $k$-элементные подмножества называются сочетаниями, упорядоченные наборы $k$ элементов этого множества называются размещениями (из $n$ элементов по $k$); при $k = n$ размещения называются перестановками. Для числа сочетаний и размещений справедливы формулы

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};\quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Число перестановок $n$ элементов равно $n!$.

*Пример* 1. В урне находятся 40 шаров, среди которых 8 красных и 32 белых. Из урны наудачу извлекают 10 шаров. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров ровно 6 красных?

Решение. Пространство элементарных событий будем считать состоящим из 10-элементных подмножеств имеющегося множества из 40 шаров. При таком подходе общее число случаев равно числу сочетаний из 40 элементов по 10: $N = 40!/(10!\cdot 30!)$. Обозначим через $A$ событие, о котором говорится в условии задачи. Любое элементарное событие, благоприятное для события $A$, представляет собой набор из 6 красных и 4 белых шаров. Число наборов из 6 красных шаров равно $8!/(6!\cdot 2!)$, а число наборов из 4 белых шаров равно $32!/(4!\cdot 28!)$. Общее число элементарных событий, благоприятных для события $A$, равно $M = (8!/(6!\cdot 2!))(32!/(4!\cdot 28!))$. Получаем значение искомой вероятности

$$p = M/N = (70\cdot 29)/(11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 37) \approx 0.0012$$

*Пример* 2. На девяти карточках написаны цифры 1, ..., 9. Карточки раскладывают на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между карточками с номерами 1 и 2 будут находиться ровно три другие карточки?

Решение. Всего имеется $N = 9!$ различных способов расположить 9 карточек в одну линию. Чтобы подсчитать число благоприятных случаев, заметим, что если карточку с номером 1 поместить на пятое место, то карточка с номером 2 может занять 2 положения (первое или последнее место), а если карточку с номером 1 поместить на любое другое место, то карточка с номером 2 может занять лишь одно положение. Остальные карточки в каждом из этих случаев можно расположить в любом порядке: это дает 7! возможностей. Всего благоприятных случаев имеется $M = (8 \cdot 1 + 2)7! = 10 \cdot 7!$. Поэтому вероятность интересующего нас события

$$p = M/N = 10 \cdot 7!/9! = 5/36 \approx 0.14.$$

*Пример* 3. Семь шаров размещают случайным образом в десяти коробках (в каждую коробку можно поместить любое число шаров). Какова вероятность того, что в одной из коробок будет четыре шара, а в другой три?

Решение. Каждый шар можно поместить в любую из десяти коробок. Поэтому общее число случаев $N = 10^7$. Найдем число благоприятных случаев. Коробку, в которой будут находиться 4 шара можно выбрать десятью способами; если одна коробка уже выбрана, то для выбора второй коробки остается 9 возможностей. Выбрать 4 шара из семи можно $7!/(4! \cdot 3!) = 35$ способами, выбрать еще три шара из трех оставшихся можно лишь одним способом. Всего благоприятных случаев $M = 9 \cdot 10 \cdot 35 \cdot 1 = 3150$. Вероятность события, о котором говорится в условии задачи,

$$p = M/N = 3150/10000000 = 0.000315.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1.1. Маршрутное такси, в котором находятся 6 пассажиров, делает остановки в пяти пунктах. Каждый из пассажиров выходит с равной вероятностью на любой остановке. Какова вероятность того, что на одной остановке выйдут четыре пассажира, а на другой два?



1.2. В пакете 15 конфет "Красная шапочка" и 20 конфет "Мишка косолапый". Из пакета наудачу извлекаются 8 конфет. Какова вероятность того, что среди них ровно 4 конфеты "Мишка косолапый"?

1.3. Десять шаров, занумерованных цифрами 0,1, ..., 9, помещают случайным образом в 10 расположенных вдоль прямой лунок — по одному шару в каждую лунку. Определить вероятность того, что между шарами с номерами 1 и 2 будут находиться ровно два других шара.

1.4. У Федоры 50 кадушек, в шести из которых сидят лягушки. Федора берет наудачу 10 кадушек. Какова вероятность того, что ровно в пяти из них сидят лягушки?

1.5. Иосифу приснились семь тощих и семь тучных коров. Иосиф выбрал себе наудачу четыре коровы. Какова вероятность того, что среди выбранных коров ровно две тучные?

1.6. Десять шаров, занумерованных цифрами 0,1, ..., 9, помещают случайным образом в 10 расположенных вдоль окружности лунок — по одному шару в каждую лунку. Определить вероятность того, что между шарами с номерами 1 и 2 будут находиться ровно четыре других шара.

1.7. В "Детском мире" на витрине выставлены 15 барабанов. Появившийся хулиган вынул из кармана гвоздик и продырявил 5 барабанов. Дядя Степа доставил хулигана в отделение милиции, а в качестве вещественного доказательства взял, не глядя, 6 барабанов. Какова вероятность того, что среди взятых дядей Степой барабанов ровно 2 продырявлены?

1.8. У сестер Золушки в сундуке 50 платьев, среди которых 10 синих, 20 зеленых и 20 красных. Сестры никак не могут поделить платья. Наконец, они решают разделить их наудачу на две равные части. Какова вероятность того, что при таком делении в каждой части будет по 5 синих платьев?

1.9. У Билли Бонса 5 сундуков и 8 секретных карт Острова Сокровищ. Билли Бонс случайным образом разложил карты по сундукам. Какова вероятность того, что в одном из сундуков оказались три карты, а в другом пять?

1.10. В пакете находятся фрукты: 8 яблок и 10 груш. Из пакета случайным образом извлекают 6 фруктов. Какова вероятность того, что среди них 3 яблока и 3 груши?

1.11. Паниковский выкрал из квартиры гражданина Корейко 30 гирь, среди которых 10 золотых и 20 обычных. Шура Балаганов распилил 5 взятых наудачу гирь. Какова вероятность того, что среди распиленных гирь ровно две золотые?

1.12. В лифт восьмиэтажного дома вошли 10 человек, каждый из которых выходит с равной вероятностью на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что на каком-то одном этаже выйдут 6 пассажиров, а на другом — четыре?

1.13. Али-Баба проник в пещеру сорока разбойников и обнаружил там сундук на замке и 40 ключей, 20 из которых подходят к замку, остальные — не подходят. Али-Баба берет наудачу 10 ключей. Какова вероятность того, что Али-Баба не сможет открыть замок, используя лишь эти 10 ключей?

1.14. Колоду, содержащую 54 карты (по 13 карт каждой масти и два джокера), наудачу разделили на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части будет по одному джокеру?

1.15. В купе вагона находятся шестеро рассеянных с улицы Бассейной. Каждый из них с равной вероятностью выходит на одной из станций: Бологое, Поповка, Дибуны, Ямская. Какова вероятность того, что четверо рассеянных выйдут на одной станции, а двое на другой?

1.16. В филателистическом магазине предлагаются для продажи 50 почтовых марок, 10 из которых являются редкими. Покупатель, плохо разбирающийся в филателии, приобретает 5 понравившихся ему марок. Какова вероятность того, что среди приобретенных марок нет ни одной редкой?

1.17. В комнате 16 кроватей, на каждой кровати — подушка. Под подушками лежат 10 сладких ватрушек и 6 пирожков с яблочным вареньем (по одному предмету под каждой подушкой). Авоська смотрит, что находится под четырьмя наудачу выбранными подушками. Какова вероятность того, что Авоська обнаружит ровно одну сладкую ватрушку?

1.18. У Аладдина 8 волшебных ламп, которые он разместил случайным образом в пяти сундуках. Какова вероятность того, что в одном из сундуков оказались три лампы, а в другом — пять?

1.19. На столе перед голодным Торопыжкой стоят 10 закрытых коробок: в шести из них находятся холодные утюги, в остальных — пряники (по одному предмету в каждой коробке). Торопыжка открывает наудачу 3 коробки. Какова вероятность того, что он обнаружит ровно два пряника?



1.20. На прием к доктору Пилюлькину пришли 15 больных. Шестерым из них доктор Пилюлькин поставил градусники, остальным дал касторки. Какова вероятность того, что в группе из 6 случайно выбранных больных ровно одному был поставлен градусник?

1.21. Шахразада получила в подарок от царя Шахрияра 8 золотых колец и 5 шкатулок. Шахразада разместила наудачу кольца в шкатулках. Какова вероятность того, что в одной из шкатулок оказались три кольца, а в другой — пять?

1.22. На маленькой скамеечке в комнате Синеглазки сидят 15 кукол. У десяти из них внутри вата, у остальных — опилки. Незнайка взял наудачу 6 кукол, разломал их и посмотрел, что у них внутри. Какова вероятность того, что Незнайка обнаружил ровно две куклы с ватой внутри?

1.23. У змея Горыныча 16 голов, 7 из которых — огнедышащие. Иван, крестьянский сын, отрубил змею Горынычу наудачу четыре головы. Какова вероятность того, что среди отрубленных голов ровно одна была огнедышащей?

1.24. Обследовав письменный стол Самсона, Далила обнаружила ослиную челюсть, бритвенный прибор и восемь пуговиц разного цвета. Все эти предметы Далила выложила случайным образом на столе в одну линию. Какова вероятность того, что бритвенный прибор и ослиная челюсть оказались при этом рядом?

1.25. В саду у богатырки Синеглазки 20 яблонь, на пяти из которых растут молодильные яблоки (на остальных яблонях яблоки обычные). Иван-царевич проник в сад и сорвал 6 яблок — по одному с шести наудачу выбранных деревьев. Какова вероятность того, что Иван-царевич сорвал ровно два молодильных яблока?

1.26. На Поле Чудес в Стране Дураков выросло дерево, на котором вместо листьев — 50 монет, 5 из которых золотые, остальные — серебряные. Слепой кот Базилио не может отличить золотые монеты от серебряных и срывает с дерева наудачу 10 монет. Какова вероятность того, что среди сорванных монет ровно одна золотая?

1.27. Незнайка решил сочинить стихи, используя слова шмакля, рвакля, бакля, вакля, гакля, дакля и макля. С этой целью он выписал все эти слова в одну строчку, расположив их случайным образом. Какова вероятность того, что при этом слова "шмакля" и "рвакля" оказались рядом?

1.28. В аптеке имеются очки в золотой и в серебряной оправах, соответственно 15 и 10 штук. Мартышка купила себе полдюжины первых попавшихся очков. Какова вероятность того, что среди них нет очков в серебряной оправе?

1.29. Барон Мюнхгаузен выстрелил в оленя вишневой и черешневой косточками. В результате этого на голове у оленя выросли два дерева: вишневое и черешневое. На вишневом дереве 40 ягод, на черешневом — 50. Мюнхгаузен срывает наудачу 5 ягод. Какова вероятность того, что среди сорванных ягод не будет ни одной вишни?

1.30. Из колоды, содержащей 36 карт, извлекаются все карты трефовой масти и случайным образом выкладываются на столе в одну линию. Какова вероятность того, что при этом дама и валет окажутся рядом?

## 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из них; произведением двух событий называется событие, состоящее в их одновременном осуществлении. Аналогично определяются сумма и произведение любого числа событий. Для обозначения введенных операций над событиями употребляются обычные знаки сложения и умножения. Если события $A$ и $B$ несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$; В случае, когда события $A$ и $B$ совместны, вероятность их суммы вычисляется по формуле

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

При решении предлагаемых ниже задач может оказаться полезным обобщение последней формулы на случай трех событий:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AC)-P(AB)+P(ABC).$$

Событие $\bar{A}$, состоящее в том, что событие $A$ не произошло, называется событием, противоположным событию $A$. Для событий $A$ и $\bar{A}$ справедливо равенство $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Вероятность произведения событий вычисляется по формуле $P(AB) = P(A)P(B \mid A)$, где через $P(B \mid A)$ обозначена вероятность события $B$, вычисленная при условии, что событие $A$ произошло. В случае независимых событий $A$ и $B$ (т.е. в случае, когда появление одного из них не изменяет вероятности другого) получаем отсюда равенство $P(AB) = P(A)P(B)$. Формула для вероятности произведения двух событий обобщается следующим образом

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$



*Пример* 1. В трех урнах находятся белые и черные шары: в первой урне 5 белых и 6 черных, во второй 2 белых и 3 черных, в третьей 7 белых и 4 черных. Из каждой урны извлечено по одному шару. Какова вероятность того, что извлечено не менее двух белых шаров?

Решение. Обозначим через $A_i$ событие, состоящее в том, что из $i$-й урны извлечен белый шар ($i = 1, 2, 3$). Тогда с использованием введенных операций над событиями событие $A$, о котором говорится в задаче, может быть записано так:

$$A = \bar{A}_1 A_2 A_3 + \bar{A}_2 A_1 A_3 + \bar{A}_3 A_2 A_1 + A_1 A_2 A_3,$$

причем все слагаемые из правой части этого равенства представляют собой попарно несовместные события. Далее, очевидно, извлечение шара из какой-либо урны не влияет на вероятность появления белого шара при извлечении шаров из других урн. Поэтому события, входящие в каждое из четырех фигурирующих в последнем равенстве произведений, независимы. Суммируя все сказанное, получаем равенство

$$P(A) = (1-p_1)p_2p_3 + p_1(1-p_2)p_3 + p_1p_2(1-p_3) + p_1p_2p_3,$$

где через $p_i$ обозначена вероятность появления белого шара при извлечении шара из $i$-й урны ($i = 1, 2, 3$). Очевидно, $p_1 = 5/11, p_2 = 2/5, p_3 = 7/11$. Отсюда $P(A) = 299/605 \approx 0,49$.

*Пример* 2. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны извлекаются шары до появления черного шара. Какова вероятность того, что произведено ровно три извлечения, если: а) после каждого извлечения шар возвращается обратно; б) извлеченные шары откладываются в сторону?

Решение. Обозначим через $A_i$ событие, состоящее в появлении черного шара при $i$-м извлечении. Тогда событие, о котором речь в пункте а) запишется так: $A = \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$, причем все события из правой части независимы. Поэтому

$$P(A) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = (5/11)(5/11)(6/11) = 150/1331 \approx 0,11.$$

В случае б) по-прежнему $A = \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$, но теперь события в правой части зависимы и поэтому

$$P(A) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2) = (5/11)(4/10)(6/9) = 4/33 \approx 0,12.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Два гроссмейстера играют в шахматы против ЭВМ. Первый гроссмейстер выигрывает у машины с вероятностью $p_1 = 0.4$, а второй — с вероятностью $p_2 = 0.8$. Каждый сыграл две партии. Какова вероятность того, что общее число партий, выигранных гроссмейстерами, равно трем?

2.2. На карте необитаемого острова отмечены четыре места: в одном из этих мест зарыт клад. Бывший пират Бен Ган выбирает наудачу одно из отмеченных на карте мест и начинает копать. Убедившись, что в выбранном месте клада нет, Бен Ган случайным образом выбирает одно из оставшихся мест и снова принимается за работу; обнаружив клад, Бен Ган прекращает раскопки. Какова вероятность того, что Бен Ган выроет не менее трех ям?

2.3. Два стрелка делают по два выстрела (каждый по своей мишени). За один выстрел первый стрелок поражает мишень с вероятностью $p_1 = 0,2$, второй — с вероятностью $p_2 = 0,5$. Какова вероятность того, что оба стрелка поразят мишень ровно по одному разу?

2.4. Марья Кириловна использует дупло в качестве почтового ящика. Каждое утро она осматривает дупло и обнаруживает в нем одно письмо. Письмо это написано Дубровским (с вероятностью $P_1 = 0,8$) или князем Верейским (с вероятностью $p_2 = 0,2$). Таким образом, за три дня Марья Кириловна получила три письма. Какова вероятность того, что ровно два из них написаны Дубровским?

2.5. Имеются три партии деталей: в первой партии бракованные детали составляют 5% от общего числа, во второй 3%, в третьей 4%. Из каждой партии берут для контроля по одной детали. Какова вероятность того, что среди взятых деталей ровно одна бракованная?

2.6. Татьяна Ларина влюблена. В кого именно она точно не знает. Каждый день она сочиняет письмо и посылает его либо Евгению Онегину (с вероятностью $p_1 = 0,7$), либо Владимиру Ленскому (с вероятностью $p_2 = 0,3$). Всего Татьяна отправила четыре письма. Какова вероятность того, что ровно три из них были адресованы Евгению Онегину?

2.7. Перед хрустальным домом, в котором живет ручная белка, стоят три шкатулки с орехами. В первой шкатулке орехи с изумрудами внутри составляют 10%, во второй 5%, в третьей 20%. Белка разгрызла по одному ореху из каждой шкатулки. Какова вероятность того, что при этом были обнаружены ровно два изумруда?



2.8. Остап Бендер собирает деньги за осмотр Провала. Каждый из трех осмотревших Провал экскурсантов независимо от остальных либо благодарит Бендера (вероятность этого $p_1 = 0,1$), либо молча уходит (с вероятностью $p_2 = 0,2$), либо требует деньги назад (с вероятностью $p_3 = 0,7$). Какова вероятность того, что ровно два экскурсанта из трех поблагодарили Бендера?

2.9. У Джона Сильвера три говорящих попугая, каждый из которых в числе прочих слов умеет произносить и слово "пиастры". Первый попугай произносит это слово с вероятностью $p_1 = 0,7$, второй с вероятностью $p_2 = 0,3$, третий с вероятностью $p_3 = 0,9$. Каждый попугай произнес по одному слову. Какова вероятность того, что слово "пиастры" прозвучало при этом ровно два раза?

2.10. У Буратино имеется связка из шести золотых ключиков, двумя из которых можно открыть потайную дверцу. Буратино берет наудачу один из ключиков и пытается с его помощью открыть указанную дверцу. Какова вероятность того, что Буратино откроет дверцу ровно с третьей попытки, если после каждой неудачной попытки соответствующий ключик: а) откладывается в сторону; б) возвращается в связку?

2.11. Сошедший с ума Германн говорит только четыре слова: тройка, семерка, туз, дама, причем произносит эти слова с вероятностями соответственно 0,3; 0,4; 0,2 и 0,1. Германн произнес три слова. Какова вероятность того, что слово "туз" было произнесено ровно два раза?

2.12. Незнайка хочет получить права на вождение газированного автомобиля. На экзамене предлагаются три вопроса и по четыре варианта ответа на каждый из них, среди которых лишь один правильный. Экзамен считается сданным, если указаны правильные ответы не менее чем на два вопроса. Незнайка выбирает ответы на вопросы наудачу. Какова вероятность того, что Незнайка сдаст экзамен?

2.13. При одном выстреле стрелок поражает цель с вероятностью $p = 0,2$. Какова вероятность того, что в серии из пяти выстрелов цель будет поражена ровно один раз?

2.14. Игральная кость (симметричный кубик из однородного материала, на гранях которого нанесены цифры 1, ..., 6) бросается три раза. Какова вероятность того, что цифра 5 выпадет не менее двух раз?

2.15. Из колоды, содержащей 36 карт, извлекается одна. Затем карта кладется обратно в колоду, и колода перетасовывается. Какова вероятность того, что при пятикратном проведении описанного эксперимента ровно три раза извлекался король?

2.16. В водоеме водятся карпы и налимы. Вероятности поймать на удочку указанных рыб равны соответственно $p_1 = 0,4$ и $p_2 = 0,6$. Число рыб достаточно велико, поэтому можно считать, что на эти вероятности не оказывает влияния изъятие из водоема небольшого числа рыб. Котрыболов поймал четыре рыбы. Какова вероятность того, что среди них не меньше трех налимов?

2.17. Над изготовлением изделия работают последовательно трое рабочих. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0.1, второй с вероятностью 0,2, третий с вероятностью 0.05. Какова вероятность того, что при изготовлении изделия ровно двое рабочих допустили брак?

2.18. В три цветочных горшка посажены волшебные ячменные зерна. Вероятности получения Дюймовочек из посаженных зерен равны соответственно $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,6$ и $p_3 = 0,2$. Какова вероятность получения не менее двух Дюймовочек?

2.19. Некоторое устройство состоит из четырех блоков, причем надежности (т.е. вероятность безотказной работы в течение какого-то промежутка времени $T$) этих блоков равны $p_1 = 0,8, p_2 = 0,7, p_3 = 0,9$, $p_4 = 0,5$. Какова вероятность того, что за промежуток времени $T$ откажет ровно один блок?

2.20. Незнайка играет на трубе поочередно под окнами трех домов. Если жильцам нравится, как играет Незнайка, его хвалят, в противном случае прогоняют. Незнайкина музыка может понравиться жильцам указанных домов с вероятностями соответственно $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,05$, $p_3 = 0,2$. Какова вероятность того, что Незнайку похвалят не менее двух раз?

2.21. Володя и Вадик стреляют картошкой в живую шляпу. Володя попадает с вероятностью 0,5, Вадик — с вероятностью 0,4. Каждый делает по два выстрела. Какова вероятность того, что при этом будет ровно одно попадание?

2.22. В гнездо жирной испанской утки с красным лоскутком на лапке подброшены три посторонних яйца. Вероятности того, что из них вылупятся гадкие утята равны соответственно $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,3$. Какова вероятность того, что вылупится ровно один гадкий утенок?

2.23. Знайка хранит книги на столе, под столом, на кровати и под



кроватью. Когда Знайка собирается взять очередную книгу, то он берет ее со стола, из-под стола, с кровати или из-под кровати с вероятностями соответственно

$$p_1 = 0,6, \quad p_2 = 0,2, \quad p_3 = p_4 = 0,1.$$

Знайка взял три книги (некоторые, возможно, из одного и того же места; при повторном взятии книги указанные выше вероятности не меняются). Какова вероятность того, что ровно две из них взяты со стола?

2.24. Имеются три коробки с оловянными солдатиками. В первой коробке солдатики с одной ногой составляют 5% от общего числа, во второй 10%, в третьей 15%. Из каждой коробки берут наудачу по одному солдатику. Какова вероятность того, что среди взятых солдатиков не менее двух с одной ногой?

2.25. Синдбад-мореход обнаружил в пещере на необитаемом острове шкатулку, в которой 20 рубинов и 5 изумрудов. Синдбад извлекает из шкатулки драгоценные камни до появления первого рубина. Какова вероятность того, что он извлечет ровно 6 камней?

2.26. Русалочка мечтает заполучить вместо рыбьего хвоста пару стройных ножек. Она обращается к трем ведьмам, каждая из которых дает Русалочке сосуд с волшебным зельем. Вероятности того, что зелье, находящееся в сосудах, подействует, равны соответственно $p_1 = 0,5, p_2 = 0,4, p_3 = 0,3$ (каждое зелье действует независимо от остальных). Русалочка выпивает содержимое первого сосуда; если зелье не действует, она выпивает следующее и т.д. Какова вероятность того, что мечта Русалочки сбудется?

2.27. На склад поступили две партии изделий, изготовленные в двух цехах. Для изделия из первой партии вероятность быть бракованным 0,1, для изделия из второй партии эта вероятность равна 0,2. Для контроля берутся по 2 изделия из каждой партии. Какова вероятность того, что среди взятых изделий ровно три бракованных?

2.28. Собираясь на прогулку, человек рассеянный с улицы Бассейной может совершить три оплошности: "вместо шапки на ходу надеть сковороду", "надеть не то пальто или "вместо валенок перчатки натянуть себе на пятки". Указанные оплошности человек рассеянный совершает с вероятностями соответственно $p_1 = 0,3, p_2 = 0,2, p_3 = 0,7$. Какова вероятность того, что человек рассеянный совершит не менее двух оплошностей?

2.29. Растеряйка собирается в путешествие на воздушном шаре, но никак не может найти свою шапку. Известно, что шапка находится в одном из четырех ящиков комода. Растеряйка открывает наудачу один из ящиков; если шапки там нет, то он закрывает ящик и тут же забывает, какой именно ящик он только что открывал. После этого вся процедура повторяется и т.д. Какова вероятность того, что для обнаружения шапки Растеряйке придется проделать описанную выше процедуру не более трех раз?

2.30. "Дама сдавала в багаж: диван, чемодан, саквояж". Вероятности того, что за время пути указанные вещи будут утеряны равны соответственно $p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3 = 0,3$. Какова вероятность того, что будут утеряны ровно две вещи?

## 3. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа попарно несовместных событий (т.е. сумма этих событий есть достоверное событие, и никакие два из них не могут произойти одновременно), то вероятность любого события $A$ может быть вычислена с помощью формулы полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n).$$

События $H_1, \ldots, H_n$ называются при этом гипотезами, а вероятности $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ — априорными вероятностями гипотез. С помощью формул Байеса

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n)},$$

где $i = 1, \ldots, n$, можно найти апостериорные вероятности гипотез, т.е. вероятности гипотез, вычисленные при условии, что событие A произошло.

*Пример* 1. Имеются три урны. В первой 3 белых шара и 5 черных, во второй 2 белых и 4 черных, в третьей 5 белых и 1 черный. Для проведения эксперимента со случайным исходом первая урна выбирается с вероятностью 1/6, вторая — с вероятностью 1/3 и третья с вероятностью 1/2. Из выбранной урны извлекается шар. Какова вероятность появления белого шара?

Решение. Пусть гипотеза $H_i$ состоит в том, что выбрана $i$-я урна ($i = 1, 2, 3$); ясно что мы имеем полную группу попарно несовместных



событий, причем $P(H_1) = 1/6, P(H_2) = 1/3, P(H_3) = 1/2$. Через $A$ обозначим событие, состоящее в появлении белого шара. Условные вероятности суть, очевидно, $P(A \mid H_1) = 3/8, P(A \mid H_2) = 1/3, P(A \mid H_3) = 5/6$. По формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = (1/6)(3/8) + (1/3)(1/3) + (1/2)(5/6) = 85/144 \approx 0,59.$$

*Пример* 2. Имеются две урны. В первой 5 белых шаров и 9 черных, во второй 9 белых и 2 черных. Некто подошел наудачу к одной из урн и извлек из нее первый попавшийся шар, который оказался белым. Какова апостериорная вероятность того, что шар был извлечен из второй урны?

Решение. Пусть гипотеза $H_i$ состоит в том, что выбирается $i$-я урна ($i = 1, 2$), априорные вероятности гипотез $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$; через $A$ обозначим событие, состоящее в появлении белого шара. Очевидно, $P(A \mid H_1) = 5/14, P(A \mid H_2) = 9/11$. По формуле Байеса находим апостериорную вероятность гипотезы $H_2$, вычисленную при условии, что произошло событие $A$:

$$P(H_2 \mid A) = 0,5(9/11)/(0,5(5/14) + 0,5(9/11)) = 126/181 \approx 0,696.$$

*Пример* 3. В первой урне два белых шара и один черный, во второй три белых и два черных, в третьей один белый и два черных. Из первой урны извлекают один шар и, не глядя, откладывают в сторону; затем извлекают еще один шар из наудачу выбранной урны. Какова вероятность того, что второй извлеченный шар — белый?

Решение. Обозначим через $A$ событие, состоящее в том, что второй извлеченный шар оказался белым; через $H_i$ обозначим гипотезу, состоящую в том, что этот шар был извлечен из $i$-й урны ($i = 1, 2, 3$). Очевидно, $P(H_i) = 1/3, i = 1, 2, 3; P(A \mid H_2) = 3/5, P(A \mid H_3) = 1/3$. Для вычисления $P(A \mid H_1)$ применим формулу полной вероятности. Через $H$ обозначим гипотезу, состоящую в том, что первый извлеченный шар оказался белым; тогда, очевидно, $P(H) = 2/3, P(\bar{H}) = 1/3, P(A \mid H) = 1/2; P(A \mid \bar{H}) = 1$. Поэтому

$$P(A \mid H_1) = P(H)P(A \mid H) + P(\bar{H})P(A \mid \bar{H}) = (2/3)0,5 + (1/3)1 = 2/3.$$

Теперь можно найти вероятность события $A$:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = 8/15 \approx 0,53.$$

3.1. Родион Раскольников покупает себе топор. У первых трех торговцев по 15 топоров с сосновыми топорищами и по 10 топоров с дубовыми. Имеются еще два торговца, у каждого из которых по 5 топоров с сосновыми топорищами и по 5 топоров с дубовыми. Раскольников покупает первый попавшийся топор у наугад выбранного торговца. Какова вероятность покупки топора с дубовым топорищем?

3.2. Чтобы выбрать, по какой из трех дорог, ведущих в город, поехать, неуловимый Джо бросает игральную кость (см. задачу 2.14). Если выпадает одно очко, он выбирает первую дорогу, если два или три — вторую, в остальных случаях — третью. Вероятности попасть в засаду для указанных дорог равны соответственно $p_1 = 1/2, p_2 = 1/3, p_3 = 1/4$. Какова вероятность того, что неуловимый Джо попадет в засаду?

3.3. Миледи послала четырем мушкетерам две корзины анжуйского по 10 бутылок в каждой корзине. В первой корзине вино отравлено в двух бутылках, во второй — в трех. В пути одну бутылку из первой корзины случайно разбили. Мушкетеры решили распить одну бутылку, которую они берут из наудачу выбранной корзины. Какова вероятность того, что распитие закончится благополучно (при условии, что мушкетеры ограничатся одной бутылкой)?

3.4. В ходе операции "Ы" Балбесу удалось проникнуть на склад, где он обнаружил два ящика: в первом 3 бутылки "Нарзана" и 5 бутылок "Боржоми", во втором — 4 бутылки "Нарзана" и 4 бутылки "Боржоми". Балбес разбил по одной бутылке из каждого ящика, после чего взял себе одну бутылку из наудачу выбранного ящика (на этикетки Балбес не смотрел). Какова вероятность того, что Балбес стал обладателем бутылки "Нарзана"?

3.5. На столе лежат 3 колоды по 36 карт в каждой. Из первой колоды берут даму пик и даму треф, из второй — даму червей, из третьей — даму треф. Все взятые карты откладываются в сторону. После этого из наугад выбранной колоды берут первую попавшуюся карту. Какова вероятность того, что эта карта окажется дамой?

3.6. В комнате $A$ лабиринта, схема которого изображена на рис.1, находится герой Тезей. В любой из комнат 1 – 4 может находиться Минотавр, причем вероятности встретить его в этих комнатах равны соответственно $p_1 = 0.5, p_2 = p_3 = 0.2, p_4 = 0.1$. Чтобы выйти из лабиринта,



Тезей выходит из комнаты $A$ и движется все время вперед; встретив по пути развилку, Тезей с равной вероятностью сворачивает налево или направо. В конце концов Тезей оказывается в одной из комнат 1 – 4. Если Минотавра там нет, Тезей выходит на свободу. В противном случае Минотавр съедает героя. Какова вероятность того, что Тезей выйдет на свободу?

3.7. На рис. 2 изображена схема дымохода в доме Наф-Нафа. Волк пытается через дымоход пробраться в дом. Встретив развилку, он наудачу выбирает одно из ответвлений и продолжает путь. В конце концов Волк попадает в один из кипящих котлов. При этом шерсть у него может подняться дыбом: в первом котле это происходит с вероятностью $p_1 = 0,2$, во втором с вероятностью $p_2 = 0,3$, в третьем с вероятностью $p_3 = 0,4$. Какова вероятность того,что шерсть у Волка поднимется дыбом?

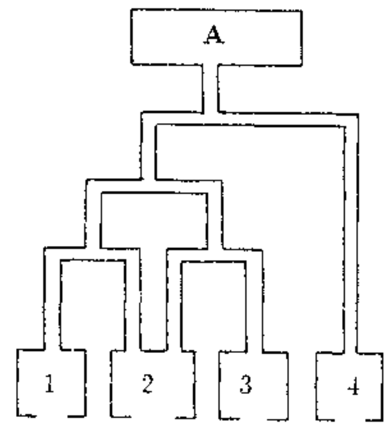

Рис. 1

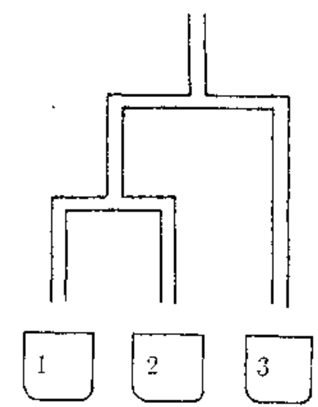

Рис. 2

3.8. Красная шапочка решила отнести Бабушке две корзинки с пирожками. В первой корзинке 5 пирожков с яблочным вареньем и 4 пирожка с малиновым; во второй — 3 с яблочным и 5 с малиновым. По дороге на Красную шапочку напал Серый волк, съел пирожок из первой корзинки, после чего убежал. Чтобы прийти в себя, Красная шапочка решила сесть на пенек и съесть пирожок. Пирожок она берет из случайно выбранной корзинки. Какова вероятность того, что это будет пирожок с малиновым вареньем?

3.9. Знайка идет гулять на речку, выбирая для этого наудачу одну из трех тропинок. Вероятности встретить на этих тропинках овечку равны соответственно $p_1 = 0,4, p_2 = 0,5, p_3 = 0,2$. Встретив овечку, Знайка перепрыгивает через нее. Известно, что Знайка перепрыгнул через овечку. Какова апостериорная вероятность того, что Знайка выбрал третью тропинку?

3.10. Во время прогулки Незнайка может с равной вероятностью встретить Молчуна или Ворчуна. При встрече Ворчун с вероятностью 0.9 ворчит и с вероятностью 0,1 молчит; Молчун с вероятностью 0,1 ворчит и с вероятностью 0.9 молчит. Известно, что встретившийся Незнайке коротышка ворчал. Какова апостериорная вероятность того, что Незнайка встретил Ворчуна?

3.11. Тане с Ваней акула Каракула нипочем. Они с равной вероятностью могут стукнуть ее кулаком, каблуком или кирпичом. От удара кулаком акула тонет с вероятностью 0,2, от удара каблуком — с вероятностью 0,3, от удара кирпичом — с вероятностью 0,8. Известно, что акула утонула. Какова апостериорная вероятность того, что Таня с Ваней стукнули акулу кирпичом?

3.12. Отплясывать на поляне могут с равной вероятностью слониха-щеголиха, гиппопотам или носорог. При этом в зависимости от того, кто именно будет отплясывать на поляне, румяная луна может упасть на бедного слона с вероятностями соответственно $p_1 = 0,7, p_2 = 0,1, p_3 = 0.05$. Известно, что луна упала. Какова апостериорная вероятность того, что на поляне отплясывала слониха-щеголиха?

3.13. У Старой королевы имеются две шкатулки: в первой 6 зеленых горошин и 2 желтых, во второй — 3 зеленых и 6 желтых. Одна горошина из первой шкатулки утеряна (неизвестно какого цвета). Королева берет наудачу одну горошину из произвольной шкатулки и подкладывает ее в постель предполагаемой принцессы. Какова вероятность того, что принцесса будет спать на желтой горошине?

3.14. Старуха с равной вероятностью может пожелать новое корыто, новую избу или захочет стать вольною царицей. В случае осуществления первого желания Старуха вновь пошлет Старика к Рыбке с вероятностью $p_1 = 0,1$, в случае осуществления второго желания — с вероятностью $p_2 = 0,2$ и в случае осуществления третьего желания — с вероятностью $p_3 = 0,9$. Известно, что Старик был вновь послан к Рыбке. Какова апостериорная вероятность того, что Старуха захотела стать вольною царицей?



3.15. Балда морщит веревкой море. Чтобы выяснить, в чем дело, старый Бес с равной вероятностью может сам отправиться к Балде или может послать своего внука. Если старый Бес пошлет к Балде своего внука, то Балда соберет оброк с чертей с вероятностью 0,9, если же старый Бес отправится к Балде сам, то Балда соберет оброк с чертей с вероятностью 0.1. Известно, что Балда собрал оброк с чертей. Какова апостериорная вероятность того, что старый Бес послал к Балде своего внука?

3.16. Известно, что для того, чтобы избавиться от хандры, следует положить на ночь под подушку какой-либо драгоценный камень. Если положить алмаз, то наутро хандра проходит с вероятностью $p_1 = 0,8$; для изумруда, рубина и сапфира эти вероятности равны соответственно $p_2 = 0,4, p_3 = p_4 = 0,2$. Узнав об этом, царевна Несмеяна достала из шкатулки, в которой находились 3 алмаза, 4 изумруда, 5 рубинов и 6 сапфиров, первый попавшийся камень и положила под подушку. Какова вероятность того, что Несмеяна избавится от хандры?

3.17. Винни-Пуху срочно понадобился воздушный шарик. У его друга Пятачка воздушные шарики хранились в двух коробках: в первой лежали 2 синих шарика и 2 зеленых, а во второй — 3 синих и 6 зеленых. Недавно один шарик из первой коробки потерялся; какого он был цвета, Пятачок не помнит. Пятачок подходит к одной из коробок и извлекает оттуда первый попавшийся шарик. Какова вероятность того, что будет извлечен синий шарик?

3.18. Солдаты идут покупать самовар. Они с равной вероятностью могут пойти на базар или в магазин. Если солдаты пойдут на базар, они купят самовар с вероятностью 0.8, а если в магазин, то с вероятностью 0.2. Известно, что солдаты купили самовар. Какова апостериорная вероятность того, что солдаты пошли на базар?

3.19. Курочка Ряба несет вперемешку простые и золотые яйца. Дед помещает снесенные яйца на одну из двух полок. Через некоторое время выяснилось, что на первой полке 5 простых и 6 золотых яиц, на второй — соответственно 3 и 7. В ту же ночь случилась беда: по первой полке бежала мышка, хвостиком махнула, одно яичко упало и разбилось. Утром Дед, ничего не зная о случившемся, подошел наудачу к одной из полок и взял первое попавшееся яйцо. Какова вероятность того, что это яйцо — золотое?

3.20. У Внучки два сундука с платьями, по десять платьев в каждом сундуке; в первом сундуке 4 зеленых и 6 красных платьев, во втором —

5 зеленых и 5 красных. Пока росла репка, Бабка взяла одно из платьев из первого сундука и дала поносить соседской Внучке. Тут репка выросла большая-пребольшая, и стали Дед с Бабкой звать Внучку. Внучка надевает первое попавшееся платье из случайно выбранного сундука и идет тянуть репку. Какова вероятность того, что Внучка будет тянуть репку в красном платье?

3.21. Отправляясь в Африку, доктор Айболит захватил с собой десять ящиков: три ящика с градусниками, четыре с гоголем-моголем и три ящика с шоколадками. В пути один ящик был утерян. Прибыв на место, Айболит открывает первый попавшийся ящик. Какова вероятность того, что в нем находятся градусники?

3.22. Диоген отправился на рынок покупать себе бочку. У первого торговца было 5 бочек из-под меда и 6 бочек из-под дегтя; у второго — 3 бочки из-под меда и 4 бочки из-под дегтя. Диоген не знает, какую бочку ему купить; пока он размышлял, первый торговец продал одну бочку. Наконец, Диоген решается: он подходит к наудачу выбранному торговцу и покупает у него первую попавшуюся бочку. Какова вероятность того, что Диоген будет жить в бочке из-под меда?

3.23. На столе лежат 4 одинаковые с виду игральные кости (см. задачу 2.14). Три из них обычные, а одна изготовлена мошенником: цифра 6 на ней выпадает с вероятностью 1/2, каждая из остальных цифр — с вероятностью 1/10. Наугад взятую со стола кость бросают и на ней выпадает цифра 6. Какова апостериорная вероятность того, что была взята кость, изготовленная мошенником?

3.24. Колобок катится по дорожке. Он может с равной вероятностью повстречать Зайца, Волка, Медведя или Лису. Вероятности того, что каждый из них съест Колобок, суть $p_1 = p_2 = p_3 = 0,1, p_4 = 0,9$ соответственно. Известно, что Колобок был съеден. Какова апостериорная вероятность того, что Колобок повстречался с Лисой?

3.25. У Золушки было три коробки с башмачками: в первой коробке 3 пары серебряных и 2 пары хрустальных; во второй — 2 пары серебряных и 3 пары хрустальных; в третьей — 4 пары хрустальных. Одна пара из первой коробки утеряна. Золушка выбирает наудачу коробку и, не глядя, достает из нее башмачки. Какова вероятность того, что это будут хрустальные башмачки?

3.26. Емеля сидит у проруби и ловит рыбу. Пойманную рыбу Емеля помещает в одно из двух ведер. После рыбалки выяснилось, что в первом



ведре две щуки, три леща и два карася; во втором — щука, два леща и три карася. По дороге домой одна из рыб во втором ведре была съедена щукой. Дома Емеля собирается варить уху и, не глядя, достает одну из рыб из случайно выбранного ведра. Какова вероятность того, что извлеченная рыба окажется карасем?

3.27. В кладовке на трех полках стоят банки с малиновым и вишневым вареньем. На первой полке 3 банки малинового и 2 банки вишневого; на второй — 4 банки малинового и 3 вишневого; на третьей — 5 банок вишневого. Желая угостить своего друга Карлсона, Малыш забрался в кладовку; там он случайно уронил на пол одну из банок со второй полки, потом взял первую попавшуюся банку с одной из полок. Какова вероятность того, что Малыш взял банку с вишневым вареньем?

3.28. Требуется усмирить Кота Баюна. Вероятности того, что Кот Баюн будет усмирен с помощью оловянного, медного или железного прута суть соответственно $p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3 = 0,7$. Андрей-стрелок берет первый попавшийся прут из имеющихся у него трех оловянных, двух медных и двух железных и усмиряет Кота. Какова апостериорная вероятность того, что Андрей-стрелок взял железный прут?

3.29. Щенок желает узнать, кто сказал "мяу". С этой целью Щенок может пойти во двор, в сад или к пруду. Встретить того, кто сказал "мяу", в указанных местах можно соответственно с вероятностями $p_1 = 0,8, p_2 = p_3 = 0,1$. Щенок идет в наудачу выбранное место и обнаруживает того, кто сказал "мяу". Какова апостериорная вероятность того, что Щенок пошел во двор?

3.30. Загорелся кошкин дом. Кошка с равной вероятностью может позвать на помощь курочку с ведром, лошадку с фонарем, собачку с помелом или серого заюшку с листом. Вероятности того, что в каждом из указанных случаев пожар будет потушен, равны соответственно $p_1 = 0,9,\quad p_2 = p_3 = p_4 = 0,1$. Известно, что пожар был потушен. Какова апостериорная вероятность того, что кошка позвала на помощь курочку с ведром?

## 4. Геометрические вероятности

Пусть $A \subset G$, где $A$ и $G$ — квадрируемые подмножества плоскости, причем площадь множества $G$ положительна. Если взять наудачу точку $x \in G$, то вероятность того, что эта точка будет принадлежать множеству $A$, вычисляется по формуле $P(x \in A) = \mu A/\mu G$, где $\mu A$ и $\mu G$ — площади множеств $A$ и $G$. Если $A$ и $G$ — кубируемые подмножества пространства, то последняя формула останется в силе, если под $\mu A$ и $\mu G$ понимать объемы соответствующих множеств.

*Пример* 1. На интервале (0,1) наудачу берутся две точки $x$ и $y$. Какова вероятность того, что будет выполняться соотношение

$$y \leq \min(ex, |\ln x|)?$$

Решение. Взятую пару точек можно интерпретировать, как одну точку с координатами $(x, y)$ на плоскости. Множество всех таких точек составляет квадрат, изображенный на рис. 3. Штриховкой отмечено множество точек $A$, для которых выполняется указанное в задаче соотношение. Поскольку площадь квадрата равна единице, то

$$P(y \leq \min(ex, |\ln x|) = \mu A/1 = \mu A = \int\limits_0^{1/e} ex\,dx + \int\limits_{1/e}^{1} |\ln x|\,dx =$$

$$= (ex^2/2)\Big|_0^{1/e} + (-x\ln x + x)\Big|_{1/e}^{1} = 1 - 3/(2e).$$

*Пример* 2. На интервале (0,1) берутся наудачу три точки $x, y, z$. Какова вероятность того, что будет выполняться соотношение $z \geq |2y - 1|$?

Решение. Взятые точки будем интерпретировать как точку пространства с координатами $(x, y, z)$. На рис. 4 изображен куб, составленный из всех таких точек: указанное в условии задачи неравенство будет выполняться для точек выделенной на этом рисунке призмы (и только для них). Нетрудно проверить, что объем призмы составляет половину объема куба, поэтому искомая вероятность равна 1/2.

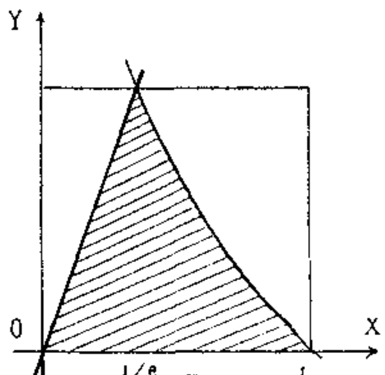


Рис. 3

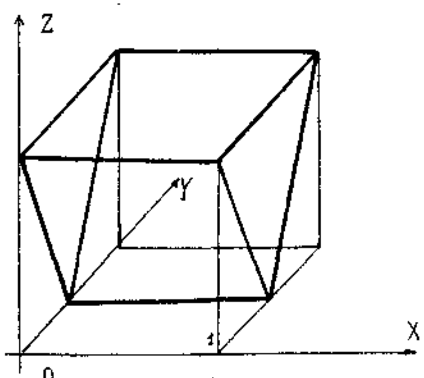


Рис. 4



## Задачи для самостоятельного решения

В задачах 4.1 – 4.20 на интервале (0,1) наудачу берутся две точки $x$ и $y$. Какова вероятность того, что выполняются указанные соотношения? В задачах 4.21 – 4.30 на том же интервале наудачу берутся три точки: $x, y, z$. Требуется определить вероятность того, что скалярное произведение вектора $\mathbf{a} = (x, y, z)$ на вектор $\mathbf{b}$ будет меньше единицы.

| | |
|---|---|
| 4.1. $\sin(\pi x/2) \geq y \geq x^2$. | 4.16. $\sqrt{x} \geq y \geq x/\sqrt{1+x^2}$. |
| 4.2. $\sqrt{x^{2/3}} \geq y \geq 2x^2/(1+x)$. | 4.17. $\ln(ex - x - 1) \geq y \geq x^3$. |
| 4.3. $\sqrt{x^{2/3}} \geq y \geq (2\arcsin x)/\pi$. | 4.18. $\lg(9x+1) \geq y \geq xe^{x-1}$. |
| 4.4. $(\sin x)/(\sin 1) \geq y \geq x^2$. | 4.19. $(4\mathrm{arctg} x)/\pi \geq y \geq x^3$. |
| 4.5. $y \leq \min(\mathrm{tg}(\pi x/2), \sqrt{2(1-x)})$. | 4.20. $\sqrt{x} \geq y \geq \mathrm{tg}(\frac{\pi x}{4})$. |
| 4.6. $\sqrt{2x - x^2} \geq y \geq x$. | 4.21. $\mathbf{b} = (2, 3, 1)$ |
| 4.7. $y \leq \min(\cos(\pi x/2), \sin(\pi x/2))$. | 4.22. $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$ |
| 4.8. $y \geq \max(\sqrt{x}, \sqrt{1-x})$. | 4.23. $\mathbf{b} = (2, 3, 2)$ |
| 4.9. $y \leq \min(\mathrm{tg}(\pi x/2), \mathrm{ctg}(\pi x/2))$. | 4.24. $\mathbf{b} = (1, 2, 4)$ |
| 4.10. $y \leq \min(\mathrm{tg}(\pi x/2), 2(1-x))$. | 4.25. $\mathbf{b} = (2, 3, 4)$ |
| 4.11. $y \leq \min(\sin(\pi x/2), \sqrt{2}(1-x))$. | 4.26. $\mathbf{b} = (2, 4, 1)$ |
| 4.12. $y \leq \min(\cos(\pi x/2), \sqrt{2}x)$. | 4.27. $\mathbf{b} = (3, 4, 1)$ |
| 4.13. $y \leq \min(\ln(2x+1), 2(1-x)\ln 2)$. | 4.28. $\mathbf{b} = (2, 4, 3)$ |
| 4.14. $y \leq \min(\sin(\pi x), (1-x)/x)$. | 4.29. $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ |
| 4.15. $y \leq \min(e^x - 1, 2(\sqrt{e} - 1)(1-x))$. | 4.30. $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$ |

## 5. Последовательности независимых испытаний

Предположим, что проводятся $n$ независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие $A$ наступает с вероятностью $p$. Вероятность $P_n(m)$ того, что событие $A$ наступит ровно $m$ раз, вычисляется по формуле $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$. Вычисление соответствующей вероятности непосредственно по этой формуле не всегда удобно. Если $n$ велико, а $p$ мало, то применяется приближенная формула Пуассона $P_n(m) \approx (np)^m e^{-np}/m!$. В табл. 3 приложения приведены значения этой функции при разных значениях $\lambda = np$. Обычно эту формулу применяют, если $p < 0,1, npq \le 9$. В случае, когда $npq > 9$, используют приближенную формулу, вытекающую из локальной теоремы Муавра — Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\Big(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\Big),$$

где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Значения этой функции приведены в табл. 2 приложения.

Если требуется найти вероятность того, что число появлений $\mu$ события $A$ заключено между числами $m_1$ и $m_2$, то используют приближенную формулу, вытекающую из интегральной теоремы Муавра— Лапласа:

$$P_n(m_1 \le \mu \le m_2) \approx \Phi\Big(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\Big),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt -$$

нормальная функция распределения. Ее значения приведены в табл. 1 приложения. В таблицах значений нормальной функции распределения обычно указываются ее значения лишь для положительных x, поэтому полезно иметь в виду равенство $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

*Пример* 1. В урне находятся 99 черных и 1 белый шар. Производится 200 извлечений шара из урны, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Какова вероятность появления не менее двух белых шаров?

Решение. Вероятность появления белого шара при одном извлечении $p = 0,01; np = 200 \cdot 0,01 = 2$. Применим формулу Пуассона. Имеем

$$P(m \ge 2) = 1 - P(m=0) - P(m=1) \approx 1 - 2^0e^{-2}/0! - 2^1e^{-2}/1! \approx 0,59.$$



*Пример* 2. В урне находятся 4 черных и 5 белых шаров. Производится 180 извлечений шара по схеме, указанной в предыдущем примере. Какова вероятность того, что белый шар появится ровно 99 раз?

Решение. В рассматриваемом случае $n = 180, m = 99$. Вероятность появления белого шара $p = 5/9, q = 4/9; npq = 400/9 > 9$, поэтому можно считать, что применение локальной теоремы Муавра — Лапласа оправдано. Имеем

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\Big(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\Big) = (3/20)\varphi(-3/20) = 3/20 \cdot 0.3945 \approx 0.059.$$

*Пример* 3. Какова вероятность того, что в эксперименте, описанном в предыдущем примере, количество $\mu$ извлеченных белых шаров будет удовлетворять неравенству $80 \le \mu \le 120$?

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра— Лапласа. В рассматриваемом случае $m_1 = 80, m_2 = 120$. Имеем

$$P_n(m_1 \le \mu \le m_2) \approx \Phi\Big(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\Big) = \Phi(3) - \Phi(-3) \approx 0,997.$$

### Задачи для самостоятельного решения

5.1. Из колоды, содержащей 52 карты, извлекается одна. Затем карта возвращается в колоду и она тщательно перетасовывается. Опыт повторяется 208 раз. Какова вероятность того, что король треф появился при этом не более одного раза?

5.2. Известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 0.999. Некий экспериментатор уронил бутерброд 1000 раз. Какова вероятность того, что при этом бутерброд упал маслом вверх более двух раз?

5.3. Игральная кость изготовлена в форме додекаэдра — правильного многогранника, гранями которого являются 12 правильных пятиугольников. На грани додекаэдра нанесены числа 1, ..., 12. Такую необычную игральную кость бросают 9000 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет ровно 3020 (выпавшим считается число очков, нанесенное на верхнюю грань)?

5.4. Имеется 800 коробок с шурупами. Вероятность наличия хотя бы одного дефектного шурупа в любой из коробок равна 0.4. Какова вероятность того, что не меньше 350 коробок содержат дефектные шурупы?

5.5. Игральная кость изготовлена в форме икосаэдра — правильного многогранника, гранями которого являются 20 правильных треугольников. На грани икосаэдра нанесены числа от 1 до 20. При бросании такой кости выпавшим количеством очков считается число, нанесенное на верхнюю грань. Кость бросается 100 раз. Какова вероятность того, что цифра 1 выпадет не менее двух раз?

5.6. В книге 900 страниц. Вероятность наличия опечатки на одной странице равна 1/3. Какова вероятность того, что в книге не меньше 320 опечаток?

5.7. В палатку к геологам залетели 1173 комара. В течение часа каждый комар может быть пойман геологами с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что через час в палатке останется ровно 470 комаров (пойманные комары уничтожаются)?

5.8. В последовательности случайных цифр каждая из них 0,1, ..., 9 появляется с равной вероятностью. Имеется такая последовательность из 10000 цифр. Какова вероятность того, что цифра 8 встретится в этой последовательности не менее 993 и не более 1020 раз?

5.9. Вероятность попасть в самолет из винтовки при одном выстреле равна 0,005. Производится 1000 выстрелов. Какова вероятность того, что будет не менее трех попаданий?

5.10. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Производится 800 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий заключено между 540 и 580?

5.11. В большой партии деталей бракованные составляют 1,2%. Детали упаковываются в коробки по 250 штук. Какова вероятность того, что в наудачу взятой коробке будет ровно 3 бракованные детали?

5.12. В лотерее выигрывает каждый третий билет. Куплено 500 билетов. Какова вероятность того, что число выигравших билетов заключено между 140 и 175?

5.13. Производятся испытания 500 приборов. Вероятность отказа любого из них равна 0,008. Какова вероятность того, что при испытаниях откажут более двух приборов?

5.14. На заводе изготавливаются сапожные инструменты. Каждый день после смены каждый из 1000 работников завода пытается пронести через проходную шило в мешке. Вероятность утаить шило в мешке составляет 0,002. Какова вероятность того, что шило в мешке утаят не менее трех работников завода?



5.15. Некоторое сложное техническое устройство состоит из 2500 деталей, вероятность выхода из строя каждой из которых равна 0,0012. При выходе из строя более трех деталей устройство перестает функционировать. Какова вероятность того, что устройство перестанет функционировать?

5.16. По каналу связи передается сообщение, состоящее из 12000 символов. Вероятность ошибки при передаче одного символа равна 0,2. Какова вероятность того, что число ошибок заключено между 2300 и 2450?

5.17. В новом доме установлено 340 лампочек. Вероятность перегореть в течение месяца для каждой лампочки равна 0,015. Какова вероятность того, что в течение месяца перегорят не менее двух лампочек?

5.18. Стая пустынной саранчи, состоящая из миллиона особей, подверглась химической обработке. Вероятность гибели отдельного насекомого составляла при этом 0,75. Какова вероятность того, что после обработки количество насекомых будет заключено между 249000 и 251000?

5.19. В некотором институте учатся 1460 студентов, родившихся в 1979 году. Полагая, что будущий студент может родиться с равной вероятностью в любой из дней, вычислить вероятность того, что не менее трех из студентов института родились 1 сентября.

5.20. Телефонная станция обслуживает 10000 абонентов. В течение определенного промежутка времени каждый из них может сделать вызов с вероятностью 0.2. Какова вероятность того, что общее число вызовов будет заключено между 1980 и 2040?

5.21. Вероятность появления герба при бросании гнутой монеты равна 0.45. Монету бросают 660 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет при этом 295 раз?

5.22. Считается, что вероятность встретить белую ворону составляет 0,0003. Некий орнитолог встретил за свою жизнь 10000 ворон. Какова вероятность того, что ровно три из них были белыми?

5.23. Методами современной экстрасенсорики установлено, что люди с аномальным биомагнитным полем встречаются с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что среди наудачу выбранных 10000 человек количество людей, обладающих указанным свойством, заключено между 3950 и 4100?

5.24. Некий изобретатель сконструировал прибор, позволяющий с абсолютной надежностью обнаруживать чертей. С помощью своего прибора изобретатель обследовал 2000 тихих омутов. Известно, что в тихом омуте черти водятся с вероятностью 0,64. Какова вероятность того, что количество тихих омутов, в которых изобретатель обнаружил чертей, заключено между 1240 и 1320?

5.25. Игральная кость изготовлена в форме тетраэдра, на грани которого нанесены цифры 1,2,3,4. При бросании такой кости выпавшим числом очков считается число, нанесенное на нижнюю грань. Какова вероятность того, что при бросании такой кости 950 раз цифра 4 выпадет 236 раз?

5.26. Вероятность того, что наудачу взятый кулик недоволен своим болотом, составляет 0,005. Какова вероятность того, что среди 1000 наудачу взятых куликов ровно два недовольны своим болотом?

5.27. Игральная кость изготовлена в форме октаэдра (правильного многогранника, гранями которого являются 8 правильных треугольников), на грани которого нанесены цифры от 1 до 8. При бросании такой кости выпавшим числом очков считается число, нанесенное на нижнюю грань. Какова вероятность того, что при 5000 бросаниях цифра 8 выпадет ровно 624 раза?

5.28. При искусственном выращивании жемчуга вероятность получить жемчужину от одного моллюска равна 0,22. Какова вероятность того, что количество жемчужин, полученных от 20000 моллюсков, заключено между 4340 и 4460?

5.29. На некоторой пекарне выпекают булочки, которые с вероятностью 1/3 имеют внутри изюминку. Какова вероятность того, что в партии из 1000 булочек ровно 330 булочек имеют внутри изюминку?

5.30. По дороге в течение одной секунды с вероятностью $p = 0,46$ проезжает автомобиль. Какова вероятность того, что количество автомобилей, проехавших по дороге в течение часа заключено между 1600 и 1700?

## 6. Дискретные случайные величины

Пусть рассматривается математическая модель некоторого эксперимента со случайным исходом, и пусть $\Omega = \{\omega\}$ — соответствующее пространство элементарных событий. Если каждому $\omega \in \Omega$ поставить в соответствие (вещественное) число $x = x(\omega)$, то мы получим функцию на $\Omega$, которая (при некоторых дополнительных ограничениях) называется случайной величиной. Если множество значений, которые может



принимать случайная величина, конечно или счетно, то случайная величина называется дискретной. Как правило, представляют интерес не значения дискретной случайной величины на отдельных элементарных событиях, а вероятности, с которыми случайная величина $X$ принимает то или иное значение. Рядом распределения дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены все различные значения этой случайной величины с соответствующими вероятностями:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_i$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_i$ | ... |

Функцией распределения дискретной случайной величины, все различные значения которой суть $x_1, x_2, \ldots$, называется функция $F(x) = P(X < x) = \Sigma P(X = x_k)$, где суммирование распространяется на все $k$, для которых $x_k < x$. Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины $X$ называется число

$$M[X] = m_x = \sum_i x_i p_i,$$

причем в случае бесконечного числа значений $x_i$ предполагается, что этот ряд абсолютно сходится. Дисперсия, среднее квадратическое отклонение и второй начальный момент дискретной случайной величины определяются соответственно равенствами

$$D[X] = D_x = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}; \quad \alpha_2[X] = \sum_i x_i^2 p_i.$$

Имеет место равенство $D_x = \alpha_2[X] - m_x^2$.

*Пример* 1. Из урны, в которой находятся 3 белых и 5 черных шаров, последовательно извлекают шары, пока не появится черный шар. Случайная величина $X$ равна количеству извлеченных шаров. Для этой случайной величины построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность $P(X \leq 3)$.

Решение. Возможные значения случайной величины $X$ суть 1, 2, 3, 4; при этом $P(X = 1) = 5/8$, $P(X = 2) = (3/8)(5/7)$, $P(X = 3) = (3/8)(2/7)(5/6)$, $P(X = 4) = (3/8)(2/7)(1/6)1$. Ряд распределения случайной величины $X$ имеет вид:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 5/8 | 15/56 | 5/56 | 1/56 |

Функция распределения задается соотношениями

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 5/8, & 1 < x \le 2, \\ 50/56, & 2 < x \le 3, \\ 55/56, & 3 < x \le 4, \\ 1, & 4 < x. \end{cases}$$

Далее, $m_x = (5/8)1 + (15/56)2 + (5/56)3 + (1/56)4 = 3/2$. Чтобы найти дисперсию, вычислим сначала второй начальный момент: $\alpha_2[X] = (5/8)1^2 + (15/56)2^2 + (5/56)3^2 + (1/56)4^2 = 39/14$; $D_x = \alpha_2[X] - m_x = 15/28 \approx 0,54$; $\sigma_x = \sqrt{D_x} \approx 0,73$. Вероятность $P(X \le 3) = P(X < 4) = F(4) = 55/56$.

*Пример* 2. Стрельба по мишени ведется до второго попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна $p = 0,5$. Случайная величина $X$ равна количеству сделанных выстрелов. Для этой случайной величины построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность $P(X \le 3)$.

Решение. Возможными значениями случайной величины являются числа 2, 3, ... , . Очевидно, $P(X = 2) = 1/2^2$. В случае, когда произведено $n(n > 2)$ выстрелов, второе попадание имеет номер $n$, а первое может иметь любой из оставшихся $n-1$ номеров. Поэтому $P(X = n) = (n-1)/2^n$; легко видеть, что эта формула справедлива и при $n = 2$. Ряд распределения случайной величины $X$ имеет вид:

| $X$ | 2 | 3 | ... | $k$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $1/2^2$ | $2/2^3$ | ... | $(k-1)/2^k$ | ... |

Чтобы найти функцию распределения, заметим, что если для $x$ при некотором натуральном $k \ge 3$ имеют место неравенства $k-1 < x \le k$, то $P(X < x) = P(X = 1) + ... + P(X = k-1) = 1/2^2 + ... + (k-1)/2^k$. Чтобы найти компактное выражение для последней суммы, рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi_n(z) = z/2^2 + (z^2)/2^3 + ... + (z^{k-1})/2^k = (z/2^k)((2^{k-1} - z^{k-1})/(2-z)), z \ne 2$ (мы применили формулу для суммы геометрической прогрессии). Продифференцировав последнее равенство по $z$ и подставив $z = 1$, получим $P(X < x) = 1/2^2 + ... + (k-1)/2^k = \varphi_n(1) = 1-(k+1)/2^k$. Отсюда получаем, что $F(x) = 0$, если $x \le 2$, и $F(x) = 1-(k+1)/2^k$, если $(k-1) < x \le k$.



$k = 3, ...$. Далее, $m_x = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)/2^k$. Чтобы найти эту сумму, рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/2^k = 2/(2-z), |z| < 2$. Продифференцировав дважды по $z$ обе части этого равенства (при этом ряд в левой части можно дифференцировать почленно, как и всякий степенной ряд внутри его интервала сходимости) и подставив $z = 1$, получим $m_x = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)/2^k = \varphi''(1) = 4/(2-z)^3 |_{z=1} = 4$. Найдем теперь второй начальный момент: $\alpha_2[X] = \sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1)/2^k$. Для этого умножим на $z^2$ обе части равенства

$$\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}/2^k = 4/(2-z)^3, |z| < 2,$$

продифференцируем по $z$ и подставим $z = 1$. Имеем

$$\alpha_2[X] = \sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1)/2^k = (4z^2/(2-z)^3)'_{z=1} = 4(z^2+4z)/(2-z)^4 |_{z=1} = 20.$$

Отсюда $D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = 20 - 16 = 4$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{4} = 2$. Вероятность $P(X \le 3) = P(X < 4) = F(4) = 1 - 5/2^4 \approx 0,69$.

Задачи для самостоятельного решения

В каждой из предлагаемых ниже задач определена некоторая дискретная случайная величина $X$. Для этой случайной величины построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность $P(X \le 3)$.

6.1. Игральную кость (см. задачу 2.14) бросают до тех пор, пока цифра 6 не выпадет дважды (не обязательно подряд). Случайная величина $X$ равна числу потребовавшихся для этого бросаний.

6.2. Эксперимент состоит в извлечении наудачу карты из колоды. Извлеченная карта затем возвращается в колоду, и колода перетасовывается. Эксперимент проводится до появления первого короля. Случайная величина $X$ равна количеству проведенных экспериментов.

6.3. Вероятность получить клок шерсти с наудачу взятой паршивой овцы составляет 0.1. Из стада случайным образом выбираются 4 паршивые овцы. Случайная величина X равна количеству полученных с них клоков шерсти.

6.4. В урне находятся один белый шар и два черных. Испытание состоит в извлечении шара из урны, который после определения его цвета возвращается в урну. Испытания прекращаются после второго появления белого шара. Случайная величина $X$ равна количеству проведенных испытаний.

6.5. Вероятность того, что случайно выбранный пассажир электропоезда Москва — Тула везет с собой самовар, равна 0,05. Наудачу выбираются 4 пассажира указанного поезда. Случайная величина $X$ равна количеству тех из них, которые везут с собой самовар.

6.6. На прилавке стоят 4 включенных телевизора, в одном из которых спрятался Заяц. Чтобы обнаружить его, нужно выключить соответствующий телевизор. Волк начинает наудачу выключать телевизоры, пока не обнаружит Зайца. Случайная величина $X$ равна количеству выключенных телевизоров.

6.7. Людоед может превращаться в разных зверей, при этом в мышь он превращается с вероятностью 0,2. Людоед демонстрирует свое искусство Коту в сапогах; как только Людоед превращается в мышь, Кот в сапогах съедает его. Случайная величина $X$ равна количеству превращений.

6.8. Вероятность того, что мужик перекрестится раньше, чем грянет гром, равна 0,02. Четыре мужика прогуливались в поле накануне грозы. И тут грянул гром. Случайная величина $X$ равна количеству мужиков, перекрестившихся до того, как грянул гром.

6.9. Вероятность того, что женщина, кричащая "ура", бросит в воздух чепчик, равна 0,7. Четыре женщины кричат "ура"; случайная величина $X$ равна количеству брошенных в воздух чепчиков.

6.10. Вероятность того, что письмо, адресованное на деревню дедушке Константину Макарычу, будет доставлено адресату, равна 0,03. Ванька отправил 4 таких письма. Случайная величина $X$ равна количеству писем, полученных дедушкой.

6.11. Касим, проникший в сокровищницу сорока разбойников, забыл заклинание, открывающее волшебную дверь. Пытаясь выйти на свободу, он произносит перед дверью различные приходящие на ум слова; требуемое слово может прийти на ум с вероятностью 0,1. Случайная величина $X$ равна количеству произнесенных Касимом слов (после того, как дверь откроется, Касим умолкает).

6.12. На полке 4 книги, одна из которых — "Краткий курс теории вероятностей"; остальные книги не имеют отношения к теории вероятностей. Студент, желающий подготовиться к экзамену по теории вероятностей, берет наудачу книги с полки (по одной), пока не возьмет нужную. Случайная величина $X$ равна количеству взятых книг.

6.13. По мишени ведется стрельба до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Случайная величина $X$ равна количеству произведенных выстрелов.

6.14. В первой урне два белых и один черный шар, во второй — один белый. Из наудачу выбранной урны извлекается шар. Цвет его записывается, а сам шар возвращается обратно в урну. Извлечения прекращаются после появления второго белого шара. Случайная величина $X$ равна количеству извлечений шаров.

6.15. В шахматном кабинете железнодорожного клуба, куда проник И.М.Воробьянинов, стоят 4 стула. В одном из стульев находятся запрятанные буржуазией драгоценности. Воробьянинов вспарывает ножом сиденья стульев, пока не найдет драгоценности. Случайная величина $X$ равна количеству испорченных стульев.

6.16. В квартире завелся Барабашка. Для его обнаружения жильцы вызывают экстрасенса. За один вызов экстрасенс может обнаружить Барабашку с вероятностью 0,6. Экстрасенса вызывают до тех пор, пока он не обнаружит Барабашку. Случайная величина $X$ равна количеству потребовавшихся для этого вызовов.

6.17. Некий ясновидец устроился на работу в организацию, занимающуюся долгосрочным прогнозированием. Ясновидец делает предсказания относительно будущего, которые сбываются с вероятностью 0,6. После второго несбывшегося предсказания ясновидца увольняют. Случайная величина $X$ равна числу сделанных до увольнения предсказаний.

6.18. Из колоды, содержащей 36 карт, берут наудачу 4 карты. Случайная величина $X$ равна количеству королей среди взятых карт.

6.19. Вероятность испортить кашу дополнительной порцией масла составляет 0,04. В каждую из четырех тарелок каши в студенческой столовой положили дополнительную порцию масла. Случайная величина $X$ равна количеству тарелок, каша в которых была вследствие этого испорчена.

6.20. Во время укуса комара могут прихлопнуть с вероятностью 2/3. Комар кусает до тех пор, пока его не прихлопнут. Случайная величина $X$ равна количеству сделанных укусов.

6.21. Вероятность вышибить клин клином с одной попытки составляет 0.4 и не меняется от одной попытки к другой. Клин вышибают клином до тех пор, пока не вышибут. Случайная величина $X$ равна количеству потребовавшихся для этого попыток.

6.22. Аладдину попалась волшебная лампа, в которой живет ленивый джинн: в случае вызова вероятность появления джинна равна 1/6. Аладдин вызывает джинна до тех пор, пока тот не появится. Случайная величина $X$ равна количеству потребовавшихся для этого вызовов.

6.23. Монету бросают до тех пор, пока она не ляжет два раза подряд одной и той же стороной. Случайная величина $X$ равна количеству потребовавшихся для этого бросаний.

6.24. Вероятность того, что терпеливый казак станет атаманом, равна 0.75. Имеются 4 терпеливых казака; случайная величина $X$ равна количеству тех из них, которые стали атаманами.

6.25. Вероятность того, что яблоко упадет недалеко от яблони составляет 5/6. С яблони упало 4 яблока. Случайная величина $X$ равна количеству тех из них, которые упали недалеко от яблони.

6.26. Серенький козлик регулярно совершает прогулки в лес, где его могут с вероятностью 7/8 съесть злые волки. Серенький козлик совершает прогулки в лес до тех пор, пока его не съедят. Случайная величина $X$ равна количеству совершенных прогулок.

6.27. Два ковбоя сидят в салуне и по очереди стреляют в музыканта, который, по их мнению, плохо играет на скрипке. Первый ковбой попадает с вероятностью 0.3, второй — с вероятностью 0.4. В случае попадания стрельба прекращается. Всего ковбои могут выстрелить не более чем по два раза каждый: после четвертого выстрела появляется шериф и забирает обоих. Случайная величина $X$ равна количеству прозвучавших выстрелов.

6.28. Вероятность того, что крупный алмаз расколется от удара молотком, составляет 0.3 (и не зависит от предшествующих ударов). Преподобный Саймон Роллз бьет молотком по Алмазу Раджи до тех пор, пока тот не расколется. Случайная величина $X$ равна количеству потребовавшихся для этого ударов.

6.29. В лотерее выигрывает каждый пятый билет, причем выигрыш выплачивается на месте. Некто покупает билеты (по одному) до тех пор, пока не купит выигрышный. Случайная величина $X$ равна количеству купленных билетов.



6.30. Геракл поочередно борется с каждым из четырех немейских львов. Вероятность того, что Геракл победит $i$-го льва равна $(5-i)/5$, $i = 1, 2, 3, 4$. Побежденного льва Геракл душит, непобежденный лев убегает, а Геракл сражается со следующим. Случайная величина $X$ равна количеству побежденных львов.

## 7. Непрерывные случайные величины

Наряду с дискретными случайными величинами в теории вероятностей изучаются также непрерывные случайные величины, множество возможных значений которых несчетно и обычно представляет собой некоторый промежуток. Такую случайную величину можно охарактеризовать функцией распределения $F(x) = P(X < x)$ или плотностью распределения $p(x) = F'(x)$. Плотность распределения является неотрицательной функцией, и для нее выполняется равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$. Если известна плотность распределения, то функцию распределения можно найти по формуле $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$. Вероятность попадания случайной величины на некоторый интервал вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx.$$

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и второй начальный момент определяются соответственно формулами

$$M[X] = m_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} xp(x)\,dx, \quad D[X] = D_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (x - m_x)^2\,dx,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, \quad \alpha_2[X] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2 p(x)\,dx.$$

При этом выполняется равенство $D_x = \alpha_2[X] - m_x^2$.

*Пример.* Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } x > 2; \\ x^4, & 0 < x < 1; \\ \alpha, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Для этой случайной величины найти коэффициент $\alpha$, функцию распределения, построить графики плотности и функции распределения; найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность попадания случайной величины на интервал $(1/2, 3/2)$.

Решение. Коэффициент $\alpha$ найдем из условия

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx=\int_0^1 x^4\,dx+\alpha\int_1^2 dx=1/5+\alpha,$$

следовательно, $\alpha = 4/5$. Найдем функцию распределения по формуле $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$. Если $x<0$, то $F(x)=0$; если $0<x<1$, то $F(x)=$ $=\int_0^x t^4\,dt=x^5/5$; если $1<x<2$, то

$$F(x)=\int_0^1 t^4\,dt+(4/5)\int_1^x dt=(4x-3)/5;$$

если $x>2$, то $F(x)=1$. Графики плотности и функции распределения представлены на рис. 5.

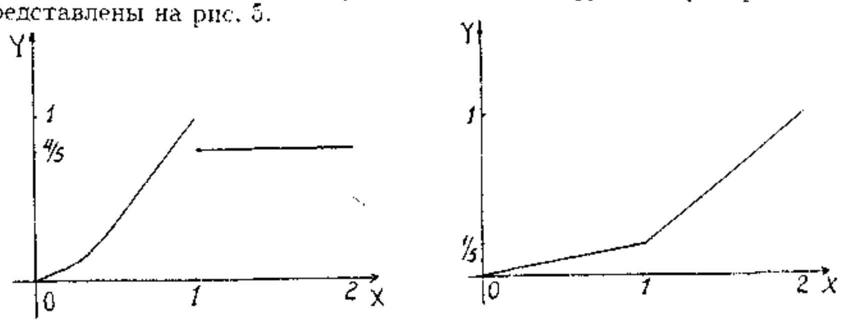


Рис. 5

Математическое ожидание $m_x=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx=\int_0^1 x^5\,dx+(4/5)\int_1^2 dx=$ $=41/30$. Дисперсия

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)\,dx-m_x^2=\int_0^1 x^6\,dx+(4/5)\int_1^2 x^2\,dx-(41/30)^2=$$

$$=1/7+28/15-(41/30)^2\approx 0,14;\sigma_x=\sqrt{D_x}\approx 0,38.$$

Вероятность $P(1/2<X<3/2)=\int_{1/2}^{1} x^4\,dx+(4/5)\int_1^{3/2} dx=19/32$.



## Задачи для самостоятельного решения.

В предлагаемых ниже задачах задана плотность распределения некоторой случайной величины. Для этой случайной величины найти параметр $a$, функцию распределения, построить графики плотности и функции распределения; найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность попадания случайной величины на интервал $(\alpha, \beta)$.

7.1 $\alpha=2, \beta=3$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<1 & \text{или } x>4;\\ 2(x-1)/3, & 1<x<2;\\ a(x-4), & 2<x<4.\end{cases}$$

7.2 $\alpha=1, \beta=2$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<0 & \text{или } x>3;\\ 2x/3, & 0<x<1;\\ a(3-x), & 1<x<3.\end{cases}$$

7.3 $\alpha=0, \beta=2$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<-1 & \text{или } x>3;\\ (x+1)/6, & -1<x<2;\\ a(3-x), & 2<x<3.\end{cases}$$

7.4 $\alpha=3, \beta=4$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<2 & \text{или } x>5;\\ 1/2, & 2<x<3;\\ a(5-x)/2, & 3<x<5.\end{cases}$$

7.5 $\alpha=3, \beta=4$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<2 & \text{или } x>5;\\ 1/2, & 2<x<3;\\ a(5-x)/2, & 3<x<5.\end{cases}$$

7.6 $\alpha=2, \beta=3$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<-1 & \text{или } x>4;\\ 2/9, & -1<x<3;\\ a(x-4), & 3<x<4.\end{cases}$$

7.7 $\alpha=-1, \beta=0$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<-2 & \text{или } x>2;\\ 1/3, & -2<x<0;\\ a(2-x)/2, & 0<x<2.\end{cases}$$

7.8 $\alpha=-1, \beta=0$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<-2 & \text{или } x>1;\\ (x+2)/3, & -2<x<0;\\ a(1-x)/2, & 0<x<1.\end{cases}$$

7.9 $\alpha=4, \beta=5$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<3 & \text{или } x>7;\\ 2/5, & 3<x<4;\\ a(7-x)/3, & 4<x<7.\end{cases}$$

7.10 $\alpha=0, \beta=1$;

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x<-2 & \text{или } x>1;\\ (x+2)/3, & -2<x<0;\\ a(1-x)/2, & 0<x<1.\end{cases}$$

7.11 $\alpha = 1/2, \beta = 1$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 3; \\ 2x/5, & 0 < x < 1; \\ a, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

7.12 $\alpha = 0, \beta = 1$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -1 & \text{или } x > 3; \\ a(x^2 - 2x - 3), & -1 < x < 3. \end{cases}$$

7.13 $\alpha = 7/2, \beta = 4$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 3 & \text{или } x > 7; \\ 2(x-3)/7, & 3 < x < 4; \\ a, & 4 < x < 7. \end{cases}$$

7.14 $\alpha = 2, \beta = 3$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 1 & \text{или } x > 4; \\ a(x^2 - 5x + 4), & 1 < x < 4. \end{cases}$$

7.15 $\alpha = -1, \beta = 0$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -2 & \text{или } x > 2; \\ (x+2)/6, & -2 < x < 0; \\ a, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

7.16 $\alpha = 1/2, \beta = 3/2$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 1 & \text{или } x > 2; \\ a\sin(\pi x), & 1 < x < 2. \end{cases}$$

7.17 $\alpha = 1/2, \beta = 1$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 2; \\ (6x - 3x^2)/7, & 0 < x < 1; \\ a, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

7.18 $\alpha = 0, \beta = 1/2$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 1; \\ a\cos(\pi x/2), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

7.19 $\alpha = 4/2, \beta = 3$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -1 & \text{или } x > 4; \\ (x+1)/12, & -1 < x < 3; \\ a, & 3 < x < 4. \end{cases}$$

7.20 $\alpha = 1/2, \beta = 1$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 2; \\ 1/3, & -2 < x < 0; \\ a(x^2 - 2x), & 0 < x < 2. \end{cases}$$

7.21 $\alpha = 3/2, \beta = 2$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 1 & \text{или } x > 4; \\ 2(x-1)/5, & 1 < x < 2; \\ a, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

7.22 $\alpha = -2, \beta = -1$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -3 & \text{или } x > 0; \\ a(x^2 + 3x), & -3 < x < 0. \end{cases}$$

7.23 $\alpha = 5/2, \beta = 3$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 2 & \text{или } x > 5; \\ 2(x-2)/5, & 2 < x < 3; \\ a, & 3 < x < 5. \end{cases}$$

7.24 $\alpha = 0, \beta = 1/2$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -1 & \text{или } x > 1; \\ a\cos(\pi x/2), & -1 < x < 1. \end{cases}$$

7.25 $\alpha = 0, \beta = 1/4$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 3/2; \\ 3(x - x^2)/5, & 0 < x < 1/2; \\ a, & 1/2 < x < 3/2. \end{cases}$$

7.26 $\alpha = 1, \beta = 5/3$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 1 & \text{или } x > 2; \\ a\sin(\pi x/2), & 1 < x < 2. \end{cases}$$



7.27 $\alpha = 0, \beta = 1/2$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 5/4; \\ 2x^3, & 0 < x < 1; \\ a, & 1 < x < 5/4. \end{cases}$$

7.28 $\alpha = 1, \beta = 2$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 3; \\ 1/2, & 0 < x < 1; \\ a(3-x)/2, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

7.29 $\alpha = 1/2, \beta = 1$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 & \text{или } x > 7/4; \\ x^3, & 0 < x < 1; \\ a, & 0 < x < 7/4. \end{cases}$$

7.30 $\alpha = 2, \beta = 3$;

$$p(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 1 & \text{или } x > 4; \\ 1/2, & 1 < x < 2; \\ a(4-x)/2, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

## 8. Нормальный закон распределения

Говорят, что непрерывная случайная величина $X$ распределена по нормальному закону, если ее плотность распределения задается равенством

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-m)^2/2\sigma^2).$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$ равны соответственно $m_x = m, \sigma_x = \sigma$. Вероятность попадания случайной величины $X$ на интервал $(\alpha, \beta)$ равна $P(\alpha < x < \beta) = \Phi((\beta - m)/\sigma) - \Phi((\alpha - m)/\sigma)$, где функция $\Phi(x)$ определена в разделе 5.

*Пример.* Случайная величина $X$ подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $m$ и средним квадратическим отклонением $\sigma$. Вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(m - 0,804,\ m + 0,804)$ равна $p_1 = 0,8198$, а вероятность попадания на интервал $(m,\ 3,732)$ равна $p_2 = 0,4573$. Требуется найти параметры $m$ и $\sigma$, а также вероятность попадания случайной величины $X$ на интервал $(2,4;\ 3,4)$.

Решение. Имеем

$$P(m - 0,804 < X < m + 0,804) = \Phi(0,804/\sigma) - \Phi(-0,804/\sigma) =$$

$$= 2\Phi(0,804/\sigma) - 1 = 0,8198, \text{ т. е. } \Phi(0,804/\sigma) = 0,9099.$$

По таблице 1 значений функции $\Phi(x)$ определяем, что $\Phi(x) = 0,9099$ при $x \approx 1,34$. Таким образом, $0,804/\sigma \approx 1,34$, и $\sigma \approx 0,6$. Далее,

$$P(m < X < 3,732) = \Phi((3,732 - m)/\sigma) - \Phi(0) =$$

$$= \Phi((3,732 - m)/0,6) - 0,5 = 0,4573.$$

Следовательно, $\Phi((3,732 - m)/0.6) = 0,9573$. По таблице 1 значений функции $\Phi(x)$ находим, что $(3,732 - m)/0.6 \approx 1,72$. Отсюда $m \approx 2,7$. Осталось найти вероятность попадания случайной величины $X$ на интервал $(2,4;\ 3,4)$. Имеем

$$P(2,4 < x < 3,4) = \Phi((3.4 - -2,7)/0,6) - \Phi((2,4 - 2,7)/0,6) \approx$$

$$\approx \Phi(1,17) - \Phi(-0,5) = \Phi(1,17) + \Phi(0,5) - 1 \approx 0,879 + 0,6915 - 1 \approx 0,57.$$

## Задачи для самостоятельного решения

В предлагаемых ниже задачах случайная величина $X$ подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением $\sigma$. Вероятность попадания этой случайной величины на интервал $(m - a, m + a)$ равна $p_1$, а вероятность попадания на интервал $(m, b)$ равна $p_2$. Требуется найти параметры $m$ и $\sigma$, а также вероятность попадания случайной величины $X$ на интервал $(\alpha, \beta)$.

8.1. $a = 0:06$, $p_1 = 0,2358$, $b = 3,95$, $p_2 = 0,0987$, $\alpha = 4$, $\beta = 4,4$.

8.2. $a = 0,11$, $p_1 = 0,7286$, $b = 2,285$, $p_2 = 0,3023$, $\alpha = 2,1$, $\beta = 2,3$.

8.3. $a = 0,61$, $p_1 = 0,7776$, $b = 4,52$, $p_2 = 0,4671$, $\alpha = 3.5$, $\beta = 4,4$.

8.4. $a = 0,28$, $p_1 = 0,8384$, $b = 2,452$, $p_2 = 0,4608$, $\alpha = 2$, $\beta = 2,4$.

8.5. $a = 0,405$, $p_1 = 0,823$, $b = 3,895$, $p_2 = 0,4505$, $\alpha = 3,2$, $\beta = 3,8$.

8.6. $a = 0,23$, $p_1 = 0,3182$, $b = 1,793$, $p_2 = 0,1217$, $\alpha = 1,8$, $\beta = 2,3$.

8.7. $a = 0,07$, $p_1 = 0,516$, $b = 1,36$, $p_2 = 0,2257$, $\alpha = 1,2$, $\beta = 1,4$.

8.8. $a = 0,552$, $p_1 = 0,6424$, $b = 2,29$, $p_2 = 0,0596$, $\alpha = 2,1$, $\beta = 2,8$.

8.9. $a = 0,288$, $p_1 = 0,251$, $b = 1,787$, $p_2 = 0,1664$, $\alpha = 1,2$, $\beta = 2,1$.

8.10. $a = 0,136$, $p_1 = 0,135$, $b = 3,18$, $p_2 = 0,4821$, $\alpha = 1,2$, $\beta = 1,9$.



8.11. $a = 0,484$, $p_1 = 0,7738$, $b = 2,872$, $p_2 = 0,4236$, $\alpha = 2,2$, $\beta = 2,9$.

8.12. $a = 1,224$, $p_1 = 0,8262$, $b = 4,158$, $p_2 = 0,4474$, $\alpha = 2,5$, $\beta = 3,6$.

8.13. $a = 1,136$, $p_1 = 0,8444$, $b = 4,836$, $p_2 = 0,4222$, $\alpha = 3,5$, $\beta = 4,4$.

8.14. $a = 1,029$, $p_1 = 0,8584$, $b = 3,545$, $p_2 = 0,1368$, $\alpha = 3,2$, $\beta = 4,5$.

8.15. $a = 1,74$, $p_1 = 0,853$, $b = 4,352$, $p_2 = 0,1772$, $\alpha = 3,7$, $\beta = 5,7$.

8.16. $a = 0,66$, $p_1 = 0,8132$, $b = 3,31$, $p_2 = 0,0871$, $\alpha = 3$, $\beta = 4,1$.

8.17. $a = 0,1$, $p_1 = 0,0796$, $b = 1,62$, $p_2 = 0,1985$, $\alpha = 1,2$, $\beta = 3,2$.

8.18. $a = 0,065$, $p_1 = 0,1034$, $b = 2,59$, $p_2 = 0,2190$, $\alpha = 2,5$, $\beta = 3$.

8.19. $a = 0,04$, $p_1 = 0,1586$, $b = 1,32$, $p_2 = 0,2257$, $\alpha = 1,4$, $\beta = 1,6$.

8.20. $a = 0,088$, $p_1 = 0,1742$, $b = 1,808$, $p_2 = 0,1985$, $\alpha = 1,7$, $\beta = 2,2$.

8.21. $a = 2,42$, $p_1 = 0,9722$, $b = 2,922$, $p_2 = 0,3461$, $\alpha = 1,5$, $\beta = 3,1$.

8.22. $a = 1,69$, $p_1 = 0,8064$, $b = 3,72$, $p_2 = 0,4192$, $\alpha = 2$, $\beta = 3,4$.

8.23. $a = 1,44$, $p_1 = 0,7698$, $b = 3,78$, $p_2 = 0,4192$, $\alpha = 2$, $\beta = 4,5$.

8.24. $a = 0,195$, $4_1 = 0,1192$, $b = 4,28$, $p_2 = 0,2257$, $\alpha = 3,4$, $\beta = 4,8$.

8.25. $a = 0,064$, $p_1 = 0,1272$, $b = 3,24$, $p_2 = 0,3023$, $\alpha = 3$, $\beta = 3,7$.

8.26. $a = 0,147$, $p_1 = 0,1664$, $b = 2,925$, $p_2 = 0,2734$, $\alpha = 2,5$, $\beta = 4,3$.

8.27. $a = 0,336$, $p_1 = 0,1896$, $b = 3,36$, $p_2 = 0,1554$, $\alpha = 2,7$, $\beta = 4,2$.

8.28. $a = 0,36$, $p_10 = 0,3472$, $b = 2,96$, $p_2 = 0,1736$, $\alpha = 2,5$, $\beta = 3,6$.

8.29. $a = 0,48$, $p_1 = 0,5762$, $b = 3,556$, $p_2 = 0,2764$, $\alpha = 3$, $\beta = 4,1$.

8.30. $a = 0,255$, $p_1 = 0,6046$, $b = 3,446$, $p_2 = 0,2939$, $\alpha = 3$, $\beta = 3,6$.

## 9. Системы случайных величин

Функцией распределения $F(x,y)$ системы двух случайных величин $(X,Y)$ называется функция, определяемая равенством $F(x,y) = P(X < x, Y < y)$. Плотность распределения $p(x,y)$ выражается через функцию распределения с помощью равенства $p(x,y) = F''_{xy}(x,y)$. Плотность распределения является неотрицательной функцией, и для нее выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dxdy = 1.$$

Вероятность попадания случайной точки $(x,y)$ в область $D$ вычисляется по формуле

$$P((x,y) \in D) = \iint_D p(x,y)\,dxdy.$$

Плотности распределения случайных величин $X$ и $Y$, входящих в систему $(X,Y)$, вычисляются по формулам

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy;\ p_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx.$$

Условные плотности распределения задаются равенствами $p_1(x \mid y) = p(x,y)/p_2(y)$ при $p_2(y) \neq 0$, $p_2(y \mid x) = p(x,y)/p_1(x)$ при $p_1(x) \neq 0$. Случайные величины $X$ и $Y$ называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая; в противном случае $X$ и $Y$ называются зависимыми. Для независимых случайных величин $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$. Математические ожидания $m_x, m_y$ и дисперсии $D_x, D_y$ вычисляются по формулам

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x)\,dx,\ m_y = \int_{-\infty}^{\infty} yp_2(y)\,dy;$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_1(x)\,dx,\ D_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 p_2(y)\,dy.$$

Иногда дисперсии удобнее вычислять, используя начальные моменты

$$\alpha_{2,0}[X,Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)\,dx \text{ и } \alpha_{0,2}[X,Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_2(y)\,dy.$$



с помощью равенств

$$D_x = \alpha_{2,0}[X,Y] - m_x^2,\ D_y = \alpha_{0,2}[X,Y] - m_y^2.$$

Ковариацией случайных величин $X$ и $Y$ называется

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)p(x,y)\,dxdy;$$

ковариацию можно вычислять также по формуле $K_{xy} = m_{xy} - m_x m_y$, где

$$m_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)\,dxdy.$$

Коэффициентом корреляции называется $r_{xy} = K_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$, где $\sigma_x$ и $\sigma_y$ — средние квадратические отклонения случайных величин $X$ и $Y$. Равенство нулю коэффициента корреляции является необходимым, но не достаточным условием независимости соответствующих случайных величин.

*Пример.* Множество $G$ на плоскости задается неравенствами $0 < y < 1, y < x < y + 1$. Плотность распределения системы случайных величин $(X,Y)$ определяется равенствами

$$p(x,y) = axy, (x,y) \in G;\ p(x,y) = 0, (x,y) \notin G.$$

Требуется определить коэффициент $a$; найти плотности распределения отдельных величин $X$ и $Y$, входящих в систему; найти условные плотности распределения $p_1(x \mid y)$ и $p_2(y \mid x)$ и вероятность попадания случайной величины $(X,Y)$ в область $x > 1, y > 1/2$; найти ковариацию $K_{xy}$ и коэффициент корреляции $r_{xy}$. Выяснить, являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми.

Решение. Область $G$ изображена на рис. 6. Коэффициент $a$ находится из равенства $a\iint_G xy\,dxdy = 1$. В данном случае при выполнении интегрирования удобнее интегрировать сначала по $y$, потом по $x$; имеем

$$\iint_G xy\,dxdy = \int_0^1 y\,dy \int_y^{y+1} x\,dx = 7/12.$$

Следовательно, $a = 12/7$. Далее $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy$. Отсюда

$$p_1(x) = \int_0^x p(x,y)\,dy = (12/7)\int_0^x xy\,dy = (6/7)x^3$$

при $0 < x < 1$. Если $1 < x < 2$, то

$$p_1(x) = (12/7)\int\limits_{x-1}^{1} xy\,dy = (6/7)(2x^2 - x^3).$$

При прочих значениях $x$ плотность распределения $p_1(x)$ равна нулю. Найдем $p_2(y)$; при $0 < y < 1$ имеем

$$p_2(y) = (12/7)\int\limits_{y}^{y+1} xy\,dx =$$

$= (6/7)(2y^2 + y)$. При прочих значениях $y$ плотность распределения $p_2(y)$ равна нулю. Условная плотность распределения $p_1(x \mid y)$ определена при $p_2(y) \neq 0$. При $0 < y < 1$ имеем

$$p_1(x \mid y) = (12/7)xy/((6/7)y(2y+1)) =$$

$$= 2x/(2y+1), \text{ если } y < x < y+1;$$

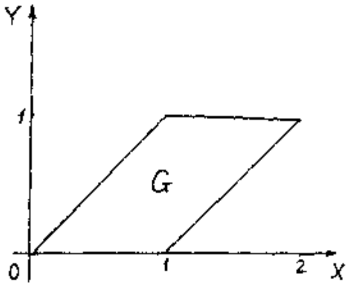


Рис. 6

при прочих значениях $x$ плотность $p_1(x \mid y) = 0$. Далее при $0 < x < 1$ плотность распределения $p_2(y \mid x) = (12/7)xy/((6/7)x^3) = 2y/x^2$ при $0 < y < x$ и равна нулю для других значений $y$. При $1 < x < 2$ имеем

$$p_2(y \mid x) = (12/7)xy/((6/7)(2x^2 - x^3)) = 2y/(2x - x^2)$$

при $x - 1 < y < 1$, и $p_2(y \mid x) = 0$ при прочих значениях $y$. Обозначим через $G_1$ пересечение области $G$ с областью $x > 1, y > 1/2$; тогда

$$P(x > 1, y > 1/2) = \iint\limits_{G_1} xy\,dxdy = (12/7)\int\limits_{1/2}^{1} y\,dy \int\limits_{1}^{y+1} x\,dx =$$

$= 154/224 \approx 0,70$. Найдем $m_x, m_y, m_{xy}$. Имеем

$$m_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_1(x)\,dx = (6/7)(\int\limits_0^1 x^4\,dx + \int\limits_1^2 (2x^3 - x^4)\,dx) = 9/7;$$

$$m_y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yp_2(y)\,dy = (6/7)\int\limits_0^1 y(2y^2 + y)\,dy = 5/7;$$



$$m_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)\,dxdy = (12/7)(\int\limits_0^1 y^2\,dy \int\limits_y^{y+1} (x^2)\,dx) = 101/105;$$

Теперь можно найти ковариацию; имеем

$$K_{xy} = m_{xy} - m_x m_y = 101/105 - 45/49 = 32/735 \approx 0,04.$$

Найдем $D_x$ и $D_y$:

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)\,dx - m_x^2 = (6/7)(\int\limits_0^1 x^5\,dx + \int\limits_1^2 (2x^4 - x^5)\,dx) - m_x^2 =$$

$$= 62/35 - 81/49 = 29/245 \approx 0,12;$$

$$D_y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 p_2(y)\,dy - m_y^2 = (6/7)(\int\limits_0^1 y^2(2y^2 + y)\,dy) - m_y^2 =$$

$= 39/70 - 25/49 = 23/490 \approx 0,05$. Теперь можно найти средние квадратические отклонения: $\sigma_x = \sqrt{D_x} \approx 0,34$; $\sigma_y = \sqrt{D_y} \approx 0,22$. Коэффициент корреляции $r_{xy} = K_{xy}/(\sigma_x\sigma_y) \approx 0,58$. Так как коэффициент корреляции не равен нулю, то рассматриваемые случайные величины зависимы.

## Задачи для самостоятельного решения

В предлагаемых ниже задачах указана плотность распределения $p(x,y)$ системы случайных величин $(X, Y)$. Требуется определить коэффициент $a$; найти плотности распределения отдельных величин $X$ и $Y$, входящих в систему; условные плотности распределения $p_1(x \mid y)$ и $p_2(y \mid x)$; вероятность попадания случайной величины $(X, Y)$ в область $x > 1/2$; найти ковариацию $K_{xy}$ и коэффициент корреляции $r_{xy}$. Выяснить, являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми.

9.1. $G:\ 0 < x < 1,$
$x < y < \sqrt{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.2. $G:\ 0 < x < 1,$
$x < y < x^3;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.3. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^3 < y < \sqrt[3]{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.4. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^4 < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy^3, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.5. $G:\ 0 < x < 1,$
$\sqrt{x^3} < y < x;$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.6. $G:\ 0 < x < 1,$
$\sqrt{x} < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.7. $G:\ 0 < x < 1,$
$x < y < x^4;$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.8. $G:\ 0 < x < 1,$
$0 < y < x;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y^4, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.9. $G:\ 0 < x < 1,$
$x < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.10. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^2 < y < \sqrt{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.11. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^4 < y < \sqrt[4]{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.12. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^4 < y < x^2;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.13. $G:\ 0 < x < 1,$
$\sqrt[4]{x} < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.14. $G:\ 0 < x < 1,$
$x < y < \sqrt[3]{x^2};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ay^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.15. $G:\ 0 < x < 1,$
$0 < y < \sqrt[3]{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.16. $G:\ 0 < x < 1,$
$\sqrt[3]{x} < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$



9.17. $G:\ 0 < x < 1,$
$0 < y < x;$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.18. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^4 < y < x^3;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.19. $G:\ 0 < x < 1,$
$0 < y < x^4;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ay^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.20 $G:\ 0 < x < 1,$
$x < y < \sqrt[3]{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.21. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^3 < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y^4, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.22. $G:\ 0 < x < 1,$
$0 < y < \sqrt{x^3};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.23. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^3 < y < \sqrt{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.24. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^4 < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.25. $G:\ 0 < x < 1,$
$x^2 < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.26. $G:\ 0 < x < 1,$
$0 < y < \sqrt{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^3y, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.27. $G:\ 0 < x < 1,$
$0 < y < \sqrt[3]{x^2};$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy^3, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.28. $G:\ 0 < x < 1,$
$x < y < \sqrt[3]{x};$

$$p(x,y) = \begin{cases} ax^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.29. $G: \ 0 < x < 1,$
$\sqrt{x^3} < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

9.30. $G: \ 0 < x < 1,$
$\sqrt[3]{x^2}x < y < 1;$

$$p(x,y) = \begin{cases} axy^2, (x,y) \in G; \\ 0, (x,y) \notin G. \end{cases}$$

## 10. Функции случайных величин

Пусть случайные величины $X$ и $Y$ связаны функциональной зависимостью $Y = f(X)$, где $f$ — строго монотонная непрерывно дифференцируемая функция на всем участке возможных значений случайной величины $X$. В этом случае плотность распределения случайной величины $Y$ выражается формулой $p_Y(y) = p_X(g(y)) \mid g'(y) \mid$, где $p_X(x)$ — плотность распределения случайной величины $X$, а $g(y)$ — функция, обратная к функции $f(x)$. Если функция $f$ не является монотонной, то плотность распределения случайной величины $Y$ представляется суммой стольких слагаемых, сколько значений (при данном $y$) имеет обратная функция: $p_Y(y) = \sum p_X(g_i(y)) \mid g_i'(y) \mid$. Математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y$ можно вычислить, используя найденное выражение для плотности распределения; можно также воспользоваться формулами

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_X(x)\,dx, \quad D_y = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)p_X(x)\,dx - m_y^2.$$

Пусть теперь $X$ и $Y$ — независимые случайные величины с плотностями распределения соответственно $p_X(x)$ и $p_Y(y)$. Тогда для случайной величины $Z = X + Y$ имеем $m_z = m_x + m_y, D_z = D_x + D_y$;

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_X(x)p_Y(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_X(z-y)p_Y(y)\,dy.$$

Часто при нахождении плотности распределения $p_Z(z)$ удобнее сначала найти функцию распределения $F_Z(z) = P(Z < z) = P((X+Y) < z)$, а затем воспользоваться равенством $p_Z(z) = F_Z'(z)$.

*Пример* 1. Плотность распределения случайной величины $X$ задается соотношениями $p_X(x) = a(x-\pi)$ при $x \in (\pi, 2\pi)$; $p_X(x) = 0$ при прочих значениях $x$. Требуется определить коэффициент $a$ и для случайной величины $Y = \sin X$ найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и плотность распределения.



Решение. Коэффициент $a$ определяется из равенства $1 = a\int\limits_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\,dx = a\pi^2/2$, т. е. $a = 2/\pi^2$. Далее

$$m_y = (2/\pi^2)\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\sin x\,dx =$$

$$= (2/\pi^2)(-x\cos x + \sin x + \pi\cos x)\,|_{\pi}^{2\pi} = -2/\pi;$$

$$D_y = (2/\pi^2)\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\sin^2 x\,dx - m_y^2 =$$

$$= (1/\pi^2)\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\,d(x - \frac{\sin x}{2}) - 4/\pi^2 =$$

$$= (1/\pi^2)\left((x-\pi)\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi}(x - \frac{\sin 2x}{2})\,dx - 4\right)$$

$$= 1/2 - 4/\pi^2; \sigma_y = \sqrt{1/2 - 4/\pi^2} \approx 0,31.$$

Найдем плотность распределения. Функция $y = \sin x$ отображает интервал $(\pi, 2\pi)$ на интервал $(-1, 0)$. Легко проверить, что каждому $y \in (-1, 0)$ отвечают ровно два значения $x$ из интервала $(\pi, 2\pi)$, для которых $y = \sin x$; эти значения суть $x_1 = \pi - \arcsin y$ и $x_2 = 2\pi + \arcsin y$. Подставляя эти выражения в указанную выше формулу, получим

$$p_Y(y) = \left(\frac{2(\pi - \arcsin y - \pi)}{\pi^2} + \frac{2(2\pi + \arcsin y - \pi)}{\pi^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

при $y \in (-1, 0)$; при прочих значениях y плотность распределения равна нулю.

*Пример* 2. Плотность распределения случайной величины $X$ задается соотношениями $p_X(x) = ax$ при $x \in (0,3)$; $p_X(x) = 0$ при прочих значениях $x$. Требуется определить коэффициент $a$ и для случайной величины $Y = X^2 - 2X + 2$ найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и плотность распределения.

Решение. Коэффициент $a$ найдем из равенства $1 = a\int\limits_0^3 x\,dx = 9a/2$. Следовательно, $a = 2/9$. Далее

$$m_y = (2/9)\int_0^3(x^2 - 2x + 2)x\,dx = (2/9)(x^4/4 - 2x^3/3 + x^2)\,|_0^3 = 5/2;$$

$$D_y = (2/9)\int\limits_0^3 (x^2 - 2x + 2)^2 x\,dx - m_y^2 = 39/5 - 25/4 = 31/20;$$

$\sigma_y = \sqrt{D_y} \approx 1,24$. Функция $y = x_2 - 2x + 2$ отображает интервал (0,3) на интервал (1,5), причем интервал (2,3) она отображает на интервал (2,5) взаимно однозначно; интервал (0,2) отображается при этом на интервал (1,2), причем каждому $y \in (1,2)$ отвечают ровно два значения $x$ из интервала $(0,2) : x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{y-1}$. Поэтому для $y \in (1,2)$ имеем $p_Y(y) = (2/9)(1+\sqrt{y-1}+1-\sqrt{y-1})\frac{1}{2\sqrt{y-1}} = \frac{2}{9\sqrt{y-1}}$. Если же $y \in (2,5)$, то $p_Y(y) = (2/9)(1+\sqrt{y-1})//(2\sqrt{y-1}) = (1/9(1+1/\sqrt{y-1})$. При прочих значениях $y$ плотность распределения $p_Y(y)$ равна нулю.

*Пример* 3. Имеются независимые случайные величины $X$ и $Y$, плотности распределения которых суть $p_X(x) = ax, x \in (0,1); p_X(x) = 0, x \notin (0,1); p_Y(y) = b\sin(\pi y), y \in (0,1), p_Y(y) = 0, y \notin (0,1)$ Требуется определить коэффициенты $a$ и $b$; для случайной величины $Z = X + Y$ найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения и плотность распределения.

Решение. Так как $1 = a\int_0^1 x\,dx = a/2$, то $a = 2$. Аналогично

$$1 = b\int\limits_0^1 \sin(\pi y)\,dy = -b\cos(\pi y)/\pi\,\Big|_0^1 = 2b/\pi, \text{ т. е. } b = \pi/2.$$

Далее

$$m_x = 2\int\limits_0^1 x^2\,dx = 2/3;\ m_y = (\pi/2)\int\limits_0^1 y\sin(\pi y)\,dy = 1/2;$$

$m_z = m_x + m_y = 2/3 + 1/2 = 7/6$. Так как случайные величины $X$ и $Y$ независимы, то

$$D_z = D_x + D_y = 2\int\limits_0^1 x^3\,dx - m_x^2 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 y^2\sin(\pi y)\,dy - m_y^2 = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 - 4/9 +$$

$$+0,5\left((-y^2\cos(\pi y) + \frac{2y\sin(\pi y)}{\pi} + \frac{2\cos(\pi y)}{\pi^2}\right)\Big|_0^1 - 1/4 = 11/36 - \frac{2}{\pi_2} \approx 0,1;$$

$\sigma_z = \sqrt{D_z} \approx 0,32$. Выражение для функции распределения $F_Z(z)$ зависит от области изменения $z$: Если $z < 0$, то $F_Z(z) = 0$, если $z > 2$, то $F_Z(z) = 1$. Пусть $0 < z < 1$. Тогда

$$F_Z(z) = \pi\int\limits_0^z x\,dx \int\limits_0^{z-x}\sin(\pi y)\,dy = \int\limits_0^z (x - x\cos(\pi(z-x)))\,dx =$$



$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(\pi(z-x))}{\pi} - \frac{\cos(\pi(z-x))}{\pi^2}\right)\Big|_0^z = z^2/2 - 1/\pi^2 + \frac{\cos(\pi z)}{\pi^2}.$$

Если $1 < z < 2$, то

$$F_Z(z) = \pi\int\limits_0^{z-1} x\,dx \int\limits_0^1 \sin(\pi y)\,dy + \pi\int\limits_{z-1}^1 x\,dx \int\limits_0^{z-x}\sin(\pi y)\,dy =$$

$$= (z-1)^2 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(\pi(z-x))}{\pi} - \frac{\cos(\pi(z-x))}{\pi^2}\right)\Big|_{z-1}^1 =$$

$$= (z-1)^2/2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{\sin(\pi z)}{\pi} + \frac{\cos(\pi z)}{\pi^2}.$$

Таким образом, функция распределения найдена при всех $z$. Продифференцировав ее, найдем плотность распределения:

$$p_Z(z) = \begin{cases} z - \sin(\pi z)/\pi, & 0 < z < 1; \\ z - 1 - \cos(\pi z) - \sin(\pi z)/\pi, & 1 < z < 2; \\ 0, & z < 0, z > 2. \end{cases}$$

## Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10.1—10.24 плотность распределения $p_X(x)$ равна нулю вне указанных интервалов. Требуется определить коэффициент $a$ и для случайной величины $Y$ найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и плотность распределения. В задачах 10.25—10.30 для независимых случайных величин $X$ и $Y$ плотности распределений заданы на интервале (0,1); вне этого интервала плотности равны нулю. Требуется определить коэффициенты $a$ и $b$; для случайной величины $Z = X + Y$ найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения и плотность распределения.

10.1. $p_X(x) = a(x+1)$, $-1 < x < 2; Y = X^2$.

10.2. $p_X(x) = a(2-x)$, $-1 < x < 2; Y = X^2$.

10.3. $p_X(x) = ax$, $-1 < x < 2; Y = X^2$.

10.4. $p_X(x) = a(3-x)$, $-2 < x < 3; Y = X^2$.

10.5. $p_X(x) = a(x+2)$,
$-2 < x < 3; Y = X^2$.

10.6. $p_X(x) = ax$,
$-2 < x < 3; Y = X^2$.

10.7. $p_X(x) = ax$,
$-3 < x < 1; Y = X^2$.

10.8. $p_X(x) = a, 0 < x < \pi$,
$Y = \sin X$.

10.9. $p_X(x) = a, \pi/2 < x < 3\pi/2$,
$Y = \sin X$.

10.10. $p_X(x) = a, -\pi < x < 0$,
$Y = \sin X$.

10.11. $p_X(x) = a, -\pi < x < \pi/2$,
$Y = \sin X$.

10.12. $p_X(x) = a, 0 < x < 3\pi/2$,
$Y = \sin X$.

10.13. $p_X(x) = a$,
$-2 < x < 1; Y = X^2 + 2X$.

10.14. $p_X(x) = a$,
$-1 < x < 2; Y = X^2 - 2X$.

10.15. $p_X(x) = a$,
$0 < x < 3\pi/2; Y = \cos X$.

10.16. $p_X(x) = ax$,
$-1 < x < 2; Y = X^2 - 1$.

10.17. $p_X(x) = a$,
$-3 < x < 0; Y = X^2 + 2X$.

10.18. $p_X(x) = a(x+2)$,
$-2 < x < 1; Y = X^2$.

10.19. $p_X(x) = ax$,
$-2 < x < 1; Y = X^2$.

10.20. $p_X(x) = ax$,
$-1 < x < 3; Y = X^2$.

10.21. $p_X(x) = a$,
$-3\pi/2 < x < \pi/2; Y = \cos X$.

10.22. $p_X(x) = a$,
$-\pi/2 < x < \pi/2; Y = \cos X$.

10.23. $p_X(x) = a$,
$\pi/2 < x < 3\pi/2; Y = \cos X$.

10.24. $p_X(x) = a$,
$-\pi/2 < x < \pi; Y = \cos X$.

10.25. $p_X(x) = a\sqrt{x}$;
$p_Y(y) = b$.

10.26. $p_X(x) = ax^2$;
$p_Y(y) = by$.

10.27. $p_X(x) = a\sqrt[3]{x}$;
$p_Y(y) = by$.

10.28. $p_X(x) = a$,
$p_Y(y) = by^2$.

10.29. $p_X(x) = ax^3$;
$p_Y(y) = by$.

10.30. $p_X(x) = ax$;
$p_Y(y) = by^2$.



## Приложение

### Таблица 1. Нормальная функция распределения

$$\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0.5000 | 5040 | 5080 | 5120 | 5159 | 5199 | 5239 | 5279 | 5319 | 5359 |
| 0,1 | 5398 | 5438 | 5478 | 5517 | 5557 | 5596 | 5636 | 5675 | 5714 | 5753 |
| 0,2 | 5793 | 5832 | 5871 | 5910 | 5948 | 5987 | 6026 | 6064 | 6103 | 6141 |
| 0,3 | 6179 | 6217 | 6255 | 6293 | 6331 | 6368 | 6406 | 6443 | 6480 | 6517 |
| 0,4 | 6554 | 6591 | 6628 | 6664 | 6700 | 6736 | 6772 | 6808 | 6844 | 6879 |
| 0,5 | 6915 | 6950 | 6985 | 7019 | 7054 | 7088 | 7123 | 7157 | 7190 | 7224 |
| 0,6 | 7257 | 7291 | 7324 | 7357 | 7389 | 7422 | 7454 | 7486 | 7518 | 7549 |
| 0.7 | 7580 | 7612 | 7642 | 7673 | 7704 | 7734 | 7764 | 7794 | 7823 | 7852 |
| 0.8 | 7881 | 7910 | 7939 | 7967 | 7995 | 8023 | 8051 | 8078 | 8106 | 8133 |
| 0,9 | 8159 | 8186 | 8212 | 8238 | 8264 | 8289 | 8315 | 8340 | 8365 | 8380 |
| 1,0 | 8413 | 8438 | 8461 | 8485 | 8508 | 8531 | 8554 | 8577 | 8599 | 8621 |
| 1,1 | 8643 | 8665 | 8686 | 8718 | 8729 | 8749 | 8770 | 8790 | 8810 | 8830 |
| 1.2 | 8849 | 8869 | 8888 | 8907 | 8925 | 8944 | 8962 | 8980 | 8997 | 9015 |
| 1,3 | 9032 | 9049 | 9066 | 9083 | 9099 | 9115 | 9131 | 9147 | 9162 | 9177 |
| 1,4 | 9192 | 9207 | 9222 | 9236 | 9251 | 9265 | 9279 | 9292 | 9306 | 9319 |
| 1.5 | 9332 | 9345 | 9357 | 9370 | 9387 | 9394 | 9406 | 9418 | 9430 | 9441 |
| 1,6 | 9452 | 9463 | 9474 | 9485 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1,7 | 9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 9641 | 9649 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1,9 | 9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9758 | 9762 | 9767 |
| 2,0 | 9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2,1 | 9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9873 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2,3 | 9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2,4 | 9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 9953 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2,7 | 9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9980 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 9981 | 9982 | 9983 | 9984 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 9986 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 |
| 3,1 | 9990 | 9991 | 9991 | 9991 | 9992 | 9992 | 9992 | 9992 | 9993 | 9993 |
| 3,2 | 9993 | 9993 | 9993 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9995 | 9995 |
| 3,3 | 9995 | 9995 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9997 |
| 3,4 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9998 | 9998 |

Таблица 2. Плотность вероятности нормального распределения

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0.1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3760 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0.4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0.5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0.6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0.7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1.1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1.2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1132 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1.6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1.7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2.0 | 0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2.6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3.1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3.2 | 0021 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3.3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |



Таблица 3. Распределение Пуассона

$$P(X = m) = (\lambda^m/m!)e^{-\lambda}$$

| $m \setminus \lambda$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.367879 | 0.135335 | 0.049787 | 0.018316 | 0.006738 |
| 1 | 367879 | 270671 | 149361 | 073263 | 033690 |
| 2 | 183940 | 270671 | 224042 | 146525 | 084224 |
| 3 | 061313 | 180447 | 224042 | 195367 | 140374 |
| 4 | 015328 | 090224 | 168031 | 195367 | 175467 |
| 5 | 003066 | 036089 | 100819 | 156293 | 175467 |
| 6 | 000511 | 012030 | 050409 | 104196 | 146223 |
| 7 | 000073 | 003437 | 021604 | 059540 | 104445 |
| 8 | 000009 | 000859 | 008102 | 029770 | 065278 |
| 9 | 000001 | 000191 | 002701 | 013231 | 036266 |
| 10 | | 000038 | 000810 | 005292 | 018133 |
| 11 | | 000007 | 000221 | 001925 | 008242 |
| 12 | | 000001 | 000055 | 000642 | 003434 |
| 13 | | | 000013 | 000197 | 001321 |
| 14 | | | 000003 | 000056 | 000472 |
| 15 | | | 000001 | 000015 | 000157 |
| 16 | | | | 000004 | 000049 |
| 17 | | | | 000001 | 000014 |
| 18 | | | | | 000004 |
| 19 | | | | | 000001 |

## Библиографический список

1. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.

2. **Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.** Теория вероятностей. М.: Наука. 1973.

3. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1972.

4. **Гурский Е.И.** Теория вероятностей с элементами математической статистики. М.: Высш. шк., 1971.

5. **Коваленко И.Н., Филиппова А.А.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1982.

6. **Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1991.

7. **Пугачев В.С.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.

8. **Румшиский Л.З.** Элементы теории вероятностей. М.: Наука, 1970.

9. Сборник задач по математике для втузов. специальные курсы / Под ред. А.В.Ефимова. М.: Наука, 1984.

10. **Чистяков В.П.** Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

11. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.

## Оглавление